$$\begin{cases} \dfrac{d\rho}{dt} + \rho \, \mathrm{div}\, \mathbf{v} = 0 \\ \\ \rho \dfrac{dv_j}{dt} + \dfrac{\partial}{\partial x_i} \left(p\delta_{ij} - \sigma_{ij} \right) = \rho b_j \\ \\ \rho \dfrac{de}{dt} + p \, \mathrm{div}\, \mathbf{v} - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{D} + \mathrm{div}\, \mathbf{q} = r \end{cases} \tag{8.23}$$

La prima delle (8.23) è immediata. Per provare le restanti iniziamo ad osservare che per qualsiasi funzione f si ha grazie all'equazione di continuità $(8.21)_1$ l'identità:

$$\frac{\partial \rho f}{\partial t} + \frac{\partial \rho f v_i}{\partial x_i} = \rho \frac{df}{dt} \tag{8.24}$$

e quindi dalla $(8.21)_2$ anche la seconda delle (8.23) è immediata. Per quanto riguarda la terza equazione applicando la (8.24) a $(8.21)_3$ si ha

$$\rho \frac{d}{dt} \left(\frac{v^2}{2} + e \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ p v_i - \sigma_{ij} v_j + q_i \right\} = \rho b_j v_j + r. \tag{8.25}$$

Sottraendo dalla (8.25) la $(8.23)_2$ dopo averla moltiplicata per v_j si ha subito anche la $(8.23)_3$.

Il sistema (8.23) è equivalente per soluzioni classiche al sistema (8.21).
La legge di evoluzione dell'energia $(8.23)_3$ può essere riscritta come legge di evoluzione per la temperatura tenendo in conto le (8.22) e $(8.23)_1$:

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{1}{\rho \frac{\partial e}{\partial \vartheta}} \left\{ r + \left(\rho^2 \frac{\partial e}{\partial \rho} - p \right) \mathrm{div}\, \mathbf{v} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{D} - \mathrm{div}\, \mathbf{q} \right\}. \tag{8.26}$$

Nel prossimo paragrafo vedremo le restrizioni notevoli indotte dal principio di entropia per le equazioni costitutive (8.22) fisicamente accettabili. Queste restrizioni valgono al limite anche nel caso di EULERO.

8.3 Principio di entropia per un fluido

Riscriviamo il principio di entropia (6.7) utilizzando la derivata materiale e tenendo conto di $(8.23)_1$:

$$\rho \frac{dS}{dt} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{q_i}{\vartheta} \right) - \frac{r}{\vartheta} = \Sigma \geq 0. \tag{8.27}$$

Assumendo che anche la densità di entropia dipenda da densità e temperatura, cioè

$$S \equiv S(\rho, \vartheta)$$

si ha da (8.27), $(8.23)_1$ e (8.26):