Matematica Discreta - Principio di Inversione di Moebius

1. **Principio di inversione di Moebius (insiemistico).** Si puo' dire che il principio di inversione di Moebius afferma che, comunque sia dato un insieme finito S ed una funzione $g : \mathcal{P}(S) \to R$ dall'insieme $\mathcal{P}(\mathcal{S})$ delle parti di S verso i numeri reali, il sistema lineare

$$\sum_{A \subseteq B} f(A) = g(B), \qquad B \in \mathcal{P}(\mathcal{S})$$

che ha per incognite i valori di una funzione $f : \mathcal{P}(S) \to R$, ha una ed una sola soluzione, data da

$$f(B) = \sum_{A \subseteq B} (-1)^{|B \setminus A|} g(A), \qquad B \in \mathcal{P}(\mathcal{S}).$$

Si noti che il numero delle equazioni cosi' come il numero delle incognite e' dato dal numero dei sottinsiemi di S cioe' $2^{|S|}$.

2. **Dimostrazione.** Per ogni $B \in \mathcal{P}(\mathcal{S})$, l'equazione

$$\sum_{A \subseteq B} f(A) = g(B)$$

si puo' scrivere nella forma

$$\sum_{A \in \mathcal{P}(S)} \xi(B, A) f(A) = g(B),$$

dove

$$\xi(B, A) = \begin{cases} 1 & se \quad B \supseteq A \\ \\ 0 & se \quad B \not\supseteq A \end{cases}.$$

Scegliamo ad arbitrio un ordine totale sui sottinsiemi di S.[1]

Indicate con

$$f = [f(A)], \qquad \xi = [\xi(B, A)], \qquad g = [g(B)],$$

la colonna delle incognite $f(A)$, la matrice costituita dai coefficienti delle incognite nelle varie equazioni, la colonna dei termini noti $g(B)$, possiamo rappresentare il sistema sinteticamente nella forma

$$\xi \; f = g.$$

Noi proveremo che la matrice ξ e' invertibile, e che la matrice inversa ξ^{-1} ha elementi

$$\mu(B, A) = \begin{cases} (-1)^{|B \setminus A|} & se \quad B \supseteq A \\ \\ 0 & se \quad B \not\supseteq A \end{cases}.$$

[1] Que scelta e' necessaria per potere rappresentare le matrici come tabelle; in realta' il concetto di matrice e l'intero calcolo matriciale si possono dare in una forma che non preseuppone alcun ordinamenteo totale sugli indici.

Da cio' segue che il sistema ha una ed una sola soluzione, data da

$$f = \xi^{-1}\, g,$$

cosi' che per ogni $B \in \mathcal{P}(\mathcal{S})$ si ha

$$f(B) = \sum_{A \in \mathcal{P}(\mathcal{S})} \xi^{-1}(B,A) g(A),$$

cioe'

$$f(B) = \sum_{A \subseteq B} (-1)^{|B \setminus A|} g(A).$$

3. Proviamo ora che la matrice ξ e' invertibile e che la sua inversa ξ^{-1} ha i valori previsti; proviamo cioe' che

$$\mu\xi = I = \xi\mu,$$

dove I e' la matrice unita', che ha elementi

$$I(B,A) = \left\{ \begin{array}{lll} 1 & se & B = A \\ 0 & se & B \neq A \end{array} \right. .$$

La dimostrazione si basa sul fatto che, comunque siano dati due insiemi finiti R, P, con $R \supseteq P$, si ha

$$\sum_{R \supseteq Q \supseteq P} (-1)^{|Q \setminus P|} = \sum_{R \supseteq Q \supseteq P} (-1)^{|R \setminus Q|} = \left\{ \begin{array}{lll} 1 & se & R = P \\ 0 & se & R \neq P \end{array} \right. ,$$

conseguenza del fatto che per ogni intero naturale n, si ha

$$\sum_{h=0}^{n} (-1)^h \binom{n}{h} = \sum_{h=0}^{n} (-1)^{n-h} \binom{n}{h} = \left\{ \begin{array}{lll} 1 & se & n = 0 \\ 0 & se & n > 0 \end{array} \right. ,$$

conseguenza a sua volta del teorema binomiale.

Da un lato si ha

$$\begin{aligned} (\mu\xi)(B,A) &= \sum_{C} \mu(B,C)\xi(C,A) \\ &= \sum_{B \supseteq C \supseteq A} (-1)^{|B \setminus C|} = \left\{ \begin{array}{lll} 1 & se & B = A \\ 0 & se & B \neq A \end{array} \right\} = I(B,A), \end{aligned}$$

e dall'altro si ha

$$\begin{aligned} (\xi\mu)(B,A) &= \sum_{C} \xi(B,C)\mu(C,A) \\ &= \sum_{B \supseteq C \supseteq A} (-1)^{|C \setminus A|} = \left\{ \begin{array}{lll} 1 & se & B = A \\ 0 & se & B \neq A \end{array} \right\} = I(B,A). \end{aligned}$$