PROVA SCRITTA DI ANALISI MATEMATICA 1

(C.d.L. in Astronomia) – 11 gennaio 2017

1. Determinare per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ il seguente integrale generalizzato è convergente:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x-1}\,(1+x^2)^{\alpha}}\,dx$$

2. Calcolare, al variare del parametro $\beta \in \mathbb{R}$, il limite sottoindicato :

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{1+x} - 1 + \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) - \frac{x}{2}}{(\sin x)^{\beta}}$$

3. Studiare la convergenza della seguente serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{(n+1)^2}\right) e^{nx}$$

4. Individuare gli eventuali punti di massimo e/o minimo della funzione sottoindicata e specificarne la natura (estremanti relativi o assoluti ?):

$$f(x) = \frac{x}{x+1}\ \exp(1/x^2)$$

(Suggerimento: si tracci il grafico della funzione.)

5. Trovare le soluzioni complesse della seguente equazione, in forma algebrica:

$$z^4 + 3(1+i)z^2 + 9i = 0.$$

SOLO PER GLI STUDENTI DEL PROF CUPINI:

Al posto dell'esercizo 3 svolgere il seguente esercizio:
Calcolare, al variare di $\alpha > 0$, il seguente limite:

$$\lim_{n\to+\infty} \left(n \sin^2\left(\frac{3n^2}{n^3 + n^{\alpha}}\right)\right)^n .$$

Esercizio 1 (11/1/2017)

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x-1}\,(1+x^2)^\alpha}\,dx$$

spezzo l'integrale in due:

$x \to 1$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}\,(1+x^2)^\alpha} \sim \frac{c}{(x-1)^{1/2}} \quad \text{conv.}$$

per il criterio del confronto asintotico

$x \to +\infty$

$$f(x) \sim \frac{c}{x^{1/2} \cdot x^{2\alpha}} = \frac{c}{x^{2\alpha+\frac{1}{2}}}$$

converge se $2\alpha + \frac{1}{2} > 1 \iff 2\alpha > \frac{1}{2} \iff \alpha > \frac{1}{4}$

quindi l'integrale converge per

$$\alpha > \frac{1}{4}$$

Esercizio 2 (11/1/2017)

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{1+x}-1+\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)-\frac{x}{2}}{(\operatorname{sen} x)^\beta} = \begin{cases} 0 & \beta<1 \\ -2 & \beta=1 \\ -\infty & \beta>1 \end{cases}$$

$x\to 0^+$

$$(1+x)^{1/2} = 1+\frac{1}{2}x+\underbrace{\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2}}_{=-\frac{1}{8}}x^2+o(x^2)$$

$$\Rightarrow (1+x)^{1/2}-1-\frac{x}{2} = \cancel{1}+\cancel{\frac{x}{2}}-\frac{1}{8}x^2+o(x^2)\cancel{-1}\cancel{-\frac{x}{2}} =$$

$$= -\frac{1}{8}x^2+o(x^2)$$

$$\ln(1-x) = -x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)$$

$$\ln(1+x) = x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = \ln(1-x)-\ln(1+x) = -x-\cancel{\frac{x^2}{2}}+o(x^2)$$
$$-x+\cancel{\frac{x^2}{2}}+o(x^2) =$$

$$= -2x+o(x^2)$$

da cui, essendo $\operatorname{sen} x \sim x$, per $x\to 0^+$:

$$\frac{-\frac{1}{8}x^2+o(x^2)-2x}{x^\beta} = \frac{-2x+o(x)}{x^\beta} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{x\to 0^+} \begin{cases} 0 & \beta<1 \\ -2 & \beta=1 \\ -\infty & \beta>1 \end{cases}$$

Esercizio 3 (11/11/2017)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{(n+1)^2}\right) e^{nx}$$

ponendo $e^x = t$ si vede che è una serie di potenze, ~~dell~~ con $a_n = \ln\left(1+\frac{1}{(n+1)^2}\right)$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$$

Raggio di convergenza:

$$\rho = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{(n+1)^2}\right)}{\ln\left(1+\frac{1}{(n+2)^2}\right)} = 1$$

Per $|t|=1$ si ha

$$\sum_{n=0}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{(n+1)^2}\right)$$

che converge per confronto con la serie armonica, essendo

$$\ln\left(1+\frac{1}{(n+1)^2}\right) \sim \frac{1}{(n+1)^2}$$

Quindi la serie converge assolutamente per $|t| \leq 1$ e uniformemente per $|t| \leq r < 1$.

Passando alla variabile originaria x, si ha <u>conv. assoluta</u> su

$$A = \{x \in \mathbb{R};\quad x \leq 0\}$$

e conv. uniforme su

$$\tilde{A} = \{x \in \mathbb{R};\quad x \leq \delta < 0\}$$

Esercizio 4 (11/1/2017)

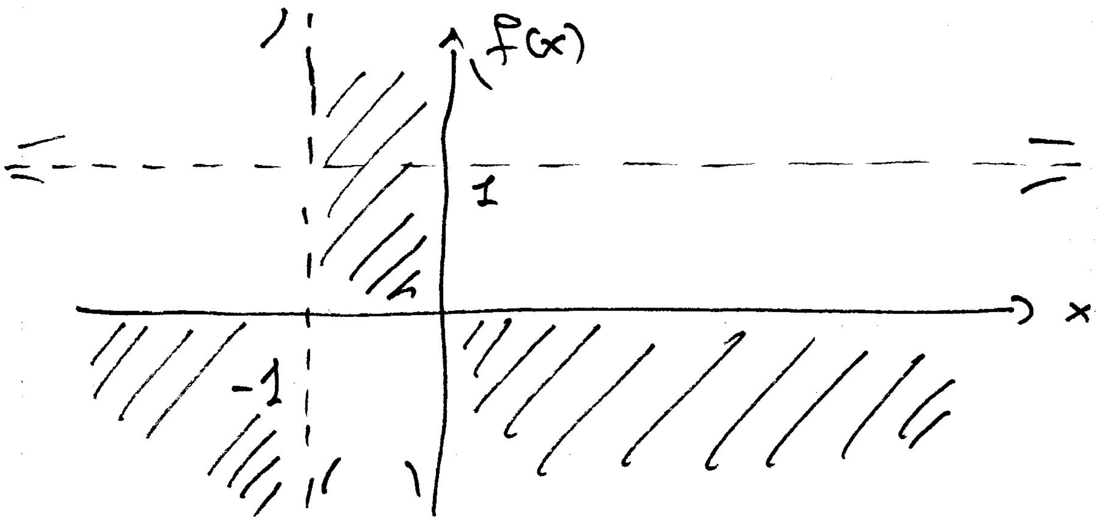
$$f(x) = \frac{x}{x+1} \exp\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

$$\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0, -1\}$$

segno funzione: $f(x) > 0 \iff \dfrac{x}{x+1} > 0$

$$\begin{cases} x > 0 \\ x+1 > 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x < 0 \\ x+1 < 0 \end{cases}$$

$$x > 0 \quad \cup \quad x < -1$$



$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = +\infty$$

cui aspetto almeno 1 pto in cui si annulla f'

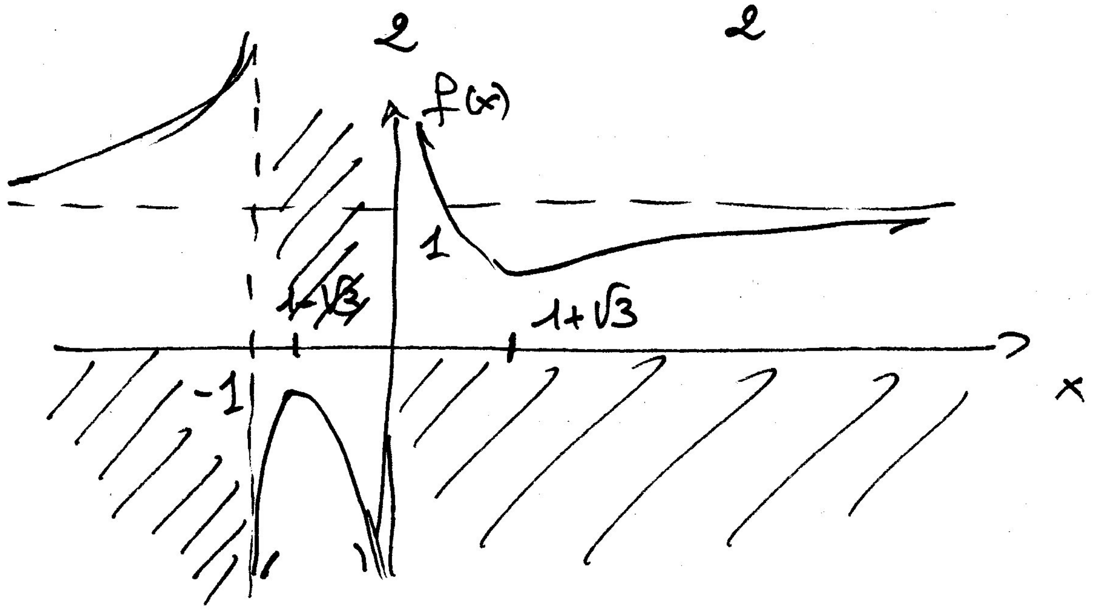
$$f'(x) = \frac{x+1-x}{(x+1)^2}\, \cancel{e}^{\frac{1}{x^2}} + \frac{x}{x+1}\, \cancel{e}^{\frac{1}{x^2}} \left(-2x^{-3}\right) = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{1}{(x+1)^{\cancel{2}}} - \frac{2}{x^{\cancel{3}\,2}} \, \frac{\cancel{x}}{\cancel{x+1}} = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{1}{x+1} = \frac{2}{x^2}$$

$$\Longleftrightarrow \quad x^2 - 2x - 2 = 0$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4+8}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 1 \pm \sqrt{3}$$



dalle informazioni che abbiamo è chiaro che $x = 1+\sqrt{3}$ è pto di <u>min relativo</u> e $x = 1-\sqrt{3}$ è pto di <u>max relativo</u>.

Esercizio 5 (11/1/2017)

$$z^4 + 3(1+i)\,z^2 + 9i = 0$$

$$z^2 = \frac{-3(1+i) \pm \sqrt{9(1+i)^2 - 36i}}{2} =$$

$$= \frac{-3(1+i) \pm 3(1-i)}{2} = \begin{cases} -3i \\ -3 \end{cases}$$

$\underline{z^2 = -3i}$ $\quad |-3i| = 3 \;,\; \arg(-3i) = \frac{3}{2}\pi$

$$z_k = \sqrt{3}\left[\cos\left(\frac{\frac{3}{2}\pi + 2k\pi}{2}\right) + i \operatorname{sen}(\quad)\right] \qquad k = 0, 1$$

$$z_0 = \sqrt{3}\left[\cos \frac{3}{4}\pi + i \operatorname{sen} \frac{3}{4}\pi\right] =$$

$$= \sqrt{3}\left[\cos\pi \cdot \cos\frac{\pi}{4} + \operatorname{sen}\pi \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right] = -\frac{\sqrt{6}}{2}(1-i)$$

$$z_1 = \sqrt{3}\left[\cos \frac{7}{4}\pi + i \operatorname{sen} \frac{7}{4}\pi\right] = +\frac{\sqrt{6}}{2}(1-i)$$

$\underline{z^2 = -3}$ $\quad |-3| = 3 \;,\; \arg(-3) = \pi$

$$z_k = \sqrt{3}\left[\cos \frac{\pi + 2k\pi}{2} + i \operatorname{sen}(\quad)\right] \qquad k = 0, 1$$

$$z_0 = \sqrt{3}\left[\cos\frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right] = \sqrt{3}\,i$$

$$z_1 = \sqrt{3}\left[\cos\frac{3}{2}\pi + i \operatorname{sen}\frac{3}{2}\pi\right] = -\sqrt{3}\,i$$