Matematica Discreta - esercizi 2

1. Si determinino i coefficienti della serie formale
$$\sum_{i=0}^{\infty} c_i\ x^i = \frac{1}{(1-x)^3}.$$

2. Sia $(v_n)_{n=0,1,2,\dots}$ la successione definita per ricorsione da

   $v_0 = 1;\ v_1 = 2$

   $v_n = 3v_{n-1} + 4v_{n-2}, \qquad n \geq 2.$

   Si determini una forma esplicita per la funzione generatrice dei numeri v_n :
$$V(x) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n\ x^n.$$

3. Sia $v_{m;n,k}$ il numero delle soluzioni dell'equazione

   $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = k,$

   soggette alle condizioni

   $x_1, x_2, \dots, x_n \in \{0, 1, \dots, m\},$

   dove m, n, k sono parametri naturali, ed assumiamo per convenzione che

   $v_{m;0,k} = \begin{matrix} 1 & se & k = 0 \\ 0 & se & k > 0 \end{matrix}.$

   Si determinino le righe di indice $n = 0, 1, 2, 3$ della matrice biinfinita dei numeri $v_{1;n,k}$. Si determinino le righe di indice $n = 0, 1, 2, 3$ della matrice biinfinita dei numeri $v_{2;n,k}$. Si dia una formula ricorsiva che esprima il numero $v_{m;n,k}$ in funzione dei numeri $v_{m;n-1,h}$, con $h \leq k$.

4. Sia $w_{m_1,\dots,m_n;k}$ il numero delle soluzioni dell'equazione

   $x_1 + \cdots + x_n = k,$

   soggette alle condizioni

   $x_1 \in \{0, 1, \dots, m_1\}, \quad \dots \quad, x_n \in \{0, 1, \dots, m_n\}.$

   dove $m_1, \dots, m_n, k$ sono parametri naturali, e $n \geq 1$.

   Si provi che
$$\sum_{k=0}^{m_1+\cdots+m_n} w_{m_1,\dots,m_n;k}\ x^k = (1 + x + x^2 + \cdots + x^{m_1})\ \cdots\ (1 + x + x^2 + \cdots + x^{m_n}).$$