**Matematica Discreta - Principio di Inversione di Moebius**

1. **Teorema binomiale.** Questo teorema, nella sua forma piu' elementare, afferma che, in una qualsiasi algebra di polinomi in una variabile $x$, vale l'identita'

$$(1+x)^n = \sum_{h=0}^{n} \binom{n}{h} x^h,$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Una sua dimostrazione, basata sulla definizione del coefficiente binomiale $\binom{n}{h}$ come numero degli $h-$sottinsiemi di un $n-$insieme, si puo' dedurre dall'identita'

$$\begin{aligned}&(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n) = \\ &\qquad = 1 + \sum_{1\le i\le n} a_i \ + \sum_{1\le i<j\le n} a_i a_j \ + \sum_{1\le i<j<h\le n} a_i a_j a_h \ + \cdots \ + a_1 a_2 \cdots a_n,\end{aligned}$$

in breve,

$$\prod_{i=1}^{n}(1+a_i) = \sum_{h=0}^{n} \sum_{1\le i_1<\cdots<i_h\le n} a_{i_1}\cdots a_{i_h},$$

valida in una qualsiasi algebra di polinomi nelle variabili $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Infatti, ponendo $a_i = x$ per ogni $i = 1, 2, \ldots, n$, si ha

$$(1+x)^n = \sum_{h=0}^{n} \sum_{1\le i_1<\cdots<i_h\le n} x^h = \sum_{h=0}^{n} \binom{n}{h} x^h.$$

2. Dal teorema binomiale, espresso nella forma

$$(x+y)^n = \sum_{h=0}^{n} \binom{n}{h} x^h y^{n-h},$$

assegnando ad una variabile il valore 1 e all'altra il valore -1, si ottengono le identita'

$$\sum_{h=0}^{n}(-1)^h \binom{n}{h} = \sum_{h=0}^{n}(-1)^{n-h}\binom{n}{h} = \begin{cases} 1 & se \quad n=0 \\ 0 & se \quad n>0 \end{cases}.$$

3. **Teorema multinomiale** Questo teorema, nella sua forma piu' elementare, afferma che, in una qualsiasi algebra di polinomi in $m$ variabili $x_1, x_2, \ldots, x_m$, vale l'identita'

$$(x_1+x_2+\cdots+x_m)^n = \sum_{h_1+h_2+\cdots+h_m=n} \binom{n}{h_1, h_2, \ldots, h_m} x_1^{h_1} x_2^{h_2} \cdots x_m^{h_m},$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Una sua dimostrazione, basata sul significato del coefficiente multinomiale $\binom{n}{h_1,h_2,\ldots,h_m}$ come numero degli anagrammi di una parola di lunghezza $n$ su un alfabeto di $m$ lettere, ripetute $h_1, h_2, \ldots, h_m$ volte, si puo' ottenere direttamente:

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_m)^n = \sum_{i_1,i_2,\ldots,i_n=1}^{m} x_{1i} x_{i_2} \cdots x_{i_n} =$$
$$= \sum_{h_1+h_2+\cdots+h_m=n} \binom{n}{h_1, h_2, \ldots, h_m} x_1^{h_1} x_2^{h_2} \cdots x_m^{h_m}.$$

4. **Serie formali**

Una scrittura del tipo

$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_i x^i + \cdots$ ,

in breve

$\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$,

dove $a_0, a_1, \ldots, a_i, \ldots$ e' una successione di numeri reali e $x$ e' una indeterminata, viene detta *serie formale* in $x$. I simboli $x, x^2, \ldots, x^i, \ldots$ vengono pensati come segnaposto dei termini della successione, e non come valori di una variabile reale e delle sue potenze, cosa che porrebbe problemi di convergenza.

La somma di due serie formali

$A = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$,

$B = \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i$,

e' la serie formale

$A + B = C = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i$,

dove

$c_i = a_i + b_i, \qquad \forall i = 1, 2, \ldots.$

L'addizione di serie formali e' associativa e commutativa come l'addizione di numeri reali; l'analogo del numero zero e' giocato dalla serie formale corrispondente alla successione identicamente nulla $0, 0, \ldots, 0, \ldots$, detta serie formale nulla ed indicata con $0$ :

$0 = 0 + 0x + 0x^2 + \cdots + 0x^i + \cdots$ .

Il prodotto di due serie formali

$A = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$,

$B = \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i$,

e' la serie formale

$AB = C = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i$,

dove

$c_i = a_0 b_i + a_1 b_{i-1} + \ldots + a_{i-1} b_1 + a_i b_0 = \sum_{i_1+i_2=i} a_{i_1} b_{i_2} \qquad \forall i = 1, 2, \ldots.$

La moltiplicazione di serie formali e' associativa e commutativa come la moltiplicazione di numeri reali; l'analogo del numero uno e' giocato dalla serie formale corrispondente alla successione $1, 0, \ldots, 0, \ldots,$ detta serie formale unita' ed indicata con $1$ :

$1 = 1 + 0x + 0x^2 + \cdots + 0x^i + \cdots$

(lo si verifichi).

Anche la proprieta' distributiva che lega moltiplicazione e addizione continua a valere. L'algebra delle serie formali corrispondenti a successioni definitivamente nulle coincide con l'algebra dei polinomi. Precisamente, ogni polinomio

$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$

nell'indeterminata $x$ puo' essere identificato come una serie formale

$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + 0x^{n+1} + 0x^{n+2} + \cdots ,$

e questa identificazione e' compatibile con le operazioni di addizione e moltiplicazione per polinmomi e serie formali.

Esercizio: verificare che

$(1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots)(1 - x) = 1;$

cio' implica che

$1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = \frac{1}{(1-x)}.$

5. Nell'algebra delle serie formali vale l'identita'

$$\left[\sum_{h\in S_1} x^h\right]\left[\sum_{h\in S_2} x^h\right]\cdots\left[\sum_{h\in S_n} x^h\right] = \sum_{h=0}^{\infty} c(S_1, S_2, \ldots, S_n; h)x^h,$$

dove $c(S_1, S_2, \ldots, S_n; h)$ e' il numero delle soluzioni intere naturali dell'equazione

$$h_1 + h_2 + \cdots + h_n = h,$$

soggette alle condizioni

$h_1 \in S_1, h_2 \in S_2, \ldots, h_n \in S_n,$

dove $S_1, S_2, \ldots, S_n$ sono sottinsiemi di $\mathbb{N}$.

Questa identita' puo' essere ottenuta dalla formula per il prodotto di piu' serie formali

$$\left[\sum_{h=0}^{\infty} a_{1h}x^h\right]\left[\sum_{h=0}^{\infty} a_{2h}x^h\right]\cdots\left[\sum_{h=0}^{\infty} a_{nh}x^h\right] = \sum_{h=0}^{\infty}\left[\sum_{h_1+h_2+\cdots+h_n=h} a_{1h_1}a_{2h_2}\cdots a_{nh_n}\right]x^h,$$

che porge

$$\left[\sum_{h\in S_1} x^h\right]\left[\sum_{h\in S_2} x^h\right]\cdots\left[\sum_{h\in S_n} x^h\right] = \sum_{h=0}^{\infty}\left[\sum_{\substack{h_1+h_2+\cdots+h_n=h\\ h_i\in S_i,\ \forall i}} 1\right]x^h.$$

6. In base alle considerazioni svolte sulle equazioni a soluzioni intere non negative (cfr. tesi Masini, cap III), dall'identita' del punto precedente

- per $S_1 = S_2 = \ldots = S_n = \mathbb{N}$, si ottiene

$$\left[\sum_{h=0}^{\infty} x^h\right]^n = \sum_{h=0}^{\infty} \langle {n \atop h} \rangle x^h,$$

  dove i coefficienti $\langle {n \atop h} \rangle$ sono i coefficienti multinsiemistici; questa identita' si puo' riscrivere anche nella forma

$$\sum_{h=0}^{\infty} \langle {n \atop h} \rangle x^h = \frac{1}{(1-x)^n};$$

- per $S_1 = S_2 = \ldots = S_n = \{0, 1\}$ si ottiene il teorema binomiale

$$(1+x)^n = \sum_{h=0}^{n} \binom{n}{h} x^h.$$

Altre identita' interessanti si ottengono per $S_i = \{n_i, n_{i+1}, \ldots\}$, oppure per $S_i = \{1, 2, \ldots, n_i\}$.