CORSO DI ALGEBRA PROF BRINI
12.3.98

Università degli Studi di Bologna £ H,00

FACOLTA' DI SCIENZE STATISTICHE

Corso di Laurea in Scienze Statistiche ed Economiche

Materia di Tesi: Algebra

STATISTICHE DI PERMUTAZIONI E PAROLE

Tesi di Laurea di:

MATTEO MASINI

Relatore:

Chiar.mo Prof. ANDREA BRINI

Correlatore: Dott. FRANCESCO REGONATI

Sessione III

Anno Accademico 1995-96

INDICE

Introduzione

La Combinatoria Enumerativa (o, più tradizionalmente calcolo combinatorio) può essere definita come la branca della matematica che si occupa di sviluppare concetti, metodologie e risultati atti a risolvere problemi di enumerazione di varietà (FINITE) di oggetti caratterizzati da particolari proprietà.
Tradizionalmente, la combinatoria enumerativa è stata oggetto di presentazioni nelle quali l'enfasi era posta essenzialmente su problemi e relative "soluzioni", piuttosto che su concetti e metodologie. Questo comportava, ad esempio sul piano didattico, alcune gravi limitazioni, quali la necessità di "tenere a mente" una eccessiva varietà di situazioni tra loro *apparentemente* non correlate, ovvero la necessità di ricorrere con frequenza a ragionamenti "ad hoc".

L'idea di partenza della presente tesi è stata quella di fornire una presentazione sistematica e, speriamo, concettualmente trasparente dei concetti, delle metodologie e dei risultati della Combinatoria Enumerativa *elementare*. Col termine combinatoria enumerativa elementare intendiamo quella parte fondamentale della combinatoria enumerativa che, pur riferendosi a questioni assolutamente non banali, può essere presentata facendo riferimento esclusivamente a concetti e costruzioni (talvolta assai profondi) di carattere generale, senza tuttavia fare ricorso all'utilizzo di strumenti matematici provenienti da altre discipline, quali ad esempio l'Algebra Astratta e l'Analisi Infinitesimale. Per chiarire questo punto di vista vorremmo menzionare due esempi citati nella presente tesi:

I) *Il problema di Gergonne.* Dato un intero n consideriamo il segmento dei primi n interi positivi 1, 2, ..., n. Fissati altri due interi positivi k ed m, vogliamo calcolare quante sono le m-ple estraibili dal segmento 1, 2, ...,n tali che fra due elementi successivi vi siano almeno k interi mancanti (il significato probabilistico di questo problema dovrebbe essere evidente). Questo problema, che nella sua presentazione appare assolutamente non banale, può essere in realtà risolto (trovando una formula esplicita, vedi par. 3.2) utilizzando esclusivamente lo strumento di una "adeguata" concettualizzazione.

II) *Numeri di Stirling di II specie.* Il numero di Stirling di II specie $S(n,k)$ è definito come il numero delle partizioni di un insieme ad n elementi in k blocchi. La formula chiusa per il calcolo di $S(n,k)$ (confronta par. 5.3) coinvolge segni alterni e questo rende evidente il fatto che questa formula non possa essere dimostrata utilizzando esclusivamente argomenti basati su "costruzioni" (il segno MENO *non ha* immediato significato combinatorio).

Nella elaborazione della presente tesi abbiamo cercato di fare sistematico riferimento ad alcune idee guida.

La prima di esse è quella di modello o "rappresentazione concreta". Più precisamente, nell'affrontare svariati problemi enumerativi può essere assai utile fare riferimento a diversi modelli concreti che realizzano e "aiutano a visualizzare" contesti matematici astratti tra loro assai diversi. Fra i più utili vorremmo menzionare il "*modello dell'occupazione*", il "*modello delle parole*" (confronta capitolo 1) ed il "*modello delle file*" (confronta capitolo 2).

La seconda idea è quella di utilizzare, il più sistematicamente possibile, il "*ragionamento biiettivo*": da un punto di vista formale il ragionamento biiettivo consiste nel riconoscere che problemi enumerativi differenti hanno, in certi casi, insiemi di soluzioni in corrispondenza biiettiva. Ciò comporta che la soluzione di un problema fornisce automaticamente la soluzione di tutti i problemi riconosciuti ad esso biiettivamente equivalenti. L'idea di ragionamento biiettivo ammette alcune estensioni cruciali, la prima delle quali è quella di ragionamento per "*overcounting*" e, più in generale ancora, il "*principio del doppio conteggio*" (confronta paragrafo 1.4).

Dal punto di vista dei contenuti, il lavoro è organizzato come segue.

Il primo capitolo è dedicato ad una presentazione dei prerequisiti metodologici, in particolare i modelli di rappresentazione di funzioni tra insiemi finiti e dei principi dell'overcounting e del doppio conteggio. A titolo di esempio, questi vengono utilizzati per fornire una presentazione semplice di alcuni risultati classici relativi ad enumerazioni in ambito insiemistico.

Nel secondo capitolo viene discusso il concetto di multinsieme e vengono dati i primi risultati enumerativi ad esso relativi. Il concetto di multinsieme può essere informalmente presentato come il concetto di sottoinsieme "con ripetizione" (il significato statistico-probabilistico di questa nozione dovrebbe essere evidente).

Nel terzo capitolo si discute il problema della enumerazione di soluzioni intere non negative di una equazione in n variabili e si riconosce come questo contesto permetta di riunificare svariati problemi di interesse sia combinatorio che statistico-probabilistico.

Il quarto capitolo si riferisce ad una discussione del concetto di composizione di un insieme ed alle relazioni con la nozione di coefficiente multinomiale.

I capitoli fondamentali della tesi sono il quinto e il sesto dedicati rispettivamente allo studio di "*partizioni*" e "*permutazioni*" ed alle loro statistiche fondamentali. In particolare, si forniscono formule sia di *tipo ricorsivo* che di *forma chiusa* per i numeri di Stirling di II specie, i numeri di Bell e i coefficienti Faà di Bruno (partizioni) e per numeri di Stirling di prima specie e i coefficienti di Cauchy (permutazioni). Infine, sfruttando alcuni argomenti di algebra lineare, si fornisce una dimostrazione elementare del classico risultato che asserisce che le matrici (doppiamente infinite) dei numeri di Stirling di I e II specie sono l'una l'inversa dell'altra.

La tesi è corredata di una breve appendice di applicazioni.

Si fornisce una dimostrazione puramente combinatoria del fatto che i numeri di Stirling di II specie $S(n,k)$ sono le "costanti di connessione" tra la base dei "polinomi potenza" e la base dei "polinomi fattoriale decrescente".

Infine si fornisce un algoritmo (scritto in linguaggio PASCAL) per la generazione di tutte le permutazioni di un n-insieme.

Capitolo 1

Funzioni tra insiemi finiti

CAPITOLO 1 - FUNZIONI TRA INSIEMI FINITI

Dati due insiemi finiti $D = \hat{n} = \{1, 2, \ldots, n\}$ e $C = \{c_1, c_2, \ldots, c_m\}$, detti rispettivamente DOMINIO e CODOMINIO, si definisce *funzione* da D in C una legge che associa ad ogni elemento del dominio un elemento del codominio.

Usualmente una funzione di dominio D e codominio C si denota con il simbolo:

$$f: D \to C$$

Una funzione $f: D \to C$ può essere definita, ovvero "descritta", specificando i valori $f(i)$ assunti dalla funzione su ciascun elemento $i \in D$ del dominio.

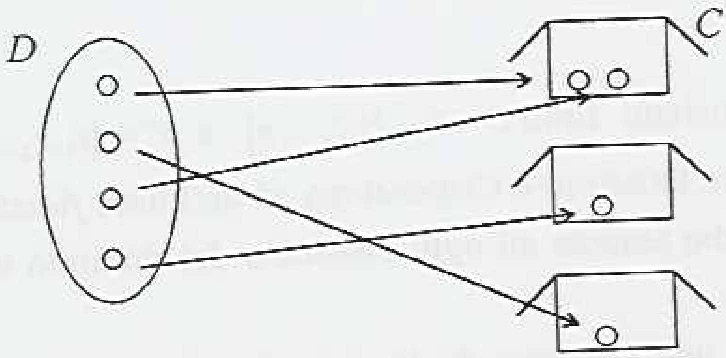
Determinate proprietà ed operazioni coinvolgenti funzioni possono essere talvolta di difficile visualizzazione, quando ci si limiti ad utilizzare le notazioni precedentemente indicate. In determinati casi è utile utilizzare dei "modelli di rappresentazione concreta" per le funzioni.

Nei problemi di enumerazione combinatoria, ai quali questa tesi principalmente si riferisce, risultano particolarmente utili i cosiddetti modelli *dell'occupazione* e *delle parole*.

1.1 MODELLO DELL'OCCUPAZIONE

Il dominio D è rappresentato da un insieme di biglie (distinguibili) che vengono distribuite in un insieme di scatole (distinguibili), che rappresentano il codominio C:

(⊗)

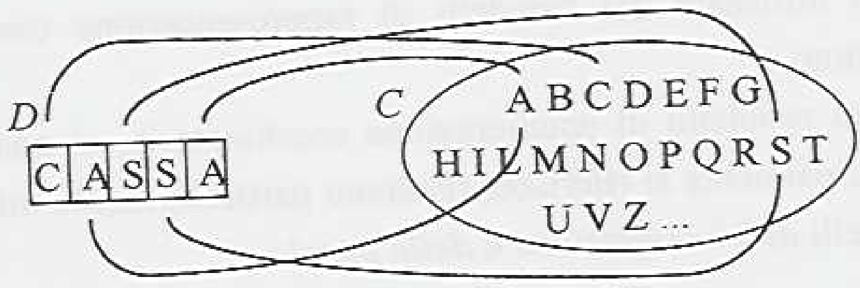


La distribuzione (⊗) rappresenta univocamente una funzione f dall'insieme D all'insieme C e, viceversa, la distribuzione (⊗) è univocamente rappresentata da detta funzione f.

1.2 Modello delle parole

Il dominio D è rappresentato dall'insieme delle caselle di una parola nelle quali vengono scritte le lettere che rappresentano il codominio C.

(⊗⊗)



La parola (⊗⊗) rappresenta una funzione f dall'insieme D all'insieme C e, viceversa, la parola (⊗⊗) è univocamente rappresentata dalla funzione f.

PRIMI ESEMPI

Ricordiamo che una funzione f si dice:

suriettiva: se per ogni $a \in C$ esiste almeno un $i \in D$ tale che $f(i)=a$;

iniettiva: se $i \neq j \Rightarrow f(i) \neq f(j)$; ovvero se $f(i) = f(j) \Rightarrow i = j$;

biiettiva: se è suriettiva ed iniettiva.

Vediamo ora come si visualizzano le precedenti proprietà utilizzando il modello dell'occupazione e il modello delle parole, rispettivamente:

f *è suriettiva:* ogni scatola contiene almeno una biglia, ovvero nella parola appaiono tutte le lettere dell'alfabeto;

f *è iniettiva:* ogni scatola contiene al più una biglia, ovvero la parola è formata da lettere diverse tra loro, cioè non ci sono doppie;

f *è biiettiva:* ogni scatola contiene una ed una sola sola biglia e tutte le scatole sono occupate, ovvero nella parola appaiono tutte le lettere, ma senza ripetizioni.

1.3 IL NUMERO DI FUNZIONI TRA INSIEMI FINITI

Vogliamo ora contare il numero delle funzioni qualsiasi da un fissato insieme finito D ad un fissato insieme finito C. Notiamo che detto numero dipenderà esclusivamente dalle cardinalità degli insiemi D e C, rispettivamente.

APPLICAZIONE 1.1 - *il numero delle funzioni da un insieme di n elementi ad un insieme di m elementi è*

$$m^n.$$

Dim.: Utilizziamo il modello dell'occupazione.
Il dominio è rappresentato da n biglie (numerate 1, 2, ..., n) ed il codominio è rappresentato da m scatole (numerate 1, 2, ..., m). Dobbiamo determinare il numero di modi di distribuire le n biglie nelle m scatole.
Prendiamo in considerazione la prima biglia: essa potrà essere distribuita in m modi diversi, quante sono le scatole a disposizione; ovviamente anche la seconda biglia potrà essere distribuita in m modi diversi, e così via.
Quindi il numero delle distribuzioni in oggetto è:

$$\underbrace{m \times m \times \ldots \times m}_{\text{n volte}} = m^n$$

Utilizziamo ora il modello delle parole.
Il dominio è rappresentato da n caselle (numerate 1, 2, ..., n) di una parola ed il codominio è rappresentato da m lettere (numerate 1, 2, ..., m). Dobbiamo determinare il numero di parole lunghe n che si possono scrivere avendo a disposizione m lettere.

Prendiamo in considerazione la prima casella della parola: in essa si potrà scrivere una qualunque delle m lettere, essendo tutte disponibili; ovviamente anche per la seconda casella le lettere a disposizione sono m, e così via.

Quindi il numero di parole in oggetto è:

$$\underbrace{m \times m \times \ldots \times m}_{\text{n volte}} = m^n$$

□

Supponiamo, ora, di voler contare il numero di funzioni, da un fissato insieme finito D ad un fissato insieme finito C, soggette al vincolo di essere *iniettive*.

APPLICAZIONE 1.2 - *il numero di funzioni iniettive da un insieme di n elementi in un insieme di m elementi è*

$$(m)_n = m\,(m-1)\,(m-2)\,\ldots\,(m-n+1).$$

L' intero $(m)_n$ si definisce fattoriale decrescente da m ad n.

Dim.: Utilizziamo il modello dell'occupazione.
Il dominio è rappresentato da n biglie (numerate 1, 2, ..., n) ed il codominio è rappresentato da m scatole (numerate 1, 2, ..., m). Dobbiamo determinare il numero di modi di distribuire le n biglie nelle m scatole in modo tale che in ogni scatola ci sia al più una biglia.

Prendiamo in considerazione la prima biglia: essa potrà essere distribuita in m modi diversi, quante sono le scatole a disposizione; la seconda biglia potrà essere distribuita in $m-1$ modi diversi, essendo una già occupata; la terza potrà essere distribuita in $m-2$ modi diversi, e così via.

Quindi il numero delle distribuzioni in oggetto è:

$$m\,(m-1)\,(m-2)\,\ldots\,(m-n+1)=(m)_n$$

Utilizziamo ora il modello delle parole.

Il dominio è rappresentato da n caselle (numerate 1, 2, ..., n) di una parola ed il codominio è rappresentato da m lettere (numerate 1, 2, ..., m). Dobbiamo determinare il numero di parole lunghe n che si possono scrivere avendo a disposizione m lettere e senza poter ripetere nessuna lettera nella parola.

Prendiamo in considerazione la prima casella della parola: in essa si potrà scrivere una qualunque delle m lettere, essendo tutte disponibili; per la seconda casella le lettere a disposizione sono $m-1$, per la terza $m-2$, e così via.

Quindi il numero di parole in oggetto è:

$$m\,(m-1)\,(m-2)\,\ldots\,(m-n+1)=(m)_n$$

□

1.4 Alcuni principi generali

1 - Principio di somma

Siano $A_1, A_2, \ldots, A_p$ insiemi finiti a due a due disgiunti; allora la somma delle loro cardinalità è uguale alla cardinalità della loro unione. In simboli:

$$\sum_{i=1}^{p}|A_i|=\left|\bigcup_{i=1}^{p}A_i\right|$$

2 - Principio del doppio conteggio

Siano A e B due insiemi finiti e sia $R \subseteq A \times B$ una relazione tra A e B. Possiamo calcolare la cardinalità di R, ossia il numero delle coppie che formano detta relazione, in due modi:

a) - Possiamo fissare l'attenzione sugli elementi dell'insieme A e contare per ogni $a \in A$ il numero delle coppie $(a, b) \in R$ e sommare rispetto al variare di a in A.
In simboli:

$$|R| = \sum_{a \in A} \left| \{ b \in B; (a,b) \in R \} \right|$$

b) - Possiamo fissare l'attenzione sugli elementi dell'insieme B e contare per ogni $b \in B$ il numero delle coppie $(a, b) \in R$ e sommare rispetto al variare di b in B.
In simboli:

$$|R| = \sum_{b \in B} \left| \{ a \in A; (a,b) \in R \} \right|$$

dunque:

$$\sum_{a \in A} \left| \{ b \in B; (a,b) \in R \} \right| = \sum_{b \in B} \left| \{ a \in A; (a,b) \in R \} \right|$$

Per una applicazione tipica si veda l'appendice A.

3 - Un caso particolare: La regola del pastore (o principio dell'overcounting)

Se R è una funzione *k a 1* da A a B, cioè tale che ogni elemento di B abbia esattamente k preimmagini, allora il principio del doppio conteggio porge l'identità:

$$|A| = k \cdot |B|$$

ossia:

$$|B| = \frac{|A|}{k}$$

Questo caso particolare è detto *regola del pastore*. Se definiamo A come l'insieme di tutte le zampe delle pecore di un gregge e B l'insieme delle pecore di quel gregge (ogni pecora ha ovviamente quattro zampe), vediamo che per ottenere il numero di pecore possiamo contare le zampe e dividere per quattro.

❑

DEFINIZIONE 1.3 - $\binom{n}{k}$ *è il numero di sottoinsiemi di cardinalità k di un insieme di cardinalità n.*

Proviamo, applicando il principio del pastore, che:

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{n(n-1)\ldots1} = \frac{(n)_k}{k!}$$

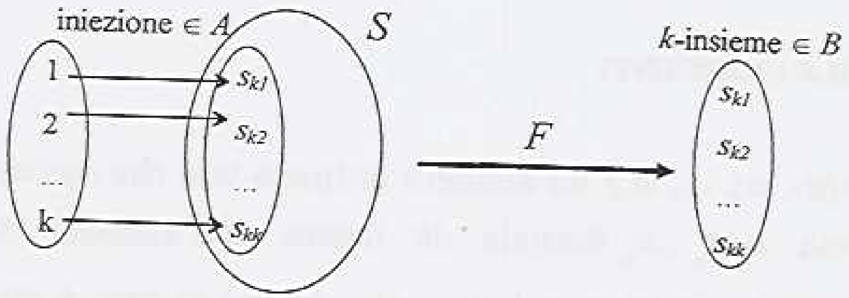
Dobbiamo calcolare il numero di k-sottoinsiemi di un n-insieme S.

Sia $F:A \rightarrow B$ una funzione tale che:

A: insieme delle funzioni iniettive da $\hat{k}$ a S;

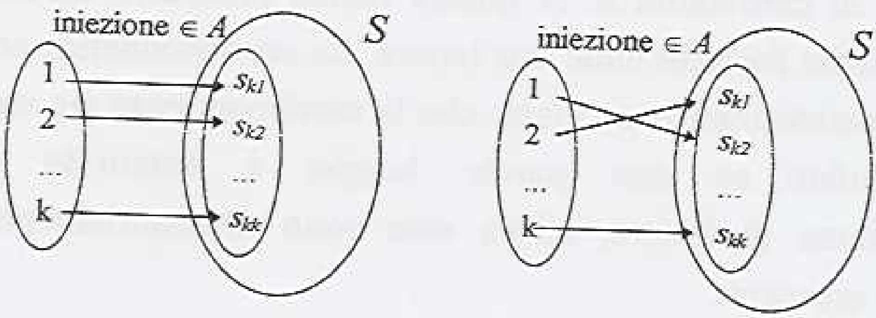
B: insieme formato da tutti i k-sottoinsiemi di S.

La funzione F associa ad ogni funzione iniettiva di A la sua immagine:



Quindi, ad ogni funzione iniettiva di A associamo un k-sottoinsieme di S, cioè un elemento di B. Viceversa, per ogni elemento di B esistono $k!$ funzioni iniettive di A che hanno detto k-sottoinsieme di S come immagine.

Ad esempio:



queste due funzioni iniettive, pur essendo differenti, danno la stessa immagine in B tramite F.

È chiaro che la funzione F è una funzione $k!$ a 1 e, quindi, il numero di k-sottoinsiemi di S si calcola dividendo il totale delle funzioni iniettive da $\hat{k}$ a S per il numero di funzioni iniettive corrispondenti ad ogni k-sottoinsieme di S, e cioè $k!$. Perciò:

$$\binom{n}{k} \stackrel{def}{=} |B| = \frac{|A|}{k!} = \frac{(n)_k}{k!}$$

□

1.5 Parole crescenti

Sia $A=\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ un alfabeto ordinato tale che $a_1<a_2< \ldots < a_n$. Una parola $a_{i_1}a_{i_2}\ldots a_{i_k}$ formata da lettere dell'alfabeto A è detta *crescente* se e solo se ogni lettera che appare in essa è strettamente maggiore della lettera che la precede.

Esiste una biiezione tra l'insieme delle parole crescenti di lunghezza k formate da un alfabeto di cardinalità n e l'insieme dei k-sottoinsiemi dell'n-insieme delle lettere dell'alfabeto.
Si pensi ad una parola crescente di lunghezza k formata da un alfabeto di cardinalità n. A questa parola possiamo associare il k-sottoinsieme formato dalle sue lettere. La corrispondenza così creata è chiaramente iniettiva. Il fatto che la corrispondenza sia suriettiva è ovvio. Infatti, se due parole lunghe k hanno lo stesso k-sottoinsieme di lettere, allora esse sono necessariamente uguali, essendo crescenti.

Da quanto detto deriva che le parole crescenti di lunghezza k su un alfabeto di n lettere sono esattamente

$$\binom{n}{k}.$$

1.6 Funzioni crescenti

Supponiamo che due insiemi A e B siano *totalmente ordinati*. Una funzione f da A a B si dice crescente se

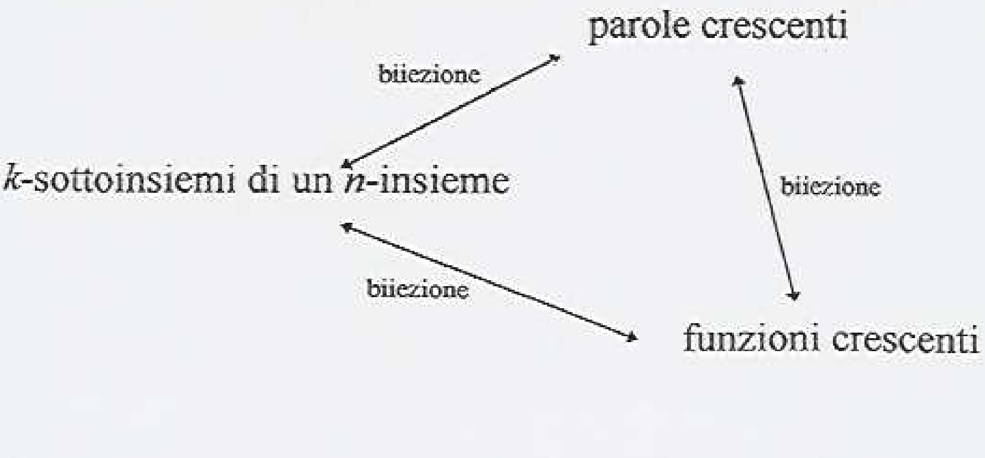
$$a < b \Rightarrow f(a) < f(b) \qquad \text{per ogni } a, b \in A.$$

Esiste un'ovvia biiezione tra le funzioni crescenti e le parole crescenti.
Data una funzione $f: A \to B$, con A e B totalmente ordinati e $|A| = k$ e $|B| = n$, possiamo ricorrere al modello delle parole per rappresentarla. Una parola è crescente se e solo se l'elemento nella casella i-esima è maggiore dell'elemento nella casella $(i-1)$-esima, cioè $f(i)>f(i-1)$ per ogni $i=2, 3, \ldots, k$.

Quindi il numero di funzioni crescenti da un insieme A ad un insieme B totalmente ordinati corrisponde al numero delle parole crescenti lunghe k prese da un alfabeto di cardinalità n e cioè è dato da

$$\binom{n}{k}.$$

In sintesi:



Capitolo 2

Multinsiemi

CAPITOLO 2 - MULTINSIEMI

2.1 Il problema delle file

Supponiamo di voler distribuire n biglie distinguibili in m file distinguibili (in modo che si noti l'ordine); questo significa, ad esempio, che se in due distribuzioni le biglie a e b appaiono nella fila j negli ordini ab e ba, rispettivamente, *dette distribuzioni sono da considerarsi differenti*.

PROPOSIZIONE 2.1 - *Il numero di modi di distribuire n biglie in m file è*

$$(m + n - 1)_n \,.$$

Dim.: sia L_n l'insieme delle distribuzioni di n biglie in m file, $n \in \mathcal{N}$. Ovviamente noi non conosciamo $|L_n|$ ma vedremo immediatamente come servirci di questa notazione. Di fatto, deriveremo una *relazione di ricorrenza lineare* sui valori $|L_n|$, con $n \in \mathcal{N}$.

La distribuzione seguente sia una di quelle dell'insieme L_{n-1}:

i_1	i_2	...	i_m

dove i_j è il numero di biglie nella fila j-esima, $j=1, 2 ..., m$, essendo $\sum_{j=1}^{m} i_j = n-1$ (ovviamente, possono aversi file "vuote", cioè alcuni dei coefficienti i_j *possono essere zero*).

Notiamo che assegnata una distribuzione delle prime n-1 biglie in m file ed indicato con i_j il numero di biglie nella fila j-esima (essendo $\sum_{j=1}^{m} i_j = n-1$) possiamo ottenere una distribuzione di tutte le n biglie inserendo la n-esima biglia in una qualsiasi delle m file precedentemente formate. Ovviamente la n-esima biglia può essere inserita nella fila 1-esima in i_1+1 maniere differenti (cioè al 1° posto, tra la 1ª e la 2ª,..., all'ultimo posto), nella fila 2-esima in i_2+1 maniere, e così via; ne consegue che il numero di modi complessivo è dato dall'intero:

$$(i_1+1) + (i_2+1) + \ldots + (i_m+1) = m + (n-1).$$

Perciò, poiché ogni distribuzione di n biglie può essere ottenuta usando il processo precedentemente descritto da una e una sola distribuzione delle prime n-1 biglie, sussiste la relazione:

$$|L_n| = (m + n - 1)\,|L_{n-1}| \qquad \forall n \in Z^+.$$

Iterando la precedente ricorsione otteniamo:

$$\begin{aligned} |L_n| &= (m + n - 1)\,|L_{n-1}| \\ &= (m + n - 1)(m + n - 2)\,|L_{n-2}| \\ &= (m + n - 1)(m + n - 2)\ldots(m+1)|L_1| \\ &= (m + n - 1)(m + n - 2)\ldots(m+1)m \\ &= (m + n - 1)_n \end{aligned}$$

❑

2.2 Fattoriale crescente

L'intero naturale

$$m(m+1)\dots(m+n-2)(m+n-1)$$

viene usualmente indicato col simbolo:

$$\langle m \rangle_n$$

e chiamato *fattoriale crescente* da m a n.

2.3 Multinsiemi

Formalmente, dato un insieme D, si definisce *multinsieme* su D una funzione M da D in $\mathcal{N}$, in cui l'immagine $M(a)$ dell'elemento a di D si chiama *molteplicità* di a.

Si definisce *cardinalità del multinsieme* M l'intero naturale

$$k = \sum_{a \in D} M(a)$$

e si dice che M è un k-multinsieme di D.

Intuitivamente, la nozione di multinsieme formalizza l'idea di sottoinsieme *con ripetizione*. In termini probabilistici elementari il concetto di multinsieme rappresenta il processo di *campionamento con rimessa*, come d'altra parte il concetto di sottoinsieme rappresenta il processo di *campionamento senza rimessa*.

2.4 Coefficienti Multinsiemistici

Dati due interi naturali n e k il *coefficiente multinsiemistico*

$$\left\langle {n \atop k} \right\rangle$$

è, per definizione, il numero dei k-multinsiemi su un insieme di cardinalità n.

PROPOSIZIONE 2.2

$$\left\langle {n \atop k} \right\rangle = \frac{\langle n \rangle_k}{k!}.$$

Dim.: La dimostrazione si basa sull'utilizzo del principio del pastore e sulla proposizione 2.1 relativa al problema di enumerazione in file.

Supponiamo d'avere k biglie da disporre in n file $1, 2, \ldots, n$. Notiamo che se consideriamo l'insieme $D=\{1, 2, \ldots, n\}$, ogni distribuzione di k biglie sulle n file individua un k-multinsieme M su D, cioè una funzione $M{:}D \to \mathbb{N}$, ponendo $M(j)=$ *numero di biglie nella j-esima fila*.

Viceversa, dato un k-multinsieme M su D, ci sono $k!$ distribuzioni di k biglie sulle n file che lo individuano.

Ci interessa solo sapere, dunque, *quante biglie* ci sono nella tal fila e *non quali* sono. Si noti che questo processo corrisponde a rendere indistinguibili le biglie.

Riassumendo è quindi data una funzione $k!$ a 1 che associa ad ogni distribuzione di k biglie in n file il k-multinsieme M in cui si è posto $M(j)=$ numero di biglie nella j-esima fila.

Quindi, per la regola del pastore, risulta:

$$\left\langle {n \atop k} \right\rangle = \frac{(n+k-1)_k}{k!} = \frac{\langle n \rangle_k}{k!}$$

□

Si noti il parallelismo:

$$\binom{n}{k} \overset{def}{=} \text{numerosità dei } k\text{ - sottoinsiemi di un } n\text{ - insieme} \overset{Th}{=} \frac{(n)_k}{k!}$$

$$\left\langle {n \atop k} \right\rangle \overset{def}{=} \text{numerosità dei } k\text{ - multinsiemi di un } n\text{ - insieme} \overset{Th}{=} \frac{\langle n \rangle_k}{k!}$$

Si noti, inoltre, che:

$$\left\langle {n \atop k} \right\rangle = \frac{\langle n \rangle_k}{k!} = \frac{(n+k-1)_k}{k!} = \binom{n+k-1}{k}.$$

2.5 Parole non decrescenti

Sia $A=\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ un alfabeto ordinato tale che $a_1 < a_2 < \dots < a_n$. La parola $a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_k}$ formata da lettere dell'alfabeto A è detta *non decrescente* se e solo se ogni lettera che appare in essa è maggiore o uguale alla lettera che la precede.

Esiste una biiezione tra l'insieme delle parole non decrescenti di lunghezza k formate da un alfabeto di cardinalità n e l'insieme dei k-multinsiemi dell'n-insieme delle lettere dell'alfabeto.

Si pensi ad una parola non decrescente di lunghezza k formata da un alfabeto di cardinalità n. A questa parola possiamo associare il k-multinsieme formato dalle sue lettere (con relative molteplicità). La corrispondenza così creata è chiaramente iniettiva. Il fatto che la corrispondenza sia suriettiva è ovvio. Infatti, se due parole non decrescenti lunghe k hanno lo stesso k-multinsieme di lettere, allora esse sono necessariamente uguali, essendo non decrescenti.

Da quanto detto deriva che le parole non decrescenti di lunghezza k su un alfabeto di n lettere sono esattamente

$$\left\langle {n \atop k} \right\rangle.$$

2.6 Funzioni non decrescenti

Supponiamo che due insiemi A e B siano totalmente ordinati. Una funzione f da A a B si dice non decrescente se

$$a < b \Rightarrow f(a) \leq f(b)$$

per ogni $a, b \in A$.

Esiste un'ovvia biiezione tra le funzioni non decrescenti e le parole non decrescenti.
Data una funzione $f\colon A \to B$, con A e B totalmente ordinati e $|A| = k$ e $|B| = n$, possiamo ricorrere al modello delle parole per rappresentarla.
Ricordiamo che una parola è non decrescente se l'elemento nella casella i-esima è maggiore o uguale all'elemento nella casella $(i-1)$-esima. Questo significa che $f(i) \geq f(i-1)$, $i=2, 3, \ldots, k$.
Quindi il numero di funzioni non decrescenti da un insieme A ad un insieme B totalmente ordinati corrisponde al numero delle parole non

decrescenti lunghe k prese da un alfabeto di cardinalità n e cioè è dato dall'intero

$$\left\langle {n \atop k} \right\rangle.$$

In sintesi:

$$\begin{tikzcd}
 & \text{parole non decrescenti} \arrow[dd, leftrightarrow, "\text{biiezione}"] \\
k\text{-multinsiemi di un } n\text{-insieme} \arrow[ur, leftrightarrow, "\text{biiezione}"] \arrow[dr, leftrightarrow, "\text{biiezione}"'] & \\
 & \text{funzioni non decrescenti}
\end{tikzcd}$$

Capitolo 3

Equazioni a soluzioni non negative

CAPITOLO 3 - EQUAZIONI A SOLUZIONI NON NEGATIVE

3.1 EQUAZIONI A SOLUZIONI NON NEGATIVE

Sia:

$$x_1+x_2+\ldots+x_n=k \qquad (1)$$

un'equazione in n variabili $x_1, x_2, \ldots, x_n$, essendo $k\in\mathcal{N}$.

a) Siamo interessati a studiare le *soluzioni intere naturali* dell'equazione (1), vale a dire le n-ple ordinate

$$\left(\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_n\right) \in \mathcal{N}^n$$

tali che

$$\underline{x}_1 + \underline{x}_2 + \ldots + \underline{x}_n = k\,.$$

Esiste un'ovvia biiezione tra l'insieme dei k-multinsiemi di $\hat{n}$ e l'insieme delle soluzioni intere naturali dell'equazione (1). È sufficiente leggere ogni $\underline{x}_i$ come la molteplicità dell'elemento i di $\hat{n}$. Da questa biiezione deriva che il numero delle soluzioni intere naturali dell'equazione (1) è dato da

$$\left\langle {n \atop k} \right\rangle.$$

b) Possiamo adesso considerare la famiglia delle soluzioni intere naturali

$$\left(\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_n\right) \in \mathcal{N}^n$$

dell'equazione (1), soggette, però, all'ulteriore vincolo che

$$\underline{x}_i \in \{0,1\} \; \forall i. \qquad (2)$$

Esiste un'ovvia biiezione tra l'insieme dei k-sottoinsiemi di $\hat{n}$ e l'insieme delle soluzioni intere naturali della equazione (1) soggette al vincolo (2). È sufficiente leggere ogni $\underline{x}_i$ come "presenza" dell'elemento i nel sottoinsieme se $\underline{x}_i$=1, e come "assenza" dell'elemento i nel sottoinsieme se $\underline{x}_i$=0. Da questa biiezione deriva che il numero delle soluzioni dell'equazione (1), soggette al vincolo (2), è dato da

$$\binom{n}{k}.$$

c) Consideriamo, adesso, la famiglia delle soluzioni intere naturali

$$\left(\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_n\right) \in \mathcal{N}^n$$

dell'equazione (1) soggette al vincolo che

$$x_i \geq a_i \; con \; a_i \in \mathcal{N}. \qquad (3)$$

Le soluzioni dell'equazione (1) soggette al vincolo (3) sono:

$$\binom{n+k-1-a_1-a_2-\ldots-a_n}{n-1}$$

Il vincolo sui termini $\underline{x}_i$ delle soluzioni è un vincolo di minimo, ossia essi devono essere maggiori o uguali ad un certo valore fissato $a_i \in \mathbb{N}$. Così impostato il problema sembra complesso; per ottenere qualcosa a noi familiare è sufficiente operare una sostituzione di variabili nell'equazione (1):
ponendo $x_i - a_i = z_i$ l'equazione (1) è equivalente all'equazione:

$$z_1+ z_2+ \ldots + z_n=k - a_1 - a_2 - \ldots - a_n \qquad (4)$$

Ora la condizione $x_i \geq a_i$ per l'equazione (1) equivale alla condizione banale $z_i \geq 0$ per l'equazione (4) e quindi le soluzioni della (4) sono:

$$\left\langle \begin{matrix} n \\ k-a_1-a_2-\ldots-a_n \end{matrix} \right\rangle = \binom{n+k-a_1-a_2-\ldots-a_n-1}{k-a_1-a_2-\ldots-a_n}.$$

Quanto visto sopra, può essere letto, e tradotto, usando il modello dell'occupazione.

Consideriamo, in primo luogo, k biglie *indistinguibili* e n scatole distinguibili. L'indistinguibilità delle biglie comporta il fatto che a noi non interessa sapere *quali* biglie cadono in una data scatola, ma solo *quante*.
Data l'equazione

$$x_1+x_2+ \ldots +x_n=k$$

in n variabili e con $k \in \mathbb{N}$, diciamo che x_i rappresenta la scatola i-esima, e, data una soluzione intera naturale

$$\left(\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_n\right) \in \mathcal{N}^n,$$

di tale equazione, diciamo che $\underline{x}_i$ rappresenta il numero di biglie nella i-esima scatola.

Vediamo, quindi, caso per caso, come si possono tradurre i tre problemi visti.

a) STATISTICA DI BOSE - EINSTEIN: Il numero di modi di distribuire k biglie *indistinguibili* in n scatole *distinguibili* è:

$$\left\langle {n \atop k} \right\rangle = \binom{n+k-1}{k}.$$

La dimostrazione è immediata vista la corrispondenza biiettiva che sussiste tra le distribuzioni in esame e le soluzioni intere naturali $\left(\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_n\right) \in \mathcal{N}^n$ dell'equazione in n variabili

$$x_1+x_2+ \ldots +x_n=k \qquad \text{con } k\in\mathbb{N}.$$

Notiamo che se le biglie fossero *distinguibili* il problema avrebbe per soluzione l'intero m^n.

b) STATISTICA DI FERMI - DIRAC: Il numero di modi di distribuire k biglie *indistinguibili* in n scatole *distinguibili* così che in ogni scatola ci sia al massimo una biglia è:

$$\binom{n}{k}.$$

La dimostrazione è immediata vista la corrispondenza biiettiva che sussiste tra le distribuzioni in esame e le soluzioni intere naturali $(\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_n) \in \mathcal{N}^n$ dell'equazione in n variabili

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = k \qquad \text{con } k \in \mathbb{N},$$

soggette alla condizione (2).
Infatti, come prima, x_i rappresenta la scatola i-esima e $\underline{x}_i = 1$ indica la "presenza", in tale scatola, di una biglia mentre $\underline{x}_i = 0$ ne indica "l'assenza".

Notiamo che se le biglie fossero *distinguibili* il problema avrebbe per soluzione l'intero $(m)_n$.

c) Il numero di modi di distribuire k biglie *indistinguibili* in n scatole *distinguibili* così che in ogni scatola x_i ci siano almeno $a_i \in \mathbb{N}$ biglie è:

$$\left\langle {n \atop k - a_1 - a_2 - \ldots - a_n} \right\rangle.$$

Per la dimostrazione è sufficiente, ancora una volta, notare la corrispondenza biiettiva tra queste distribuzioni e le soluzioni intere naturali $(\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_n) \in \mathcal{N}^n$ dell'equazione in n variabili

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = k \qquad \text{con } k \in \mathbb{N},$$

soggette alla condizione (3).

Si può, però, procedere in modo diverso.

Considerando la prima scatola x_1 in essa ci devono essere almeno a_1 biglie; essendo queste indistinguibili, possiamo pensare di toglierne a_1 dalle k visto che queste saranno sicuramente nella prima scatola. Il ragionamento vale anche per le altre scatole. Tolte, quindi, tutte le biglie che, per vincolo, devono essere in ogni scatola, ci ritroviamo ad averne a disposizione $k - a_1 - a_2 - \ldots - a_n$, sempre indistinguibili, da distribuire in n scatole. Con queste si può usare la statistica di Bose-Einstein e si ottiene:

$$\left\langle \begin{matrix} n \\ k - a_1 - a_2 - \ldots - a_n \end{matrix} \right\rangle .$$

Si noti che questo ragionamento fornisce anche una dimostrazione alternativa dell'asserto al punto c).

3.2 Il problema di Gergonne.

Si determini il numero di k-insiemi S di $\hat{n}$ tali che fra due qualsiasi elementi di S ci siano almeno m elementi di $\hat{n}$ non appartenenti a S.

Soluzione:

Dato un k-sottoinsieme S di $\hat{n}$ scriveremo:

$$S = \{s_1, s_2, \ldots, s_k\}$$

ove si suppone che $s_1 < s_2 < \ldots < s_k$, $s_i \in \hat{n}$.

Chiaramente ogni k-sottoinsieme S determina la sequenza di interi:

$$x_1 \overset{def}{=} s_1 - 0 - 1$$
$$x_2 \overset{def}{=} s_2 - s_1 - 1$$
$$\dots$$
$$x_k \overset{def}{=} s_k - s_{k-1} - 1$$
$$x_{k+1} \overset{def}{=} n - s_k$$

con

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{k+1} = n - k \qquad (*)$$

e, viceversa, ogni sequenza $x_1, x_2, \dots, x_{k+1}$ soddisfacente a (*) determina un k-sottoinsieme di $\hat{n}$.

Dato un sottoinsieme S

$$S = \{s_1, s_2, \dots, s_k\}$$

esso sarà del tipo richiesto dal problema di Gergonne se e solo se

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq m,\ \dots,\ x_k \geq m,\ x_{k+1} \geq 0.$$

La soluzione del problema di Gergonne è perciò fornita dal numero delle soluzioni intere non negative dell'equazione

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{k+1} = n - k$$

con vincoli

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq m,\ \dots,\ x_k \geq m,\ x_{k+1} \geq 0$$

Da quanto visto in precedenza si ottiene:

$$\left\langle \begin{matrix} k+1 \\ (n-k)-m(k-1) \end{matrix} \right\rangle = \binom{k+1+n-k-m(k-1)-1}{n-k-m(k-1)} =$$
$$= \binom{n-m(k-1)}{n-k-m(k-1)} = \binom{n-mk+m}{k}$$

□

UN ESEMPIO CONCRETO (ATTENZIONE!) $m=1$!!

Si supponga d'avere un mazzo di 13 carte da Poker. Si vuole calcolare la probabilità che prese quattro carte a caso tra queste non ve ne siano due consecutive.

Si tratta di contare il numero di sottoinsiemi di 4 ($=k$) carte prese dal mazzo di 13 ($=n$) tali che la distanza tra due carte qualsiasi non sia mai inferiore a 2 ($=m$).
Il problema di Gergonne ha già fornito la soluzione a questo problema e cioè:

$$\binom{n-mk+m}{k} = \binom{13-2\cdot 4+2}{4} = \binom{7}{4} = 35$$

Quindi il numero di sottoinsiemi di 4 carte presi dal mazzo di 13 senza carte consecutive è 35.
Il totale di sottoinsiemi di 4 carte, senza vincoli, è

$$\binom{n}{k} = \binom{13}{4} = 715$$

La probabilità di avere 4 carte non consecutive è quindi:

$$\frac{35}{715}\cdot 100 = 4{,}9\% .$$

Capitolo 4

Coefficienti Multinomiali

CAPITOLO 4 - COEFFICIENTI MULTINOMIALI

4.1 Composizione di un insieme

Dato un insieme finito D si dice *composizione dell'insieme D in m parti* una m-pla *ordinata*

$$(A_1, A_2, \ldots, A_m)$$

ove $A_i \subseteq D,\ \forall i$
ed inoltre:

$$\text{i) } \bigcup_{i=1}^{m} A_i = D$$
$$\text{ii) } i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \varnothing.$$

Gli elementi A_i si dicono *blocchi* della composizione.

Si noti che ({a, c}, ∅, {d, e}, {f}) è una composizione di {a, b, c, d, e, f}, in quattro parti, *diversa* dalla composizione ({a, c}, {d, e}, ∅, {f}).

Data una composizione

$$X=(A_1, A_2, \ldots, A_m)$$

sia

$$h_i = |A_i|, \quad \text{per } i=1, 2, \ldots, m.$$

Si definisce tipo della composizione l'm-pla ordinata

$$(h_1, h_2, \ldots, h_m).$$

Ogni funzione f da un insieme finito D all'insieme $\hat{m}$ identifica una composizione dell'insieme D in m parti ponendo:

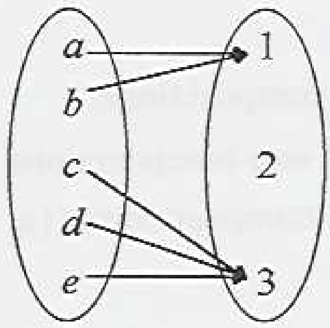
$$(A_1, A_2, \ldots, A_m)$$

dove

$$A_i = \{f^{-1}(i); i \in C\}.$$

Esempio:
$m = 3$, $D = \{a, b, c, d, e\}$

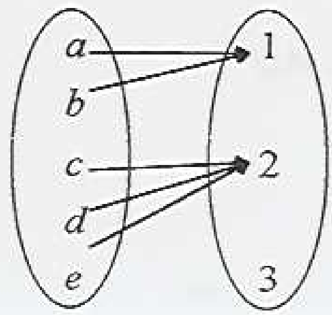
funzione



composizione

$(\{a, b\}, \emptyset, \{c, d, e\})$

funzione



composizione

$(\{a, b\}, \{c, d, e\}, \emptyset)$

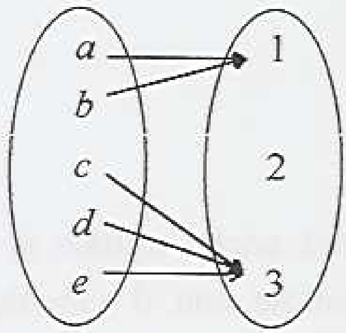
Viceversa, data una composizione dell'insieme D in m parti, ad essa resta associata una e una sola funzione f da D a $\hat{m}$.

Esempio:

$m = 3, D = \{a, b, c, d, e\}$

composizione funzione

$(\{a, b\}, \varnothing, \{c, d, e\})$



Dal momento che esiste una biiezione tra funzioni e composizioni esisterà una biiezione anche tra composizioni in k parti di un insieme di cardinalità n e distribuzioni di n biglie in k scatole.

4.2 Coefficiente multinomiale

Dato un intero naturale n e una m-pla ordinata $(h_1, h_2, ..., h_m)$, con $h_1 + h_2 + ... + h_m = n$, il *coefficiente multinomiale*

$$\binom{n}{h_1, h_2, \ldots, h_m}$$

è, per definizione, il numero delle composizioni di un insieme di n elementi in m parti aventi *ordinatamente* cardinalità $h_1, h_2, ..., h_m$.

PROPOSIZIONE 4.1

$$\binom{n}{h_1, h_2, \ldots, h_m} = \frac{n!}{h_1! h_2! \ldots h_m!}$$

Dim.: in base alla discussione precedente il coefficiente multinomiale

$$\binom{n}{h_1, h_2, \ldots, h_m}$$

sarà anche uguale al numero di modi di distribuire n biglie in m scatole con il vincolo che la prima scatola contenga h_1 biglie, la seconda scatola h_2 biglie, ..., la m-esima scatola h_m biglie (nel contesto del modello dell'occupazione i numeri h_1, h_2, ..., h_m vengono chiamati usualmente *numeri di occupazione*).

Dimostreremo il teorema utilizzando quest'ultima corrispondenza ed il principio del pastore.

Supponiamo di avere m file distinguibili, poste ordinatamente una di fianco all'altra, nelle quali disporre n biglie. Ipotizziamo, inoltre, che nella fila i-esima ci debbano essere h_i biglie, $i = 1, 2, ..., m$.

Se noi non consideriamo la suddivisione in file ma vogliamo sapere solo in quanti modi possiamo mettere le n biglie nelle file, poste una di seguito all'altra, questo valore è $n!$, cioè il numero di permutazioni di n elementi.

Supponiamo ora di compiere questa operazione: prendiamo le biglie di ogni fila e le mettiamo in una scatola diversa per ogni fila; nelle scatole non è più possibile distinguere l'ordine delle biglie. Nella prima scatola ci sono h_1 biglie, ci saranno quindi $h_1!$ permutazioni delle stesse che possono essere messe nella prima fila e che ci danno lo stesso risultato nella scatola. In altre parole $h_1!$ ordinamenti nella prima fila ci danno lo stesso risultato nella scatola.

Questo ragionamento vale per tutte le file e per tutte le scatole.

Per il principio del pastore avremo quindi che il numero di modi di sistemare n biglie in m scatole così che nella prima scatola ci siano h_1 biglie, nella seconda scatola ce ne siano h_2, e così via, sono:

$$\frac{n!}{h_1!h_2!\dots h_m!}$$

❑

Una dimostrazione alternativa può essere fatta tramite una forma ricorsiva.

Focalizziamo la nostra attenzione sulla prima fila e cerchiamo di esprimere il coefficiente multinomiale in modo alternativo:

$$\binom{n}{h_1;h_2;\dots;h_m} = \binom{n}{h_1} \cdot \binom{n-h_1}{h_2;h_3;\dots;h_m} \qquad \text{(ricorsione moltiplicativa)}$$

Il primo binomiale corrisponde al numero di modi di mettere h_1 biglie nella prima fila prendendole da un insieme di n biglie. Per le restanti file abbiamo a disposizione $(n - h_1)$ biglie da sistemare come al solito (secondo membro del prodotto). Il ragionamento si può ora estendere anche al secondo membro del prodotto mettendo a fuoco la seconda fila:

$$\binom{n}{h_1;h_2;\dots;h_m} = \binom{n}{h_1} \cdot \binom{n-h_1}{h_2} \cdot \binom{n-h_1-h_2}{h_3;h_4;\dots;h_m}$$

Reiterando m volte lo stesso ragionamento si giunge a:

$$\binom{n}{h_1;h_2;\ldots;h_m}=\binom{n}{h_1}\cdot\binom{n-h_1}{h_2}\cdot\binom{n-h_1-h_2}{h_3}\cdots\binom{n-h_1-h_2-\ldots-h_{m-1}}{h_m}$$
$$=\frac{n!}{h_1!(n-h_1)!}\cdot\frac{(n-h_1)!}{h_2!(n-h_1-h_2)!}\cdot\frac{(n-h_1-h_2)!}{h_3!(n-h_1-h_2-h_3)!}\cdots$$

Semplificando si ottiene:

$$\frac{n!}{h_1!h_2!\ldots h_m!}$$

□

È opportuno notare che per m=2 i coefficienti multinomiali diventano binomiali, infatti:

$$\binom{n}{k}=\binom{n}{k;n-k}=\binom{n}{n-k}.$$

PROPOSIZIONE 4.2

$$\binom{n}{n_1,n_2,\ldots,n_r}=\sum_{i=1}^{r}\binom{n-1}{n_1,n_2,\ldots,n_i-1,\ldots,n_r}$$

con $n>0$ e $n_i\neq 0$ per ogni $i=1\ldots r$.

Dim.: diamo una dimostrazione cercando di capire il significato degli elementi che vi compaiono. Usiamo il modello dell'occupazione in cui consideriamo n biglie da disporre in r scatole in modo tale che nella generica scatola i ve ne siano n_i.

Prendiamo in considerazione una biglia in particolare. Questa biglia può, ovviamente, essere inserita in qualunque scatola; ipotizziamo che vada nella prima. Ora le altre biglie, che sono rimaste $n-1$, possono essere collocate nelle scatole come al solito, tenendo presente, però, che nella prima scatola non ci sono n_1 'posti' ma bensì n_1-1 visto che uno è già occupato dalla nostra biglia. Formalizzando:

Se una determinata biglia è messa nell'urna 1 le altre possono essere collocate in

$$\binom{n-1}{n_1-1, n_2, \ldots, n_r}$$

modi.

Abbiamo così ottenuto un insieme composto da tutti i possibili modi di mettere le biglie nelle scatole, con la caratteristica comune che tutti hanno la biglia presa in esame nella prima scatola.

Il ragionamento può essere reiterato supponendo di mettere la biglia scelta nella seconda scatola, poi nella terza, ecc.

Che relazione c'è tra i vari insiemi ottenuti? Sicuramente sono insiemi disgiunti, e la loro unione è formato da tutte le possibili distribuzione di n biglie in r scatole.

Da ciò deriva che la somma delle cardinalità è uguale alla cardinalità dell'unione; ed è quindi dimostrato il teorema.

$\square$

Capitolo 5

Partizioni

CAPITOLO 5 - PARTIZIONI

5.1 Partizioni

Dato un insieme D se ne consideri *l'insieme delle parti* $\wp(D)$.

Diciamo che un sottoinsieme

$$X=\{A_i \subseteq D;\ i \in I\}$$

di elementi di $\wp(D)$ è una *partizione* di D se:

i) $A_i \cap A_j = \emptyset \qquad \forall i \neq j$

ii) $\bigcup_{i \in I} A_i = D$

iii) $A_i \neq \emptyset \qquad \forall i$

Gli elementi A_i si dicono *blocchi* della partizione X.
Se X è una partizione di D costituita da k blocchi si dice che X è una *k-partizione* di D.

Si osservi che se D è l'insieme vuoto esiste un'unica partizione di D, la *partizione vuota*; se, viceversa, l'insieme D non è vuoto, tra le sue possibili partizioni ne esistono sempre due estreme: la n-partizione dell'n-insieme

$$\{\{x\}; x \in D\}$$

e la 1-partizione dell'n-insieme

$$\{D\}.$$

5.2 PARTIZIONI E RELAZIONI DI EQUIVALENZA

Dato un insieme D, una *relazione di equivalenza* R è un sottoinsieme del prodotto cartesiano $D \times D$ tale che, per ogni $a, b, c \in D$, risulta:

i) $a\,R\,a$ *(riflessività)*
ii) $a\,R\,b \Rightarrow b\,R\,a$ *(simmetria)*
iii) $a\,R\,b,\ b\,R\,c \Rightarrow a\,R\,c$ *(transitività)*.

Dato un elemento $x \in D$ si definisce *classe di equivalenza* dell'elemento x il sottoinsieme

$$[x]_R \overset{def}{=} \{y \in D : y\,R\,x\}.$$

Ricordiamo che date due classi di equivalenza $[x]_R$ e $[y]_R$ risulta:

$$[x]_R = [y]_R \text{ se e solamente se } x\,R\,y.$$

Da ciò segue che le classi di equivalenza sono *a due a due disgiunte* ed inoltre, dalla proprietà riflessiva, esse sono *non vuote* e *la loro unione fornisce l'insieme D*.
Quindi, riassumendo, l'insieme delle classi di equivalenza della relazione R fornisce una partizione dell'insieme D.

Viceversa, data una partizione dell'insieme D, resta definita canonicamente una relazione di equivalenza su D imponendo che due elementi stiano in relazione se e solo se appartengono ad un medesimo blocco della partizione.

È facile verificare che le precedenti costruzioni stabiliscono una biiezione canonica[1] tra l'insieme delle relazioni di equivalenza sull'insieme D e l'insieme delle partizioni dell'insieme D.

Ricordiamo, infine, che l'insieme delle classi di equivalenza di una relazione R (la partizione associata alla relazione R) viene anche chiamato *insieme quoziente di D rispetto ad R* ed indicato col simbolo:

$$D/R$$

5.3 Numeri di Stirling di II^a specie

Il numero di k-partizioni di un n-insieme è chiamato *numero di*

[1] Siano D un insieme, Π_D l'insieme delle sue partizioni e R_D l'insieme delle relazioni di equivalenza su D.
Siano inoltre:
F_D: $\Pi_D \rightarrow R_D$
F_D: $\pi \rightarrow r_\pi$ dove r_π rappresenta la relazione di equivalenza tale che $aR_\pi b \Leftrightarrow$ esiste un blocco $B \in \Pi_D$ tale che $a, b \in B$.
G_D: $R_D \rightarrow \Pi_D$
G_D: $r \rightarrow \pi_r$ dove π_r è la partizione di D avente per blocchi le classi di equivalenza di r.
Allora:

$$\Pi \xrightarrow{F} R_\Pi \xrightarrow{G} \Pi_G \overset{th}{=} \Pi$$
$$R \xrightarrow{G} \Pi_R \xrightarrow{F} R_\Pi \overset{th}{=} R$$

da cui F_D e G_D sono biiezioni, l'una l'inversa dell'altra.

Stirling di II^a specie e si indica con

$$S(n, k), \text{ con } n, k \in \mathbb{N}.$$

I numeri di Stirling di seconda specie godono delle seguenti proprietà di ricorrenza lineare:

$$\begin{cases} S(n,0) = \delta_{n,0} \\ S(n,1) = S(n,n) = 1 \\ S(n,k) = S(n-1,k-1) + k \cdot S(n-1,k) \qquad 1 < k < n \end{cases}$$

Le prime due identità sono ovviamente vere per il significato combinatorio di $S(n, k)$. Per dimostrare la relazione di ricorrenza usiamo un ragionamento combinatorio. $S(n, k)$ è il numero di k-partizioni di un n-insieme. Ogni partizione di n elementi in k blocchi può essere pensata come generata dalle partizioni di n-1 elementi in 2 modi:

a) Considerando una partizione dei primi n-1 elementi in k-1 blocchi; possiamo ottenere da questa una k-partizione di n elementi aggiungendo ad essa una nuova classe costituita dal solo n-esimo elemento. Le k-partizioni dell'n-insieme costruite in questo modo saranno, perciò, esattamente:

$$S(n-1, k-1).$$

b) Considerando una partizione di n-1 elementi in k blocchi; possiamo ottenere da questa una partizione di n elementi in k blocchi aggiungendo l'n-esimo elemento ad uno qualsiasi dei

k blocchi della stessa. Questo si può fare, ovviamente, in k modi. Le k-partizioni dell'n-insieme costruite in questo modo saranno, perciò, esattamente:

$$k \cdot S(n-1,k-1).$$

❑

La precedente ricorrenza lineare permette di scrivere la seguente tabella, chiamata *triangolo di Stirling*:

n \ k	0	1	2	3	4	5	6	...
0	1	0	0	0	0	0	0	...
1	0	1	0	0	0	0	0	...
2	0	1	1	0	0	0	0	...
3	0	1	3	1	0	0	0	...
4	0	1	7	6	1	0	0	...
5	0	1	15	25	10	1	0	...
6	0	1	31	90	65	15	1	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...

che fornisce i numeri di Stirling di seconda specie per i primi sei valori di n e k.

Esiste una *forma chiusa* per i numeri di Stirling di seconda specie ossia:

$$S(n,k) = \frac{1}{k!} \cdot \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} j^n$$

5.4 Funzioni suriettive

Consideriamo una funzione suriettiva f da $\hat{n}$ a $\hat{k}$

$$\hat{n} \xrightarrow{\tilde{f}} \hat{k}.$$

Esiste una corrispondenza biiettiva tra le funzioni suriettive di questo tipo e le composizioni così costruite:

$$(f^{-1}(1), \ldots, f^{-1}(k))$$

come è già stato mostrato nel capitolo precedente.
Essendo la funzione f suriettiva è chiaro che ogni f^{-1} sarà non vuoto.

Ad ogni composizione di questo tipo si può associare una partizione dell'insieme $\hat{n}$ così determinata:

$$\{f^{-1}(1), \ldots, f^{-1}(k)\}$$

È immediato notare che la funzione che associa ad ogni composizione, del tipo visto, una partizione come questa è una funzione $k!$ a 1, infatti ci saranno $k!$ composizioni associate alla stessa partizione.
Da quanto detto si evince che il numero di k-partizioni dell'insieme $\hat{n}$, ossia $S(n, k)$, è dato dal numero di composizioni di $\hat{n}$ in k blocchi, che corrisponde al numero di funzioni suriettive da $\hat{n}$ a $\hat{k}$, diviso per $k!$. Formalmente abbiamo:

$$S(n,k) = \frac{\left|\hat{n} \xrightarrow{\tilde{f}} \hat{k}\right|}{k!} \quad \Rightarrow \quad \left|\hat{n} \xrightarrow{\tilde{f}} \hat{k}\right| = S(n,k) \cdot k!$$

Abbiamo, quindi, trovato che il numero di funzioni suriettive da $\hat{n}$ a $\hat{k}$ si può calcolare moltiplicando i numero di Stirling di seconda specie $S(n,k)$ per $k!$.[2]

5.5 I numeri di Bell

Il numero di possibili partizioni di un n-insieme si chiama *numero di Bell* e si indica con B_n.
Ricordando la definizione di numero di Stirling di seconda specie segue che:

$$B_n = S(n,1) + S(n,2) + \ldots + S(n,n) = \sum_{k=1}^{n} S(n,k)$$

I numeri di Bell soddisfano la seguente ricorrenza lineare, detta *formula di Aitken*:

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k \qquad B_0 = 1.$$

Pensiamo al primo degli $n+1$ elementi di un $(n+1)$-insieme; questo apparterrà ad un blocco formato da $n-k+1$ elementi, con $k = 0, \ldots, 1$; nello stesso blocco dobbiamo disporre altri $n-k$ elementi che

[2] La formula chiusa per il numero di Stirling di II specie è la seguente:

$$S(n,k) = \frac{1}{k!} \cdot \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} j^n \cdot$$

Si osservi che la presenza di segni *alterni* rende evidente il fatto che la formula precedente non può essere derivata in termini "elementari", cioè utilizzando esclusivamente gli strumenti discussi in questa presentazione.
Di fatto la suddetta formula può essere dimostrata mediante il "*principio di inversione di Möbus*", oppure il "*principio di inclusione-esclusione*", oppure il "*calcolo UMBRALE*".

possiamo scegliere in $\binom{n}{n-k}=\binom{n}{k}$ modi fra tutti i rimanenti elementi. Ora, questo blocco è completamente definito e sono rimasti liberi k elementi che possono essere partizionati in B_k modi.
Facendo, quindi, variare k da 0 a n otteniamo la formula di ricorrenza di Aitken.

❑

Ad esempio, in virtù della ricorrenza di Aitken, è facile verificare che i primi dieci valori di B_n sono:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
B_n	1	1	2	5	15	52	203	877	4140	21147

5.6 Coefficienti di Faà di Bruno

Sia X una partizione dell'insieme D; diciamo che X è di tipo

$$1^{\nu_1}2^{\nu_2}\dots n^{\nu_n}$$

se X contiene ν_1 blocchi di cardinalità 1, ν_2 blocchi di cardinalità 2, ..., ν_n blocchi di cardinalità n.
Ovviamente

$$\sum_{i=0}^{n} i\cdot \nu_i = n$$

DEFINIZIONE 5.1 - il numero di partizioni di un n-insieme del tipo

$$1^{\nu_1}2^{\nu_2}\dots n^{\nu_n}$$

è detto *coefficiente di Faà di Bruno* ed indicato col simbolo:

$$P\left(n;1^{\nu_1}2^{\nu_2}\dots n^{\nu_n}\right).$$

Vediamo alcune proprietà elementari dei coefficienti di Faà di Bruno:

i) $P\left(n;1^{\nu_1},2^{\nu_2},\dots,n^{\nu_n}\right)\neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \nu_1+2\nu_2+3\nu_3+\dots+n\nu_n=n$

ii) $S(n,k)=\sum\limits_{\nu_1+\nu_2+\dots+\nu_n=k} P\left(n;1^{\nu_1},2^{\nu_2},\dots,n^{\nu_n}\right)$

iii) $B_n=\sum\limits_{k=0}^{n} S(n,k)=\sum\limits_{k=0}^{n}\ \sum\limits_{\nu_1+\nu_2+\dots+\nu_n=k} P\left(n;1^{\nu_1},2^{\nu_2},\dots,n^{\nu_n}\right)=$

$$=\sum_{\nu_1+2\nu_2+3\nu_3+\dots+n\nu_n=n} P\left(n;1^{\nu_1},2^{\nu_2},\dots,n^{\nu_n}\right).$$

PROPOSIZIONE 5.2

$$P\left(n;1^{\nu_1}2^{\nu_2}\dots n^{\nu_n}\right)=\frac{n!}{1!^{\nu_1}\,2!^{\nu_2}\dots n!^{\nu_n}}\cdot\frac{1}{\nu_1!\,\nu_2!\dots\nu_n!}$$

Dim.: Ogni partizione di un insieme di n elementi di tipo

$$1^{\nu_1}2^{\nu_2}3^{\nu_3}\dots$$

può essere generata come segue:

Si consideri una qualunque *composizione* dell'insieme D avente tipo

$$\begin{aligned} &h_1 = h_2 = \ldots = h_{\nu_1} = 1 \\ &h_{\nu_1+1} = h_{\nu_1+2} = \ldots = h_{\nu_1+\nu_2} = 2 \qquad (@) \\ &\ldots \\ &\ldots \end{aligned}$$

e si dimentichi l'ordine tra i blocchi.

Ovviamente in questo modo si genera una partizione del tipo voluto; tuttavia si pone la domanda:

Quante diverse composizioni di questo tipo generano la medesima partizione?

La risposta segue dalla seguente osservazione: possiamo riordinare arbitrariamente i primi ν_1 blocchi della composizione, i successivi ν_2 blocchi della composizione, e così via.

Quindi il numero delle composizioni di tipo assegnato, che danno origine alla medesima partizione è:

$$\nu_1!\,\nu_2!\ldots\nu_n!$$

Ricordiamo che (paragrafo 4.2) il numero delle composizioni di tipo (@) è dato dal coefficiente multinomiale

$$\binom{n}{\underbrace{1,\ldots,1}_{\nu_1 \text{ volte}};\ \underbrace{2,\ldots,2}_{\nu_2 \text{ volte}};\ \underbrace{3,\ldots,3}_{\nu_3 \text{ volte}};\ \ldots}$$

Per il principio del pastore il numero di partizioni di tipo

$$1^{\nu_1}2^{\nu_2}3^{\nu_3}\ldots$$

si otterrà, quindi, dividendo quest'ultimo coefficiente multinomiale per

$$\nu_1!\nu_2!\ldots\nu_n!$$

ottenendo così:

$$P\left(n;1^{\nu_1}2^{\nu_2}\ldots n^{\nu_n}\right)=\frac{n!}{1!^{\nu_1}\,2!^{\nu_2}\ldots n!^{\nu_n}}\cdot\frac{1}{\nu_1!\nu_2!\ldots\nu_n!}$$

□

Capitolo 6

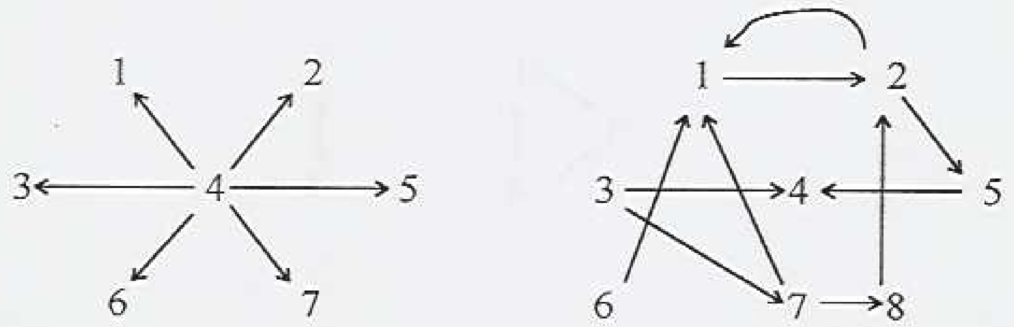
Permutazioni

CAPITOLO 6 - PERMUTAZIONI

6.1 GRAFI

Un ***grafo diretto o orientato G*** è una coppia ordinata *(D, A)* dove *D* è l'insieme dei nodi e *A* è un insieme di coppie *ordinate* di nodi. Una coppia ordinata di nodi sarà chiamata *arco*.

Esempi di grafi diretti:



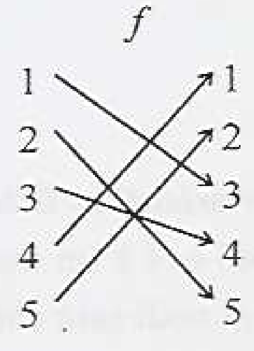
6.2 PERMUTAZIONI

Dato un n-insieme S finito, ogni funzione $f: S \rightarrow S$ biiettiva si dice *permutazione* di S.

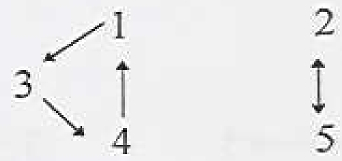
Le possibili permutazioni di S sono, dunque, tutte e sole le funzioni iniettive da un n-insieme su sé stesso; tali funzioni iniettive sono, infatti, anche suriettive e quindi biiettive (Si noti che ciò è, in generale, FALSO se S non è insieme finito! Ad esempio la funzione $F: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $F(n)=n+1$ è ovviamente iniettiva MA NON suriettiva). Il numero di permutazioni dell'insieme S è dunque:

$$(n)_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

È possibile rappresentare una permutazione mediante un grafo orientato. Ad esempio la funzione



è rappresentata dal grafo



La funzione f è quindi rappresentabile mediante un grafo diretto $f=(S, E)$, in cui S è l'insieme dei vertici ed E è l'insieme dei lati orientati.
Si noti che essendo f una funzione biiettiva la cardinalità di S è uguale alla cardinalità di E.

Forniamo, ora, alcune convenzioni notazionali:

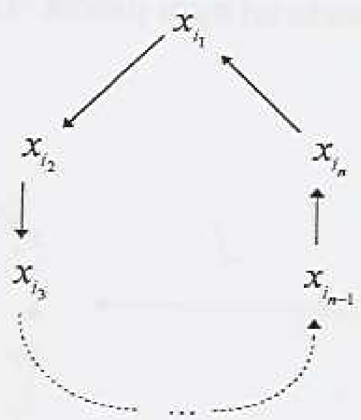
a) $f^2(x)=f(f(x))$
$f^3(x)=f(f^2(x))$
...
$f^k(x)=f(f^{k-1}(x))$

b) $f^{-2}(x)=f^{-1}(f^{-1}x))$
$f^{-3}(x)=f^{-1}(f^{-2}x))$
...
$f^{-k}(x)=f^{-1}(f^{-(k-1)}(x))$

Nell'esempio di prima avevamo: $3=f(1)=f^{-1}(4)=f^{-2}(1)$.

6.3 CICLI

Data una permutazione δ di un n-insieme $\{x_1, \ldots, x_n\}$, questa si dirà *n-ciclo* se e solamente se il grafo associato è un *grafo ciclico*[1] G_δ.



Dato il grafo G_δ, possiamo scegliere, *ovviamente in n modi*, un suo vertice x_{i_j} e formare la parola ottenuta scrivendo x_{i_j} in prima posizione, $x_{i_{j+1}}$ in seconda posizione, e continuando secondo l'ordine delle frecce.
Ogni parola così definita è detta "*rappresentazione parola*" dell'n-ciclo δ.

[1] Un grafo ciclico è un grafo tale che ogni vertice abbia esattamente un lato in entrata e uno in uscita ed inoltre tale che tra due vertici arbitrari, x_i e x_j, vi sia sempre un *cammino* (coerente con le frecce) che porta da x_i a x_j.

Ad esempio le parole

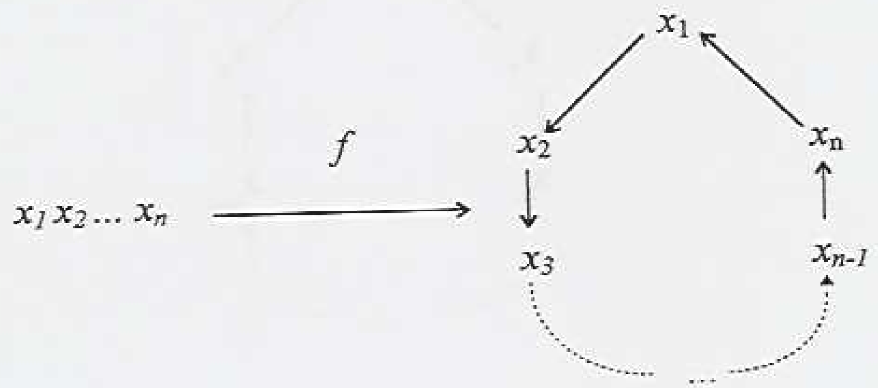
$$(1, 2, 5, 6, 4, 3);\ (2, 5, 6, 4, 3, 1);\ (5, 6, 4, 3, 1, 2);\ \ldots$$

sono rappresentazioni parole del medesimo 6-ciclo.

PROPOSIZIONE 6.1 - Il numero degli n-cicli è:

$$(n-1)!.$$

Dim.: Osserviamo che ogni parola di lunghezza n su n elementi è una rappresentazione parola di un n-ciclo. Più specificamente si consideri la funzione f che associa ad ogni parola $x_1 x_2 \ldots x_n$ l' n-ciclo:



Questa funzione è, per quanto detto in precedenza, una funzione n a 1. Applicando il principio del pastore al numero di parole *senza ripetizione* di lunghezza n su un alfabeto di cardinalità n si ottiene che il numero degli n-cicli è dato da:

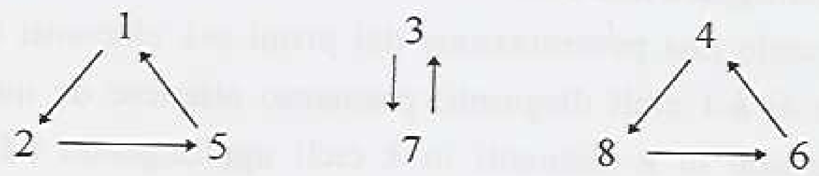
$$\frac{(n)_n}{n} = \frac{n!}{n} = (n-1)!$$

□

6.4 Permutazioni come prodotto di cicli disgiunti

Un grafo orientato è di PERMUTAZIONE se e solamente se ogni vertice ha esattamente una freccia in entrata e una freccia in uscita. Inoltre si verifica che ogni grafo di permutazione è unione disgiunta di grafici ciclici, detti *componenti connesse*.

Esempio:
$S=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$



(⊕)

Da ciò segue che ogni permutazione di un n-insieme può essere espressa in modo unico, *a meno dell'ordine, come prodotto di cicli disgiunti*.

Esempio: la permutazione rappresentata dal grafo di permutazione (⊕) è esprimibile come prodotto dei cicli rappresentati dalle parole

$$(1, 2, 5)\,(3, 7)\,(4, 8, 6)$$

Il numero delle permutazioni di un n-insieme che sono prodotto di k cicli disgiunti è usualmente indicato dal simbolo:

$$C(n, k).$$

PROPOSIZIONE 6.2 - I numeri $C(n, k)$ godono delle seguenti proprietà di ricorrenza lineare:

$$\begin{cases} C(n,0) = \delta_{n,0} \\ C(0,k) = \delta_{0,k} \\ C(n,k) = C(n-1,k-1) + (n-1) \cdot C(n-1,k) & n,k > 0. \end{cases}$$

Dim: Vediamo come si trova la forma ricorsiva per $C(n, k)$.

Così come per i numeri di Stirling di seconda specie, anche qui possiamo distinguere due casi:

a) Considerando una permutazione dei primi n-1 elementi che sono prodotto di k-1 cicli disgiunti; possiamo ottenere da questa una permutazione di n elementi in k cicli aggiungendo ad essa un nuovo ciclo costituito dal solo n-esimo elemento. Le permutazioni di n elementi che sono prodotte da k cicli costruite in questo modo saranno, perciò, esattamente:

$$C(n\text{-}1,\ k\text{-}1).$$

b) Considerando una permutazione di n-1 elementi che sono prodotto di k cicli; possiamo ottenere da questa una permutazione di n elementi prodotto di k cicli aggiungendo l'n-esimo elemento in uno qualsiasi dei k cicli e, in ogni ciclo, tra due qualsiasi elementi. Questo si può fare, ovviamente, in (n-1) modi. Le permutazioni di n elementi che sono prodotto di k cicli costruite in questo modo saranno, perciò, esattamente:

$$(n\text{-}1)\cdot S(n\text{-}1,\ k).$$

□

6.5 Coefficienti di Cauchy

Sia P una permutazione dell'n-insieme D; diciamo che P è di tipo

$$1^{c_1}2^{c_2}\dots n^{c_n}$$

se P contiene c_1 cicli di ordine 1, c_2 cicli di ordine 2, ..., c_n cicli di ordine n.
Ovviamente

$$\sum_{i=1}^{n} i \cdot c_i = n\,.$$

DEFINIZIONE 6.3 - Il numero delle permutazioni di un n-insieme di tipo

$$1^{c_1}2^{c_2}\dots n^{c_n}$$

è detto *coefficiente di Cauchy* ed indicato col simbolo:

$$Q(n;\ 1^{c_1}2^{c_2}\dots n^{c_n}) \qquad \text{con } n>0.$$

Si noti come i coefficienti di Cauchy siano l'analogo dei coefficienti di Faà di Bruno riferiti alle permutazioni anziché alle partizioni.

Vediamo alcune proprietà elementari dei coefficienti di Cauchy:

i) $Q(n;1^{c_1},2^{c_2},\ldots,n^{c_n}) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad c_1 + 2c_2 + 3c_3 + \ldots + nc_n = n$

ii) $C(n,k) = \sum\limits_{c_1+c_2+\ldots+c_n=k} Q(n;1^{c_1},2^{c_2},\ldots,n^{c_n})$

iii) $$n! = \sum_{k=0}^{n} C(n,k) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{c_1+c_2+\ldots+c_n=k} Q(n;1^{c_1},2^{c_2},\ldots,n^{c_n}) = \sum_{c_1+2c_2+3c_3+\ldots+nc_n=n} Q(n;1^{c_1},2^{c_2},\ldots,n^{c_n}).$$

TEOREMA 6.4

$$Q(n;1^{c_1},2^{c_2},\ldots,n^{c_n}) = \frac{n!}{1^{c_1}2^{c_2}\ldots n^{c_n}} \cdot \frac{1}{c_1!c_2!\ldots c_n!}$$

Dim.: Data una permutazione di tipo

$$1^{c_1}2^{c_2}\ldots n^{c_n}$$

il grafo di permutazione ad esso associato avrà, ovviamente, c_1 componenti connesse di cardinalità 1, c_2 componenti connesse di cardinalità 2, ..., c_n componenti connesse di cardinalità n.

Considerando l'insieme dei vertici del grafo resta definita una partizione di esso avente per blocchi i sottoinsiemi di vertici appartenenti alle varie componenti connesse del grafo; tale partizione sarà, ovviamente, di tipo

$$1^{c_1}2^{c_2}\ldots n^{c_n}.$$

Viceversa, data una qualsiasi partizione di tipo

$$1^{c_1}2^{c_2}\dots n^{c_n}$$

essa definirà

$$(c_1 - 1)! \cdot (c_2 - 1)! \cdot \dots \cdot (c_n - 1)!$$

permutazioni in virtù della proposizione 6.1.
Quindi per il principio del pastore:

$$Q\left(n;1^{c_1},2^{c_2},\dots,n^{c_n}\right) = P\left(n;1^{c_1},2^{c_2},\dots,n^{c_n}\right)\cdot 0!^{c_1}\cdot 1!^{c_2}\cdot\dots\cdot(n-1)!^{c_n} =$$

$$= \frac{n!}{1^{c_1}2^{c_2}\dots n^{c_n}}\cdot\frac{1}{c_1!c_2!\dots c_n!}$$

❑

6.6 Numeri di Stirling di prima specie

Sia $n \in \mathcal{N}$. Ricordiamo che il *polinomio fattoriale decrescente ad n* è, per definizione, il polinomio a coefficienti reali

$$(x)_n = x(x-1)(x-2)\dots(x-n+1).$$

Si noti che il grado di $(x)_n$ è esattamente n, per ogni n, e, di conseguenza, l'insieme

$$\{(x)_n, n \in \mathrm{N}\}$$

è una base dello spazio vettoriale reale *R[x]* di dimensione numerabile dei polinomi a coefficienti reali nella "indeterminata" x.

Ovviamente, anche l'insieme

$$\{x^n, n \in N\}$$

risulta essere una base dello spazio *R[x]*.

DEFINIZIONE 6.5 - Diciamo *numeri di Stirling di I specie*, ed indichiamo con

$$s(n,k) \qquad n,k \in \mathcal{N},$$

i coefficienti di espansione dei fattoriali decrescenti rispetto alla base delle potenze, cioè:

$$(x)_n = \sum_{k=0}^{n} s(n,k) x^k \, .$$

PROPOSIZIONE 6.6 - I numeri di Stirling di I specie sono, a meno di un segno alternante, i numeri $C(n,k)$ visti nel paragrafo 6.4;

precisamente si ha

$$s(n,k) = (-1)^{n-k} \cdot C(n,k) \qquad n,k \in \mathcal{N} \, .$$

Dim.: Si noti che, per $n>0$, si ha:

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n} s(n,k)x^k = (x)_n = \\
&= (x)_{n-1}(x-n+1) = \\
&= (x)_{n-1}x - (n-1)(x)_{n-1} = \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} s(n-1,k)x^{k+1} - (n-1)\sum_{k=0}^{n-1} s(n-1,k)x^k = \\
&= \sum_{k=0}^{n} \big(s(n-1,k-1) - (n-1)s(n-1,k)\big)x^k
\end{aligned}$$

dunque dall'unicità dei coefficienti di espansione del polinomio $(x)_n$ rispetto alla base delle potenze segue la seguente ricorsione:

$$s(n,k) = s(n-1,k-1) - (n-1)s(n-1,k) \qquad n,k \in \mathbb{N}.$$

Inoltre si ha, ovviamente,

$$\begin{cases} s(n,0) = 0 & n \geq 1 \\ s(n,n) = s(0,0) = 1 \end{cases}$$

A questo punto, posto

$$t(n,k) = (-1)^{n-k} \cdot C(n,k)$$

si osserva che

$$\begin{cases} t(n,0) = 0 & n \geq 1 \\ t(n,n) = t(0,0) = 1 \end{cases}$$

Inoltre dalla ricorsione del paragrafo 6.4 si ottiene:

$$\begin{aligned}
t(n,k) &= (-1)^{n-k} \cdot C(n,k) = \\
&= (-1)^{n-k} \cdot \left[C(n-1,k-1) + (n-1) \cdot C(n-1,k)\right] = \\
&= (-1)^{n-k} \cdot C(n-1,k-1) + (n-1) \cdot (-1)^{n-k} \cdot C(n-1,k) = \\
&= t(n-1,k-1) + (n-1) \cdot (-1) \cdot (-1)^{n-1-k} \cdot C(n-1,k) = \\
&= t(n-1,k-1) - (n-1) \cdot t(n-1,k)
\end{aligned}$$

Dunque i numeri $t(n,k)$ soddisfano le stesse condizioni iniziali e la stessa ricorsione dei numeri $s(n,k)$. Da ciò segue l'asserto, ossia:

$$s(n,k) = (-1)^{n-k} \cdot C(n,k).$$

❑

PROPOSIZIONE 6.7 - I numeri di Stirling di II specie, introdotti nel paragrafo 5.3, sono i coefficienti di espansione delle potenze rispetto alla base dei fattoriali decrescenti:

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} S(n,k)(x)_k .$$

Dim.: Indichiamo con $T(n,k)$ i coefficienti di espansione delle potenze rispetto alla base dei fattoriali decrescenti, cioè poniamo:

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} T(n,k)(x)_k .$$

Osserviamo che, per $n>0$, si ha:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} T(n,k)(x)_k &= x^{n-1}x = \sum_{k=0}^{n} T(n-1,k)(x)_k x =^{2}\\ &= \sum_{k=0}^{n} T(n-1,k)(x)_{k+1} + \sum_{k=0}^{n} T(n-1,k)k(x)_k =\\ &= \sum \big(T(n-1,k-1) + kT(n-1,k)\big)(x)_k\end{aligned}$$

Dunque, dall'unicità dei coefficienti di espansione della potenza x^n rispetto alla base dei fattoriali decrescenti segue la ricorsione

$$T(n,k) = T(n-1,k-1) + kT(n-1,k) \qquad n,k\in\mathcal{N}$$

che è la stessa dei numeri di Stirling di II specie. Poiché anche le condizioni iniziali coincidono, si ha

$$S(n,k) = T(n,k) \qquad n,k\in\mathcal{N}.$$

❑

Vale la pena di osservare che, indicato con

$$S=(S(n,k))_{n,k\in\mathcal{N}}$$

[2] Si osservi che

$$(x)_k x - k(x)_k = (x)_{k+1}$$

da cui segue

$$(x)_k x = k(x)_k + (x)_{k+1}.$$

la matrice doppiamente infinita dei numeri di Stirling di II specie, ed indicata con

$$s=(s(n,k))_{n,k\in N}$$

la matrice doppiamente infinita dei numeri di Stirling di I specie, dalle relazioni

$$\begin{cases} x^n = \sum_k S(n,k)(x)_k \\ (x)_n = \sum_k s(n,k)x^k \end{cases}$$

si ottiene che

$$S=s^{-1}.$$

Si hanno dunque, per la proposizione 6.6, le identità:

$$\sum_{\substack{j \\ i\le j\le k}} (-1)^{j-i} C(i,j)S(j,k) = \delta_{ik} \qquad \forall i,k\in \mathbf{N}.$$

Appendice A

Un'applicazione del principio del doppio conteggio

APPENDICE A

ESEMPIO SUL PRINCIPIO DEL DOPPIO CONTEGGIO (vedi pag. 16)

Sia X un insieme di cardinalità n. Indichiamo con S_h la collezione di sottoinsiemi di X aventi cardinalità h:

$$S_h=\{A \subseteq X:\ |A|=h\}$$

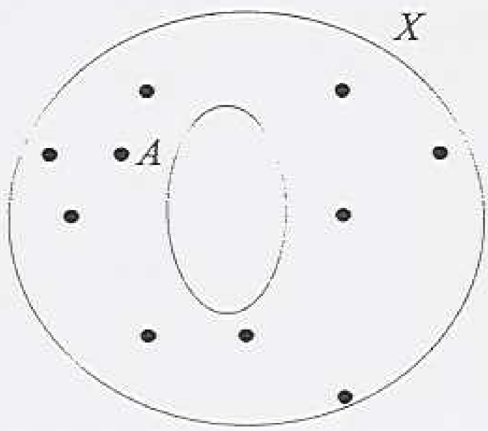
e consideriamo la relazione di inclusione:

$$R=\{(A,B) \in S_{h-1} \times S_h;\ A \subseteq B\}.$$

Ora:

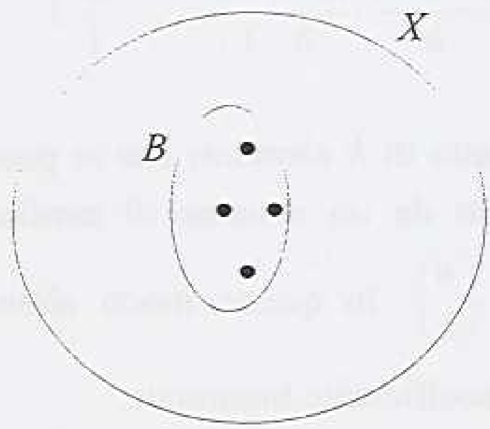
$$\sum_{A \in S_{h-1}} \left|\{B \in S_h; A \subseteq B\}\right| = \sum_{B \in S_h} \left|\{A \in S_{h-1}; A \subseteq B\}\right| \qquad (1)$$

Per capire quanto vale $\left|\{B \in S_h; A \subseteq B\}\right|$ visualizziamo graficamente l'insieme A e X:



Il numero di insiemi B tali che A sia un loro sottoinsieme si ottiene contando gli insiemi che si ottengono aggiungendo ad A un elemento appartenente ad X ma non ad A. Essi sono, ovviamente, $n-(h-1)$.

Analogamente per capire quanto vale $\left|\left\{A \in S_{h-1}; A \subseteq B\right\}\right|$ visualizziamo graficamente l'insieme B e X:



Il numero di insiemi A tali che siano sottoinsiemi di B si ottiene contando gli insiemi che si ottengono togliendo a B un suo elemento. Essi sono, ovviamente, h.
Quindi dalla (1) si ha:

$$|S_{h-1}|(n-h+1) = |S_h|(h)$$

da cui si ottiene la ricorsione:

$$|S_h| = \frac{n-h+1}{h}|S_{h-1}|$$

iterando si trova:

$$
\begin{aligned}
|S_h| &= \frac{n-h+1}{h}|S_{h-1}| = \\
&= \frac{n-h+1}{h}\cdot\frac{n-h+2}{h-1}|S_{h-2}| = \\
&= \frac{n-h+1}{h}\cdot\ \dots\ \cdot\frac{n-h+h}{h-(h-1)}|S_{h-h}| = \\
&= \frac{n-h+1}{h}\cdot\frac{n-h+2}{h-1}\cdot\ \dots\ \cdot\frac{n}{1}\cdot 1
\end{aligned}
$$

$|S_h|$ è il numero di insiemi di h elementi che si possono identificare pescandone gli elementi da un insieme di cardinalità n, ossia il coefficiente binomiale $\binom{n}{k}$. In questo modo abbiamo ritrovato la formula esplicita per il coefficiente binomiale.

❑

Appendice B

Un'applicazione combinatoria del teorema di fattorizzazione di una funzione

APPENDICE B

UNA APPLICAZIONE COMBINATORIA DEL TEOREMA DI FATTORIZZAZIONE DI UNA FUNZIONE

A)

Sia data una funzione

$$F: S \to T$$

dove S e T sono insiemi arbitrari.

Si definisce una relazione di equivalenza $\approx_F$ su S ponendo:

$$x \approx_F x' \Leftrightarrow F(x) = F(x').$$

Sia $S/_{\approx_F}$ l'insieme quoziente (confronta paragrafo 5.2) di S rispetto alla relazione di equivalenza $\approx_F$, ossia la partizione avente per blocchi le classi di equivalenza.

Sia

$$\Pi: S \to S/_{\approx_F}$$

la *proiezione canonica*, cioè l'applicazione tale che

$$\Pi(x) = [x]_{\approx_F} \qquad \forall x \in S.$$

Ovviamente l'applicazione Π è una applicazione *suriettiva*.

Sia

$$\overline{F}: S/_{\approx_F} \to T$$

tale che

$$\overline{F}\left([x]_{\approx_F}\right) = F(x) \qquad \forall [x]_{\approx_F} \in S/_{\approx_F}.$$

L'applicazione $\overline{F}$ è *iniettiva*. Inoltre:

$$F = \overline{F} \cdot \Pi.$$

In sintesi ogni applicazione può essere *canonicamente fattorizzata* nella forma di composizione di una applicazione iniettiva ed una suriettiva.

B)
Siano S e T insiemi finiti, con $|S|=n$ e $|T|=m$. Dalla costruzione A) precedente segue che sussiste una biiezione canonica tra l'insieme

$$\{F: S \to T\}$$

e l'insieme

$$\dot{\bigcup_{\Pi \text{ partizione di } S}} \left\{\overline{F}: \Pi \to T; \overline{F} \text{ iniettiva}\right\}.$$

Passando alle cardinalità, il sussistere della biiezione precedentemente menzionata implica la seguente identità combinatoria:

$$
\begin{aligned}
m^n &= \\
&= \sum_{\Pi \text{ partizione di } S} \left| \left\{ \overline{F} : \Pi \to T; \overline{F} \text{ iniettiva} \right\} \right| = \\
&= \sum_{k=0}^{n} \sum_{\Pi\ k\text{-partizione di } S} \left| \left\{ \overline{F} : \Pi \to T; \overline{F} \text{ iniettiva} \right\} \right| = \\
&= \sum_{k=0}^{n} S(n,k)(m)_k
\end{aligned}
$$

C)
In virtù del principio di identità dei polinomi, la precedente identità combinatoria implica le identità tra polinomi

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} S(n,k)(x)_k \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Appendice C

Algoritmo per la generazione delle permutazioni

APPENDICE C

```
{***********************************************************
**                                                        **
*                                                          *
*                    P E R M U T A Z I O N I               *
*                                                          *
*       programma che esegue le permutazioni di n numeri   *
*          effettuando la stampa su video o su carta       *
*                                                          *
*                                                          *
**                                                        **
***********************************************************}


program permutazioni;
uses printer,crt;
type vett=array[1..30] of integer;
var primo:vett;
   n:integer;
   i:integer;
   u:integer;
   b:integer;
   nrighe:integer;
   vs:char;
   y:integer;
```

```
{-------------------------------------------------------
            PROCEDURA DI STAMPA SU VIDEO
-------------------------------------------------------}


procedure stampa(vet:vett);
begin
   write (y,': ');
   y:=y+1;
   if i=1 then begin
            for u:=1 to n do write (vet[u],' ')
          end
   else begin
         b:=vet[1];vet[1]:=vet[2];vet[2]:=b;
         for u:=1 to n do write (vet[u],' ')
      end;
   writeln;
   nrighe:=nrighe+1;
   if nrighe >= 24 then begin readln;
                        nrighe:=1;
                        writeln
                    end
end;
```

```
{--------------------------------------------------
            PROCEDURA PER LA STAMPA SU CARTA
--------------------------------------------------}
```

```
procedure carta(vet:vett);
begin
   write (lst,y,': ');
   y:=y+1;
   if i=1 then begin
            for u:=1 to n do write (lst,vet[u],' ')
          end
   else begin
         b:=vet[1];vet[1]:=vet[2];vet[2]:=b;
         for u:=1 to n do write (lst,vet[u],' ')
      end;
   writeln(lst);
end;
```

```
{------------------------------------------------------------
    PROCEDURA CHE EFFETTUA IN MODO RICORSIVO LE
                        PERMUTAZIONI
 -----------------------------------------------------------}


procedure permuta(vet:vett;z:integer);
var i:integer;
begin
   for i:=1 to z do begin
                b:=vet[i];vet[i]:=vet[z];vet[z]:=b;
                if z>2 then permuta (vet,z-1)
                else if (vs='v') or (vs='V') then stampa(vet)
                    else carta(vet);
                b:=vet[i];vet[i]:=vet[z];vet[z]:=b;
            end
end;
```

```
{***********************************************************}
{*************   CORPO DEL PROGRAMMA   **************}
{***********************************************************}

begin
  clrscr;
  nrighe:=0;
  y:=1;
  write ('Risultati su video o stampante (V/S)? ');
  repeat
     readln(vs)
  until (vs='v') or (vs='V') or (vs='s') or (vs='S');
  clrscr;
  write ('Inserisci il numero di elementi (ATTENTO: max 30): ');
  readln (n);
  writeln;
  writeln('inserisci i valori degli elementi (ATTENTO: solo valori
        integer)');
  for i:= 1 to n do begin
                write (i,': ');
                readln (primo[i])
              end;
  permuta (primo,n);
  write ('          Premere enter');
  readln
end.


{***********************************************************
                    FINE DEL PROGRAMMA
***********************************************************}
```

PROGRAMMA PERMUTAZIONI

Breve descrizione

Vengono create tutte le n! permutazioni di n elementi sul posto, ossia senza l'ausilio di un array supplementare.

Descrizione dettagliata

Come già detto sopra il problema è quello di creare tutte le n! permutazioni di n elementi con l'utilizzo di un solo array.
E' questo un tipico caso di algoritmo ricorsivo, o meglio la procedura in esso contenuta è di tipo ricorsivo dal momento che richiama se stessa più volte.
L'algoritmo è composto di quattro parti principali:
1- il corpo del programma;
2- una procedura per la creazione delle permutazioni;
3- una procedura per la stampa dei risultati su video;
4- una procedura per la stampa dei risultati su stampante.
Saranno ora illustrati più in dettaglio questi punti:

1 - Il corpo del programma

Per corpo del programma intendiamo l'insieme di istruzioni che non fanno parte di procedure particolari ma che stanno tra il BEGIN e l'END principali, più la parte dichiarativa delle variabili generali.
Cominciamo col dire dove e come sono usate le variabili dichiarate nella parte dichiarativa del programma:

n: contiene il numero di elementi da permutare; usato in tutte le parti del programma;

i: variabile usata come indice nei cicli FOR;

u: variabile usata come indice nei cicli FOR in alternativa all' i; usata nelle due procedure di stampa.

b: variabile d'appoggio usata per scambiare la posizione di due valori all'interno dell'array.

nrighe: variabile contatore usata per far in modo che si visualizzino al massimo 24 permutazioni alla volta sullo schermo; usata solo nella procedura di stampa su video.

vs: variabile char che mi permette di far capire al programma se deve essere stampato su video o su stampante l'intero risultato; il carattere assume un valore nel corpo del programma e viene utilizzato nella procedura di permutazione al fine di stabilire se richiamare la procedura di stampa su video o quella su carta.

y: variabile usata come contatore nella procedura di stampa su video al fine di permettere di bloccare ogni ventiquattro permutazioni la stampa sul video, per non avere uno scorrimento velocissimo e quindi illeggibile del tutto.

All'interno del corpo del programma viene chiesto se si vuole la stampa su video o se la si vuole su stampante, viene poi chiesto il numero degli elementi da permutare e, uno ad uno, viene chiesto di inserirli. Per non rendere troppo pesante l' algoritmo, i soli caratteri accettati per la permutazione sono quelli di tipo INTEGER.
I vari elementi inseriti vengono immagazzinati in un array detto **primo** di tipo vett, ossia un tipo definito da noi in questo modo:

vett = array [1..30] of INTEGER

La scelta di dare un limite superiore di trenta elementi al vettore e dettata dal numero tanto grande di permutazioni che già a valori minori si raggiunge.

Dopo aver creato l'array viene richiamata la procedura di permutazione passando come parametri l'array e il valore di n.
Al ritorno dalla procedura il programma è praticamente finito; viene chiesto di premere ENTER per ritornare nell'edit del pascal.

2 - PROCEDURA PER LE PERMUTAZIONI

All'interno di questa procedura vi è una variabile locale **i** che serve da contatore per il ciclo FOR. I parametri che vengono passati sono il vettore inserito nel corpo del programma e il numero di elementi da permutare n.
L'array primo viene posizionato nell'array locale **VET** di tipo vett mentre il valore di n viene assegnato alla variabile locale **z**.
La logica di questa procedura è questa:
viene iniziato un ciclo FOR facendo assumere a **i** i valori che vanno da 1 a z;
viene scambiato l'i-esimo elemento con lo z-esimo;
se z è maggiore di 2 viene richiamata la procedura permuta e gli vengono assegnati i parametri vet e (z-1);
se z è uguale a 2 si procede alla stampa della permutazione creata;
Notare che al rientro da una procedura si fa assumere all'array locale il valore originale che aveva prima dello scambio iniziale, e sucessivamente viene incrementato l'i del ciclo FOR per procedere con un altro scambio.

3 - PROCEDURA STAMPA SU VIDEO

E' una procedura richiamata dall'interno della procedura di permutazione la quale le passa il parametro **vet** da stampare. Per la stampa dell'array viene fatto un semplice ciclo FOR con variabile indice **u**; Viene però controllato il valore dell'indice i che era presente nella procedura che ha richiamato la stampa per fare in modo di stampare prima una permutazione e poi la stessa con i primi due elementi invertiti (NB: la stampa della seconda permutazione è fatta al secondo ingresso della procedura di stampa).

Alla fine della stampa di ogni permutazione viene controllato il valore del contatore **nrighe**, e se questo è maggiore o uguale a 24 viene fatta una pausa di stampa per permettere la lettura su video; se è maggiore o uguale a 24 viene poi riportato al valore 1.

4 - Procedura stampa su stampante

E' nella struttura sostanzialmente uguale alla procedura di stampa su video, cambia solo il fatto che le permutazioni sono inviate alla stampante e che non viene fatto il controllo ogni 24 permutazioni per fermare la stampa.

NB: sarebbe stato sufficiente l'utilizzo di una sola procedura per la stampa contenente il controllo della condizione per la stampa su video o su carta all'interno, ma, vista la semplicità del programma e la relativamente piccola dimensione, si è pensato di distinguerle per renderne la comprensione più semplice.

Scomposizione attività

In questo paragrafo verranno scomposte le attività dell'algoritmo e descritte in italiano.

1- Immissione dati;
2- elaborazione e stampa risultati;
3- fine programma.

1- **Immissione dati:** chiedi **vs**;
chiedi **n**;

2- **Elaborazione e stampa risultati:**

assegna a vet e z i valori passati;
crea ciclo con i che va da 1 a z:
    cambia elemento i con elemento z;
    se z > 2 richiama procedura con z = (z-1);
    se z = 2 richiama procedure di stampa:
        stampa video se vs = v;
        stampa carta se vs = s;
    cambia elemento i con elemento z;
termine del ciclo.
fine procedura permutazione.

procedure di stampa:
verifica se i = 1 o i = 2:
    se i = 1 stampa array;
    se i = 2 stampa array con 1° elemento al posto del 2°;
    se stampi su video controlla il numero di righe fatte;
    se sono 24 fermati e riporta nrighe a 1;
esci da stampa;

3- **fine elaborazione:** aspetta pressione di ENTER e poi esci.

Indice Analitico

Bibliografia

M. Aigner, *Combinatorial theory,* Springer 1979.

K. Baclawski - M. Cerasoli - G. C. Rota, *Introduzione alla Probabilità,* Unione Mat. Ital., Bologna 1984.

L. Comtet, *Advanced combinatorics,* D. Reidel, 1974.

J. Riordan, *An introduction to combinatorial analysis,* Wiley & Sons 1958 (Ristampato da Princeton University Press 1980).

G. C. Rota, *On the foundations of combinatorial theory I: Theory of Möbius functions,* Z. Wahrschein. U. verw. Geb. 2 (1964) 340 - 368.

H. J. Ryser, *Combinatorial Mathematics*, Carus Math. Monogr. 14, M.A.A. 1963.