Da Google alle immagini satellitari: il valore degli autovalori

V. Simoncini

Dipartimento di Matematica, Università di Bologna

valeria@dm.unibo.it

Programma dell'intervento

- Gli autovalori questi sconosciuti
- I “Motori” di ricerca e la Ricerca
- Immagini nitide o veloci?
- Prede e Predatori: alla ricerca della stabilità
- ....

Gli autovalori questi sconosciuti. Introduzione. 1

Consideriamo una matrice:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{2 righe, 2 colonne}$$

In generale,

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix} \qquad a_{i,j} \text{ componenti, numeri reali}$$

Ancora più in generale:

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{bmatrix}$$

n righe, n colonne

Ancora più in generale:

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{bmatrix}$$

n righe, n colonne

vettore: matrice con una sola colonna,

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$$

Operazioni con matrici:

1. Somma di matrici

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Operazioni con matrici:

1. Somma di matrici

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Prodotto matrice-vettore

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot (4) + (-2) \cdot 2 \\ 2 \cdot (4) + (-1) \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Gli autovalori questi sconosciuti. Definizione.

Si chiamano autovalore ed autovettore, risp. un numero (reale o complesso) ℓ ed un vettore u tali che

$$Au = u\ell$$

cioé, per es.

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \ell$$

Alcuni semplici esempi

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Riesco a trovare una coppia u, ℓ autovettore-autovalore? SI!

Alcuni semplici esempi

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Riesco a trovare una coppia u, ℓ autovettore-autovalore? SI!

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{u} = \begin{bmatrix} 2 \cdot (1) + 0 \cdot (0) \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \end{bmatrix} =$$

Alcuni semplici esempi

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Riesco a trovare una coppia u, ℓ autovettore-autovalore? SI!

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{u} = \begin{bmatrix} 2 \cdot (1) + 0 \cdot (0) \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Alcuni semplici esempi

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Riesco a trovare una coppia u, ℓ autovettore-autovalore? SI!

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{u} = \begin{bmatrix} 2 \cdot (1) + 0 \cdot (0) \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{u} \underbrace{2}_{\ell}$$

Ma non e' la sola coppia!

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{u} = \begin{bmatrix} 2 \cdot (0) + 0 \cdot (1) \\ 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{u} \underbrace{1}_{\ell}$$

Se la matrice ha n righe-colonne, allora ha n autovalori (non necessariamente distinti)...

Ancora un esempio

Per

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Si ha:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{u} = \begin{bmatrix} 2 \cdot (1) + 1 \cdot (1) \\ 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{u} \underbrace{3}_{\ell}$$

Dato che siamo tanto bravi...

$$A = \begin{bmatrix} -1.1878 & -1.1859 & 0.1286 & 0.8057 & -0.3306 & -0.1199 & 0.4694 & 1.0184 & -0.4650 & 1.5532 \\ -2.2023 & -1.0559 & 0.6565 & 0.2316 & -0.8436 & -0.0653 & -0.9036 & -1.5804 & 0.3710 & 0.7079 \\ 0.9863 & 1.4725 & -1.1678 & -0.9898 & 0.4978 & 0.4853 & 0.0359 & -0.0787 & 0.7283 & 1.9574 \\ -0.5186 & 0.0557 & -0.4606 & 1.3396 & 1.4885 & -0.5955 & -0.6275 & -0.6817 & 2.1122 & 0.5045 \\ 0.3274 & -1.2173 & -0.2624 & 0.2895 & -0.5465 & -0.1497 & 0.5354 & -1.0246 & -1.3573 & 1.8645 \\ 0.2341 & -0.0412 & -1.2132 & 1.4789 & -0.8468 & -0.4348 & 0.5529 & -1.2344 & -1.0226 & -0.3398 \\ 0.0215 & -1.1283 & -1.3194 & 1.1380 & -0.2463 & -0.0793 & -0.2037 & 0.2888 & 1.0378 & -1.1398 \\ -1.0039 & -1.3493 & 0.9312 & -0.6841 & 0.6630 & 1.5352 & -2.0543 & -0.4293 & -0.3898 & -0.2111 \\ -0.9471 & -0.2611 & 0.0112 & -1.2919 & -0.8542 & -0.6065 & 0.1326 & 0.0558 & -1.3813 & 1.1902 \\ -0.3744 & 0.9535 & -0.6451 & -0.0729 & -1.2013 & -1.3474 & 1.5929 & -0.3679 & 0.3155 & -1.1162 \end{bmatrix}$$

“solo” 10 righe e colonne....

... e Google???

Web Immagini Video Maps News Libri Gmail altro ▼ Cronologia web | Impostazioni di ricerca | Accedi

Google istituto mattei san lazzaro Cerca Ricerca avanzata

Cerca: nel Web pagine in Italiano pagine provenienti da: Italia

Web Mostra opzioni... Risultati **1** - **10** su circa **8.140** per **istituto mattei san lazzaro**. (**0,19** se

ISTITUTO MATTEI
Grazie ad una collaborazione tra ASPHI, AICA e l'**Istituto MATTEI** di **San Lazzaro** di Savena (BO) nasce ECO-Citizen, un progetto pilota per sperimentare una **...**
www.**istitutomattei**.it/ - Copia cache - Simili

Pagina Novità **ISTITUTO MATTEI**
ISTITUTO DI ISTRUZIONE SUPERIORE "ENRICO **MATTEI**". Via delle Rimembranze 26 40068 **SAN LAZZARO** DI SAVENA - BOLOGNA E-mail: iis@istitutomattei.bo.it Posta **...**
www.**istitutomattei**.bo.it/news.htm - Copia cache - Simili

Pagina Prodotti **ISTITUTO MATTEI**
ISTITUTO DI ISTRUZIONE SUPERIORE "ENRICO **MATTEI**". Via delle Rimembranze 26 40068 **SAN LAZZARO** DI SAVENA - BOLOGNA E-mail: iis@istitutomattei.bo.it Posta **...**
www.**istitutomattei**.bo.it/itc.htm - Copia cache - Simili

Mostra altri risultati da www.istitutomattei.bo.it

La scuola che voglio | Scuola: **ISTITUTO** STATALE DI ISTRUZIONE **...**
Sede Unica **Mattei**. Indirizzo, Via delle Rimembranze 26 - 40068 **San Lazzaro** di Savena **... ISTITUTO** STATALE D' ISTRUZIONE SUPERIORIE "ENRICO **MATTEI**" **...**
www.guidascuolesuperiori.provincia.bologna.it/?...**ISTITUTO**...**MATTEI**... - Copia cache - Simili

Back to school! ITC E. **Mattei - San lazzaro** di Savena - Bologna **...**
ITC E. **Mattei** - **San lazzaro** di Savena - Bologna is on FacebookSign up for Facebook to connect with Back to school! ITC E. **Mattei** - **San lazzaro** di Savena **...**
www.facebook.com/group.php?gid=27453089418 - Copia cache

I.S.S. "**Mattei**" **S**. **Lazzaro** (BO) | Passaggi
I.S.S. "**Mattei**" **S**. **Lazzaro** (BO). Via delle Rimembranze 26 40068 **SAN LAZZARO** DI SAVENA - BOLOGNA e-mail: itc.**mattei**@bo.nettuno.it **...**

Una enorme biblioteca

Google cerca informazioni:

1. In una biblioteca enorme (miliardi di documenti)
2. In continua crescita
3. In pochi secondi

Una enorme biblioteca

Google cerca informazioni:

1. In una biblioteca enorme (miliardi di documenti)
2. In continua crescita
3. In pochi secondi

Come rendere questa ricerca efficiente?

1. Automatizzare la ricerca dei documenti e delle loro parole
2. Aggiornare continuamente l'importanza (*ranking*) delle pagine web
3. Rendere efficiente (numericamente) la ricerca

L'algoritmo "Google's PageRank"

Ranking:

- Selezionare un'ordine di importanza delle pagine, secondo le parole chiavi
- Verifica dell'importanza delle pagine web senza intervento umano sul contenuto

  The importance of a page is judged by the number of pages linking to it as well as their importance

  (S. Brin e L. Page, creatori di PageRank)

L'idea di PageRank

P_j: $j$esima pagina web

$\mathcal{I}(P_j)$: importanza della pagina P_j (è il $PageRank$ di Google)

l_j: numero di links della pagina P_j

Nota: Se P_j punta alla pagina P_k, allora P_j passa a P_k una frazione della sua importanza, uguale a $1/l_j$

L'idea di PageRank

P_j: $j$esima pagina web

$\mathcal{I}(P_j)$: importanza della pagina P_j (è il *PageRank* di Google)

l_j: numero di links della pagina P_j

Nota: Se P_j punta alla pagina P_k, allora P_j passa a P_k una frazione della sua importanza, uguale a $1/l_j$

$$\Downarrow$$

L'importanza di P_i è data dalla somma di tutti i contributi ottenuti da altre pagine che puntano alla pagina P_i

$$\mathcal{I}(P_i) = \frac{1}{l_1}\mathcal{I}(P_1) + \frac{1}{l_2}\mathcal{I}(P_2) + \frac{1}{l_3}\mathcal{I}(P_3) + \dots$$

(...*è nato prima l'uovo o la gallina?*)

L'aiuto delle matrici...

Creiamo una matrice (di *hyperlink*) : $H = (h_{i,j})$

$$h_{i,j} = \begin{cases} \frac{1}{l_j} & \text{se } P_j \text{ punta a } P_i \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

... e degli autovalori

Nota: a) tutti gli elementi di H sono non-negativi, b) somma per colonna è uno (a meno che la pagina della colonna non abbia link)

Definiamo: vettore $I = (\mathcal{I}(P_i))$, le cui componenti sono i PageRanks, cioè la classifica per importanza di tutte le pagine. Allora

$$\mathcal{I}(P_i) = \frac{1}{l_1}\mathcal{I}(P_1) + \frac{1}{l_2}\mathcal{I}(P_2) + \frac{1}{l_3}\mathcal{I}(P_3) + \dots, \qquad \text{per ogni pagina } P_i$$

... e degli autovalori

Nota: a) tutti gli elementi di H sono non-negativi, b) somma per colonna è uno (a meno che la pagina della colonna non abbia link)

Definiamo: vettore $I = (\mathcal{I}(P_i))$, le cui componenti sono i PageRanks, cioè la classifica per importanza di tutte le pagine. Allora

$$\mathcal{I}(P_i) = \frac{1}{l_1}\mathcal{I}(P_1) + \frac{1}{l_2}\mathcal{I}(P_2) + \frac{1}{l_3}\mathcal{I}(P_3) + \dots, \qquad \text{per ogni pagina } P_i$$

corrisponde a

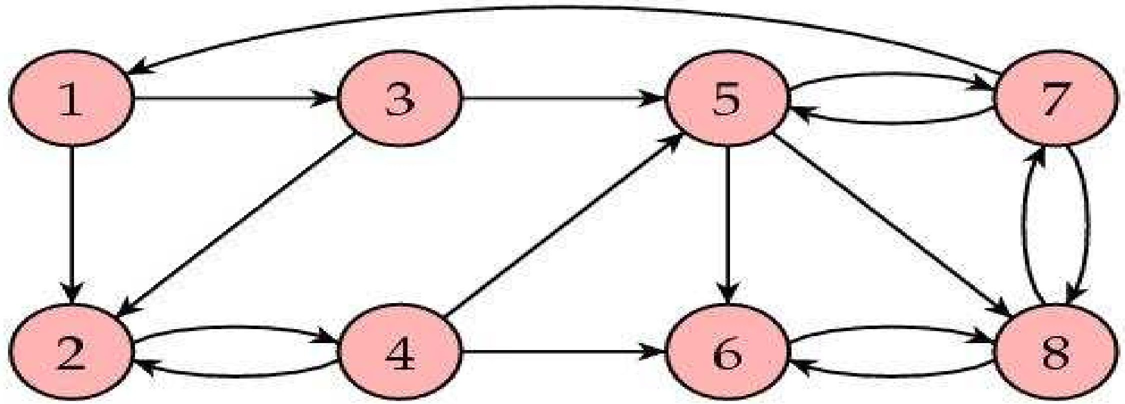
$$I = HI$$

La matrice H ha autovettore I ed autovalore $\ell = 1$

I : autovettore *stazionario*

Un esempio (D. Austin, 2010)

Piccola collezione di 8 pagine web, con i link rappresentati da frecce:



goodnet.jpg

La matrice ed autovettore stazionario corrispondente sono:

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad I = \begin{bmatrix} 0.0600 \\ 0.0675 \\ 0.0300 \\ 0.0675 \\ 0.0975 \\ 0.2025 \\ 0.1800 \\ 0.2950 \end{bmatrix}$$

La pagina 8 ha la più alta popolarità $\Rightarrow$ è la più importante!

Autovalori e immagini

Una matrice (con uguali righe e colonne) come somma di informazioni di autovalori:

$\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_n$ autovalori in ordine decrescente,

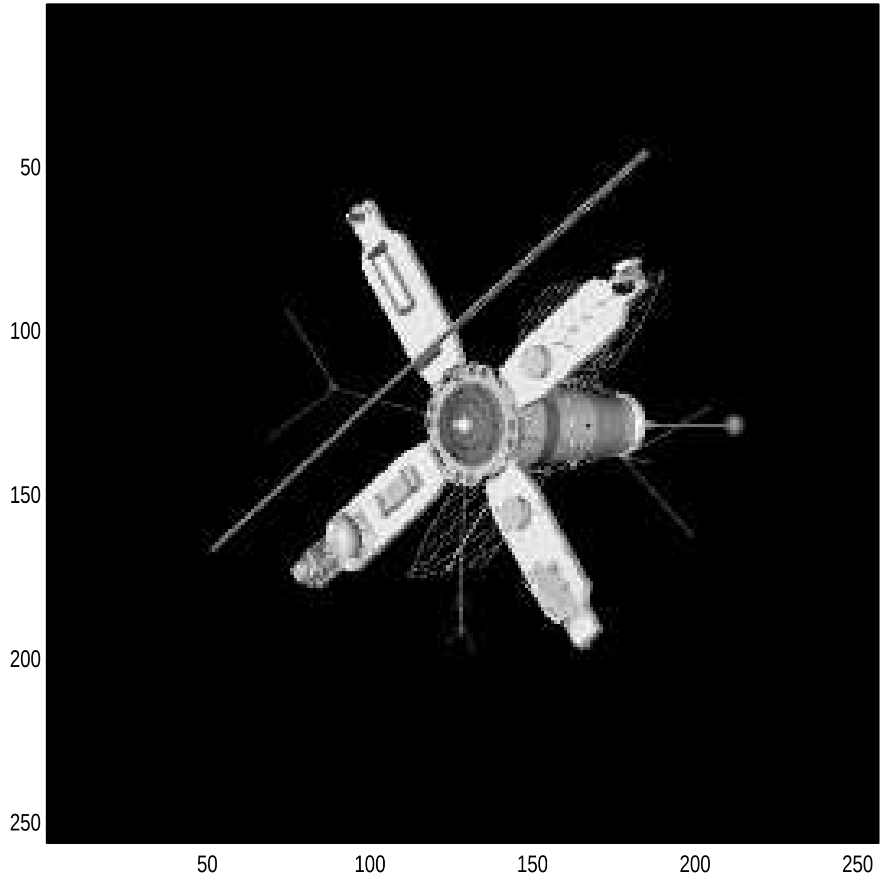
$$A = \ell_1 A_1 + \ell_2 A_2 + \cdots + \ell_n A_n$$

le matrici $A_1, A_2, \ldots, A_n$ contengono le informazioni degli autovettori corrispondenti

Supponiamo ora che $\ell_2, \ldots, \ell_n$ siano molto più piccoli di ℓ_1. Quindi

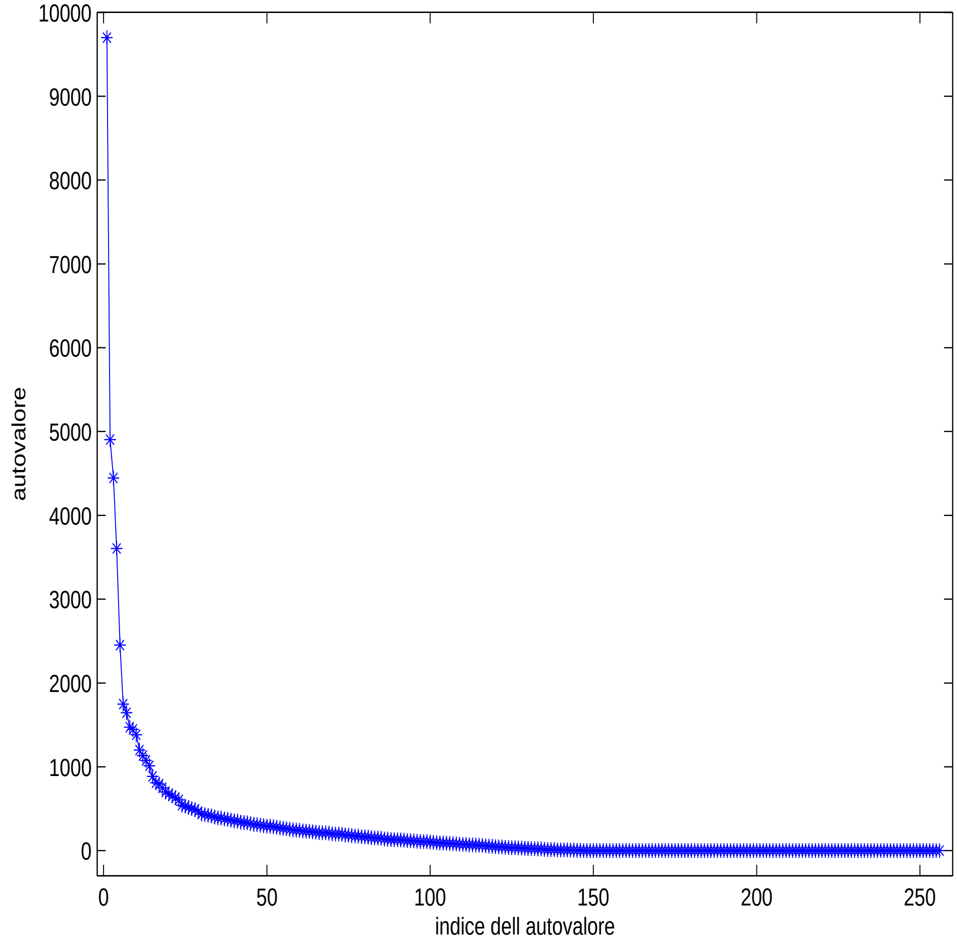
$$A = \ell_1 A_1 + \text{quantità piccole} \approx \ell_1 A_1$$

Una immagine di un satellite



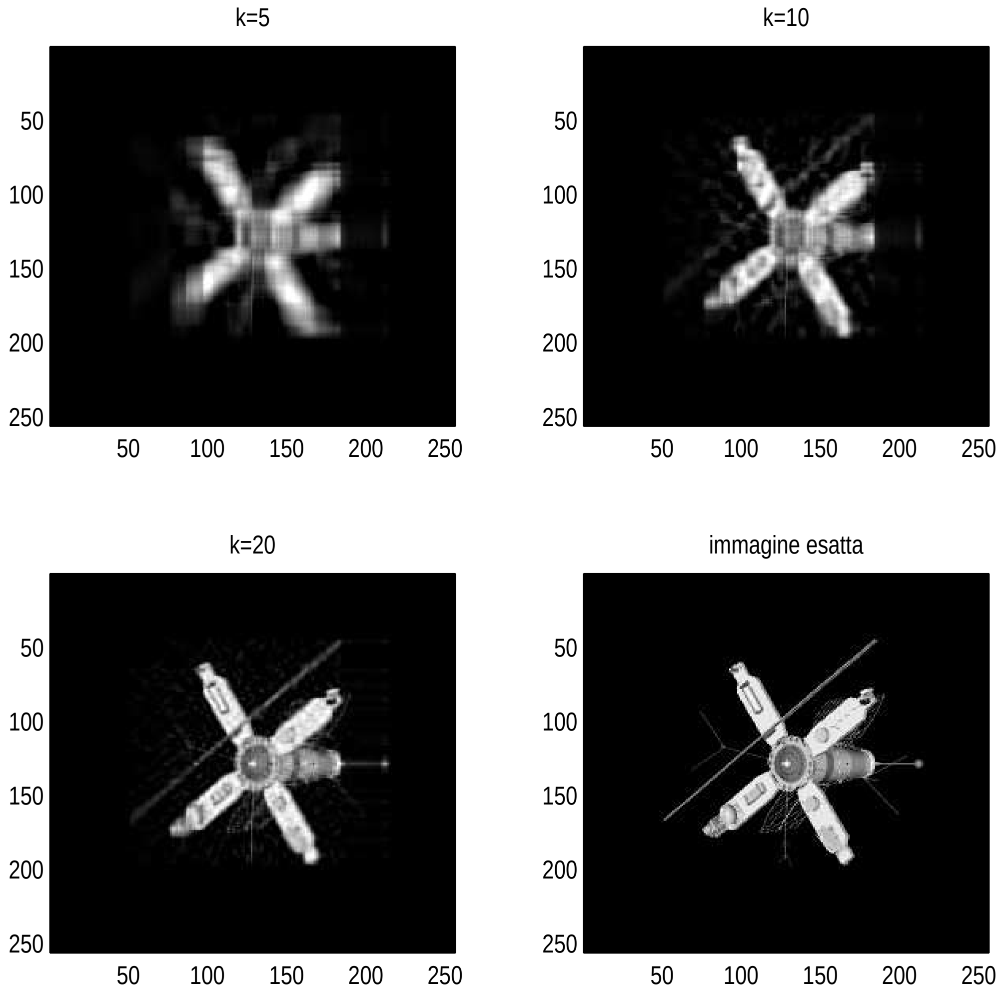
I suoi autovalori

$$A = \ell_1 A_1 + \ell_2 A_2 + \cdots + \ell_n A_n$$

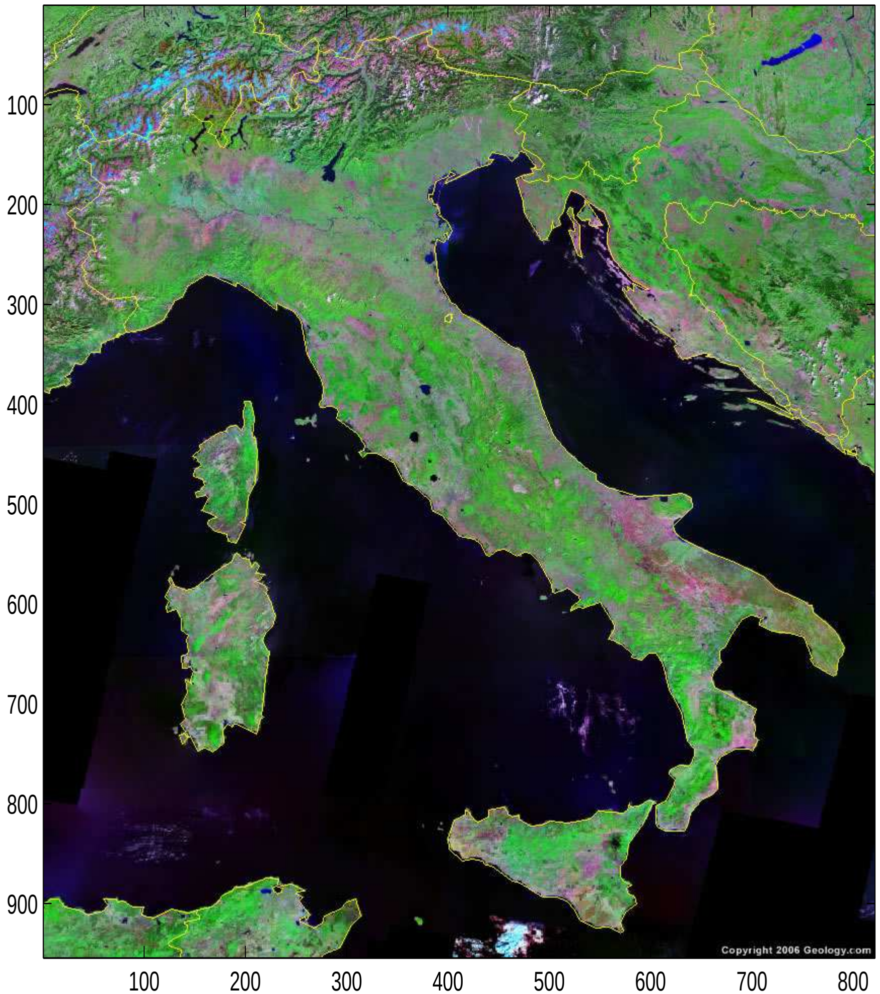


Approssimazione per troncamento

$A \approx \ell_1 A_1 + \ell_2 A_2 + \cdots + \ell_k A_k$, con k molto più piccolo di $n = 256$

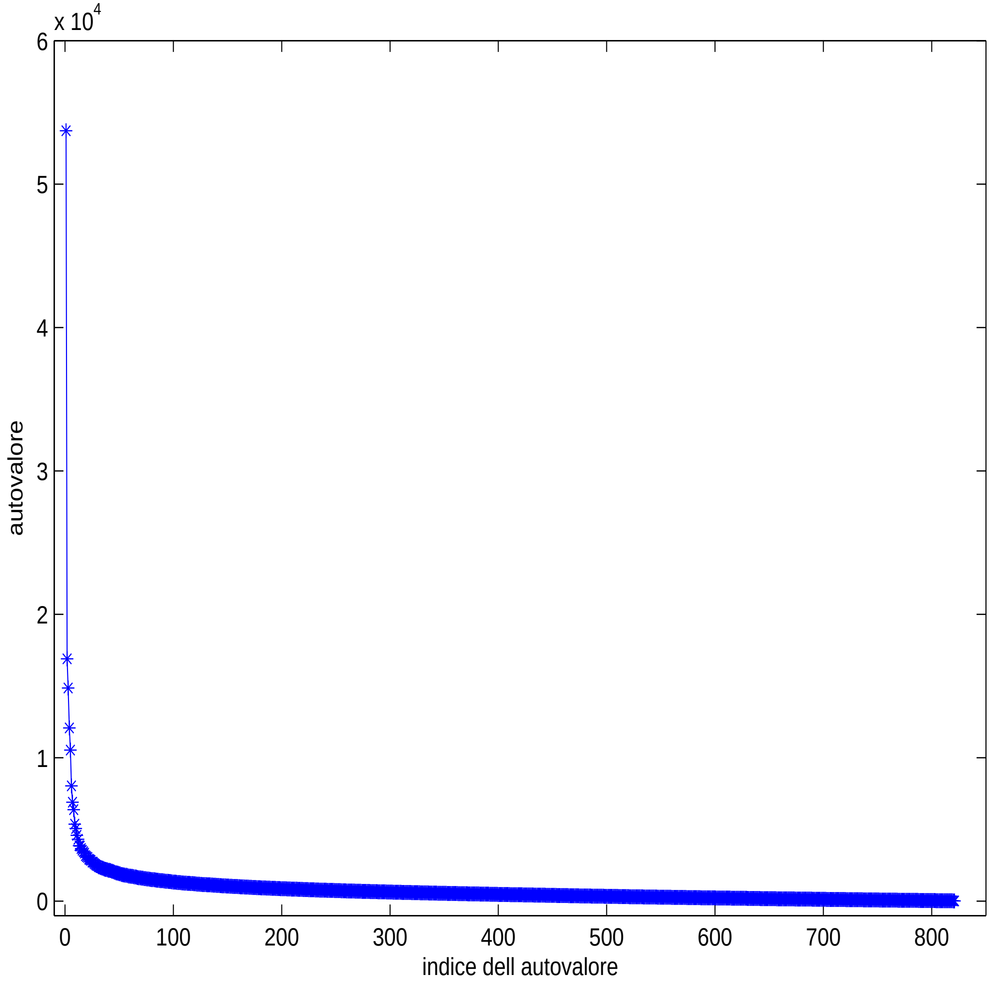


Un'immagine da satellite

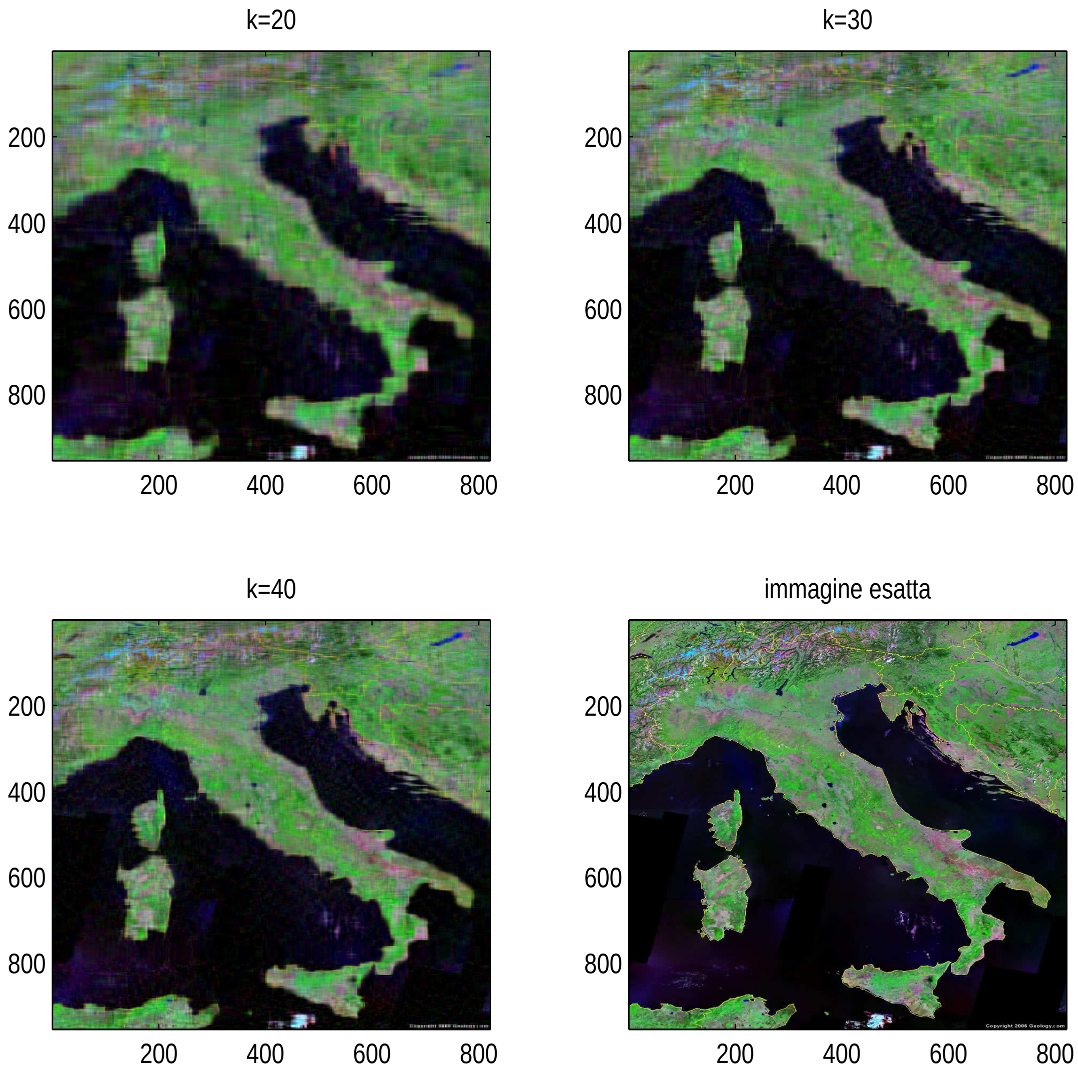


matrice di dimensioni 954×821 (???)

Ed i suoi "autovalori"



Approssimazione per troncamento : $A \approx \ell_1 A_1 + \ell_2 A_2 + \cdots + \ell_k A_k$



Prede e Predatori: alla ricerca della stabilità

lince.jpg

lepre-2.jpg

Modello per l'interazione di due Specie: Equazioni di Lotka-Volterra. 1

Ipotesi per la correttezza del modello semplificato:

- Le prede trovano sempre cibo
- Le prede rappresentano l'unico cibo dei predatori
- Non ci sono cambiamenti dovuti a fattori esterni

Modello per l'interazione di due Specie: Equazioni di Lotka-Volterra. 2

y : numero di predatori (linci) x : numero di prede (lepri)

t: tempo $\frac{dy}{dt}, \frac{dx}{dt}$: fattore di crescita di ogni popolazione nel tempo

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \alpha x - \beta xy & \text{eq. delle prede} \\ \frac{dy}{dt} = -\gamma y + \delta xy & \text{eq. dei predatori} \end{cases}$$

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ parametri di interazione tra le due specie

Modello per l'interazione di due Specie: Equazioni di Lotka-Volterra. 2

y : numero di predatori (linci) $\qquad$ x : numero di prede (lepri)

t: tempo $\qquad \frac{dy}{dt}, \frac{dx}{dt}$: fattore di crescita di ogni popolazione nel tempo

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \alpha x - \beta xy & \text{eq. delle prede} \\ \frac{dy}{dt} = -\gamma y + \delta xy & \text{eq. dei predatori} \end{cases}$$

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ parametri di interazione tra le due specie

Leggiamo il significato delle equazioni:

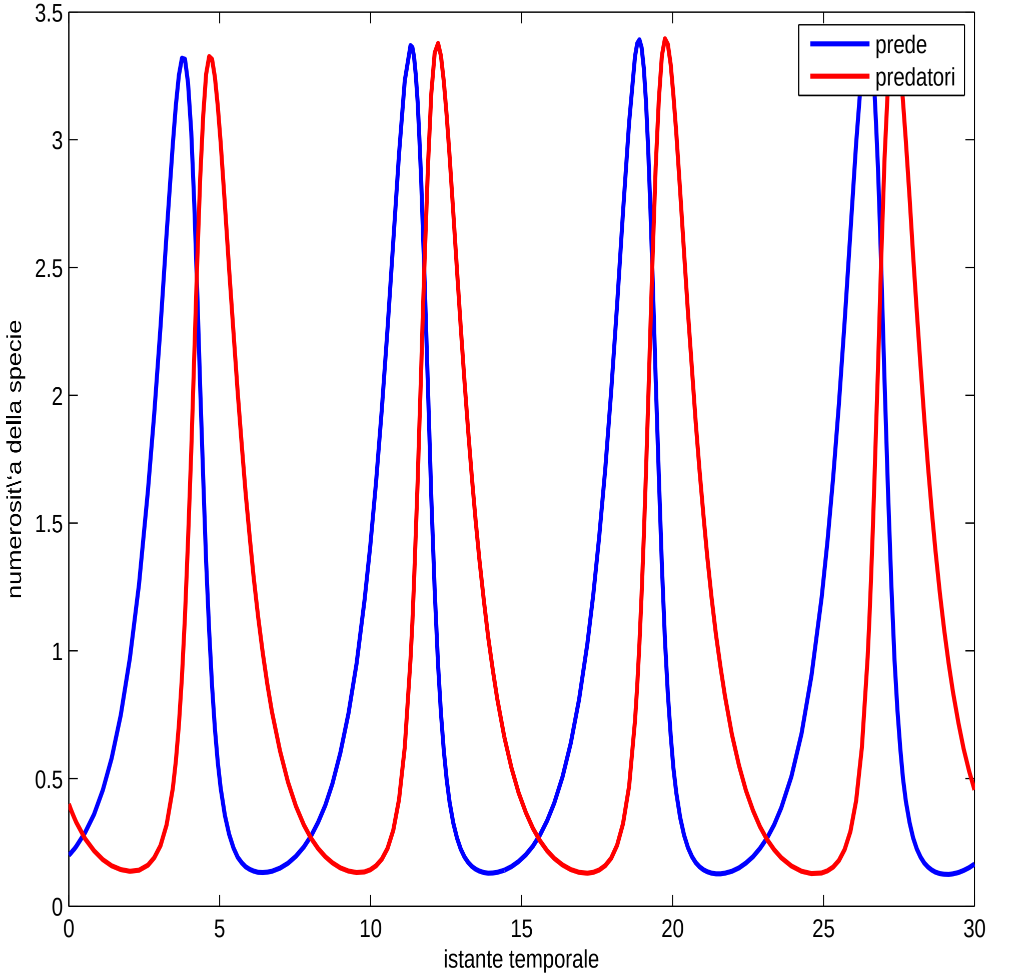
$\star$ αx : crescita rapida delle prede se non soggette a predazione

$\star$ βxy : fattore di predazione, proporz. a numero di prede e predatori

Il cambiamento nel numero di prede è dato dal fattore di crescita meno il fattore di predazione

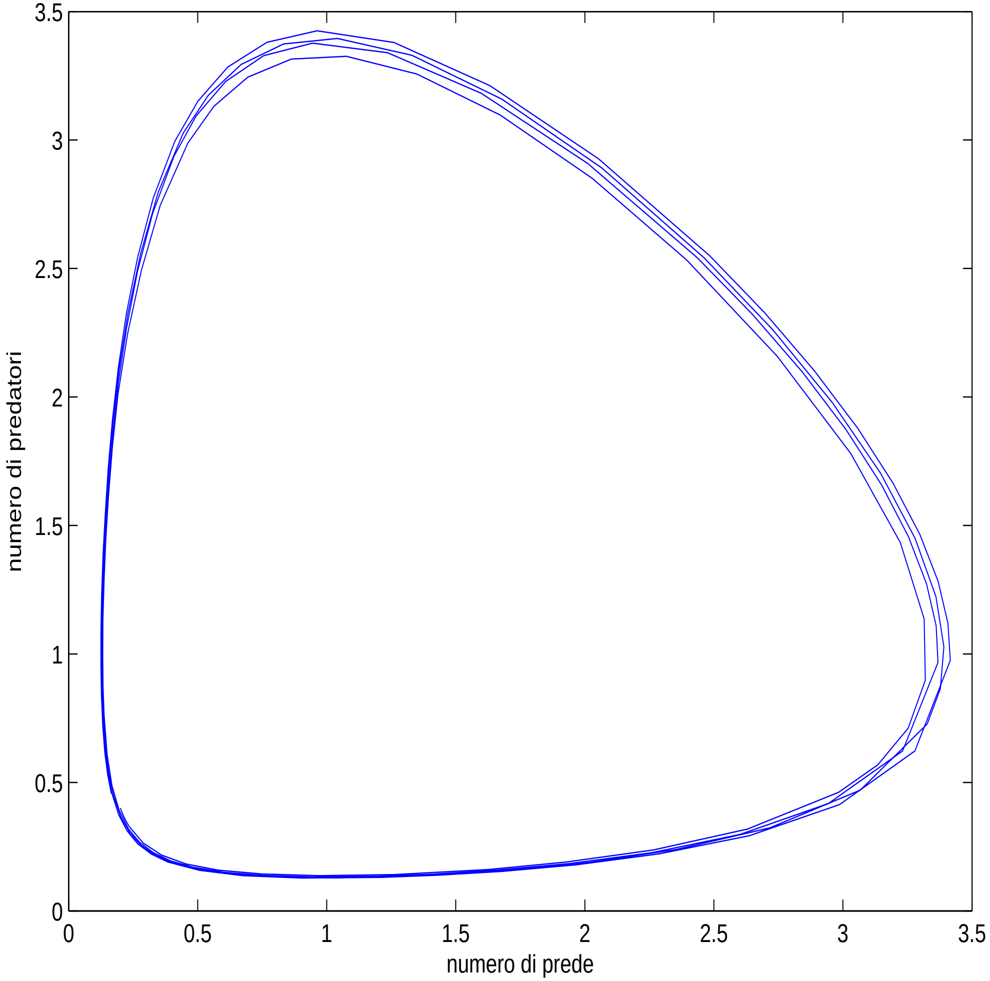
... analogo per l'equazione dei predatori

Andamento nel tempo



... tutti i parametri uguali ad uno

Andamento periodico...



... tutti i parametri uguali ad uno

Equilibrio biologico ...

L'equilibrio si ottiene quando il numero di individui nelle due popolazioni rimane costante:

$$\frac{dy}{dt} = 0, \qquad \frac{dx}{dt} = 0$$

Quindi da

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x - \beta xy \quad \text{eq. delle prede}$$
$$\frac{dy}{dt} = -\gamma y + \delta xy \quad \text{eq. dei predatori}$$

si ottiene $\begin{array}{l} x(\alpha - \beta y) = 0 \\ y(-\gamma + \delta x) = 0 \end{array}$ che ha due soluzioni (punti critici):

$(x, y) = (0, 0)$ estinzione (!!) $\qquad (x, y) = (\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\gamma}{\delta})$ realistico.

Stabilità dell'equilibrio ed autovalori...

$$\frac{dx}{dt} = x(\alpha - \beta y) \quad \text{eq. delle prede}$$

$$\frac{dy}{dt} = y(-\gamma + \delta x) \quad \text{eq. dei predatori}$$

La stabilità si studia osservando come varia il membro destro di ogni equazione per piccole variazioni del numero di individui:

$$J(x,y) = \begin{bmatrix} \alpha - \beta y & -\beta x \\ \delta y & \delta x - \gamma \end{bmatrix}$$

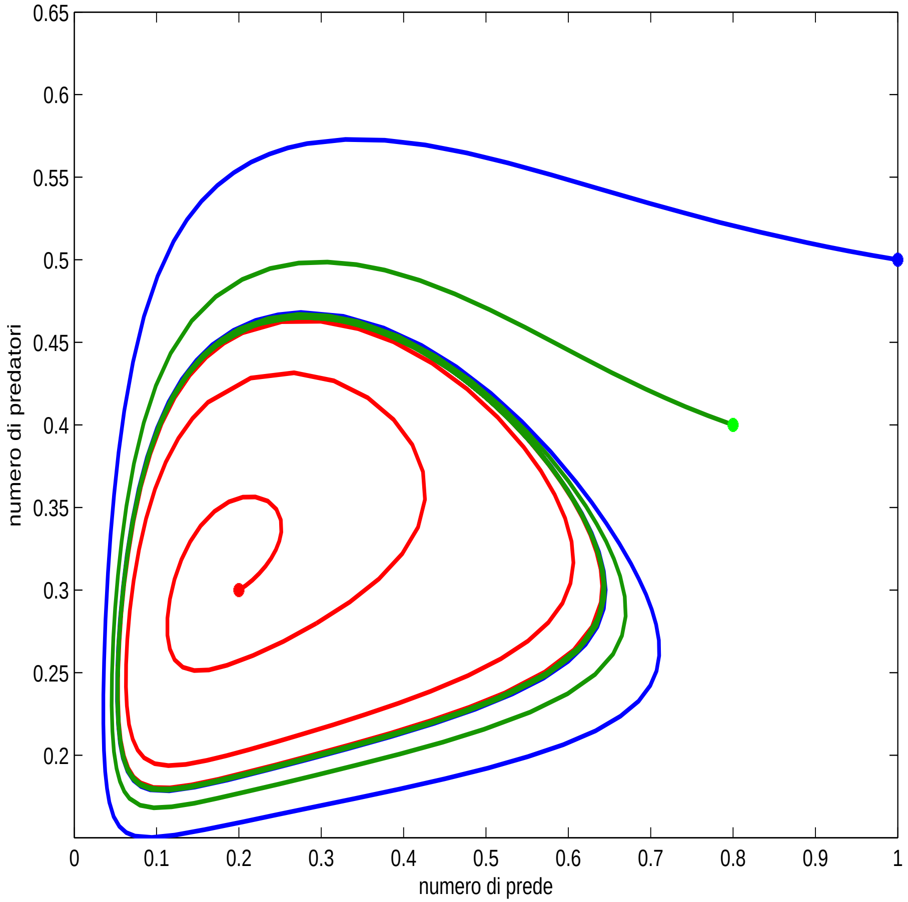
Misura la variabilità dei punti di equilibrio

$\Rightarrow$ Il segno degli autovalori di $J(x,y)$ ci dice se il punto critico (x,y) e' di equilibrio o no!

Sistemi stabili e cicli

$$\frac{dx}{dt} = x(1-x) - \frac{x}{a+x}y, \qquad \frac{dy}{dt} = y\left(\delta - \beta\frac{y}{x}\right)$$

Per una scelta opportuna di parametri, è un sistema stabile. $\beta = 0.06$:



Sistemi stabili e cicli

$\beta = 1.2$: