

## Il Principio di inversione di Möbius (esso insiemistico)

### Osservazioni preliminari

1) Si  $n \in \mathbb{N}$ . Allora

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = \begin{cases} 1 & \text{se } n=0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Dimostrazione Basta osservare che

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = (1-1)^n = 0$$

2) Siano  $A, B$  sottoinsiemi di un insieme finito  $S$ ,  
 $A \subseteq B$ . Allora

$$\sum_{A \subseteq C \subseteq B} (-1)^{|B|-|C|} = \begin{cases} 1 & \text{se } A=B \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Dimostrazione Consideriamo solo il caso  $A \neq B$ .

Sia  $|B|=n$ ,  $|A|=k$ . Se  $C \subset B$  ha  
cardinalità  $h$  e  $C \supset A$ , allora  $C$  si può

scrivere, in modo unico, nella forma

$$C = A \cup C', \text{ con } |C'| = t = h - k \text{ e } C' \subseteq B - A.$$

Perciò

$$\begin{aligned} \sum_{A \subseteq C \subseteq B} (-1)^{|B|-|C|} &= \sum_{C' \subseteq B-A} (-1)^{|B|-|C'|-|A|} = \\ &= \sum_{t=0}^{n-k} \sum_{\substack{C' \subseteq B-A \\ |C'|=t}} (-1)^{|B|-t-|A|} = \sum_{t=0}^{n-k} \binom{n-k}{t} (-1)^{n-t-k} = \\ &= (-1)^{n-k} \sum_{t=0}^{n-k} (-1)^t \cdot \binom{n-k}{t} = 0, \text{ essendo } n-k > 0. \quad \square \end{aligned}$$

Teorema (Principio di inversione)

Sia  $S$  un insieme finito,  $\mathbb{P}(S)$  l'insieme delle parti di  $S$ . Siano  $f, g: \mathbb{P}(S) \rightarrow \mathbb{R}$  due applicazioni tali che sussiste la relazione:

$$i) \sum_{A \subseteq B} f(A) = g(B), \quad \text{per ogni } B \in \mathbb{P}(S).$$

Vale allora la "relazione inversa":

$$ii) f(B) = \sum_{A \subseteq B} (-1)^{|B|-|A|} \cdot g(A),$$

per ogni  $B \in \mathbb{P}(S)$ .

Dimostrazione Consideriamo le applicazioni:

$$\xi, \delta : \mathbb{P}(S) \times \mathbb{P}(S) \longrightarrow \mathbb{R}$$

così definite:

$$\xi(A, B) = \begin{cases} 1 & \text{se } A \subseteq B \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\delta(A, B) = \begin{cases} 1 & \text{se } A = B \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Si noti che l'osservazione 2) può essere allora riformulata come segue: per ogni  $A, B \in \mathbb{P}(S)$ , si ha  $\sum_{C \subseteq B} \xi(A, C) \cdot (-1)^{|B|-|C|} = \delta(A, B)$ .

Ora, si consideri l'espressione

$$\sum_{\substack{A \\ A \subseteq B}} (-1)^{|B|-|A|} \cdot g(A) \text{ che è uguale, in virtù}$$

della relazione i) dell'lemma, a

$$\sum_{A \subseteq B} (-1)^{|B|-|A|} \sum_{C \subseteq A} f(C) =$$

$$= \sum_{A \subseteq B} \sum_C \xi(C, A) \cdot f(C) \cdot (-1)^{|B|-|A|} -$$

(3)

Scambiando l'ordine delle somme, quest'ultima  
diviene

$$\sum_C f(C) \cdot \sum_{\substack{A \\ A \subseteq B}} \chi(C, A) \cdot (-1)^{|B|-|A|} =$$
$$= \sum_C f(C) \cdot S(C, B) = f(B), \text{ come volevasi.} \quad \square$$

In maniera del tutto analoga, si può provare il  
principio DUALE:

Teorema  $S$  insieme finito,  $\mathbb{P}(S)$  insieme delle parti di  $S$ .

Siano  $f, g : \mathbb{P}(S) \rightarrow \mathbb{R}$  due applicazioni tali che:

$$i) \sum_{A \supseteq B} f(A) = g(B) \quad \text{per ogni } B \in \mathbb{P}(S).$$

Allora sussiste la relazione inversa:

$$ii) f(B) = \sum_{A \supseteq B} (-1)^{|A|-|B|} \cdot g(A),$$

per ogni  $B \in \mathbb{P}(S)$ . □

## ESEMPIO FONDAMENTALE

Il numero delle applicazioni suriettive da un  $n$ -insieme su un  $m$ -insieme è dato da:

$$\sum_{t=0}^m \binom{m}{t} \cdot (-1)^{m-t} \cdot t^n$$

Dimostrazione Sia  $S = \{x_1, \dots, x_n\}$  un  $n$ -insieme,

$T = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$  un  $m$ -insieme.

Consideriamo le funzioni  $f, g: \mathbb{P}(T) \rightarrow \mathbb{R}$

così definite:

1) per ogni  $A \in \mathbb{P}(T)$ ,

$f(A) = \#$  applicazioni suriettive da  $S$  su  $A$ .

2) per ogni  $B \in \mathbb{P}(T)$ ,

$g(B) = \#$  applicazioni qualsiasi da  $S$  a  $B$ .

È ovvio che sussiste la relazione:

$$g(B) = \sum_{A \subseteq B} f(A), \text{ per ogni } B \in \mathbb{P}(T).$$

In virtù del principio di inversione, si ha allora:

$$f(B) = \sum_{A \subseteq B} (-1)^{|B|-|A|} g(A), \text{ per ogni } B \in \mathcal{P}(T).$$

Per  $B=T$ , si ha in particolare:

# applicazioni suriettive da  $S$  su  $T =$

$$= f(T) = \sum_{A \in \mathcal{P}(T)} (-1)^{|T|-|A|} g(A) =$$

$$= \sum_{t=0}^m \sum_{|A|=t} (-1)^{m-t} t^m = \sum_{t=0}^m \binom{m}{t} (-1)^{m-t} \cdot t^m.$$

COROLLARIO (Numeri di STIRLING di 2<sup>a</sup> SPECIE) -

Per definizione

$S(n, m) =$  # partizioni di un  $n$ -insieme  
in  $m$  blocchi -

Allora

$$S(n, m) = \frac{1}{m!} \sum_{t=0}^m \binom{m}{t} (-1)^{m-t} \cdot t^m.$$

Problema delle coincidenze generalizzato.

$$\{ \sigma \in \mathcal{S}_n; \text{Fix}(\sigma) \supseteq B \}$$

$$S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

$$\{ \sigma \in \mathcal{S}_n; \text{Fix}(\sigma) = A \}.$$

Si ha: per ogni  $B \in \mathcal{P}(S)$

$$\{ \sigma \in \mathcal{S}_n; \text{Fix}(\sigma) \supseteq B \} =$$

$$= \bigcup_{A \supseteq B} \{ \sigma \in \mathcal{S}_n; \text{Fix}(\sigma) = A \}$$

Questo implica: per ogni  $B \in \mathcal{P}(S)$ ,

$$g(B) \stackrel{\text{def}}{=} \left| \{ \sigma \in \mathcal{S}_n; \text{Fix}(\sigma) \supseteq B \} \right| =$$

$$= \sum_{A \supseteq B} \left| \{ \sigma \in \mathcal{S}_n; \text{Fix}(\sigma) = A \} \right| \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{A \supseteq B} f(A).$$

Ne segue: (INVERSIONE)

$$f(B) = \sum_{A \supseteq B} (-1)^{|A|-|B|} g(A) =$$

$$= \sum_{h=k}^n \left( \sum_{\substack{A \supseteq B \\ |A|=h}} (-1)^{h-k} (n-h)! \right) \quad \boxed{\text{per } |B|=k}$$

Però  $\# \{ \sigma \in \mathcal{S}_n; |\text{Fix}(\sigma)| = k \}$  egualmente

$$\binom{n}{k} \cdot f(B) =$$

$$= \binom{n}{k} \cdot \sum_{h=k}^n \binom{n-k}{h-k} (-1)^{h-k} (n-h)!$$

$$= \frac{n!}{k! (n-k)!} \sum_{h=k}^n \frac{\cancel{(n-k)!}}{(h-k)! \cancel{(n-k)!}} (-1)^{h-k} \cancel{(n-h)!}$$

$$= \frac{n!}{k!} \sum_{h=k}^n \frac{(-1)^{h-k}}{(h-k)!}$$

Corollario  $P(\{ \sigma \in \mathcal{S}_n, \text{Fix}(\sigma) = \emptyset \}) =$

$$= \sum_{h=0}^n \frac{(-1)^h}{h!} = e^{-1}$$

(6 ter)



## Principio di inclusione/esclusione

Sia  $\Omega$  un insieme finito,  $A_1, A_2, \dots, A_n$  sottoinsiemi fissati di  $\Omega$ .

Posto  $\underline{n} = \{1, 2, \dots, n\}$  definiamo una

funzione

$$g: \mathcal{P}(\underline{n}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

ponendo, per ogni  $T \subseteq \underline{n}$ ,

$$g(T) = \left| \bigcap_{i \in T} A_i \cap \bigcap_{i \notin T} A_i^c \right|$$

Pertanto

$$g(T) = \# \left\{ x \in \Omega; x \in A_i \forall i \in T, x \notin A_i \forall i \notin T \right\}$$

Si noti che  $g(\emptyset) = \Omega - \bigcup_{i=1}^n A_i$ .

One è chiaro che, posto, per ogni  $T \subseteq \underline{n}$ ,

$$f(T) = \sum_{S \supseteq T} g(S) \quad \text{ove}$$

$$f(T) = \left| \bigcap_{i \in T} A_i \right|$$

Si noti che, consistentemente,  $f(\emptyset) = |\Omega|$ .

Applicando il Teorema d'inversione (duale)

si ha

$$g(T) = \sum_{S \supseteq T} (-1)^{|S|-|T|} f(S) =$$
$$= \sum_{S \supseteq T} (-1)^{|S|-|T|} \left| \bigcap_{i \in S} A_i \right|.$$

Per  $T = \emptyset$ , risulta:

$$g(\emptyset) = \left| \Omega - \bigcup_{i=1}^m A_i \right| =$$

$$= \sum_{S \supseteq \emptyset} (-1)^{|S|} \left| \bigcap_{i \in S} A_i \right| =$$

$$= \sum_{k=0}^m (-1)^k \sum_{\substack{S \text{ t.c.} \\ |S|=k}} \left| \bigcap_{i \in S} A_i \right| = \sum_{k=0}^m (-1)^k S_k \quad \% \quad \square$$

(FORMULA DI SYLVESTER)

$\% \quad \underline{\text{potendo}}$   $S_k = \sum_{|S|=k} \left| \bigcap_{i \in S} A_i \right|$

## FORMULA DI CHARLES JORDAN

Sia  $e_r$  il numero degli elementi di  $\Omega$  che appartengono esattamente ad  $r$  degli insiemi  $A_1, A_2, \dots, A_n$ .

Allora

$$\begin{aligned} e_r &= \sum_{|T|=r} g(T) = \\ &= \sum_{|T|=r} \left( \sum_{S \supseteq T} (-1)^{|S|-r} f(S) \right) = \\ &= \sum_{|T|=r} \left( \sum_{S \supseteq T} (-1)^{|S|-r} \left| \bigcap_{i \in S} A_i \right| \right) \\ &= \sum_{|S| \geq r} \sum_{\substack{T \subseteq S \\ |T|=r}} (-1)^{|S|-r} \left| \bigcap_{i \in S} A_i \right| \\ &= \sum_{|S| \geq r} \binom{|S|}{r} (-1)^{|S|-r} \left| \bigcap_{i \in S} A_i \right| \\ &= \sum_{k=r}^n (-1)^{k-r} \binom{k}{r} \sum_{|S|=k} \left| \bigcap_{i \in S} A_i \right| = \\ &= \sum_{k=r}^n (-1)^{k-r} \binom{k}{r} \cdot S_k \cdot \square \end{aligned}$$

( per  $r=0$  si ha le formule di Sylvestre )

## PROBLEMA DELLE CONCORDANZE GENERALIZZATO

Sia  $S_n$  l'insieme delle permutazioni di  $\underline{n} = \{1, 2, \dots, n\}$ .

Sia  $e_r(n) = \{ \sigma \in S_n; \sigma \text{ ha esattamente } r \text{ punti fissi} \}$ .

Fissiamo  $\Omega = S_n$  e, per ogni  $i = 1, 2, \dots, n$ ,

$A_i = \{ \sigma \in \Omega = S_n; \sigma(i) = i \}$ .

Si ha chiaramente

$$|\bigcap_{i \in S} A_i| = (n - |S|)!$$

$$\begin{aligned} e_r(n) &= \sum_{k=r}^n (-1)^{k-r} \binom{k}{r} \binom{n}{k} (n-k)! = \\ &= \frac{n!}{r!} \sum_{k=r}^n \frac{(-1)^{k-r}}{(k-r)!} \end{aligned}$$

Per  $r=0$ , la probabilità che una permutazione

non abbia punti fissi è

$$\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e} \quad \square$$

## Principio di inclusione/esclusione e misure.

Sia  $\nu: S \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione a valori non-negativi.  $\nu$  si estende ad una funzione

$\mu: \mathbb{P}(S) \rightarrow \mathbb{R}$  ponendo

$$\mu(A) = \sum_{p \in A} \nu(p) \quad , \text{ per ogni } A \in \mathbb{P}(S)$$

Ovviamente  $\mu(\emptyset) = 0$ . Una funzione del

tipo  $\mu$  si dice MISURA su S.

In modo del tutto analogo a quanto fatto per la formula di Sylvester, si prova:

Teorema Sia  $S$  insieme finito,  $A_1, A_2, \dots, A_b$  sottoinsiemi di  $S$ ,  $T = \{1, 2, \dots, b\}$ . Sia

$\mu$  una misura su  $S$ . Allora:

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^b A_i\right) = \sum_{i=1}^b \mu(A_i) - \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^b \mu(A_i \cap A_j) +$$

$$+ \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ i < j < k}}^b \mu(A_i \cap A_j \cap A_k) - \dots + (-1)^{b+1} \mu(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_b).$$

Problema 1 Sia  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  un alfabeto di  $n$  lettere - Quante sono le parole  $w$  su  $X$  di lunghezza  $2n$ , tali che:

- i) ogni lettera compare esattamente 2 volte -
- ii) due caselle consecutive non sono mai occupate dalle stesse lettere -

Soluzione Per ogni  $n \in \mathbb{Z}^+$

Sia  $\Omega_n = \left\{ w ; w \text{ parole di lunghezza } 2n \right.$   
 $\left. \text{che soddisf. i)} \right\}$

Ovviamente  $|\Omega_n| = \binom{2n}{2; \dots; 2} = \frac{2n!}{2^n}$  -

Per ogni  $i = 1, 2, \dots, 2n-1$ , poniamo

$$A_i = \left\{ w = x_1 x_2 \dots x_{2n} ; x_i = x_{i+1} \right\}$$

Posto

$$\Psi_n = \left| \left\{ w \in \Omega_n ; w \text{ soddisfa ii)} \right\} \right| ,$$

si ha ovviamente

$$\Psi_n = \left| \Omega_n - \bigcup_{i=1}^{2n-1} A_i \right| \quad \text{Allora,}$$

dal principio di inclusione/esclusione, si ha:

$$\Psi_n = \sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k \left( \sum_{|S|=k} \left| \bigcap_{i \in S} A_i \right| \right) \quad (*)$$

Si noti ora:

1) Se  $|S| > n$ , allora  $\bigcap_{i \in S} A_i = \emptyset$  - (VEDI 2)

2) Se  $S = \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$ ,  $k \leq n$  ed  $S$  contiene due interi consecutivi, allora

$$\bigcap_{i \in S} A_i = \emptyset$$

3) Se  $S = \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$ ,  $k \leq n$  ed  $S$  NON contiene due interi consecutivi, allora

$$\left| \bigcap_{i \in S} A_i \right| = \binom{n}{k} \binom{2n-2k}{2; 2; \dots; 2} = \binom{n}{k} \cdot \frac{(2n-2k)!}{2^{n-k}}$$

4) Le  $k$ -uple  $S = \{i_1, i_2, i_3, \dots, i_k\}$  di tipo 3) sono esattamente

$$\binom{2n-1-k+1}{k} = \binom{2n-k}{k} \quad \left( \begin{array}{l} \text{caso particolare} \\ \text{di Herzogme} \end{array} \right)$$

5) Perciò, da 1), 2), 3) e 4), risulta

$$\sum_{|S|=k} \left| \bigcap_{i \in S} A_i \right| = \begin{cases} \binom{2n-k}{k} \cdot \binom{n}{k} \cdot \frac{(2n-2k)!}{2^{n-k}} & \text{se } k \leq n \\ 0 & \text{se } k > n. \end{cases}$$

In conclusione, da (\*) risulta

$$\psi_m = \sum_{k=0}^m (-1)^k \frac{(2m-k)_k}{k!(2m-k)!} \cdot \binom{m}{k} \cdot \frac{(2m-2k)!}{2^{m-k}} =$$

$$= \sum_{k=0}^m (-1)^k \frac{(2m-k)!}{k! 2^{m-k}} \binom{m}{k} \cdot \square$$

ESEMPIO

$$\psi_1 = 0, \quad \psi_2 = 2, \quad \psi_3 = 30.$$

—————x



## Problema 2 (Funzione $\phi$ di Eulero)

Sia  $n \in \mathbb{Z}^+$ ,  $\underline{n} = \{1, 2, \dots, n\}$  - Sia

$n = p_1^{i_1} \cdot p_2^{i_2} \cdot \dots \cdot p_r^{i_r}$ , la presentazione di  $n$  come prodotto di fattori primi diversi da 1. (Unica a meno dell'ordine) - Sia

$\phi(n) = \#$  degli interi positivi  $m \leq n$  tali che  
M.C.D.  $(m, n) = 1$  ("primi con  $n$ ")

Allora

$$\phi(n) = n \cdot \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_{r-1}}\right) \left(1 - \frac{1}{p_r}\right).$$

Soluzione Per ogni  $i = 1, 2, \dots, r$ , poniamo

$A_i = \{m \in \underline{n}; p_i | m\}$  - Dal principio di

inclusione/esclusione si ha:

$$\phi(n) = \left| \underline{n} - \bigcup_{i=1}^r A_i \right| = \sum_{k=0}^r (-1)^k \sum_{\substack{S \subseteq \{1, \dots, r\} \\ |S|=k}} \left| \bigcap_{i \in S} A_i \right| \quad (*)$$

Ora, se  $S = \{i_1, i_2, \dots, i_k\} \subseteq \{1, 2, \dots, r\}$ , si ha:

$$\begin{aligned} \left| \bigcap_{i \in S} A_i \right| &= \left| \{m \in \underline{n}; m \text{ \u00e9 divisibile per } p_{i_1} p_{i_2} \dots p_{i_k}\} \right| = \\ &= \frac{n}{p_{i_1} p_{i_2} \dots p_{i_k}} \end{aligned}$$

Le formule (\*) danno allora:

$$\phi(n) = n \cdot \left[ 1 - \sum_{i=0}^r \frac{1}{p_i} + \sum_{\substack{i,j=0 \\ i < j}}^r \frac{1}{p_i p_j} - \right. \\ \left. - \sum_{\substack{i,j,k=0 \\ i < j < k}}^r \frac{1}{p_i p_j p_k} + \sum_{\substack{i,j,h,k=0 \\ i < j < h < k}}^r \frac{1}{p_i p_j p_h p_k} - \dots + \frac{(-1)^r}{p_1 p_2 p_3 \dots p_r} \right] = \\ = n \cdot \left( 1 - \frac{1}{p_1} \right) \left( 1 - \frac{1}{p_2} \right) \dots \left( 1 - \frac{1}{p_{r-1}} \right) \left( 1 - \frac{1}{p_r} \right) \quad \square$$

ESEMPIO 1  $m = 250 = 2 \cdot 5^3$ . Perciò  $r = 4$  e, senza perdita di generalità  $p_1 = 2, p_2 = 5, \dots$

Perciò

$$\phi(250) = 250 \cdot \left( 1 - \frac{1}{2} \right) \left( 1 - \frac{1}{5} \right) = 100 \quad \square$$

In conclusione, vi sono 64 interi positivi  $\leq 250$  primi con 250.  $\square$

ESEMPIO 2  $m = 1000 = 2^3 \cdot 5^3$

$$\phi(1000) = 1000 \cdot \left( 1 - \frac{1}{2} \right) \left( 1 - \frac{1}{5} \right) = 400 \quad \square$$

Esercizio Siano  $m, n \in \mathbb{Z}^+$  tali che  $\text{MCD}(m, n) = 1$ .

Si provi che  $\phi(m \cdot n) = \phi(m) \phi(n)$ .

Soluzione Per ipotesi, avremo  $n = p_1^{i_1} p_2^{i_2} \dots p_k^{i_k}, m = q_1^{j_1} q_2^{j_2} \dots q_h^{j_h}$

con  $p_s, q_t$  primi,  $p_s \neq q_t$ , per ogni  $s = 1, 2, \dots, k, t = 1, 2, \dots, h$ .

$$\text{Allora } \phi(m \cdot n) = m \cdot n \left( 1 - \frac{1}{p_1} \right) \dots \left( 1 - \frac{1}{p_k} \right) \left( 1 - \frac{1}{q_1} \right) \dots \left( 1 - \frac{1}{q_h} \right) = \\ = \phi(m) \cdot \phi(n) \quad \square$$

Ripercorriamo il precedente procedimento generale in un caso concreto.

Esercizio. Sia  $n = 60$ . Calcolare

$$\phi(n) = \# \{m \in \mathbb{Z}^+; m \leq n, \text{MCD}(m, n) = 1\}.$$

Soluzione Si ha  $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$ .

Poniamo  $p_1 = 2$ ,  $p_2 = 3$ ,  $p_3 = 5$ , da cui  $60 = p_1^2 p_2 p_3$ .

Siano  $A_1 = \{m \in \underline{60}; 2|m\}$ ,  $A_2 = \{m \in \underline{60}; 3|m\}$ ,  $A_3 = \{m \in \underline{60}; 5|m\}$ ,

da cui

$$A_1 \cap A_2 = \{m \in \underline{60}; 2|m \text{ e } 3|m\}, \quad A_1 \cap A_3 = \{m \in \underline{60}; 2|m \text{ e } 5|m\}$$

$$A_2 \cap A_3 = \{m \in \underline{60}; 3|m \text{ e } 5|m\}, \quad A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \{m \in \underline{60}; 2|m \text{ e } 3|m \text{ e } 5|m\}.$$

Ovviamente  $\Omega = \{m \in \mathbb{Z}^+; m \leq n = 60\}$  e la soluzione è data

da  $\phi(60) = |\Omega - \bigcup_{i=1}^3 A_i|$ . Dalle formule di Sylvester,

$$\phi(60) = |\Omega| - |A_1| - |A_2| - |A_3| + |A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3| - |A_1 \cap A_2 \cap A_3|.$$

$$\text{Però } \phi(60) = 60 - \frac{60}{2} - \frac{60}{3} - \frac{60}{5} + \frac{60}{2 \cdot 3} + \frac{60}{2 \cdot 5} + \frac{60}{3 \cdot 5} - \frac{60}{2 \cdot 3 \cdot 5} =$$

$$= 60 \left( 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 5} - \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 5} \right) =$$

$$= 60 \left( 1 - \frac{1}{2} \right) \left( 1 - \frac{1}{3} \right) \left( 1 - \frac{1}{5} \right) = 60 \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \right) = 16.$$

(16 lis)

Esercizio 1 Sia  $c \in \mathbb{Z}^+$ . In quanti modi  $D_{n,k}^c$  posso disporre  $k$  biglietti indistinguibili in  $n$  urne in modo che ogni urna contenga al più  $c$  biglietti?

Soluzione Procediamo per ricorrenza sul numero delle urne.

Notiamo che:

$$i) D_{0,k}^c = \delta_{0,k}, \quad ii) D_{1,k}^c = \begin{cases} 1 & \text{se } k \leq c \\ 0 & \text{se } k > c. \end{cases}$$

iii) (Ricorrenza)

$$D_{n,k}^c = D_{n-1,k}^c + D_{n-1,k-1}^c + \dots + D_{n-1,k-c}^c$$

$$\text{Sia } M^c: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, \quad M^c(n,k) = D_{n,k}^c.$$

La funzione generatrice  $M_0^c(t) = 1$ , mentre

$$M_1^c(t) = 1 + t + t^2 + \dots + t^c \quad (*)$$

Consideriamo la funzione generatrice della riga  $n$ -esima:

$$M_n^c(t) = \sum_{k=0}^{\infty} D_{n,k}^c t^k$$

$$\text{Poiché } D_{n,k}^c \underset{\text{ricorrenza}}{=} \sum_{i=0}^c D_{n-1,k-i}^c \underset{\text{da } (*)}{=} \sum_{i=0}^k D_{n-1,k-i}^c D_{1,i}^c,$$

segue che

$$M_n^c(t) = M_{n-1}^c(t) M_1^c(t),$$

da cui

$$M_n^c(t) = (M_1^c(t))^n = (1 + t + \dots + t^c)^n \quad \square$$

Osservazione Si noti che, per  $c=1$ ,  $M_1^1(t) = 1+t$ ,

quindi  $D_{n,k}^1 = \binom{n}{k}$ , coerentemente col fatto che

il problema coincide con le statistiche di Fermi-Dirac.

I prossimi esercizi sono generalizzazioni del precedente; la variazione è che il vincolo superiore NON è costante, bensì varia.

Approfiteremo prima un caso "concreto", poi il caso generale; il caso generale è noto in FISICA TEORICA come "Statistica di GENTILE - (FERMI - EINSTEIN)".

Ricordiamo che il numero di soluzioni intere non-negative della equazione

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = k$$

col vincolo inferiore  $x_1 \geq a_1, x_2 \geq a_2, \dots, x_n \geq a_n$

è uguale a:

$$\binom{n}{k - a_1 - a_2 - \dots - a_n} = \binom{n + k - a_1 - a_2 - \dots - a_n - 1}{n - 1}$$

La soluzione è un significativo esempio della forma di Sylvester per il principio di inclusione/esclusione.

ESERCIZIO 1 bis In quanti modi si possono

disporre 5 lighe INDISTINGUIBILI in 3 urne,  
col vincolo che la prima urna contenga al più  
3 lighe, la seconda urna contenga al più 1  
lighe, la terza urna contenga al più 2  
lighe.

Sol. Si tratta di contare il numero di  
soluzioni intere non-negative della equazione

$$x_1 + x_2 + x_3 = 5$$

soggette alle condizioni  $x_1 \leq 3$ ,  $x_2 \leq 1$ ,  $x_3 \leq 2$

Soluzione Sia

$$\Omega = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in (\mathbb{Z}^+)^3; x_1 + x_2 + x_3 = 5 \right\}$$

e siano

$$A_1 = \left\{ (x_1, x_2, x_3); x_1 + x_2 + x_3 = 5, x_1 \geq 4 \right\}$$

$$A_2 = \left\{ (x_1, x_2, x_3); x_1 + x_2 + x_3 = 5, x_2 \geq 2 \right\}$$

$$A_3 = \left\{ (x_1, x_2, x_3); x_1 + x_2 + x_3 = 5, x_3 \geq 3 \right\}$$

Le soluzioni  $\bar{e}$  data da  $|\Omega - \bigcup_{i=1}^3 A_i| \stackrel{I/E}{=} \dots$

$$|\Omega| - |A_1| - |A_2| - |A_3| + |A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3| - |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$$

$$\text{Ora } |\Omega| = \binom{3}{5} = 21, |A_1| = \binom{3}{1} = 3, |A_2| = \binom{3}{3} = 10$$

$$|A_3| = \binom{3}{2} = 6, |A_1 \cap A_2| = |A_1 \cap A_3| = 0, |A_2 \cap A_3| = \binom{3}{0} = 1$$

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 0. \text{ Perciò}$$

$$|\Omega - \bigcup_{i=1}^3 A_i| = 21 - 3 - 10 - 6 + 0 + 0 + 1 + 0 = 3$$

## Esercizio 1 ter (caso generale)

Si tratta di trovare le soluzioni intere non-negative di

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = k$$

soggette ai vincoli superiori  $x_1 < a_1, x_2 < a_2, \dots, x_n < a_n$ ?

Soluzione

$$\text{Sia } \Omega = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{Z}^+)^n ; x_1 + \dots + x_n = k \right\}.$$

Per  $i = 1, 2, \dots, n$ , sia

$$A_i = \left\{ (x_1, \dots, x_n) ; x_1 + \dots + x_n = k, x_i \geq a_i \right\}.$$

La soluzione è data da  $|\Omega - \bigcup_{i=1}^n A_i|$ .

Per la formula di Sylvestre questa cardinalità è

dato da

$$|\Omega - \bigcup_{i=1}^n A_i| =$$

$$= \sum_{h=0}^n (-1)^h \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_h \leq n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_h}|$$

$$= \sum_{h=0}^n (-1)^h \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_h \leq n} \left\langle k - a_{i_1} - a_{i_2} - \dots - a_{i_h} \right\rangle$$

□

Esercizio Data una tavola circolare con  $2n$  posti numerati  $1, 2, \dots, 2n$ , dimostrare che il numero di modi scegliere  $k$  posti in modo che nessi 2 siano ADIACENTI è dato da:

$$\frac{2n}{2n-k} \binom{2n-k}{k}$$

Soluzione. Si tratta di applicare due volte la soluzione del problema di Fermone nel caso di "lacune" uguale ad 1. Ricordiamo che, dati  $m$  ed  $h$ , il numero di  $h$ -sottosinsiemi del segmento  $m$  che non contengano due interi consecutivi è dato da

$$\binom{h+1}{m-h-(h-1)} = \binom{h+1}{m-2h+1} = \binom{m-h+1}{h} \quad (*)$$

Nel nostro caso dobbiamo considerare due casi.

1) Le  $k$ -ple considerate contiene il posto contrassegnato 1.

Dobbiamo perciò considerare le  $(k-1)$ -parti dell'insieme  $\{3, 4, \dots, 2n-1\}$  (che ha  $2n-3$  elementi) non contenenti due interi consecutivi. In base a (\*),

ponendo  $m = 2n-3$ ,  $h = k-1$ , queste sono in numero di

$$\binom{2n-3-k+1+1}{k-1} = \binom{2n-k-1}{k-1}$$



2) La  $k$ -pla considerata NON contiene il posto contrassegnato 1. Dobbiamo perciò considerare le  $k$ -parti del segmento  $\{2, 3, \dots, 2n\}$  (che ha  $2n-1$  elementi) non contenenti due interi consecutivi. In base a (\*), ponendo  $m = 2n-1$ ,  $h = k$ , queste sono in numero di

$$\binom{2n-1-k+1}{k} = \binom{2n-k}{k}.$$

Perciò il numero cercato è:

$$\binom{2n-k-1}{k-1} + \binom{2n-k}{k} \quad (*)$$

Si noti ora che per  $m, h \in \mathbb{Z}^+$ , risulta

$$\begin{aligned} \binom{m-h-1}{h-1} + \binom{m-h}{h} &= \frac{h(m-h-1)! + (m-h)(m-h-1)!}{h!(m-2h)!} = \\ &= \frac{m}{m-h} \cdot \frac{(m-h)(m-h-1)!}{h!(m-2h)!} = \frac{m}{m-h} \binom{m-h}{h}. \end{aligned}$$

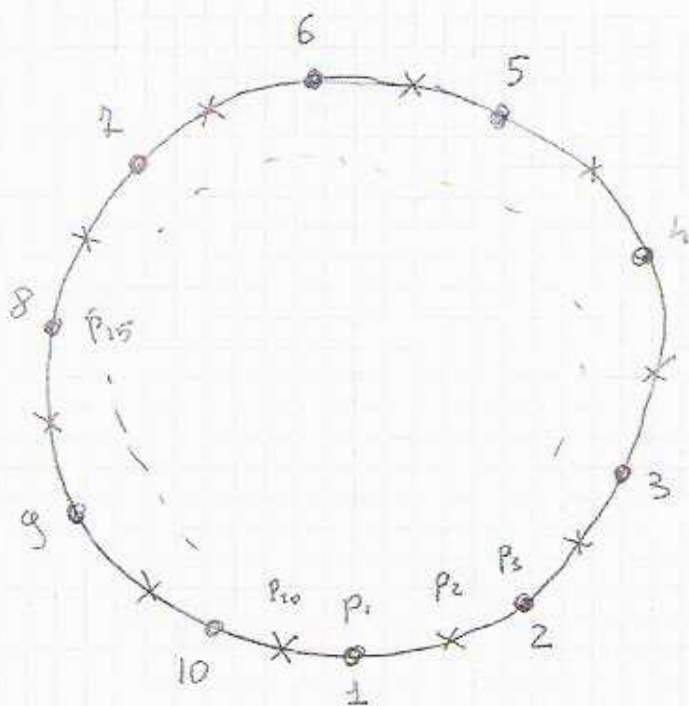
Ponendo  $m = 2n$ ,  $h = k$ , la (\*) diventa:

$$\frac{2n}{2n-k} \binom{2n-k}{k} = \quad \underline{\text{C.V.D.}} \quad \square$$

### Probleme 3 (Probleme des MÈNAGES, Lucas 1891)

In quanti modi si possono disporre  $n$  signori  
(numerati  $1, 2, \dots, n$ ) e le rispettive consorti (numerate  
 $1', 2', \dots, n'$ ) attorno ad un tavolo circolare con  
posti numerati, in modo che nessun signore abbia  
al proprio fianco la consorte?

Preliminarmente, consideriamo il cosiddetto  
problema ridotto: gli uomini non già seduti  
nei posti dispari in ordine crescente leggendo  
in senso ~~orario~~ antiorario:



$$n = 10 \quad 20 \text{ posti} = \{ p_1, p_2, \dots, p_{20} \}$$

In questo schema, una disposizione delle signore può essere riguardata come una **BIIEZIONE**

$$f: \underline{n} = \{1, 2, \dots, n\} \xrightarrow{1-1} \underline{n}' = \{1', 2', \dots, n'\}$$

ove  $f(i) =$  signora seduta a ~~destra~~<sup>sinistra</sup> del signore  $i$ ,  
per ogni  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Per  $i \in \underline{n}$ , sia

$$A_{2i-1} = \{f: \underline{n} \rightarrow \underline{n}'; f(i) = i'\}$$

Per  $i \in \underline{n-1} = \{1, 2, \dots, n-1\}$ , sia

$$A_{2i} = \{f: \underline{n} \rightarrow \underline{n}'; f(i) = (i+1)'\}$$

Infine, poniamo

$$A_{2n} = \{f: \underline{n} \rightarrow \underline{n}'; f(n) = 1'\}$$

Poster  $\Omega = \{f: \underline{n} \rightarrow \underline{n}'; f \text{ biettiva}\}$ , la  
soluzione del problema ridotto è data da

$$U_n = \left| \Omega - \bigcup_{j=1}^{2n} A_j \right|$$

Ora, per ogni  $T \subseteq \underline{2m} = \{1, 2, \dots, 2m\}$

si ha

$$\left| \bigcap_{j \in T} A_j \right| = \begin{cases} (m - |T|)! & \text{se } T \text{ non contiene} \\ & \text{due interi consecutivi} \\ & \text{della successione} \\ & 1, 2, 3, \dots, 2m, 1 \\ \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Quindi dobbiamo risolvere il seguente problema:  
dato  $k$ , quante sono le  $k$ -parti di  
 $\underline{2m} = \{1, 2, \dots, 2m\}$  che non contengono 2 interi  
consecutivi, NE' la coppia  $\{1, 2m\}$ ?

Le  $k$ -parti contenenti 1 non possono contenere ne' 2 ne'  $2m$ ;  
quindi è come scegliere una  $(k-1)$ -pla in  $\{3, \dots, 2m-1\}$   
e ciò si può fare in  $\binom{2m-k-1}{k-1}$  modi -

Quelle che non contengono 1 sono ovviamente:

$$\binom{2m-k}{k} \quad (\text{in } \{2, 3, \dots, 2m\})$$

Quindi il numero cercato è

$$\binom{2m-k-1}{k-1} + \binom{2m-k}{k} = \frac{2m}{2m-k} \binom{2m-k}{k}$$

Applicando le formule di Sylvestre, per  $n \geq 2$ ,  
si ha quindi:

$$U_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{2m}{2m-k} \binom{2m-k}{k} \cdot (n-k)!$$

(FORMULA DI TOUCHARD, 1934)

Passando dal problema ridotto a quello generale, basta osservare che i riquadri possono sistemarsi o nei posti dispari o nei posti pari, ed, in entrambi i casi, secondo una disposizione (permutazione di  $\underline{n} = \{1, 2, \dots, n\}$ ) qualsiasi. Perciò la soluzione del problema generale è:

$$2 \cdot n! \cdot U_n \quad \square$$