Matematica Discreta - Principio di Inclusione-Esclusione

1. Si puo' dire che il principio di inclusione-esclusione descrive un modo in cui si puo' ricavare la cardinalita' dell'insieme unione in funzione delle cardinalita' delle intersezioni degli insiemi unendi.

   Per due insiemi A, B afferma che

   $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$;

   e per tre insiemi A, B, C

   $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$.

   In generale, per n insiemi $A_1, A_2, \ldots, A_n$ afferma che

   $$|\bigcup_{i=1}^{n} A_i| = \sum_{h=1}^{n} (-1)^{h-1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_h \leq n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_h}|,$$

   in altra forma,

   $$|\bigcup_{i \in [n]} A_i| = \sum_{h=1}^{n} (-1)^{h-1} \sum_{S \subseteq [n]:\ |S|=h} |\bigcap_{i \in S} A_j|,$$

   oppure

   $$|\bigcup_{i \in [n]} A_i| = \sum_{\emptyset \neq S \subseteq [n]} (-1)^{|S|-1} |\bigcap_{i \in S} A_i|,$$

   dove $[n]$ indica l'insieme $\{1, 2, \ldots, n\}$.

   Si osservi che, se gli n insiemi $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sono contenuti in un insieme finito Ω, allora

   $$|\Omega \setminus \bigcup_{i=1}^{n} A_i| = |\Omega| - |\bigcup_{i=1}^{n} A_i| =$$

   $$= |\Omega| - \sum_{\emptyset \neq S \subseteq [n]} (-1)^{|S|-1} |\bigcap_{i \in S} A_i| = \sum_{S \subseteq [n]} (-1)^{|S|} |\bigcap_{i \in S} A_i|,$$

   dove si intende che $\bigcap_{i \in \emptyset} A_i = \Omega$. E' proprio questa forma

   $$|\Omega \setminus \bigcup_{i=1}^{n} A_i| = \sum_{S \subseteq [n]} (-1)^{|S|} |\bigcap_{i \in S} A_i|$$

   ad essere piu' usata nelle applicazioni.

2. Il primo caso significativo del principio di inclusione-esclusione

   $$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$$

   puo' essere giustificato dicendo che, cosi' come al primo membro anche al secondo membro ciascun elemento di $A_1 \cup A_2$ viene contato esattamente una volta: quelli che appartengono solo ad A_1 danno contributo 1 + 0 + 0 = 1, quelli che appartengono solo ad A_2 danno contributo 0 + 1 + 0 = 1, quelli che appartengono ad $A_1 \cap A_2$ danno contributo 1 + 1 - 1 = 1.

3. Questo punto di vista puo' essere formalizzato opportunamente per dare una dimostrazione del principio di inclusione-esclusione nel caso generale.

   Sia Ω un insieme finito. Ogni sottinsieme $A \subseteq \Omega$ puo' essere rappresentato da una funzione
$$\chi_A : \Omega \rightarrow \{0,1\}$$
   definita da
$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & se \quad x \in A \\ 0 & se \quad x \notin A \end{cases},$$
   detta *funzione caratteristica* di A in Ω. Si noti che la cardinalita' di un sottinsieme e' la somma dei valori delle sua funzione caratteristica:
$$|A| = \sum_{x \in \Omega} \chi_A(x).$$

   Piu' in generale, possiamo considerare le funzioni
$$f : \Omega \rightarrow \mathbb{Z}$$
   dall'insieme Ω verso gli interi relativi, e porre:
$$|f| = \sum_{x \in \Omega} f(x).$$

   Si noti che, per ogni sottinsieme A di Ω, si ha

   $|A| = |\chi_A|$.

   Possiamo definire la somma due funzioni

   $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{Z}$,

   come la funzione

   $f + g : \Omega \rightarrow \mathbb{Z}, \qquad$ *data da* $\qquad (f+g)(x) = f(x) + g(x), \quad \forall x \in \Omega.$

   Questa operazione gode delle usauli proprieta' associativa e commutativa; il ruolo del numero zero e' giocato dalla funzione identicamente nulla

   $0 : \Omega \rightarrow \mathbb{Z}, \qquad 0(x) = 0, \qquad \forall x \in \Omega;$

   l'opposta di una funzione f e' la funzione

   $-f : \Omega \rightarrow \mathbb{Z}, \qquad (-f)(x) = -f(x), \qquad \forall x \in \Omega.$

   Si osservi che

   $|f + g| = |f| + |g|,$

   inoltre

   $|-f| = -|f|.$

4. Siano dunque $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sottinsiemi di Ω. Proveremo l'identita' fra funzioni catteristiche
$$\chi_{\left(\Omega \setminus \cup_1^n A_i\right)} = \sum_{S \subseteq [n]} (-1)^{|S|} \chi_{(\cap_{i \in S} A_i)},$$

dalla quale il principio di inclusione-esclusione segue direttamente:

$$|\Omega \setminus \cup_1^n A_i| =$$
$$|\chi_{\left(\Omega\setminus\cup_1^n A_i\right)}| = |\sum_{S\subseteq[n]} (-1)^{|S|}\chi_{(\cap_{i\in S}A_i)}| = \sum_{S\subseteq[n]} (-1)^{|S|}|\chi_{(\cap_{i\in S}A_i)}| =$$
$$= \sum_{S\subseteq[n]} (-1)^{|S|}| \cap_{i\in S} A_i|$$

5. Diamo ora una dimostrazione di quanto affermato nel punto precedente. In fondo, questa dimostrazione si basa sul fatto che comunque sia dato un insieme finito R, si ha
$$\sum_{Q\subseteq R} (-1)^{|Q|} = \begin{cases} 1 & se \quad R=\emptyset \\ 0 & se \quad R\neq\emptyset \end{cases},$$
che e' equivalente al fatto che per ogni intero naturale n si ha
$$\sum_{h=0}^{n} (-1)^h \binom{n}{h} = \begin{cases} 1 & se \quad n=0 \\ 0 & se \quad n>0 \end{cases},$$
che a sua volta e' una conseguenza del teorema binomiale.

Per ogni $x \in \Omega$, consideriamo l'insieme di tutti gli indici $i \in [n]$ tali che $x \in A_i$, insieme che indichiamo con S_x. [1]

Si noti che
$$x \in \bigcap_{i\in S} A_i \quad \textit{se e solo se} \quad S \subseteq S_x,$$
e che
$$x \in \left(\Omega \setminus \bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \quad \textit{se e solo se} \quad S_x = \emptyset.$$

Proviamo che, per ogni $x \in \Omega$, si ha
$$\chi_{\left(\Omega\setminus\cup_1^n A_i\right)}(x) = \sum_{S\subseteq[n]} (-1)^{|S|}\chi_{(\cap_{i\in S}A_i)}(x).$$

Distinguiamo due casi:

- per $x \notin \cup_1^n A_i$, si ha
$$\chi_{\left(\Omega\setminus\cup_1^n A_i\right)}(x) = 1,$$
e, essendo in questo caso $S_x = \emptyset$,
$$\sum_{S\subseteq[n]} (-1)^{|S|}\chi_{(\cap_{i\in S}A_i)}(x) = \sum_{S\subseteq S_x} (-1)^{|S|} = (-1)^0 = 1.$$

[1] Ad esempio, per
$$\Omega = \{a,b,c,d,e\}, \quad A_1 = \{c,d\}, \quad A_2 = \{d,e\},$$
si ha
$$S_a = S_b = \emptyset, \quad S_c = \{1\}, \quad S_d = \{1,2\}, \quad S_e = \{2\}.$$

- per $x \in \cup_1^n A_i$, si ha
$$\chi_{\left(\Omega \setminus \cup_1^n A_i\right)}(x) = 0,$$
e, essendo in questo caso $S_x \neq \emptyset$,
$$\sum_{S \subseteq [n]} (-1)^{|S|} \chi_{(\cap_{i \in S} A_i)}(x) = \sum_{S \subseteq S_x} (-1)^{|S|} = 0.$$