Glossario di Matematica

§ 1.1. Nozioni di base

Si tratta di nozioni di base soprattutto di Algebra, ma anche di Geometria Analitica e di Logica, che ogni studente dovrebbe avere acquisito al termine della scuola superiore. Non è esauriente, perché mancano le nozioni di Geometria Razionale, relative al piano ed allo spazio reali, ed anche uno studio delle funzioni elementari di variabile reale.

Questo paragrafo è organizzato in monografie elencate in ordine alfabetico, in modo che ciascuno possa consultare direttamente ciò che gli interessa, anche se non è troppo dettagliato, perché gli argomenti sono riuniti per attinenze. Per facilitare la consultazione, ogni volta che nel corso della trattazione di una voce viene citata un'altra voce presente in questo glossario, quest'ultima sarà sottolineata. Di norma le dimostrazioni non sono riportate, ma si invita il lettore a farsele da sé o a cercarle nei libri di scuola superiore.

Parole chiave: glossario di argomenti elementari.
Prerequisiti: conoscenza dei vari insiemi numerici e delle loro operazioni, e di oggetti e nozioni della geometria elementare.
Scopi: ripasso di vari argomenti di Matematica, che sono insegnati nelle scuole superiori;.

Angoli. Due semirette con l'origine in comune dividono il piano in due *angoli*, che si misurano in gradi sessagesimali, gradi decimali o in radianti.

Il *grado sessagesimale* è la novantesima parte dell'angolo retto e si divide in 60 *primi*, ciascuno dei quali si divide in 60 *secondi*. Questi ultimi si dividono in decimi, centesimi, ecc.
Notazione: 33°19'27" = 33 gradi, 19 primi, 27 secondi.

Il *grado decimale* (deg) è a sua volta la novantesima parte dell'angolo retto, ma si divide in decimi, centesimi, ... In altri termini, la misura in gradi decimali di un angolo è un numero decimale:

$$33°19'27" = \left(33 + \frac{19}{60} + \frac{27}{3600}\right)^{\circ} = 33,3241666\ldots°$$

Il *radiante* (rad) è l'angolo che, posto al centro in un cerchio, intercetta sulla circonferenza un arco lungo come il raggio. In tal modo, l'angolo retto misura π/2 rad, l'angolo piatto π rad e l'angolo giro 2π rad. Dai gradi decimali ai radianti si passa con una semplice proporzione:

$$33,3241666\ldots° = \frac{33,3241666\ldots\times\pi}{180}\,\text{rad} = 0,58162\ldots\text{rad}$$

Campi. Il termine *campo* viene usato in numerosi contesti diversi: campo di frumento, campo di calcio, campo d'interesse, campo elettrico, campo di esistenza.

Nel nostro caso esso indica la terna (F, +, ·) costituita da un <u>insieme</u> F e da due sue <u>operazioni</u> + e · con le proprietà associativa, commutativa, con elementi neutri denominati rispettivamente 0 ed 1 e tali che

ogni $x \in F$ ha l'*opposto* $-x$ tale che $x + (-x) = 0$,

ogni $x \neq 0$ ha l'*inverso* (o *reciproco*) $\frac{1}{x}$ tale che $x \cdot \frac{1}{x} = 1$.

Infine, l'operazione · è *distributiva* rispetto a +, ossia,

per ogni a, b, $c \in F$, $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

Proprietà: in un campo F si ha: $x \cdot y = 0$ se e solo se $x = 0$ oppure $y = 0$ (*legge di annullamento del prodotto*).

Esempi: a) rispetto alle ordinarie operazioni di addizione e moltiplicazione, sono campi (**R**, + , ·) (<u>campo dei numeri reali</u>) e (**Q**, + , ·) (campo dei <u>numeri razionali</u>).

b) Non è invece un campo la terna (**Z**, + , ·), dove **Z** è l'insieme dei <u>numeri interi</u>, perché ci sono elementi ≠ 0 che non hanno l'inverso in **Z** (anzi solo 1 e -1 ce l'hanno).

c) Esistono anche campi con un numero finito di elementi. Il più piccolo è il seguente: ({pari, dispari}, +, ·), dove le operazioni sono quelle solite, riassunte nelle due tabelle seguenti:

+	p	d
p	p	d
d	d	p

·	p	d
p	p	p
d	p	d

(p = pari, d = dispari)

Il campo dei numeri reali. I *numeri reali* costituiscono l'usuale ambiente di lavoro degli scienziati e dei tecnici Ci sono molti modi per darne una costruzione o per descriverne gli elementi. Nella scuola media e nelle applicazioni si fa uso dei numeri decimali. Chiamiamo *numero decimale* ogni successione di cifre 0, 1, ... , 9, precedute da un segno + o - e con intercalata una virgola. Conveniamo innanzi tutto di uguagliare fra loro tutti i numeri decimali formati solo da zeri e di denotarli col solo simbolo 0, al quale non premettiamo alcun segno.
Un numero decimale x si chiama *periodico* se da un certo punto in poi la successione delle cifre è costituita dalla ripetizione di una stessa sequenza finita di cifre.

Esempio: x = 23,527272727272727.... ha *periodo* 27 e *antiperiodo* 5. Si usa scrivere $x = 23{,}5\overline{27}$.

Un numero decimale periodico di periodo 0 si chiama *decimale finito*. Di solito il periodo 0 non si scrive: $x = 8{,}4\overline{0} = 8{,}4$. Gli altri si chiamano *decimali illimitati*.

Identifichiamo due numeri decimali x ed y se sono periodici e tali che il primo ha periodo 0, il secondo periodo 9 e l'ultima cifra dell'antiperiodo di x si ottiene aggiungendo 1 all'ultima cifra che precede il periodo di y.

Esempio: i numeri $x = 8,\overline{4}$ ed $y = 8,3\overline{9}$ li consideriamo coincidenti.

Chiamiamo ora *numero reale* ogni numeri decimale, con le avvertenze per lo zero ed il periodo 9 che abbiamo detto. L'insieme dei numeri reali si denota con **R**.

Operazioni. In **R** ci sono due operazioni + e · che trasformano **R** in un campo. Le operazioni con i numeri decimali finiti si apprendono nella scuola media; con molta pazienza, si possono estendere anche ai decimali illimitati. L'elemento neutro dell'addizione è 0 e quello del prodotto è $1 = 1,\overline{0}$.

Ordinamento. I numeri reali preceduti dal segno + sono detti *positivi*, ed il loro insieme è denotato con $\mathbf{R}^+$. Tra di essi c'è anche 1.
Sommando e moltiplicando numeri positivi si ottengono ancora numeri positivi, e se $x \neq 0$, fra x e -x uno ed uno solo è positivo.
Se x ed y sono numeri reali poniamo $x < y$ se $y - x$ è positivo, e $x \leq y$ se $x < y$ oppure se $x = y$. L'ordine ottenuto in **R** è *totale,* ossia tale che dati due numeri reali distinti, uno dei due è sempre minore dell'altro.
Inoltre, ha la proprietà della *continuità* (si veda la voce campi ordinati nel § 1.2). Nella scuola media si impara la regoletta per stabilire, dati due numeri decimali, chi è maggiore dell'altro.

Sottoinsiemi particolari. I numeri decimali periodici corrispondono ai numeri razionali: la regoletta per passare dalle frazioni ai decimali periodici e viceversa si impara nella scuola media. I numeri decimali non periodici sono detti *numeri irrazionali.*
I numeri interi corrispondono ai decimali con tutti zeri dopo la virgola, e sono particolari decimali finiti. Non sono però i soli: sono decimali finiti anche quelli che corrispondono alle frazioni con denominatore potenza di 10: $\frac{218}{100} = 2{,}18 = 2,18\overline{0}$.
Nei programmi di matematica per computer si distingue spesso fra numeri interi e numeri reali interi, per la presenza del punto decimale: $3 \in \mathbf{Z}$, mentre 3. denota il numero reale $3,\overline{0}$ come nella figura seguente: nel primo caso il calcolo è eseguito in **Z** in forma esatta; nel secondo è eseguito in **R** in forma approssimata a 6 cifre significative e notazione scientifica.

fig. 1.1.1

Calcoli e misure con i numeri reali. Nelle applicazioni pratiche e nei calcolatori si usano solo numeri decimali finiti, con un numero di cifre "significative" più o meno grande, ma comunque finito. Perché allora è il campo reale l'ambiente usuale di lavoro? Perché, a causa della continuità di **R**, i numeri reali "riempiono" la retta, mentre i razionali lasciano infiniti buchi, ed è più facile e comprensibile enunciare e dimostrare teoremi di esistenza di soluzioni di problemi sul campo reale, che presentare metodi per approssimare indefinitamente qualcosa che potrebbe non esistere... Per esempio, la diagonale del quadrato di lato unitario misura $\sqrt{2}$. Se non avessimo a disposizione i numeri reali questa misura non esisterebbe, non avrebbe neppure senso parlare di lunghezza della diagonale del quadrato. Neppure avrebbe senso dividere una torta in tre parti, perché 1/3 = 0,33333.... non è un decimale finito! Rimane tuttavia aperto il problema di trasferire i metodi teorici ed esatti, validi nel campo dei numeri reali, in metodi pratici per misurare o calcolare nella vita quotidiana e professionale, dove si usano solo decimali finiti ed approssimazioni. La disciplina chiamata *Analisi Numerica* ha proprio questo scopo.

Definizioni. In ogni disciplina c'è ad un certo punto la necessità di introdurre parole nuove, oppure usare parole tratte dal linguaggio quotidiano, ma con un significato nuovo. Da piccoli impariamo le parole nuove associandole a ciò che percepiamo con i sensi e che ci viene insegnato dagli adulti. Più tardi incontriamo concetti più astratti e ci abituiamo a denotarli con un nome che li caratterizzi da quel momento in poi, anche se in modo non sempre uguale per tutti.
Nella scienza si cerca di avere la maggiore uniformità possibile, perciò ogni concetto nuovo viene precisato unicamente sulla base di termini e procedure che in precedenza siano stati accettati e conosciuti da tutti.
Ogni disciplina, però, ha i suoi metodi per definire termini nuovi. In Matematica il modo consueto è mediante una frase contenente solo parole vecchie, che il termine nuovo da quel momento in poi potrà sempre sostituire.

Esempio: sapendo già che cosa significano i termini "poligono", "tre" e "lati", possiamo dare la definizione di triangolo: *"un triangolo è un poligono con tre lati"*. Da questo momento in poi la parola "triangolo" potrà sempre sostituire "poligono con tre lati". Inoltre, per potere chiamare "triangolo" un oggetto, dovremo dimostrare che è un poligono con tre lati.

Riassumendo, una *definizione* in Matematica si ha quando un termine nuovo viene uguagliato ad una frase contenente solo termini già noti.

NOTA. Ovviamente, non si può andare indietro all'infinito: ci saranno ad un certo punto dei termini iniziali che non si possono definire mediante termini vecchi, che non ci sono. Questi termini iniziali sono detti *primitivi*, e il loro significato viene espresso tecnicamente mediante delle proprietà che essi debbono possedere come corredo iniziale, i *postulati*. Si veda la voce Teorie matematiche nel § 1.2.

Disequazioni. Siano A un sottoinsieme di **R** ed f, g:A→**R**. Consideriamo i seguenti problemi:

"Per quali $x \in A$ si ha $f(x) \geq g(x)$?"
"Per quali $x \in A$ si ha $f(x) > g(x)$?"
"Per quali $x \in A$ si ha $f(x) < g(x)$?"
"Per quali $x \in A$ si ha $f(x) \leq g(x)$?"

Questi problemi sono spesso presentati con la frase seguente:

"Risolvere la *disequazione* $f(x) \geq g(x)$" (e simili)

Per la terminologia si rimanda alle equazioni. La differenza principale rispetto a queste ultime è che l'insieme S delle soluzioni, se non è vuoto, di norma è un intervallo o l'unione di più intervalli.

AVVERTENZA: nel seguito, per evitare di ripetere quattro volte le stesse cose, ci si riferirà di solito alla disequazione $f(x) \geq g(x)$. Tutto quel che si dirà su di essa si traduce automaticamente anche negli altri tre casi.

Disequazioni equivalenti. In generale per risolvere una disequazione si incomincia con il trasformarla in un'altra, che abbia le stesse soluzioni, ma che sia più facile da risolvere. Per questa ragione diamo la seguente definizione: due disequazioni si dicono *equivalenti* se hanno le stesse soluzioni. Come per le equazioni, ci sono due "criteri" d'equivalenza:

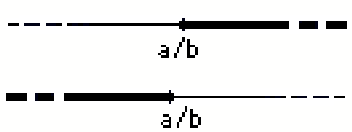
1) sommando ad ambo i membri di una disequazione una stessa espressione (di dominio A) si ottiene una disequazione equivalente alla disequazione data.
2) moltiplicando ad ambo i membri di una disequazione un numero $k > 0$ si ottiene una disequazione equivalente alla disequazione data. Moltiplicando invece ad ambo i membri di una disequazione un numero $k < 0$ si ottiene una disequazione equivalente a quella ottenuta cambiando il verso della disuguaglianza. In particolare, ciò avviene quando si cambiano i segni ai due membri:

Esempio: la disequazione $-x \geq 4$ è equivalente a $x \leq -4$.

La risoluzione della disequazione $f(x) \geq g(x)$ è un problema più complicato rispetto alla risoluzione di equazioni. In generale, infatti, il primo passo da compiere è proprio la risoluzione dell'*equazione associata* $f(x) = g(x)$. Vediamo nel seguito solo il caso di semplici disequazioni algebriche intere o fratte. Mostreremo sia la soluzione algebrica che quella grafica. Le soluzioni saranno espresse mediante uno qualunque dei tre modi per rappresentare gli intervalli.

Disequazioni di primo grado. Nella forma normale sono del tipo $a \cdot x \geq b$, $a \neq 0$ (o uno degli altri tre). Allora:

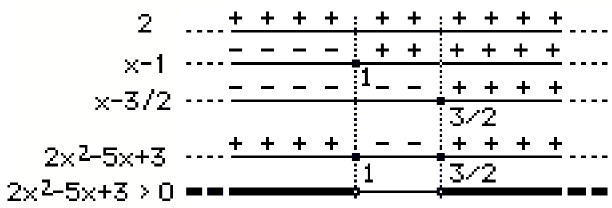
$$\begin{cases} a \geq 0: \; x \geq \dfrac{b}{a} \\ a < 0: \; x \leq \dfrac{b}{a} \end{cases}$$



Disequazioni di secondo grado. La loro forma normale è $a \cdot x^2 + b \cdot x + c \geq 0,\ a \neq 0$. L'equazione associata, $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$, ha oppure no radici a seconda del discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$.

1. Se $\Delta > 0$ ci sono due radici distinte x_1 ed x_2, con $x_1 < x_2$, date dalla nota formula. Allora **R** è diviso in tre intervalli, due semirette ed un segmento:]-∞, x_1[,] x_1, x_2[,]x_2, +∞[. Il polinomio si scompone nella forma $a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$ ed il suo segno al variare di x è il prodotto dei segni dei tre fattori, come illustrato dall'esempio seguente. Si sceglieranno l'intervallo o gli intervalli nei quali il segno è in accordo con la disequazione.

Esempio: risolvere $2x^2 - 5x + 3 > 0$. Le radici sono 1 e 3/2



Poiché è richiesto di determinare per quali x il trinomio $2x^2 - 5x + 3$ è positivo, le soluzioni sono costituite dagli x∈]-∞, 1["]3/2, +∞[, estremi esclusi.

2. Se $\Delta = 0$, l'equazione associata ha una sola soluzione, data da $x_0 = \frac{-b}{2a}$, ed allora si ha $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = a \cdot \left(x - x_0\right)^2$. Pertanto, per $x \neq x_0$ il trinomio ha lo stesso segno di a.

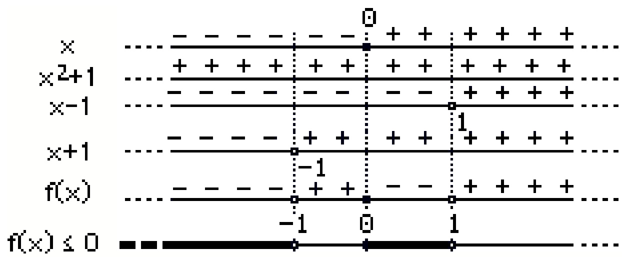
Esempio: risolvere $4x - 4 - x^2 \geq 0$. Si ha $4x - 4 - x^2 = -(x - 2)^2$, quindi il segno è sempre negativo per $x \neq 2$. La sola possibilità di essere ≥ 0 si ha proprio per $x = 2$. Ecco un caso in cui una disequazione ha una sola soluzione e non infinite.

3. Se $\Delta < 0$ allora $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = a \cdot \left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4a^2}\right]$, ed il fattore entro le quadre è somma di due termini di cui il primo è un quadrato ed è ≥ 0, il secondo è l'opposto di un numero negativo, quindi è > 0; pertanto è sempre positivo. Il segno del trinomio è dunque uguale a quello di a.

OSSERVAZIONE. Da quanto precede si deduce una regoletta agevole da ricordare: nei casi di $\Delta \geq 0$, sulle due semirette determinate dalle radici (o dalla radice) il segno del trinomio è quello di a. Nel caso $\Delta < 0$, il segno è dappertutto quello di a.

Altre disequazioni intere o fratte. Si risolvono col "metodo del segno": si porta tutto al primo membro, si riducono le frazioni allo stesso denominatore (si ricordi di escludere i valori che lo annullano!) e, ridotti i termini simili, si cerca di scomporre il numeratore ed il denominatore in fattori costanti o di primo o di secondo grado (in teoria è sempre possibile, in pratica è spesso difficilissimo). Si determinano poi i segni dei fattori al variare di x e poi si effettua il prodotto dei segni. Alla fine, si scelgono le parti di **R** nelle quali il segno è in accordo con la disequazione.

Esempio: risolvere $\frac{x^2}{x-1} \le \frac{x}{x+1}$. Innanzi tutto, $x \ne 1$ e $x \ne -1$. Portiamo ora tutto al primo membro, riduciamo allo stesso denominatore e sommiamo i termini simili: $\frac{x^3+x}{(x-1)(x+1)} \le 0$. Scomponiamo e studiamo il segno dei fattori di $f(x) = \frac{x \cdot (x^2+1)}{(x-1)(x+1)}$. Il fattore $x^2 + 1$ non ha radici ed è sempre > 0. Gli altri sono di primo grado.
La richiesta è $f(x) \le 0$. Le soluzioni sono date dagli
$x \in]-\infty, -1[$"$[0, 1[$. Gli estremi 1 e -1 sono esclusi perché annullano il denominatore. L'estremo 0 è compreso perché 0 è radice del numeratore e la richiesta è $f(x) \le 0$.



Risoluzione grafica (vedi <u>Geometria analitica</u>). Nel caso della disequazione $a \cdot x + b \ge 0$ il problema è graficamente quello di trovare per quali $x \in$ **R** i punti (x, y) della retta di equazione
$y = a \cdot x + b$ sono "al di sopra" dell'asse x, ossia nel semipiano delle ordinate positive.
Se il coefficiente angolare a è positivo, i punti sono quelli alla destra della radice; altrimenti, sono quelli alla sinistra.

Per le disequazioni di secondo grado, la visualizzazione grafica è la posizione della parabola $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$.
Se a > 0 la parabola ha la concavità verso l'alto, quindi il trinomio è positivo all'esterno dell'intervallo delle radici, se ci sono, o dappertutto, se non ce ne sono.
Se invece a < 0, la concavità è verso il basso, dunque il trinomio è positivo solo all'interno dell'intervallo delle radici, se ci sono, o è sempre negativo se non ce ne sono.

Per equazioni di altro genere il metodo grafico richiede lo studio delle funzioni e le tecniche dell'Analisi Matematica (vedi cap. 3).

Equazioni. Siano A e B due insiemi e siano f e g due funzioni da A a B. Consideriamo il seguente problema:

"Per quali $x \in A$ si ha $f(x) = g(x)$?"

Questo problema viene normalmente presentato con le parole seguenti:

"Risolvere l'*equazione* $f(x) = g(x)$".

Terminologia:

equazione : la scrittura $f(x) = g(x)$;

incognita : la x (non è detto si usi sempre la x, qualunque lettera va bene; non è detto poi ci sia un'incognita sola);

I membro della equazione : $f(x)$ (a sinistra del segno =);

II membro della equazione : $g(x)$ (a destra del segno =);

soluzioni o radici dell'equazione: gli $a \in A$ tali che $f(a) = g(a)$.

L'insieme delle soluzioni. Le soluzioni dell'equazione formano un sottoinsieme $S = \{a \in A \mid f(a) = g(a)\}$ di A. Può accadere che S sia vuoto, ed in tal caso l'equazione si dice *impossibile*. Può accadere anche che S sia uguale ad A: in questo caso le due funzioni f e g sono uguali ed allora l'equazione si chiama *identità*.

Risolvere una equazione significa:

1) dimostrare che l'insieme S delle soluzioni è o non è vuoto;
2) trovare quanti elementi ha S, cioè il numero delle soluzioni;
3) trovare tutti gli elementi di S, cioè indicare un procedimento risolutivo.

La risoluzione di una equazione è in generale un problema complicato, che dipende dalle proprietà degli insiemi A e B e delle funzioni f e g. Solo in alcuni casi è possibile trovare procedimenti risolutivi. Se l'insieme A è finito e non troppo grande, basterebbe provare uno dopo l'altro tutti gli elementi di A, per vedere quali soddisfino la condizione $f(a) = g(a)$. Se però, come di solito avviene, A è infinito, questo procedimento non è applicabile.

Equazioni equivalenti. In generale per risolvere una equazione si incomincia con il trasformarla in un'altra, che ha le stesse soluzioni, ma che è più facile da risolvere. Per questa ragione diamo la seguente definizione: due equazioni si dicono *equivalenti* se hanno le stesse soluzioni.

Il problema più frequente è: dati $f:A \to B$ e $b \in B$, trovare per quali $x \in A$ si ha $f(x) = b$. Non è un problema diverso: in questo caso la funzione g è una costante. Per questo problema si hanno le seguenti ovvie risposte: l'equazione $f(x) = b$ ha soluzione se e solo se b appartiene all'immagine $f(A)$ di f. Se f è iniettiva, la soluzione è unica.

Equazioni nell'insieme dei numeri reali. Di solito, le due funzioni f e g hanno come dominio un insieme $A \subseteq \mathbf{R}$ e come codominio $\mathbf{R}$. In tal caso si hanno i due seguenti criteri (= teoremi) di equivalenza:

1) sommando ad ambo i membri di una equazione una stessa espressione (di dominio A) si ottiene una equazione equivalente alla equazione data.
2) moltiplicando ambo i membri di una equazione per una stessa espressione sempre diversa da zero su A, si ottiene una equazione equivalente alla equazione data.

Il primo criterio consente di trasferire da un membro all'altro di una equazione numeri od espressioni cambiando loro il segno.
Il secondo consente di moltiplicare o dividere ambo i membri dell'equazione per uno stesso numero diverso da zero, e si usa per esempio per eliminare denominatori. Questi due criteri, applicati ripetutamente, consentono spesso di risolvere equazioni.

Equazioni algebriche. Sono quelle in cui sono coinvolti solo dei polinomi. Sappiamo dal calcolo letterale che la somma ed il prodotto di polinomi sono ancora polinomi; le regole di calcolo si apprendono in parte nella scuola media inferiore, in parte nel primo anno della scuola superiore e sono qui date per note.

Equazioni di primo grado. Spostando i termini da un membro all'altro, possiamo avere al primo membro tutti i termini contenenti l'incognita, mentre al secondo membro tutti i termini senza l'incognita. Dopo avere ridotto i termini simili, si ottiene la *forma normale* $a\cdot x = b$. A questo punto abbiamo tre casi:

1) $a \neq 0$: dividendo per a, si ottiene l'unica soluzione $x = b/a$
2) $a = 0$, $b \neq 0$: in questo caso, l'equazione è impossibile, perché non esiste $x \in \mathbf{R}$ tale che $0 = 0\cdot x = b \neq 0$
3) $a = b = 0$: allora ogni $x \in \mathbf{R}$ è soluzione, perché $0\cdot x = 0$ sempre. L'equazione viene detta *indeterminata.*

Equazioni di secondo grado: portando tutto al primo membro e riducendo i termini simili si ha la forma normale $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0,\ a \neq 0$.
Se qualche coefficiente è nullo, essa si risolve facilmente:

c = 0 (eq. "spuria"): raccogliendo a fattor comune ed applicando la legge d'annullamento del prodotto si ha:

$$0 = a \cdot x^2 + b \cdot x = x \cdot (a \cdot x + b) \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -\dfrac{b}{a} \end{cases}$$

b = 0 (eq. "pura" o "binomia"):

$$a \cdot x^2 + c = 0 \Rightarrow x^2 = -\frac{c}{a} \Rightarrow \begin{cases} -\dfrac{c}{a} < 0 \Rightarrow \text{impossibile} \\ -\dfrac{c}{a} \geq 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-\dfrac{c}{a}} \end{cases}$$

Nel caso generale, tutto dipende dal discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$. Se $\Delta > 0$ ci sono due radici distinte, date dalla formula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Se $\Delta = 0$ l'equazione ha una sola radice, data da $x_0 = \frac{-b}{2a}$.

Se $\Delta < 0$ non ci sono radici.

Equazioni di grado maggiore di 2. Per i gradi 3 e 4 nel 1500 furono trovate dai matematici bolognesi Dal Ferro, Bombelli, Ferrari e dai lombardi Fontana (detto Tartaglia) e Cardano le formule risolutive, chiamate *formule di Cardano*, ma che sono di uso difficile. Per quelle di grado maggiore di quattro, non solo non esiste una formula generale (teorema di Ruffini - Abel), ma in qualche caso non è possibile neppure trovare formule risolutive ad hoc (teorema di Galois). Fra le poche equazioni risolubili ci sono i due tipi seguenti:

a) Equazioni *binomie* $x^n = a$, con $a \in \mathbf{R}$ ed $n \in \mathbf{N}$ fissati.

Se n è dispari, esiste sempre una ed una sola soluzione, data da $x = \sqrt[n]{a}$.

Se n è pari, $\begin{cases} a \geq 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt[n]{a} \\ a < 0 \Rightarrow \text{impossibile} \end{cases}$.

b) Equazioni *trinomie* $a \cdot x^{2n} + b \cdot x^n + c = 0$, $a \neq 0$, $n \geq 1$. In questo caso, si pone $y = x^n$ e si ha l'*equazione ausiliaria* $a \cdot y^2 + b \cdot x + c = 0$. Per ogni sua eventuale soluzione y_0 si risolve poi l'equazione binomia $x^n = y_0$.

Esempio: $2 \cdot x^4 + x^2 - 1 = 0$. Eq. ausiliaria: $2 \cdot y^2 + y - 1 = 0$. Le sue soluzioni sono -1 ed 1/2. L'equazione $x^2 = -1$ è impossibile. L'equazione $x^2 = 1/2$ ha le due soluzioni $\pm 1/\sqrt{2}$, e queste sono le uniche due soluzioni dell'equazione data.

OSSERVAZIONE. Se sappiamo risolvere le equazioni del tipo $f(x) = y_0$ per ogni $y_0 \in \mathbf{R}$, possiamo risolvere anche l'equazione $a \cdot f(x)^2 + b \cdot f(x) + c = 0$, $a \neq 0$, con la tecnica dell'equazione ausiliaria ottenuta ponendo $y = f(x)$.

Equazioni fratte. Sono equazioni che in uno o entrambi i membri presentano denominatori contenenti l'incognita. Occorre innanzi tutto precisare il dominio comune A dei due membri dell'equazione, escludendo i valori dell'incognita che annullano i denominatori. A questo punto, i denominatori sono diversi da zero e si eliminano dopo avere ridotto le varie frazioni allo stesso denominatore. Si risolve ora la nuova equazione ottenuta e si verifica se le sue varie soluzioni trovate appartengano o no al dominio A dell'equazione data, ossia si escludono le soluzioni che annullano i denominatori dell'equazione data.

Esempio: sia data l'equazione fratta $\frac{x^2}{x-1} = \frac{1}{x-1}$. Poniamo $x-1 \neq 0$, ossia $x \neq 1$. Riduciamo allo stesso denominatore (c'è già), poi lo eliminiamo; resta $x^2 = 1$, da cui otteniamo $x = 1$ oppure x = -1. Il primo risultato è da escludere, perché avevamo dovuto porre $x \neq 1$. Pertanto, l'unica soluzione è -1.

Equazioni in più incognite. Ridotte a forma normale, sono del tipo $f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = 0$, dove f è una funzione avente per dominio un sottoinsieme A del *prodotto cartesiano* $\mathbf{R}^n = \underbrace{\mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \ldots \times \mathbf{R}}_{\text{n volte}}$.

Una tale equazione si risolve rispetto ad una delle incognite, ma le altre restano "libere" e prendono il nome di *parametri*: per ogni valore attribuito a ciascuno di essi si ha una soluzione dell'equazione data. Pertanto, se non è impossibile, in generale un'equazione in più incognite ha infinite soluzioni.

Risoluzione grafica e numerica. Le equazioni in un'incognita sul campo reale si possono riportare tutte alla forma f(x) = 0. In questo caso si possono interpretare nel piano cartesiano (vedi Geometria analitica) come il problema di determinare le intersezioni della curva y = f(x) con l'asse x, di equazione y = 0.

Nel caso della equazione di grado ≤ 1, riconducibile alla forma $m \cdot x + q = 0$, posto $y = m \cdot x + q$ si ottiene una retta, da intersecare con l'asse x: se m = 0 e $q \neq 0$ non ci sono intersezioni, perché è parallela all'asse x. Se anche q = 0 è l'asse x e ci sono infinite soluzioni. Se $m \neq 0$, infine, c'è uno ed un solo punto comune, la cui ascissa è la soluzione cercata.

Nel caso dell'equazione di secondo grado $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$, $a \neq 0$, posto $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ si ottiene una parabola. Il segno del discriminante determina l'esistenza o no di intersezioni con l'asse x (si veda la fig. 1.1.10).

Per equazioni di tipo diverso, se manca una formula risolutiva, la possibilità di tracciare accuratamente il grafico sulla carta millimetrata ci dà la possibilità di trovare una approssimazione delle soluzioni che, per molte applicazioni, può essere sufficiente.

Poiché però occorre spesso un'approssimazione migliore, da centinaia di anni sono stati escogitati dei metodi per individuare ed approssimare a piacere le radici di una equazione. Questi metodi sono stati tradotti in programmi per calcolatore e sono utilizzabili mediante semplici comandi.

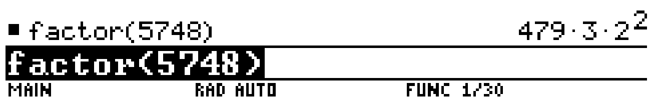


fig. 1.1.2

Funzioni. Siano A e B due insiemi non vuoti. Una *funzione* f da A a B è una relazione fra A e B tale che per ogni a∈A esiste uno ed un solo b∈B associato ad a. Si denota con f:A→B. Le notazioni più usate per elementi a∈A e b∈B corrispondenti sono f:a→b oppure b = f(a).

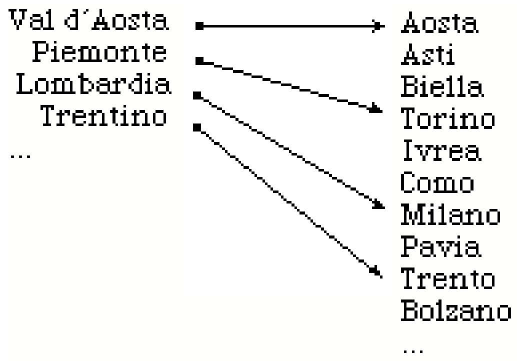
Terminologia:

A = dominio

B = codominio

f(A) = {f(a) | a∈A} = immagine di f

Esempio: A = {x | x è una regione italiana}
B = {y | y è una città italiana}
f:A → B, f(x) = capoluogo di x.
E' una funzione perché ogni regione ha uno ed un solo capoluogo. f(A) = insieme dei capoluoghi di regione = {Aosta, Torino, Milano, Trento, ... }



Uguaglianza di funzioni. Date due funzioni f:A→B e g:A→B, con lo stesso dominio e lo stesso codominio, si ha f = g se e solo se per ogni a∈A si ha f(a) = g(a). In termini di equazioni, ciò significa che l'equazione f(x) = g(x) è un'*identità*, ossia ha per soluzione ogni a∈A.

Esempio: le due funzioni f, g:**R**→**R**,

$$f(x) = x^2 - 1, \quad g(x) = (x-1)\cdot(x+1)$$

sono uguali, perché g(x) è un altro modo di scrivere f(x). Invece, se h(x) = 3x-1 allora f ≠ h perché per esempio f(1) = 0, mentre h(1) = 2.

Funzione identità. Sia A un insieme non vuoto. La funzione id_A:A→A, definita da $id_A(a) = a$ per ogni a∈A, è detta *funzione identità su A.* Se A = **R**, il suo grafico è la retta y = x, bisettrice del I e III quadrante.

Restrizione di una funzione. Siano date f:A→B e C⊆A. La funzione $f|_C$:C→B, $f|_C(x) = f(x)$ per ogni x∈C, ottenuta considerando come dominio solo gli elementi di C, si chiama *restrizione di f a C.* Nel caso di funzioni di una variabile reale, il grafico della restrizione è un pezzo di quello della f.

Esempio: nella figura 1.1.3 vediamo il grafico della funzione $f(x) = x^2$ e quello della sua restrizione all'intervallo [0, +∞[.

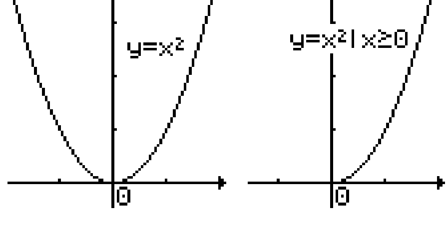


fig. 1.1.3

Funzioni suriettive: $f:A\to B$ si dice *suriettiva* o "su" se l'immagine coincide col codominio ossia $f(A) = B$. Ciò significa che per ogni $b\in B$ esiste $a\in A$ tale che $f(a) = b$. In termini di equazioni questa proprietà si esprime dicendo che l'equazione $f(x) = b$ ha sempre soluzioni qualunque sia $b\in B$. Si scrive: $f : A \xrightarrow{su} B$.

Esempio: siano

$A = \{x \mid x$ è una città italiana$\}$,

$B = \{y \mid y$ è una provincia italiana$\}$,

$f:A\to B$, $f(x)$ = provincia a cui appartiene x.

Questa è una funzione, perché ogni città sta in una ed una sola provincia, ed è suriettiva perché ogni provincia contiene almeno una città, (per esempio il suo capoluogo).

Funzioni iniettive: $f:A\to B$ si dice *iniettiva* o "1-1" se elementi distinti del dominio hanno corrispondenti distinti, ossia se per ogni a', a"$\in$A, $a' \neq a''$ implica $f(a') \neq f(a'')$. In termini di equazioni questa proprietà si esprime dicendo che l'equazione $f(x) = b$ ha al massimo una soluzione qualunque sia $b\in B$. Si scrive: $f : A \xrightarrow{1-1} B$.

Esempio: siano

A = insieme degli studenti dell'Università di Bologna;

B = insieme dei numeri naturali,

f:A∅B, f(x) = numero di matricola di x.

Questa è una funzione perché ogni studente ha uno ed un solo numero di matricola. E' iniettiva, perché studenti diversi hanno numero di matricola diverso.

Funzioni biiettive o biunivoche: $f:A\to B$ si dice *biiettiva* o "1-1 su" se è contemporaneamente iniettiva e suriettiva. In termini di equazioni questa proprietà si esprime dicendo che l'equazione $f(x) = b$ ha sempre una ed una sola soluzione qualunque sia $b\in B$.

Si scrive: $f:A \xrightarrow[su]{1-1} B$.

Esempio: la funzione $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x) = 5x-1$, è biiettiva. Infatti, posto $y = 5x-1$, si ha $x = (y+1)/5$, soluzione unica per ogni $y\in\mathbf{R}$.

Composizione di funzioni. Siano $f:A\to B$ e $g:B\to C$ due funzioni tali che il dominio di g sia uguale al codominio di f (o lo contenga). Nasce allora una nuova funzione $\varphi:A\to C$, definita da $\varphi(a) = g(f(a))$ per ogni $a\in A$. Questa nuova funzione si denota con $g\circ f$ (si legge *g composto f*) e si chiama *composta di g con f*:

$$a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} c \Rightarrow a \xrightarrow{g\circ f} c$$

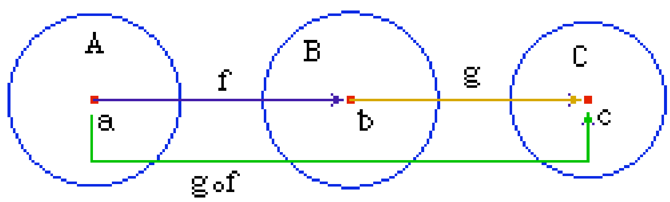


fig. 1.1.4

In generale, se esiste $g∘f$ non esiste $f∘g$, ma anche quando esiste (in particolare se $A = B = C$), di solito $g∘f$ e $f∘g$ sono funzioni diverse.

Esempio: siano $A = B = C = \mathbf{R}$, $f(x) = x^2$, $g(x) = 2x+1$; allora $g∘f(x) = 2\cdot x^2+1$, mentre $f∘g(x) = (2x+1)^2 = 4x^2+4x+1$.

Associatività. Siano $f:A\to B$, $g:B\to C$, $h:C\to D$. Allora possiamo calcolare $g∘f:A\to C$, che si può comporre con h ottenendo $h∘(g∘f):A\to D$. Analogamente, esiste $h∘g:B\to D$, ed il risultato si può comporre con f, ottenendo $(h∘g)∘f:A\to D$. Le funzioni finali sono uguali:

$$h∘(g∘f) = (h∘g)∘f.$$

Questa proprietà si chiama *associatività* della composizione.

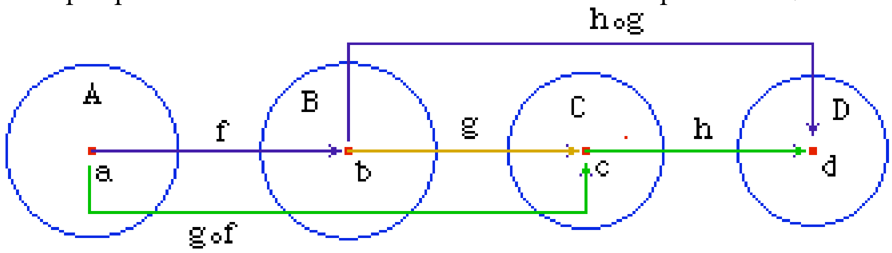


fig. 1.1.5

Composizione di biiezioni. Se $f:A\to B$, $g:B\to C$ sono suriettive anche $g∘f:A\to C$ lo è; similmente, se $f:A\to B$, $g:B\to C$ sono iniettive anche $g∘f:A\to C$ lo è. Ne segue che componendo due biiezioni si ottiene una biiezione.

Geometria analitica. Fu ideata dai matematici francesi Cartesio (René Descartes) e Fermàt (Pierre de Fermàt), vissuti nel 1600, ed è un ponte fra l'algebra e la geometria piana.

Il sistema di riferimento. Tutto il lavoro viene svolto fissando nel piano un *sistema di riferimento cartesiano ortogonale monometrico*, che si costruisce prendendo nel piano due rette tra loro perpendicolari, (che nel foglio si disegnano una orizzontale e l'altra verticale); chiamando *origine* O il loro punto comune; orientando le due rette (tradizionalmente da sinistra verso destra la orizzontale, che viene detta *asse x;* dal basso verso l'alto la verticale, detta *asse y*); fissando su entrambe la stessa unità di misura. Si può quindi stabilire una biiezione tra l'insieme dei punti del piano e l'insieme $\mathbf{R}^2 = \mathbf{R}\times\mathbf{R}$ delle coppie ordinate di numeri reali, come in figura 1.1.6.

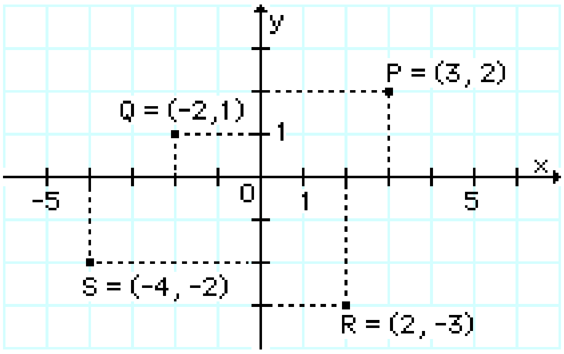


fig. 1.1.6

Coordinate. Se ad un punto P corrisponde la coppia ordinata (a, b), allora a è l'*ascissa* e b l'*ordinata* di P. Ascissa e ordinata sono le *coordinate* del punto P.

Figure e relazioni. Ogni figura piana viene tradotta in un insieme di coppie ordinate di numeri reali, ossia in una relazione fra l'insieme **R** e se stesso. In particolare, alcune figure, fra cui le rette e le circonferenze, si rappresentano mediante equazioni che esprimono in modo sintetico una proprietà comune a tutti e soli i punti della figura. Per esempio, poiché l'asse x è costituito dai punti che hanno l'ordinata nulla, esso si rappresenta mediante la relazione $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y = 0\}$ o, più brevemente, con la sola equazione y = 0. Analogamente, poiché i punti dell'asse y sono quelli con l'ascissa nulla, l'asse y ha equazione x = 0. Così seguitando, poiché i punti di una retta parallela all'asse y hanno tutti la stessa ordinata k, tale retta ha equazione x = k; per un'analoga ragione, le parallele all'asse x hanno equazione y = h, h costante.

Equazione della retta. Si può dimostrare che ogni retta nel piano cartesiano ha equazione $a \cdot x + b \cdot y + c = 0$, con a e b non entrambi nulli (equazione esplicita della retta). Se b ≠ 0, risolvendo tale equazione rispetto ad y si ottiene: $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{a}$.

Esempio:

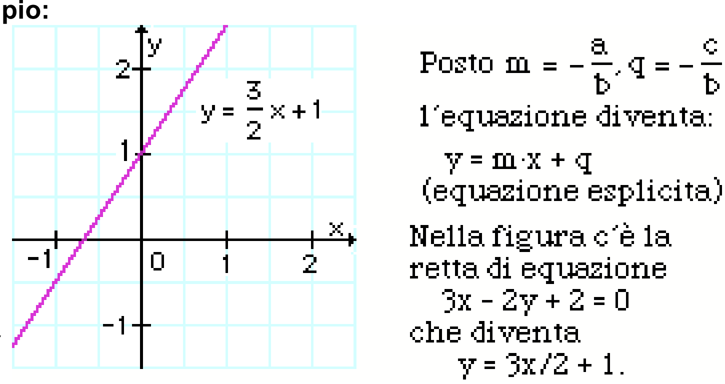


fig. 1.1.7

Il numero m si chiama *coefficiente angolare.* Se m > 0, il più piccolo angolo che l'asse x deve percorrere ruotando in senso antiorario intorno al punto comune con la retta, per sovrapporsi ad essa è acuto, come nella figura, mentre se m < 0 è ottuso. Se m = 0 la retta è parallela all'asse x.

Il numero q si chiama *ordinata all'origine* o *intercetta*. Se è = 0, la retta passa per l'origine.

Intersezione di due rette. L'idea fondamentale della geometria analitica è che un punto $P = (\overline{x}, \overline{y})$ appartiene alla retta di equazione $a \cdot x + b \cdot y + c = 0$ se e solo se le sue coordinate sono soluzioni dell'equazione, ossia se e solo se $a \cdot \overline{x} + b \cdot \overline{y} + c = 0$.

Esempio: il punto (2, 4) appartiene alla retta 3x - 2y + 2 = 0 perché 3·2 - 2·4 + 2 = 0. Invece, il punto (-1, 3) non le appartiene perché 3·(-1) - 2·3 + 2 = -7 ≠ 0.

Per questa ragione, per trovare l'eventuale punto comune a due rette di equazioni $a \cdot x + b \cdot y + c = 0$, $a' \cdot x + b' \cdot y + c' = 0$, si deve risolvere il <u>sistema</u> formato dalle due equazioni: $\begin{cases} a \cdot x + b \cdot y + c = 0 \\ a' \cdot x + b' \cdot y + c' = 0 \end{cases}$. Infatti ogni soluzione $(\overline{x}, \overline{y})$ del sistema è una soluzione comune alle due equazioni e quindi rappresenta un punto del piano comune alle due rette.

Condizione di parallelismo e di perpendicolarità. Due rette possono avere o un punto solo in comune (cioè essere *incidenti*) oppure avere tutti i punti in comune (essere cioè *coincidenti*) oppure non averne nessuno (essere cioè *parallele*). Rette coincidenti o parallele determinano angoli uguali con l'asse x, per cui è facile esprimere questa condizione a partire dalle equazioni esplicite:

a) le rette x = k ed x = h sono parallele in ogni caso
b) le rette y = m·x + q ed y = m'·x + q' sono parallele se e solo se m = m'.

Un caso particolare di due rette incidenti è quello delle rette perpendicolari. Anche in questo caso le equazioni esplicite danno immediatamente la condizione di perpendicolarità:

a) le rette x = k sono perpendicolari alle rette y = q e viceversa.
b) le rette y = m·x + q ed y = m'·x + q' , con m, m' non nulli, sono perpendicolari se e solo se $m' = -\dfrac{1}{m}$.

Il fascio di rette per un punto $P = (\overline{x}, \overline{y})$. E' l'insieme delle rette passanti per quel punto. Tra di esse, c'è la retta "verticale", di equazione $x = \overline{x}$. Le altre hanno equazione $y - \overline{y} = m \cdot (x - \overline{x})$, $m \in \mathbf{R}$. Si possono allora imporre a queste rette altre condizioni per determinare il coefficiente angolare m: passaggio per un punto Q ≠ P, perpendicolarità o parallelismo con un'altra retta y = m'·x + q', la tangenza ad una circonferenza, ecc.

Esempio: il fascio di rette passanti per A = (2, 5) è y - 5 = m·(x - 2). Se si cerca l'equazione della retta AB, con B = (-1, 3) si

sostituiscono le coordinate di B al posto di x ed y:
3-5 = m·(-1-2), da cui m = 2/3. Allora l'equazione è $y = 5 + \frac{2}{3}\cdot(x - 2)$, ossia $y = \frac{2}{3}\cdot x + \frac{11}{3}$. Invece, se C = (2, -7), allora la retta AC è la "verticale" x = 2, perché A e C hanno la stessa ascissa 2 (fig. 1.1.8)

Distanza di due punti. Dati i punti $P = (x_1, y_1)$, $Q = (x_2, y_2)$, il teorema di Pitagora conduce a determinare la formula seguente per la loro distanza: $\overline{PQ} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$.
Da questa formula segue la possibilità di calcolare il perimetro di un poligono se si conoscono le coordinate dei vertici, o vedere se un dato triangolo è isoscele, ecc.

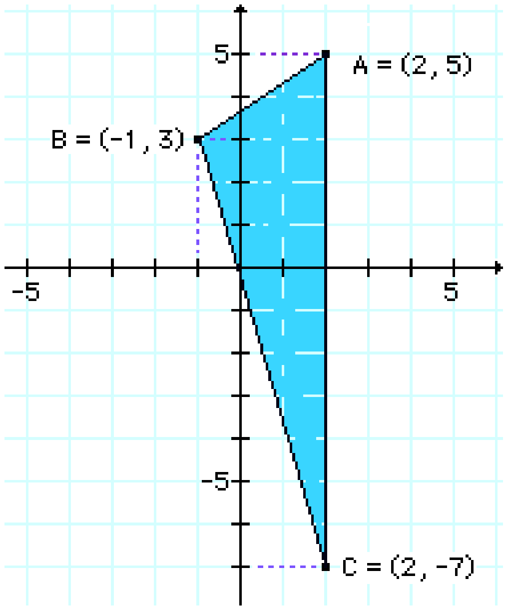


fig. 1.1.8.

Esempio: classificare il triangolo ABC della fig. 1.1.8, dove A = (2, 5), B = (-1, 3), C = (2, -7). Applicando la formula si ottiene:

$$\begin{cases} \overline{AB} = \sqrt{(2-(-1))^2 + (5-3)^2} = \sqrt{13} \\ \overline{AC} = \sqrt{(2-2)^2 + (5+7)^2} = \sqrt{144} = 12 \\ \overline{BC} = \sqrt{(-1-2)^2 + (3+7)^2} = \sqrt{109} \end{cases}$$

Poiché le tre lunghezze sono tutte diverse, il triangolo è scaleno.

Distanza di un punto $P = (\bar{x}, \bar{y})$ da una retta r di equazione $a \cdot x + b \cdot y + c = 0$. E' data dalla formula: $\overline{PH} = \dfrac{\left|a \cdot \bar{x} + b \cdot \bar{y} + c\right|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, dove H è il "piede" della perpendicolare da P ad r.

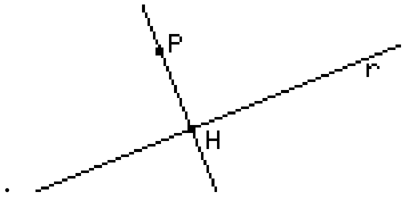


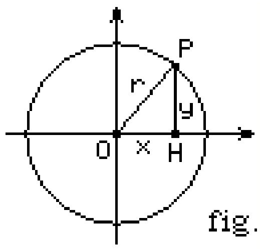
fig. 1.1.9

Questa formula può servire per calcolare l'altezza di un triangolo rispetto ad uno dei lati e quindi a calcolare l'area.

Esempio: nel triangolo ABC della figura 1.1.8 l'equazione della retta AB è, in forma implicita, 2x - 3y + 11 = 0. La distanza di $C = (2, -7)$ da questa retta è $\dfrac{\left|2 \cdot 2 - 3 \cdot (-7) + 11\right|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2}} = \dfrac{36}{\sqrt{13}}$. La base AB misura $\sqrt{13}$, quindi l'area è $\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{36}{\sqrt{13}} \cdot \sqrt{13} = 18$.

Naturalmente sarebbe stato più conveniente eseguire i calcoli rispetto al lato AC.

La circonferenza. Dalla geometria razionale si sa che la *circonferenza* è formata da tutti i punti del piano che hanno da un punto, il *centro*, la stessa distanza, il *raggio*. Mettiamo nel piano un sistema di assi cartesiani ortogonale monometrico, con l'origine nel centro della circonferenza.



Applicando il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo OPH, si ottiene $x^2 + y^2 = r^2$, che è la condizione soddisfatta da tutti e soli i punti della circonferenza. Dunque, è l'equazione della circonferenza col centro nell'origine e di raggio r.

fig. 1.1.10

Se invece il centro non è nell'origine, ma è in un punto C di coordinate (a, b), allora l'equazione si ottiene imponendo la condizione $\overline{PC}^2 = r^2$, che dà $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$. Posto ora $\begin{cases} \alpha = -2a \\ \beta = -2b \\ \gamma = a^2 + b^2 - r^2 \end{cases}$, l'equazione diventa $x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0$.

Inversamente, da questa equazione si possono ricavare le coordinate del centro (a, b) ed il raggio $r = \sqrt{a^2 + b^2 - \gamma}$, purché il numero sotto radice sia positivo.

OSSERVAZIONE. La circonferenza non è il grafico di una funzione. Infatti, se si risolve l'equazione rispetto ad y, si trovano due valori diversi. Per esempio, se consideriamo il caso del centro nell'origine, troviamo $y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$. Se scegliamo il segno +, otteniamo la semicirconferenza nel semipiano delle $y \geq 0$; se scegliamo il segno - otteniamo l'altra:

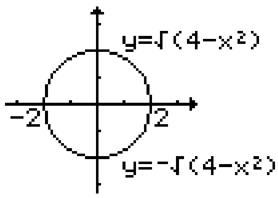
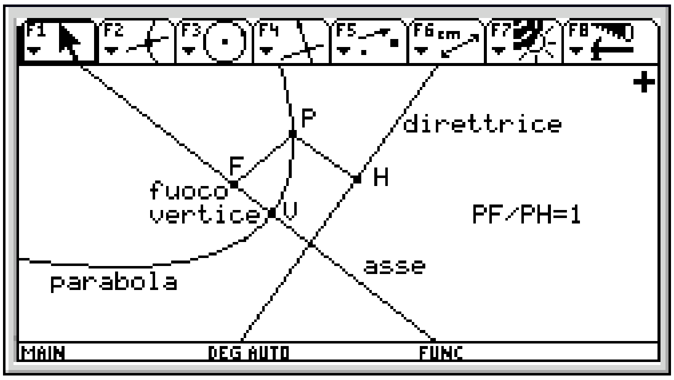


fig. 1.1.11

La parabola. La *parabola* è una curva formata da tutti i punti che hanno la stessa distanza da un punto fisso F detto *fuoco* e da una retta fissa detta *direttrice*.

L'*asse* della parabola è la perpendicolare dal fuoco alla direttrice. Il *vertice* della parabola è il punto in cui l'asse interseca la parabola, ed è il punto medio del segmento avente per estremi il fuoco e l'intersezione dell'asse con la direttrice.

fig. 1.1.12



Se prendiamo come asse y l'asse della parabola e come asse x la parallela alla direttrice passante per il vertice, allora l'equazione diventa semplicemente $y = a \cdot x^2$, con $a \neq 0$. In tal caso la parabola ha il vertice coincidente con l'origine e l'asse y come asse di simmetria. Inoltre, se $a > 0$ la parabola ha la concavità rivolta verso l'alto, mentre se $a < 0$ ce l'ha rivolta verso il basso.

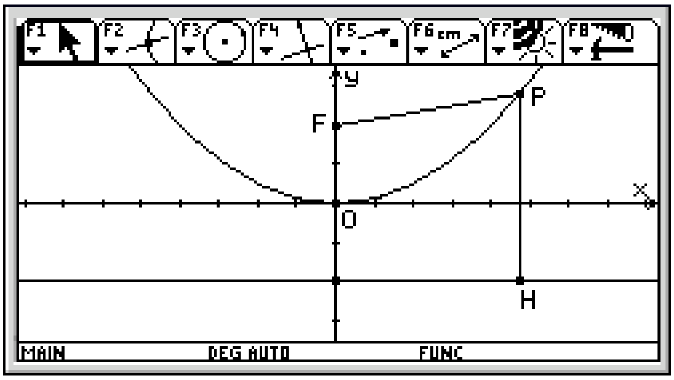
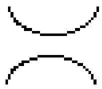


fig. 1.1.13

Se si trasla il vertice della parabola in un punto V qualsiasi del piano senza ruotare gli assi, l'equazione diventa $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$; in tal caso, il vertice V ha coordinate $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$ e l'asse ha equazione $x = -\frac{b}{2a}$. Come prima, il segno di a indica se la concavità è rivolta verso l'alto o verso il basso: $\begin{cases} a > 0 \\ a < 0 \end{cases}$ .

Il *discriminante* $\Delta = b^2 - 4ac$ dice se la curva interseca oppure no l'asse x: $\begin{cases} \Delta > 0 & \text{due intersezioni distinte} \\ \Delta = 0 & \text{il vertice è sull'asse x} \\ \Delta < 0 & \text{nessuna intersezione} \end{cases}$.

(vedi fig. 1.1.13)

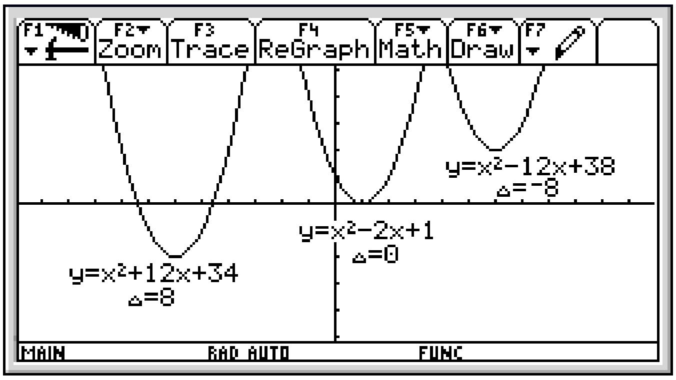


fig. 1.1.14

L'ellisse. E' la curva formata da tutti i punti del piano per i quali la somma delle distanze da due punti fissi F_1 ed F_2, detti *fuochi*, è costante. Come sistema di riferimento prendiamo quello che ha come asse delle x la retta passante per i due fuochi F_1 ed F_2 e come asse y l'asse del segmento F_1F_2, ossia la perpendicolare condotta all'asse x per il punto medio del segmento F_1F_2. In questo sistema di riferimento, se poniamo $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a$ ed $F_1 = (-c, 0)$ (con $0 < c < a$), allora l'equazione è $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, dove $b = \sqrt{a^2 - c^2}$.

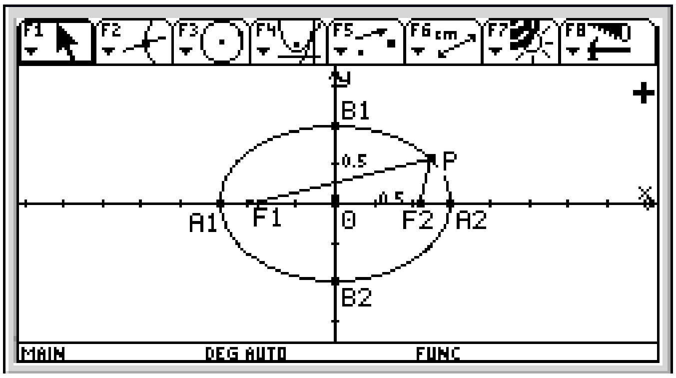


fig. 1.1.15

I punti A_1, A_2, B_1 e B_2 si chiamano *vertici*. I segmenti A_1A_2 e B_1B_2 si chiamano *assi* dell'ellisse, sono assi di simmetria ed hanno lunghezza rispettivamente 2a e 2b. Se a = b si ottiene una circonferenza.

L'iperbole. E' la curva formata da tutti i punti del piano per i quali la differenza delle distanze da due punti fissi F_1 ed F_2, detti *fuochi*, è costante in valore assoluto. Come sistema di riferimento prendiamo quello che ha come asse delle x la retta passante per i due fuochi F_1 ed F_2 e come asse y l'asse del segmento F_1F_2, ossia la perpendicolare condotta all'asse x per il punto medio del segmento F_1F_2. In questo sistema di riferimento, se poniamo $\left|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}\right| = 2a$ ed $F_1 = (-c, 0)$ (con $0 < a < c$), allora l'equazione è $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, dove $b = \sqrt{c^2 - a^2}$.

Se a = b l'iperbole si dice *equilatera*. L'iperbole ha solo due vertici, di coordinate $(\pm a, 0)$, come si prova intersecandola con gli assi.

Poiché $0 \le \frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} - 1$, si deve avere $x \le -a$ oppure $x \ge a$. Pertanto la curva si spezza in due rami, simmetrici rispetto agli assi ed esterni alla striscia compresa fra le rette $x = \pm a$.

Intersechiamo ora l'iperbole con le rette per l'origine di equazione $y = mx$, $m \in \mathbf{R}$. Si ottiene l'equazione $(b^2 - m^2a^2)x^2 = a^2b^2$. Poiché il secondo membro è positivo, essa ha soluzione se e solo se

$b^2 - m^2a^2 > 0$. Ciò equivale alla condizione $-\frac{b}{a} < m < \frac{b}{a}$. Le due rette limite $y = \pm \frac{b}{a} x$ sono dette *asintoti* dell'iperbole. L'iperbole è contenuta nei due angoli opposti al vertice aventi gli asintoti per lati e per bisettrice l'asse x. Essa non li interseca mai, ma si avvicina indefinitamente ad essi man mano che x cresce in valore assoluto.

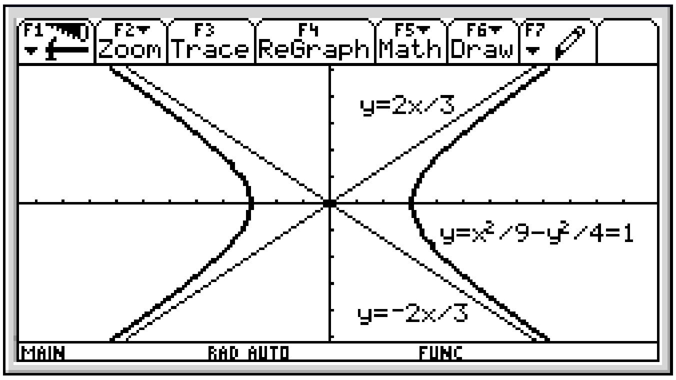


fig. 1.1.16

Se l'iperbole è equilatera, gli asintoti sono le due rette y = ±x, cioè sono le bisettrici dei quattro quadranti e sono perpendicolari fra loro.

Insiemi. Gli *insiemi* si denotano con lettere maiuscole, tipo A, B, X,...; gli *elementi* con lettere minuscole: a, b, x, y,...; l'*appartenenza* dell'elemento x all'insieme X, con la scrittura x∈X; la non appartenenza, con x∈X.

Esempio: siano A l'insieme delle regioni italiane, ed x = Umbria, allora x∈A, mentre se x = 7, allora x∈A.

Descrizione degli insiemi. Un primo modo di descrivere un insieme è mediante l'*elenco* dei suoi elementi (se possibile), raccolti entro due parentesi graffe.

A = {Carlo, Anna, Luca}.

In generale però non è possibile ed allora si ricorre ad una *proprietà* posseduta da tutti e soli gli elementi dell'insieme.

Esempio: A = {x | x è un cittadino italiano}.

Una rappresentazione grafica degli insiemi è costituita dai ben noti "diagrammi di Venn". Essi possono costituire un mezzo per comunicare, per illustrare le varie nozioni, non per dimostrare teoremi (vedi fig. 1.1.17).

Inclusione: dati due insiemi A e B, si dice che B è *sottoinsieme* di A, e si scrive B/A, se ogni elemento x appartenente a B appartiene anche ad A. La relazione/ si chiama *inclusione* (fig. 1.1.17).

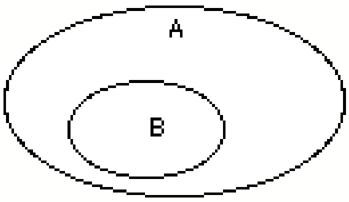


fig. 1.1.17

Operazioni fra gli insiemi: siano A e B due insiemi.

Unione: A≈B = {x | x∈A oppure x∈B}.

Intersezione: A↔B = {x | x∈A e x∈B}.

Differenza: A\B = {x | x∈A e x∈B}.

Prodotto cartesiano: $A \times B = \left\{(a,b) \middle| a \in A, b \in B\right\}$, dove con (a, b) si denota una *coppia ordinata:* se a ≠ b allora (a, b) ≠ (b, a).

Inoltre:

Insieme delle parti. Sia X un insieme. Poniamo p(X) = {A | A/X}. E' semplicemente l'insieme dei suoi sottoinsiemi.

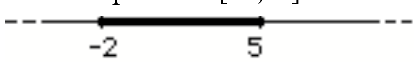
Complementare. Dati un insieme X ed un suo sottoinsieme A, chiamiamo complementare di A in X l'insieme A' = X\A, costituito dagli elementi di X che non appartengono ad A.

Insieme vuoto. Indichiamo con ø l'insieme privo di elementi.

Intervalli. Un *intervallo* è un particolare sottoinsieme di **R**, costituito da tutti i <u>numeri reali</u> (retta reale) oppure da tutti quelli che precedono o seguono un dato numero reale x_0 (semirette sinistra o destra di *origine* x_0) o dai punti compresi fra due numeri dati a e b, con a < b (segmento di *estremi* a e b).

Rappresentazioni. Gli intervalli si possono descrivere come sottoinsiemi di **R** nel modo consueto, oppure mediante parentesi quadre aperte o chiuse che racchiudono gli estremi, oppure mediante certe convenzioni grafiche, che ora vedremo con esempi.

Esempio 1.

nome: intervallo *limitato* (o segmento) *chiuso* di estremi -2 e 5
simbolo insiemistico: {x∈**R** | -2 ≤ x ≤ 5}
simbolo con le quadre: [-2, 5]
grafico: 

(pallini pieni)

Esempio 2.

nome: intervallo *limitato aperto* di estremi -2 e 5
simbolo insiemistico: {x∈**R** | -2 < x < 5}
simbolo con le quadre:]-2, 5[
grafico: 

(pallini vuoti)

Esempio 3.

nome: intervallo *limitato* di estremi -2 e 5, aperto dalla parte di -2, chiuso da quella di 5
simbolo insiemistico: {x∈**R** | -2 < x ≤ 5}
simbolo con le quadre:]-2, 5]
grafico: 

Esempio 4.

nome: intervallo aperto *illimitato superiormente*, di origine 4,
simbolo insiemistico: {x∈**R** | x > 4}
simbolo con le quadre:]4, +∞[
grafico: 

Estremi. Dati a, b∈**R**, con a < b, per ogni intervallo (aperto, chiuso o com'è) che essi delimitano l'*estremo inferiore* è a e l'*estremo superiore* è b. Se poi l'intervallo è chiuso, allora a è il *minimo* e b il *massimo,* e così via.

Esempi:

1) Sia I = [4, 9[allora 4 è il minimo e 9 è l'estremo superiore (non il massimo perché 9 non appartiene ad I).
2) Sia I =]-∞, 0[, allora l'intervallo è *inferiormente illimitato* ed ha 0 come estremo superiore.
3) L'intervallo]-∞, +∞[coincide con tutto l'insieme **R**, e non è limitato né superiormente, né inferiormente.

Unione di intervalli. Spesso accade, nel risolvere disequazioni, di considerare *unioni* di intervalli.

Esempio: Vediamo come si rappresentano le soluzioni della disequazione $x^2 - 1 > 0$:

{x∈**R** | x < -1 *oppure* x > 1} , o anche: x < -1 oppure x > 1

]-∞, -1["]1, +∞[

Proprietà degli intervalli:

a) In ogni intervallo, per piccolo che sia, ci sono sia numeri razionali che numeri irrazionali.
b) La *lunghezza* di un intervallo di estremi a e b, con a < b è b-a. Il *punto medio* di tale intervallo è (a+b)/2, media aritmetica di a e b.
c) l'intersezione di due intervalli può essere solamente:

vuota:	[2, 7] ( ]11, +∞[= ø
ridotta ad un punto:	[2, 7[([-5, 2] = {2}
un intervallo:	]-6, 8[([4, +∞[= [4, 8[.

Numeri interi. L'impossibilità di eseguire sempre la sottrazione nell'insieme **N** dei numeri naturali ha portato alla scoperta (o costruzione?) dei numeri interi *relativi*, o semplicemente dei *numeri interi*. Sono coppie formate da un numero naturale e da un *segno,* + oppure -, in tutti i modi possibili. Le coppie +0 e -0 si considerano coincidenti. Per comodità, inoltre, il segno + spesso non si scrive. L'insieme ottenuto si denota con **Z** = {0, +1, -1, +2, -2, +3, -3, ... }.

Le operazioni in **Z** si apprendono nella scuole media inferiore, estendono quelle dei numeri naturali ed hanno le proprietà associativa, commutativa, elementi neutri (0 per l'addizione ed 1 per la moltiplicazione), ogni elemento x ha un opposto -x tale che x + (-x) = 0. Inoltre, la moltiplicazione è *distributiva* rispetto all'addizione, come nel campo dei numeri reali.

Ricordiamo la *regola dei segni* per la moltiplicazione:

·	+	−
+	+	−
−	−	+

Ricordiamo infine che vale la *legge d'annullamento del prodotto.* Invece, a differenza di **R**, solo 1 e -1 hanno il *reciproco* in **Z.**

La divisibilità si può trattare anche in **Z**, ma c'è la complicazione dei segni. Conviene allora pensare ad ogni numero negativo come ottenuto moltiplicando il suo opposto (che è positivo) per -1. In tal modo, i conti si svolgono sempre con numeri positivi.

Esempio: la scomposizione in fattori primi di $-18 = (-1)\cdot 18$ è $(-1)\cdot 2\cdot 3^2$.

Rappresentazioni. In **R** i numeri interi si rappresentano come numeri decimali con tutti zeri dopo la virgola. In **Q** si rappresentano come *frazioni apparenti* con denominatore 1.

Esempio: $+7\in\mathbf{Z}$ diventa $+7,\overline{0}$ in **R** e $\frac{+7}{1}$ in **Q**. Per semplicità lo si continua però a denotare con +7 o addirittura solo con 7.

Numeri naturali. I numeri naturali costituiscono l'<u>insieme</u> $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$. Su di esso si eseguono le <u>operazioni</u> di l'addizione e la moltiplicazione, entrambe commutative, associative e con elemento neutri rispettivamente 0 ed 1. C'è poi un <u>ordine</u> totale definito nel modo seguente: per ogni $x,y\in\mathbf{N}$ poniamo $x \leq y$ se esiste $z\in\mathbf{N}$ tale che $y = x+z$. Il minimo di **N** è lo zero; invece, **N** non ha il massimo, anzi, per ogni numero ce ne sono sempre infiniti altri più grandi.
Se $x \leq y$ si può eseguire la *sottrazione:* $z = y - x$ se $x+z = y$.
In **N** si può anche eseguire la *divisione col resto*: dati due numeri a e b, con $b \neq 0$, si possono sempre trovare un *quoziente* q ed un *resto* r, tali che $0 \leq r < b$, $a = b\cdot q + r$.

Esempio: se $a = 51$ e $b = 15$ allora $q = 3$ ed $r = 6$, poiché $51 = 15\cdot 3+6$.

Divisibilità. Dati due numeri naturali a, b, si dice che a è *multiplo* di b e che b è *divisore* di a se esiste $q\in\mathbf{N}$ tale che $a = b\cdot q$.

Esempi:

a) 5 è divisore di 20 e 20 è multiplo di 5, perché $20 = 5\cdot 4$.
b) C'è un numero divisore di tutti, 1, perché per ogni $a\in\mathbf{N}$, $a = 1\cdot a$.
c) C'è anche un numero multiplo di tutti, 0, dato che $0 = a\cdot 0$.

A parte il caso di zero, per gli altri numeri si ha che se a è multiplo di b allora $a \geq b$.

Massimo comune divisore. Se $a, b\in\mathbf{N}$, si chiama *massimo comune divisore* di a e b un elemento d tale che:

(1) d è divisore di a e b
(2) d è multiplo di ogni altro divisore comune di a e b.

Il massimo comune esiste sempre, e coincide col più grande dei divisori comuni. Si denota tradizionalmente con MCD(a, b). Se è = 1 i due numeri a e b si dicono *coprimi* (o *primi fra loro*).
Analogamente si può dare la nozione di *minimo comune multiplo*, come un multiplo comune che divide gli altri multipli comuni: risulta il più piccolo di essi e si denota con mcm(a, b).

Esempio: MCD(12, 18) = 6; mcm(12, 18) = 36. Si osservi che $12 \cdot 18 = 6 \cdot 36$, ed è sempre vero: $a \cdot b = MCD(a, b) \cdot mcm(a, b)$

Numeri primi. Un elemento $p \in \mathbf{N}$, $p > 1$, si dice *primo* se ha per divisori solo se stesso e 1.

Esempio: sono primi 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, ...

Euclide dimostrò che ci sono infiniti numeri primi. Tuttavia, se un numero è molto grande è assai difficile scoprire se è primo o no. Le proprietà principali dei numeri primi sono le seguenti:

a) se p divide un prodotto $x \cdot y$ allora divide almeno uno dei fattori.
b) ogni numero naturale > 1 o è primo o è scomponibile (in un solo modo, a parte l'ordine dei fattori) in prodotto di numeri primi.

Nella scuola media si insegna a scomporre in fattori un numero "piccolo" e a servirsi della scomposizione per calcolare il massimo comune divisore ed il minimo comune multiplo di due numeri. La scomposizione in fattori primi di numeri molto grandi, con centinaia di cifre, è invece assai difficile e laboriosa anche per i grandi computer, e su questa difficoltà di scomposizione si basa principalmente la segretezza dei nostri messaggi di posta elettronica, dei nostri conti correnti, dei dispacci militari, ecc.

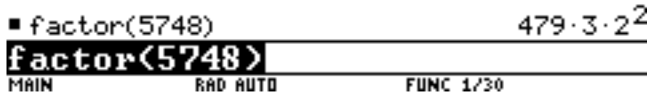


fig. 1.1.18

Numeri razionali. L'impossibilità di eseguire sempre la divisione nell'insieme **Z** dei numeri interi ha portato alla scoperta (o costruzione?) dei numeri razionali *relativi*, o semplicemente dei *numeri razionali*. Inizialmente si costruiscono le *frazioni*, ossia coppie *ordinate* di numeri interi relativi (m, n), $n \neq 0$, e che scriviamo nella forma $\frac{m}{n}$; m si chiama *numeratore*, n si chiama *denominatore*. Ci si accorge presto che infinite coppie diverse debbono in qualche modo essere uguagliate, perché il calcolo della divisione 2:3 in **R** dà $0,\overline{6}$ esattamente come 4:6. Allora diremo *equivalenti* due frazioni $\frac{m}{n}, \frac{m'}{n'}$ se i quattro numeri m, n, m', n' sono *in proporzione,* ossia se $m \cdot n' = n \cdot m'$. (Nella scuola media si preferisce dire che moltiplicando o dividendo (in **Z**) numeratore e denominatore di una frazione per uno stesso numero $\neq 0$ si ottiene una frazione equivalente a quella data). Riuniamo ora insieme tutte le frazioni equivalenti ad una frazione data: ciascuna di esse rappresenta lo stesso numero razionale (vedi anche le relazioni d'equivalenza, nel § 1.2). Come rappresentante più conveniente si sceglie la frazione *ridotta ai minimi termini:* è l'unica col denominatore positivo e coprimo col numeratore.

Operazioni. I numeri razionali si sommano e si moltiplicano con le regole apprese nella scuola elementare. In particolare, per l'addizione conviene operare così: $\frac{m}{n}+\frac{p}{q}=\frac{m\cdot q+n\cdot p}{n\cdot q}$ e poi ridurre ai minimi termini il risultato.

Per la moltiplicazione, si calcola $\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{q}=\frac{m\cdot p}{n\cdot q}$ e poi si riduce ai minimi termini il risultato.

OSSERVAZIONE. Per entrambe le operazioni, innanzi tutto il nuovo denominatore è $\neq 0$ perché prodotto di due numeri $\neq 0$. Inoltre, se al posto di $\frac{m}{n}$ e $\frac{p}{q}$ prendiamo due frazioni a loro equivalenti, il risultato non cambia.

Le due operazioni estendono le analoghe operazioni sugli interi e trasformano l'insieme **Q** in un campo. C'è anche un ordine: i numeri razionali positivi sono quelli che si rappresentano con una frazione m/n, con m, n positivi. Dopo di ché si procede dicendo che $\frac{m}{n}<\frac{p}{q}$ se $\frac{p}{q}-\frac{m}{n}$ è positivo. L'ordine ottenuto è *totale,* ossia tale che dati due numeri razionali distinti, uno dei due è sempre minore dell'altro. Inoltre, l'ordine è *denso*: fra due razionali $\frac{m}{n},\frac{p}{q}$ ce ne sono infiniti altri, fra cui la loro *media aritmetica* $\frac{1}{2}\left(\frac{m}{n}+\frac{p}{q}\right)$.

Rappresentazioni. Nell'insieme **R** dei numeri reali i numeri razionali si rappresentano come decimali periodici, escluso il periodo 9. La regoletta per passare da una frazione ad un numero decimale periodico o viceversa si impara nella scuola media.

Esempio: $1,3\overline{42}=\frac{1342\ -13}{990}=\frac{1329}{990}=\frac{443}{330}$.

Numeri reali: vedi il campo dei numeri reali.

Operazioni. Una *operazione* binaria (interna) in un insieme non vuoto X è una "macchina" che ad una qualunque coppia ordinata (x,y) di elementi di X associa sempre uno ed un solo "risultato" z appartenente ad X. In altri termini, una operazione in X è una funzione da X×X ad X. Per indicare un'operazione si usano i simboli +,× , ·, *, °, ", (, ecc. Di solito nelle considerazioni "astratte" si adopera il simbolo · ; in tal caso il risultato dell'operazione sulla coppia (x,y) è detto *prodotto* ed è indicato con x·y o talora con xy.

Per indicare un'operazione · sull'insieme X si usa il simbolo (X, ·) e questa coppia viene chiamata genericamente *struttura algebrica.*

Tavola di moltiplicazione. Se X è un insieme finito, per definire una operazione su X si può costruire una tabella, simile alla tavola pitagorica, che contiene i risultati.

Esempio: la tabella seguente definisce un'operazione nell'insieme X = {1, 2, 3}: $\begin{array}{c|ccc} \cdot & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{array}$. In essa per esempio, 2·3 = 3, 2·1 = 2, ecc. Ognuna delle 9 caselle interne della tavola contiene uno ed uno solo dei 3 elementi di X. Ne segue che sull'insieme X si potrebbero definire ben 3^9 = 19.683 operazioni diverse! Naturalmente non tutte saranno in qualche modo interessanti. Ciò che le rende importanti è la presenza di particolari proprietà.

Proprietà delle operazioni. Ecco una lista di possibili *proprietà* di una operazione su un insieme X.

1. Proprietà associativa: per ogni $a, b, c \in X$,
$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c).$$
2. Proprietà commutativa: per ogni $a, b \in X$, $a \cdot b = b \cdot a$.
3. Elemento neutro: esiste un elemento e∈X tale che:
$$\text{per ogni } a \in X,\ a \cdot e = e \cdot a = a.$$
4. Elementi simmetrici (se c'è un elemento neutro e):
$$\text{per ogni } a \in X \text{ esiste } a' \in X,\ a \cdot a' = a' \cdot a = e.$$
5. Leggi di cancellazione:
   destra: $a \cdot b = a \cdot c \Rightarrow b = c$;
   sinistra: $b \cdot a = c \cdot a \Rightarrow b = c$.
6. Proprietà di idempotenza: per ogni $a \in X$, $a \cdot a = a$.
7. Elemento assorbente: esiste u∈X tale che:
$$\text{per ogni } a \in X,\ a \cdot u = u \cdot a = u.$$

Le proprietà elencate si trovano negli esempi più importanti, ma non contemporaneamente. Si può dimostrare che un'operazione ha al massimo un elemento neutro ed un elemento assorbente. Inoltre, se l'operazione è associativa, ogni elemento ha al massimo un simmetrico.

Esempi:

a) (**N**, +) ha le proprietà 1, 2, 3, 5. L'elemento neutro è lo zero.

b) (**Z**, +), (**Q**, +), (**R**, +) hanno le proprietà 1, 2, 3, 4, 5, L'elemento neutro è lo zero ed ogni elemento x ha un simmetrico -x, detto *opposto* di x.

c) (**N**, ·) ha le proprietà 1, 2, 3, 7. L'elemento neutro è 1, l'elemento assorbente è lo zero.

d) (**N**, MCD), dove MCD indica il massimo comune divisore, ha le proprietà 1, 2, 3, 6, 7. L'elemento neutro è lo zero, l'elemento assorbente è 1.

e) Sia $\wp(X)$ l'insieme dei sottoinsiemi di un insieme X e sia $\cup$ l'unione insiemistica: ($\wp(X)$, $\cup$) possiede le proprietà 1, 2, 3, 6, 7. L'elemento neutro è il vuoto, l'elemento assorbente è X.

Piano cartesiano: vedi Geometria analitica.

Polinomi. A partire dall'identità x e dalle costanti, mediante prodotti ripetuti si ottengono i *monomi*, che sono funzioni f:**R**→**R**, $f(x) = a \cdot x^n$, con $n \in$ **N** ed $a \in$ **R** costanti. Il numero a si dice *coefficiente* del monomio.
Se $a \neq 0$ il numero n si chiama *grado* del monomio. Se n = 0, poiché $x^0 = 1$, il monomio coincide con la costante non nulla a.
Se a = 0 il monomio coincide con la costante nulla e non ha grado.

Polinomi. A partire dai monomi, mediante l'addizione si ottengono le *funzioni polinomiali* o più brevemente i *polinomi:*

$$f:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ f(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot x + a_0,$$

con $n \in$ **N**, $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ costanti appartenenti ad **R**. Il *grado del polinomio* è il massimo dei gradi dei suoi monomi con coefficiente $\neq 0$; quest'ultimo si chiama *coefficiente direttore.* Se tutti i coefficienti sono nulli, il polinomio coincide con la costante nulla e non ha grado. Il termine a_0 si chiama *termine noto.*

Principio d'identità per i polinomi. Se f e g sono due polinomi, si ha f = g (ovvero f(x) = g(x) per ogni $x \in$ **R**) se e solo se essi hanno lo stesso grado e gli stessi coefficienti.
Ne segue che un polinomio coincide con la costante nulla se e solo se ha tutti i coefficienti = 0.

Radici. Una *radice* (detta anche uno *zero*) del polinomio è un numero reale x_0 tale che $f(x_0) = 0$, ossia è una soluzione dell'equazione f(x) = 0. Si ha:

(Teorema di Ruffini). Sia f un polinomio di grado n > 0 e sia x_0 una sua radice. Allora esiste un polinomio q di grado n-1 tale che per ogni $x \in R$ si ha $f(x) = (x - x_0) \cdot q(x)$.

Riassumiamo ora qualche risultato noto sulle radici:

a) Per la costante nulla tutti i numeri reali sono radici
b) Le costanti non nulle non hanno radici
c) Ogni polinomio di primo grado f(x) = mx + q, $m \neq 0$, ha esattamente una radice:

$$mx + q = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{q}{m}$$

d) Ogni polinomio di secondo grado $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c,\ a \neq 0$, ha al massimo due radici, ma può anche non averne, dipende dal discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$. L'argomento è trattato alla voce disequazioni.

Radici multiple. Una radice x_0 si dice di *molteplicità* k per il polinomio f di grado n > 0 se esiste un polinomio g di grado n-k tale che per ogni $x \in \mathbf{R}$ si ha

$$f(x) = (x - x_0)^k \cdot g(x),\ g(x_0) \neq 0.$$

Se k = 1 la radice si dice *semplice,* se k = 2 *doppia*, ecc. Dal teorema di Ruffini segue il seguente teorema:

Sia f un polinomio di grado n > 0. Allora la somma delle molteplicità delle sue radici è ≤ n. In particolare, il numero delle radici distinte è minore o uguale ad n.

Polinomi in più variabili. Un monomio in due variabili x, y è una funzione $f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ che si presenta come il prodotto di potenze di x ed y ad esponente intero positivo, moltiplicato per una costante non nulla detta *coefficiente*: $f(x, y) = a \cdot x^h \cdot y^k$. Il grado è la somma h+k dei gradi delle due lettere. Le stesse nozioni valgono anche per monomi in più variabili. Un polinomio è una somma di monomi; il suo grado è il massimo dei gradi dei suoi monomi a coefficiente non nullo. Lo studio di questi polinomi viene effettuato il primo anno della scuola superiore. Si consiglia il ripasso delle operazioni, dei prodotti notevoli, delle scomposizioni in fattori.

Esempio: il monomio $4 \cdot x^2 \cdot y^3 \cdot z$ ha grado 2 + 3 + 1 = 6.
Il polinomio $2x^4 z + 7y^5 - 3x^3y^4 + 2$ ha grado 7.

Relazioni. Siano A e B due insiemi. Una relazione r fra A e B associa elementi $a \in A$ ad elementi $b \in B$ in modo da formare delle *coppie ordinate* (a, b). Queste ultime sono tali che $(a, b) = (a', b') \Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases}$. In particolare, $(a, b) = (b, a) \Leftrightarrow a = b$.
La più ampia relazione fra A e B è il prodotto cartesiano A×B, che contiene tutte le coppie ordinate; le altre relazioni sono i suoi sottoinsiemi, $\Re \subseteq A \times B$. Si usa scrivere $a \Re b$ anziché $(a, b) \in \Re$.

Relazioni notevoli. Le relazioni possono avere delle proprietà che le rendono più importanti ed utili. Le relazioni più importanti fra due insiemi A e B (eventualmente uguali) sono le funzioni. Fra un insieme e se stesso sono importantissime anche le relazioni d'equivalenza e quelle d'ordine (vedi § 1.2).

Rappresentazione grafica di relazioni. Per le relazioni $\Re \subseteq \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ fra l'insieme **R** dei numeri reali e se stesso si usa normalmente la rappresentazione cartesiana: ogni sua coppia (x, y) si può interpretare come un punto del piano cartesiano: ma allora alla relazione $\Re$ corrisponde un insieme di punti del piano, ossia una figura piana, detta *grafico cartesiano* della relazione.

$$\left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \;\middle|\; x^2 + y^2 = 1\right\} \qquad \left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \;\middle|\; y = x\right\}$$

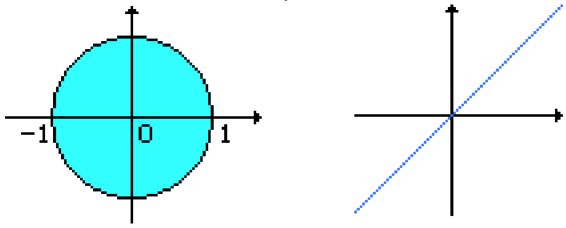


fig. 1.119

Inversamente, ogni figura piana è il grafico della relazione costituita da tutte le coppie (x, y) che sono le coordinate di punti della figura. Il problema è: data una relazione, caratterizzarne il grafico, o viceversa.

Simboli logici e matematici. E' consueto e necessario ricorrere a simboli per rappresentare oggetti o concetti: lettere dell'alfabeto per rappresentare i suoni e comporre le parole; cifre decimali o binarie per costruire i numeri e rappresentare misure o conteggi. Inoltre, segni di punteggiatura o di operazioni aritmetiche, diagrammi, schemi, tabelle, grafici, simboli, falsi colori costellano la nostra vita quotidiana e professionale.
Sono qui elencati alcuni simboli logici e matematici non presenti nelle altre voci di questo glossario.

$\Rightarrow$ implica
$\Leftrightarrow$ se e solo se
$\forall$ per ogni, qualunque sia
$\exists$ esiste, esistono
$|$ tale che

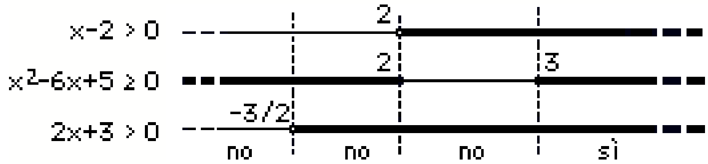
$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, *sommatoria* dei numeri a_k per k da 1 ad n

$\prod_{k=1}^{n} a_k = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n$, *prodotto* dei numeri a_k per k da 1 ad n

Sistemi di disequazioni. Un *sistema di m disequazioni in n incognite* è un insieme di m disequazioni da risolvere simultaneamente; il numero n delle incognite è il numero totale di incognite distinte che compaiono complessivamente nelle disequazioni. Il sistema è *impossibile* se non ha soluzioni; per questo basta che sia impossibile anche una sola delle disequazioni, o che le soluzioni di due delle disequazioni abbiano insiemi delle soluzioni disgiunti. Altrimenti, è detto *compatibile*.

Sistemi di disequazioni in un'incognita. Sono i più frequenti ed i meno complicati da risolvere: occorre trovare gli intervalli di soluzione di ognuna delle disequazioni e poi farne l'intersezione, ossia cercare le zone in cui *tutte* le disequazioni hanno soluzione.

Esempio: $\begin{cases} x-2>0 \\ x^2-6x+5\geq 0 \\ 2x+3>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>2 \\ x\leq 2 \text{ oppure } x\geq 3 \\ x>-\frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow$



Le soluzioni sono dunque gli $x\in[3, +\infty[$

Sistemi di equazioni. Un *sistema di m equazioni in n incognite* è un insieme di m equazioni da risolvere simultaneamente; il numero n delle incognite è il numero totale di incognite distinte che compaiono complessivamente nelle equazioni. Le *soluzioni* di un sistema sono liste (o *n-uple ordinate*) $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ di numeri reali che, sostituiti alle n incognite risolvono tutte le equazioni. Il sistema è *impossibile* se non ha soluzioni; per questo basta che sia impossibile anche una sola delle equazioni. Altrimenti, è detto *compatibile*.

Grado del sistema. Se le equazioni sono tutte costituite da polinomi in una o più variabili, il *grado* del sistema è il prodotto dei gradi delle singole equazioni.

Metodi di risoluzione. Due sistemi in n incognite si dicono *equivalenti* se hanno le stesse soluzioni. Come per le equazioni, in generale si cerca di trasformare un sistema in un altro equivalente più facile da risolvere, usando dei criteri d'equivalenza, gli stessi delle equazioni, oltre alla possibilità di permutare le equazioni a nostro piacimento e di cancellare le eventuali identità.
Il metodo risolutivo principale è quello di *sostituzione*, che consiste nel ricavare un'incognita da una delle equazioni e sostituirla nelle rimanenti; queste costituiscono un nuovo sistema con m-1 equazioni ed n-1 incognite, sul quale si opera allo stesso modo. Alla fine, se tutto va bene, ricavata un'incognita dall'ultima equazione rimasta, si sostituisce all'indietro fino a ricavare esplicitamente le altre incognite una dopo l'altra.

Esempio: $\begin{cases} x+2y+2=0 \\ x^2+y^2-4x+2y+1=0 \end{cases} \Rightarrow$

$$\begin{cases} x=-2y-2 \\ \left(-2y-2\right)^2+y^2-4\left(-2y-2\right)+2y+1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-2y-2 \\ 5y^2+18y+13=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=-2y-2 \\ y=-1 \text{ oppure } y=-\frac{13}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=-1 \end{cases} \text{ oppure } \begin{cases} x=\frac{16}{5} \\ y=-\frac{13}{5} \end{cases}$$

Il sistema ha quindi le due soluzioni (0, -1) e (16/5, -13/5).

Rappresentazione geometrica. Nel piano cartesiano un'equazione in due variabili rappresenta generalmente una curva. Un sistema di due equazioni in due incognite determina quindi i punti di intersezione di due curve. Se le due equazioni sono algebriche di gradi m ed n rispettivamente, e se le due curve non hanno archi in comune, il massimo numero dei punti d'intersezione è m·n (teorema di Bézout). Il sistema dell'esempio precedente presenta le equazioni di una retta e di una circonferenza, che si intersecano in due punti.

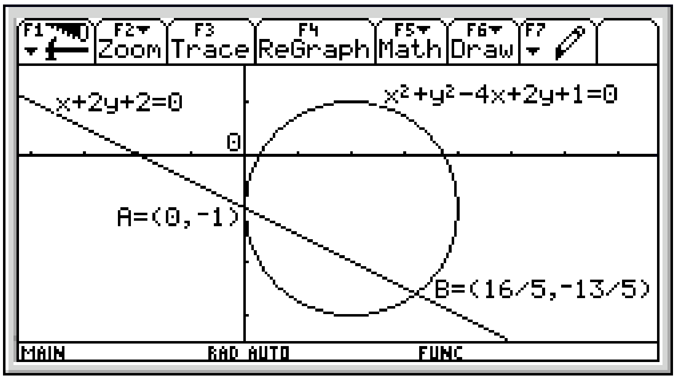


fig. 1.1.20

§ 1.2. ALCUNI APPROFONDIMENTI

Parole chiave: campi ordinati, composizione, relazioni d'equivalenza e d'ordine. Prerequisiti: conoscenza dei vari insiemi numerici e delle loro operazioni, degli insiemi, delle nozioni di base della geometria analitica. Scopi: questo paragrafo riprende, in ordine alfabetico, vari argomenti trattati nel § 1, allo scopo di ampliarli e proporne qualche approfondimento. Stile: dizionario, ipertesto.

Campi ordinati. Sia (**R**, +, ·) il campo dei numeri reali. La relazione d'ordine totale ≤ in **R** è tale che, per ogni a, b, c∈**R** si ha:

a) Posto $\mathbf{R}^+ = \{x\in\mathbf{R} \mid x \text{ positivo}\}$, allora $\mathbf{R}^+$ è chiuso rispetto alla somma ed al prodotto e, per ogni x ≠ 0, fra x e -x uno ed uno solo appartiene ad $\mathbf{R}^+$.

b) per ogni x, y∈**R**, x ≤ y se x = y oppure se $y - x\in\mathbf{R}^+$

c) Per ogni a, b, c∈**R**, a ≤ b ⇒ a+c ≤ b+c

d) Per ogni a, b, c∈**R**, a ≤ b ⇒ $\begin{cases} a\cdot c \le b\cdot c & \text{se } c > 0 \\ a\cdot c \ge b\cdot c & \text{se } c < 0 \end{cases}$

e) -1 < 0 < 1

Diremo allora che la quaterna (**R**, +, ·, ≤) costituisce un *campo ordinato.* Notiamo che le proprietà elencate non sono tutte indipendenti, ma la a) implica le altre.
Un altro esempio di campo ordinato è il campo razionale **Q**

Continuità del campo ordinato (**R**, +, ·, ≤). Siano A e B due sottoinsiemi di **R**, non vuoti. Essi si dicono *separati* se per ogni a∈A e b∈B si ha a ≤ b. Un elemento x_0 tale che $a \le x_0 \le b$ per ogni a∈A e b∈B è detto *elemento di separazione* fra A e B. Il campo ordinato reale (**R**, +, ·, ≤) è *continuo,* ossia ogni coppia di sottoinsiemi separati ha almeno un elemento di separazione in **R**.
Il campo razionale non è invece continuo, infatti i sottoinsiemi $A = \{a\in\mathbf{Q}^+ \mid a^2 < 2\}$ e $B = \{b\in\mathbf{Q}^+ \mid b^2 > 2\}$ pur essendo separati non hanno in **Q** elementi di separazione.

Insiemi contigui. Due sottoinsiemi separati A e B di **R** si dicono *contigui* se per ogni ε∈**R**, ε > 0, esistono a∈A e b∈B tali che b - a < ε. Fra di essi c'è un solo elemento di separazione.

Esempio: $A = \{a\in\mathbf{R}^+ \mid a^2 < 2\}$ e $B = \{b\in\mathbf{R}^+ \mid b^2 > 2\}$ sono contigui. Il loro unico elemento di separazione è $\sqrt{2}$.

Coefficienti binomiali. Siano n, k∈**N**, 0 ≤ k ≤ n. Ricordiamo che il simbolo n! vale 1 se n = 0 oppure n = 1, e vale $n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot2\cdot1$ se n > 1, e si legge n *fattoriale* (vedi Liste).

Il numero $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$ si chiama *coefficiente binomiale*. Spesso si denota anche con $C_{n,k}$.

Esempi: $\binom{7}{3} = \dfrac{7!}{3!\cdot 4!} = \dfrac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{(3\cdot 2\cdot 1)\cdot(4\cdot 3\cdot 2\cdot 1)} = \dfrac{7\cdot 6\cdot 5}{3\cdot 2\cdot 1} = 35$

$\binom{5}{0} = \dfrac{\cancel{5!}}{0!\cdot\cancel{5!}} = \dfrac{1}{1\cdot 1} = 1$

E' apparentemente una frazione, ma è un numero intero ≥ 1. A che serve?

In aritmetica i coefficienti binomiali costituiscono il triangolo di Tartaglia (o di Pascal, o di ... dipende dalla nazione):

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
\binom{0}{0} \longrightarrow & & & & 1 & & & & & & \binom{3}{2} \\
 & & & 1 & & 1 & & & & & \\
\binom{4}{1} & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \longleftarrow & \binom{4}{4} \\
\end{array}
$$

....

I numeri sui lati obliqui sono tutti = 1; ciascuno degli altri è la somma dei due che lo sovrastano. Per trovare la riga successiva, basta quindi procedere così:

1 1+4 4+6 6+4 4+1 1, ossia:
1 5 10 10 5 1

Osserviamo la evidente simmetria rispetto alla verticale condotta dal vertice. Inoltre, (provare per credere) la somma di ogni riga è una potenza di 2.

In algebra, calcoliamo le potenze $(a+b)^n$ del binomio a+b. Ridotti i termini simili si ottiene:

$$
\begin{aligned}
(a+b)^0 &= \mathbf{1} \\
(a+b)^1 &= \mathbf{1}a + \mathbf{1}b \\
(a+b)^2 &= \mathbf{1}a^2 + \mathbf{2}ab + \mathbf{1}b^2 \\
(a+b)^3 &= \mathbf{1}a^3 + \mathbf{3}a^2b + \mathbf{3}ab^2 + \mathbf{1}b^3
\end{aligned}
$$

si ritrova il triangolo di Tartaglia e cioè i coefficienti binomiali. Allora è facile calcolare per esempio $(a+b)^5$. Dal triangolo di Tartaglia si ottiene infatti:

$$(a+b)^5 = \mathbf{1}a^5 + \mathbf{5}a^4b + \mathbf{10}a^3b^2 + \mathbf{10}a^2b^3 + \mathbf{5}ab^4 + \mathbf{1}b^5$$

In teoria degli insiemi, se X è un insieme con n elementi e $k \le n$ allora $\binom{n}{k}$ è il numero di sottoinsiemi con k elementi.

Esempi: a) $\binom{n}{0} = 1$, infatti X ha un solo sottoinsieme vuoto.

b) Nel superenalotto viene estratta una sestina di numeri distinti fra i 90 disponibili. Ciò si può fare in $\binom{90}{6} = 622.614.630$ modi diversi. Pertanto, giocando una sestina avremo *probabilità* $\frac{1}{622.614.630}$ di vincere.

Altre applicazioni si hanno in Combinatoria, Teoria della probabilità, Genetica, ecc.

Coniche e loro eccentricità. (si veda Geometria analitica)

L'ellisse. Data l'ellisse di equazione $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, posto $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ i numeri $\pm c$ sono le ascisse dei due fuochi. Il numero $\varepsilon = c/a$ si chiama *eccentricità* dell'ellisse ed è minore di 1. Il caso $\varepsilon = 0$ è quello della circonferenza, in cui i fuochi coincidono. Altrimenti, tenendo fisso F_1 ed allontanando sempre più F_2 l'ellisse si "allunga" ed ε cresce e si avvicina ad 1.
Le rette d_1 e d_2 di equazioni rispettivamente $cx + a^2 = 0$ e $cx - a^2 = 0$ sono dette *direttrici* e sono all'esterno dell'ellisse. Con calcoli diretti si può provare il seguente risultato: i punti dell'ellisse sono tutti e soli i punti P del piano tali che, dette H_1 e H_2 le proiezioni di P rispettivamente su d_1 e d_2, si ha:

$$\overline{PF_1} = \varepsilon\, \overline{PH_1} \quad \text{o, equivalentemente,} \quad \overline{PF_2} = \varepsilon\, \overline{PH_2}$$

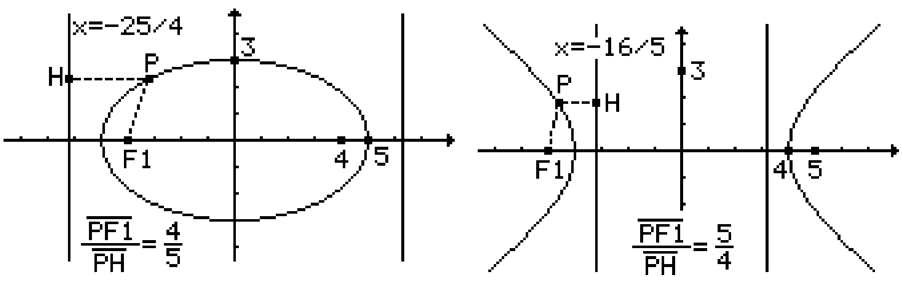


fig. 1.2.1

L'iperbole. Data l'iperbole di equazione $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, posto $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, i numeri $\pm c$ sono le ascisse dei due fuochi. Il numero $\varepsilon = c/a$ si chiama *eccentricità* dell'iperbole, ed è maggiore di 1. Per l'iperbole equilatera si ha $\varepsilon = \sqrt{2}$. Tenendo fisso F_1 ed allontanando sempre più F_2 l'iperbole si restringe ed ε si avvicina decrescendo ad 1.

Le rette d_1 e d_2 di equazioni rispettivamente $cx + a^2 = 0$ e $cx - a^2 = 0$ sono dette *direttrici* dell'iperbole, e sono contenute all'interno della striscia delimitata dalle rette $x = \pm a$. Con calcoli diretti si può provare il seguente risultato: i punti dell'iperbole sono tutti e soli i punti P del piano tali che, dette H_1 e H_2 le proiezioni di P rispettivamente su d_1 e d_2, si ha:

$$\overline{PF_1} = \varepsilon\, \overline{PH_1} \text{ o, equivalentemente, } \overline{PF_2} = \varepsilon\, \overline{PH_2}$$

NOTE. a) L'analogia con la definizione della parabola porta a dire che il caso dell'eccentricità 1 è proprio quello della parabola, che si può pensare come caso limite di un'ellisse o di una iperbole con F_2 andato "all'infinito". In definitiva, la parabola è il caso limite che separa le ellissi, di eccentricità < 1, dalle iperboli, di eccentricità > 1.

b) Ellissi, iperboli e parabole prendono il nome collettivo di *coniche,* perché si ottengono anche sezionando un cono con un piano. Non sono le uniche: se il piano passa per il vertice si possono ottenere anche due rette (distinte o coincidenti) oppure un punto solo. Abbiamo così sia *coniche non degeneri*, cioè ellisse (col caso particolare della circonferenza), iperbole e parabola, sia *coniche degeneri* costituite da due rette o da un punto solo. In comune tutte le coniche hanno una equazione di secondo grado in x ed y. Tuttavia, data una tale equazione, non è affatto un problema facile capire quale tipo di conica essa rappresenti.

Funzione inversa. Se $f:A \xrightarrow[\text{su}]{\text{1-1}} B$ allora, invertendo le frecce $f:a \to b$, si ottiene una nuova funzione da B ad A, detta *inversa di f*, denotata con $f^{-1}:B \to A$, tale che $f^{-1}(b) = a$ se e solo se $f(a) = b$.
In termini di equazioni, l'inversa si trova risolvendo rispetto ad x l'equazione $f(x) = y$, e poi scambiando i nomi delle due variabili. In ogni caso, la funzione inversa è a sua volta una biiezione, ma da B ad A: $f^{-1}:B \xrightarrow[\text{su}]{\text{1-1}} A$.

Esempio: la funzione $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x) = 3x-5$ è biiettiva. L'inversa si trova risolvendo l'equazione $y = 3x-5$ rispetto ad x: $x = \frac{y+5}{3}$. Allora, $f^{-1}(x) = \frac{x+5}{3}$. Nel caso di funzioni di una variabile reale invertibili, il grafico $y = f(x)$ della funzione data e quello $y = f^{-1}(x)$ dell'inversa sono simmetrici rispetto alla retta $y = x$, bisettrice del I e III quadrante.

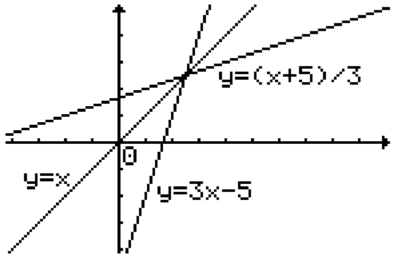


fig. 1.2.2

Se $f:A \xrightarrow[su]{1-1} B$ viene composta con l'inversa $f^{-1}:B \xrightarrow[su]{1-1} A$ il risultato è:

$$\begin{cases} f \circ f^{-1} = id_B & b \xrightarrow{f^{-1}} a \xrightarrow{f} b \\ f^{-1} \circ f = id_A & a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{f^{-1}} a \end{cases}.$$

Inverse parziali. A volte è necessario invertire, sia pure parzialmente, una funzione $f:A \to B$ non biiettiva. Per questo innanzi tutto si sceglie un sottoinsieme C del dominio in modo tale che la restrizione $f_{|C}$ di f a C sia iniettiva. Poi, come nuovo codominio si sceglie l'insieme f(C): in questo modo $f_{|C}$ diventa anche suriettiva. La funzione inversa $\left(f_{|C}\right)^{-1}: f(C) \to C$ è detta *inversa parziale di f.*

Esempio: la funzione $f:\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^2$, non è iniettiva ed ha come immagine l'intervallo $[0, +\infty[$. Se però restringiamo la funzione agli $x \geq 0$, otteniamo che la nuova funzione è biiettiva da $[0, +\infty[$ su se stesso. L'inversa allora esiste e si denota con $\sqrt{x}$.

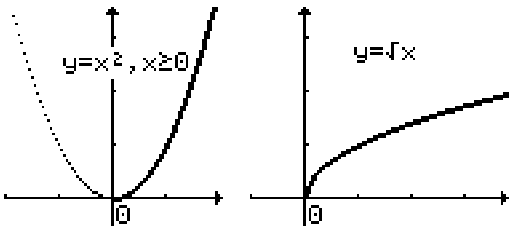


fig. 1.2.3

Liste. Nel descrivere un insieme elenchiamo gli elementi in un ordine qualsiasi, perché l'ordine non ha importanza. Inoltre, gli elementi sono tutti distinti. In altre occasioni, invece, l'ordine con cui si scrivono oggetti, nomi, ecc. ha importanza: la "griglia" di partenza di una gara di formula 1; il monte-premi di una lotteria; la successione degli 1, 2 x nella colonnina del totocalcio; le lettere di una parola, ecc. In vari casi, poi, uno stesso oggetto può essere ripetuto più volte.

Abbiamo così un oggetto matematico chiamato *lista di lunghezza n* o *n-upla ordinata* $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Gli oggetti $a_1, a_2, \ldots, a_n$ possono appartenere tutti ad uno stesso insieme o ad insiemi diversi $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Se la lunghezza è 2 ritroviamo le coppie ordinate, che costituiscono il prodotto cartesiano $A_1 \times A_2$. Per analogia, le liste di lunghezza n costituiscono il prodotto cartesiano $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$.

Uguaglianza: si ha $\left(a_1, a_2, \ldots, a_n\right) = \left(b_1, b_2, \ldots, b_n\right) \Leftrightarrow \begin{cases} m = n \\ a_i = b_i \ \forall i = 1, \ldots, n \end{cases}$
ossia per essere uguali due liste devono avere la stessa lunghezza e gli stessi oggetti negli stessi posti.

Esempi: a) $(1, 0, -3, \sqrt{5})$ è una lista di lunghezza 4 di numeri reali, ossia un elemento di $\mathbb{R}^4$. Le liste di numeri reali prendono di solito il nome di *vettori* (si veda il cap. 4).
b) la parola "cavallo" è sostanzialmente la lista (c, a, v, a, l, l, o), di lunghezza 7, di lettere dell'alfabeto. Per questa ragione potremmo chiamare *anagramma* ogni riordino degli elementi di una lista.
c) una colonnina del totocalcio è una lista di lunghezza 13 di elementi dell'insieme A = {1, 2, x}.

Il principio di moltiplicazione. Dati gli insiemi *finiti* $A_1, A_2, \ldots, A_k$, rispettivamente con $n_1, \ldots, n_k$ elementi, ci sono in tutto $\prod_{i=1}^{k} n_i$ liste distinte, ossia il prodotto cartesiano $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ ha $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$ elementi distinti. In altre parole, se per la lista $\left(a_1, a_2, \ldots, a_n\right)$ ci sono n_1 possibilità per a_1, n_2 possibilità per a_2, e così via, in tutto ci sono $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$ liste distinte.
In particolare, se $A_1, \ldots, A_k$ sono tutti uguali ad un insieme A con n elementi, ci sono in tutto n^k liste distinte (k = lunghezza della lista, n = numero di scelte per ogni casella).

Esempi: a) nel totocalcio per una colonnina si ha n = 3 e k = 13, quindi $3^{13} = 1.594.323$ colonnine distinte.
b) Se dobbiamo compilare un ordine d'arrivo (oro, argento, bronzo) fra gli otto finalisti dei 100 metri piani, abbiamo innanzi tutto una lista di lunghezza 3: in quanti modi diversi potrebbe essere compilata? Il primo potrebbe essere uno qualunque degli otto; il secondo, uno degli altri sette; il terzo, uno dei rimanenti sei. Dunque, per il principio di moltiplicazione, ci sono $8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$ "podii" possibili.

Disposizioni semplici. Il caso dell'ultimo esempio, di una lista di lunghezza k senza ripetizioni, costruita con oggetti presi da un insieme che ne ha n, viene detta *disposizione semplice di n oggetti a k a k.* e denotata spesso con $D_{n,k}$ (nella TI-92: **nPr**(n, k)).

Permutazioni e fattoriali. Le disposizioni di n oggetti ad n ad n sono dette *permutazioni.* Il loro numero è denotato con n! (si legga n fattoriale). Per il principio di moltiplicazione si ha:

$$n! = \prod_{i=0}^{n-1}(n-i) = n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1$$

Per completezza poniamo $0! = 1! = 1$.

Allora, $\forall\ n \geq 1,\ n! = n\cdot(n-1)!$

(si veda la tabella a lato)

n	n!
0	1
1	1
2	2
3	6
4	24
5	120

Frequenza. Chiamiamo *frequenza* f di un oggetto x in una lista di lunghezza n il numero di presenze dell'oggetto nella lista. La *frequenza relativa* è il quoziente f/n.

Anagrammi. Da una lista data di lunghezza n quante liste differenti si ottengono solo permutandone gli elementi? Se gli elementi sono tutti distinti, allora se ne ottengono n!. Altrimenti, se ci sono r oggetti distinti, con frequenze rispettivamente f_1, ... , f_r, ci sono in tutto $\frac{n!}{f_1!\cdot f_2!\cdot\ldots\cdot f_r!}$ anagrammi.

Esempi: a) Nella parola "cane" ogni elemento ha frequenza 1, quindi ci sono 4! = 24 anagrammi possibili:

cane caen cean cena cnae cnea acne acen
ance anec aecn aenc ncae ncea nace naec
neca neac ecan ecna eacn eanc enca enac

b) Nella parola "cravatta" di 8 lettere ci sono 5 lettere distinte. la lettera "a" ha frequenza 3 e la "t" ha frequenza 2. Le altre tre hanno frequenza 1, quindi ci sono in tutto $\frac{8!}{3!\cdot 2!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!} = 3360$ anagrammi.

c) Quante sono le colonnine del totocalcio con sei "1", quattro "x" e tre "2"? $\frac{13!}{6!\cdot 4!\cdot 3!} = 60.060$ in tutto.

Principio d'induzione. Una proprietà fondamentale dei numeri naturali è la seguente: sia M un sottoinsieme di **N**: se 0∈M e per ogni n∈M anche n+1∈M, allora M = **N**. Questa proprietà si chiama *principio d'induzione* e si usa in definizioni e dimostrazioni che coinvolgano una variabile n∈**N**.

Definizioni ricorsive: si debba definire una nozione, che denoteremo con D(n), e che abbia senso per ogni numero naturale.

a) Si definisce esplicitamente D(0).

b) Supposta definita D(n), si definisce mediante essa D(n+1).

In tal modo l'insieme M dei numeri n per i quali D(n) è definita contiene 0 e per ogni n∈M contiene anche n+1. Dunque, per il principio d'induzione, M = **N**. A volte, anziché partire da 0 si parte da

1 o da un altro numero $m > 0$. In tal caso la definizione è valida solo per ogni $n \geq m$.

Esempio: la *potenza* di base $a \in \mathbf{R}$ ed esponente $n \in \mathbf{N}$ si definisce ricorsivamente così: $\begin{cases} a^0 = 1 \\ a^{n+1} = a^n \cdot a \end{cases}$. In tal modo, si ha

$a^1 = a^{0+1} = a^0 \cdot a = 1 \cdot a = a$; $a^2 = a^{1+1} = a^1 \cdot a = a \cdot a$, e così via.

Dimostrazioni per induzione. Le *dimostrazioni per induzione* seguono uno schema analogo: se si deve provare un'affermazione P(n) che abbia senso per ogni numero naturale, si dimostra innanzi tutto che è vera P(0) e poi si dimostra che l'essere vera P(n) (*ipotesi induttiva*) implica che è vera P(n+1). In tal modo, l'insieme M dei numeri n per i quali P(n) è vera contiene 0 e per ogni $n \in M$ contiene anche n+1. Dunque, per il principio d'induzione, $M = \mathbf{N}$. A volte, anziché partire da 0 si parte da 1 o da un altro numero $m > 0$. In tal caso il teorema sarà vero solo per ogni $n \geq m$.

Esempio: dimostriamo che per ogni $n \geq 4$ si ha $2^n < n!$.

Si ha P(n) = "$2^n < n!$". E' vera P(4), perché $2^4 = 16 < 24 = 4!$. Supposta vera P(n) per un $n \geq 4$, vediamo se ciò implica che P(n+1) sia vera. Innanzi tutto, $n+1 > 2$. Allora:

$$2^{n+1} = 2^n \cdot 2 < n! \cdot 2 < n! \cdot (n+1) = (n+1)!$$

Quindi P(n+1) è vera. Allora per ogni $n \geq 4$ si ha $2^n < n!$.

Relazioni d'ordine. Sia A un insieme non vuoto. Una relazione in A si dice *relazione d'ordine* su A, e si denota in tal caso con $\leq$, se per ogni x, y, $z \in A$ si hanno le seguenti proprietà: :

1. *Riflessiva*: $x \leq x$.
2. *Antisimmetrica:* se $x \leq y$ e $y \leq x$ allora $x = y$.
3. *Transitiva*: se $x \leq y$ ed $y \leq z$ allora anche $x \leq z$.

Una relazione d'ordine si dice *totale* se possiede inoltre la seguente proprietà: per ogni x, $y \in A$ si ha $x \leq y$ oppure $y \leq x$. Se la relazione $\leq$ non possiede questa proprietà, viene detta *ordine parziale*.

Insiemi ordinati. Se A è un insieme non vuoto e $\leq$ è una relazione d'ordine su A allora la coppia (A, $\leq$) si chiama *insieme ordinato*.

Massimo e minimo. Sia (A, $\leq$) un insieme ordinato e sia B ⁄ A. Se un elemento di B è più piccolo di tutti gli altri, esso si chiama *minimo* di B e si denota con min(B). Se un elemento di B è più grande di tutti gli altri, si chiama *massimo* di B, e si denota con max(B)

Estremi superiore ed inferiore. Sia (A, $\leq$) un insieme ordinato. Sia poi B⁄A, non vuoto. Si chiama *maggiorante di B* ogni elemento $y \in A$ tale che per ogni $b \in B$ sia $b \leq y$. Si chiama *estremo superiore* di B il minimo dei maggioranti, se esiste. Si vede subito che se l'estremo superiore esiste allora è unico. Esso si denota con *sup B*. Analogamente sono definiti i minoranti di B e l'*estremo inferiore inf B*. Se sup B esiste ed appartiene a B allora è il massimo di B. Analogamente, se inf $B \in B$ allora è il minimo di B.

Esempi. 1. Indichiamo con $\leq$ l'usuale ordinamento di **N**, definito nel modo seguente: se $x, y \in \mathbf{N}$ poniamo $x \leq y$ se esiste $z \in \mathbf{N}$ tale che $y = x+z$. Allora $(\mathbf{N}, \leq)$ è un insieme totalmente ordinato. Ogni sottoinsieme non vuoto di **N** ha minimo. Il minimo di **N** è lo zero; invece, **N** non ha estremo superiore. Si usa scrivere: $\sup \mathbf{N} = + \infty$.

2. In **N** poniamo $x|y$ (e diciamo che x divide y) se esiste $q \in \mathbf{N}$ tale che $y = x \cdot q$. Allora $(\mathbf{N}, |)$ è un insieme parzialmente ordinato. Il suo massimo è 0 e il minimo è 1 e per ogni coppia di elementi $x, y \in \mathbf{N}$ si ha: $\sup\{x,y\} = \mathrm{mcm}(x,y)$ ed $\inf\{x,y\} = \mathrm{MCD}(x,y)$

.

3. Sia X un insieme. Allora $(\wp(X), \subseteq)$ è un insieme parzialmente ordinato. Il massimo di $\wp(X)$ è X ed il minimo è l'insieme vuoto. Per ogni coppia di elementi $A, B \in \wp(X)$ si ha:
$\sup\{A,B\} = A \cup B$ ed $\inf\{A,B\} = A \cap B$.

4. Nell'insieme delle parole del nostro dizionario, l'ordine *alfabetico* è un esempio di ordine totale.

Diagrammi di Hasse. Posto $X = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$, ecco i diagrammi (di Hasse) dei due insiemi ordinati $(X, |)$ e $(X, \leq)$, dove $|$ è la relazione "divide" e $\leq$ è l'ordine naturale. Le linee congiungono elementi "consecutivi". La differenza fra ordine parziale e totale è evidente.

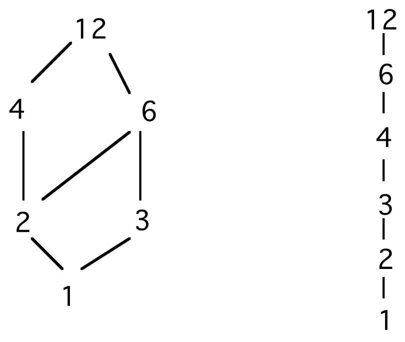


fig. 1.2.4

Relazioni d'equivalenza. Sia A un <u>insieme</u>. Sia $\mathfrak{R}$ una <u>relazione</u> su A, ossia un sottoinsieme di $A \times A$. Scriviamo $x\mathfrak{R}y$ anziché $(x,y) \in \mathfrak{R}$. Ciò posto, $\mathfrak{R}$ si dirà *relazione d'equivalenza* se possiede le seguenti tre proprietà:

1. *Riflessiva*: per ogni $x \in A$ si ha $x\mathfrak{R}x$.
2. *Simmetrica:* per ogni $x,y \in A$, se $x\mathfrak{R}y$ allora anche $y\mathfrak{R}x$.
3. *Transitiva*: per ogni $x, y, z \in A$, se $x\mathfrak{R}y$ ed $y\mathfrak{R}z$ allora anche $x\mathfrak{R}z$.

Per le relazioni d'equivalenza si usano spesso notazioni particolari: $\sim$, $\cong$, $\int$, $\Leftrightarrow$, $=$, $\equiv$, ecc.

Classi d'equivalenza. Data nell'insieme A una relazione d'equivalenza $\sim$, si chiama *classe d'equivalenza* dell'elemento $x \in A$ l'insieme degli elementi equivalenti ad x, ossia $[x] = \{y \in A \mid x \sim y\}$. Non è vuoto perché, per la proprietà riflessiva, esso contiene per lo meno x.
L'insieme delle classi d'equivalenza si chiama *insieme quoziente* di A rispetto a $\sim$ e si denota con $A/\sim$. La proprietà più notevole delle classi d'equivalenza è la seguente: se $x, y \in A$ e $[x] \neq [y]$ allora $[x] \cap [y] = \emptyset$. L'insieme quoziente è quindi una *partizione* dell'insieme A, ossia è un insieme di sottoinsiemi non vuoti di A tali che a due a due hanno intersezione vuota e ogni $x \in A$ appartiene ad uno ed uno solo di essi.

Esempi. 1) Nell'insieme dei poligoni del piano sono note varie relazioni d'equivalenza: la congruenza, la similitudine, l'equiscomponibilità, l'equivalenza (nel senso dell'avere la stessa area).

2. Nell'insieme delle rette del piano la relazione di *parallelismo in senso debole*, secondo la quale due rette sono parallele se coincidono oppure se non hanno punti comuni, è una relazione d'equivalenza. Le classi d'equivalenza si chiamano *fasci di rette parallele* o anche *punti impropri* del piano e l'insieme quoziente si chiama *retta impropria*. Nasce di qui una nuova geometria, la *geometria proiettiva*, che considera accanto ai punti e alle rette del piano anche i punti e la retta impropri: in essa due rette hanno sempre uno ed un solo punto in comune, proprio o improprio.

3. Tra le frazioni è definita la relazione: $\frac{m}{n} \cong \frac{p}{q} \Leftrightarrow m \cdot q = n \cdot p$. E' la ben nota equivalenza delle frazioni; le sue classi sono i *numeri razionali,* che costituiscono l'insieme **Q**. Ogni classe contiene una frazione a denominatore > 0 e primo col numeratore, la *frazione ridotta ai minimi termini.* Queste ultime si usano di norma per rappresentare i numeri razionali.

Teoremi. In una teoria matematica una affermazione è un *teorema* solo se la sua verità è dimostrata mediante ragionamenti logici a partire dai *postulati* e dai teoremi già dimostrati. Non si tratta quindi di sperimentare (come in Fisica), di votare (come per le Leggi) o esibire documenti (come in Storia).

Struttura di un teorema. Un teorema è costituito innanzi tutto da un *enunciato*, ossia una frase contenente solo parole note, divisa in *ipotesi* e *tesi*. L'ipotesi è l'insieme delle condizioni che devono essere soddisfatte per potere applicare il teorema; la tesi è l'insieme delle proprietà che sono conseguenza dell'ipotesi. Segue poi la *dimostrazione,* cioè la serie di passaggi logici che mostrano come si passi dall'ipotesi alla tesi.

Metodi di dimostrazione. Ci sono vari schemi che si possono seguire per dimostrare un teorema. I più comuni sono le dimostrazioni *dirette* e quelle *per assurdo*. Nel primo schema si rielabora l'ipotesi fino a giungere alla tesi. Nel secondo, alle ipotesi si aggiunge la negazione della tesi e si cerca di arrivare ad una affermazione assurda: se ci si riesce, vuole dire che la negazione della tesi non va d'accordo con l'ipotesi, quindi la tesi deve essere vera.

Esempio di dimostrazione diretta:
"Per ogni $n \in \mathbf{N}$, se n è multiplo di 6 allora è multiplo di 2"

Dimostrazione: Sia $n \in \mathbf{N}$, multiplo di 6: ciò significa che esiste un intero q tale che $n = 6 \cdot q$. Allora $n = (2 \cdot 3) \cdot q$ = (per la proprietà associativa della moltiplicazione) $= 2 \cdot (3 \cdot q)$. Ma, posto $q' = 3 \cdot q$, il numero q' è un intero a sua volta, quindi $n = 2 \cdot q'$ è multiplo di 2.

Esempio di dimostrazione per assurdo:
"Per ogni numero razionale m/n si ha $(m/n)^2 \neq 2$"

Dimostrazione. Per assurdo esista un numero razionale col quadrato uguale a 2. Rappresentiamolo come di consueto mediante una frazione m/n ridotta ai minimi termini. Allora avremo $(m/n)^2 = 2$, ossia $m^2/n^2 = 2$. Riducendo allo stesso denominatore otteniamo $m^2 = 2n^2$. Il secondo membro è pari, quindi lo è anche m^2, ed allora m è pari, ossia si ha $m = 2q$, con q intero. Sostituiamo: $(2q)^2 = 2n^2$. Per le proprietà delle potenze otteniamo $4q^2 = 2n^2$. Poiché $2 \neq 0$, possiamo semplificare per 2 ed ottenere $2q^2 = n^2$, ossia anche n^2 è pari e dunque anche n deve essere pari. In definitiva, m ed n sono entrambi pari, mentre sappiamo che sono coprimi perché la frazione m/n era ridotta ai minimi termini. Poiché abbiamo così trovato una situazione assurda, possiamo concludere che non esiste un numero razionale col quadrato uguale a 2.

Sinonimi di teorema. Spesso, per evitare ripetizioni o per motivi di tradizione, al posto di teorema si usano dei sinonimi:

Lemma: precede e prepara un teorema importante oppure giustifica una definizione.

Corollario: segue un teorema o un lemma, di cui è l'immediata conseguenza.

Proposizione: è un teorema che esprime proprietà di solito meno importanti per gli scopi che si vogliono conseguire.

Principio, criterio: sono termini che derivano dalla tradizione.

Proprietà: si usa talvolta per teoremi molto facili o dei quali non si ha voglia o tempo di fornire la dimostrazione.

Teorie matematiche. Si potrebbe introdurre "ingenuamente" l'insiemistica dicendo che il termine insieme è sinonimo di collezione, raccolta, ecc. Ci si accorgerebbe ben presto di cadere in alcune contraddizioni, come fu scoperto da B. Russel fin dall'inizio del secolo scorso. Di qui la necessità di trattare la teoria degli insiemi secondo lo stesso schema seguito per esempio dalla geometria razionale, partendo da *termini primitivi* e da *postulati* e ricavando da questi i teoremi mediante le regole della logica. Se interpretiamo una teoria matematica come un gioco, i termini primitivi sono i giocatori ed i postulati sono le regole del gioco alle quali i giocatori sono sottoposti. Più precisamente, i postulati (o *assiomi*) sono affermazioni concernenti i termini primitivi o altri termini da essi derivati, ammesse vere all'inizio della teoria, la cui funzione è tra l'altro quella di definire implicitamente i termini primitivi stessi. Ogni termine nuovo, che viene introdotto dopo quelli primitivi, deve essere specificato con una definizione solo mediante termini già noti. Lo sviluppo della teoria è costituito infine dai teoremi.

Riassunto delle voci trattate:

PREREQUISITI. Angoli. Campi. Il campo dei numeri reali. Definizioni. Disequazioni. Equazioni. Funzioni. Geometria analitica. Insiemi. Intervalli. Numeri interi. Numeri naturali. Numeri razionali. Numeri reali. Operazioni. Piano cartesiano. Polinomi. Relazioni. Simboli logici e matematici. Sistemi di disequazioni. Sistemi di equazioni.

ALCUNI APPROFONDIMENTI. Campi ordinati. Coefficienti binomiali. Coniche e loro eccentricità. Funzione inversa. Liste. Principio d'induzione. Relazioni d'ordine. Relazioni d'equivalenza. Teoremi. Teorie matematiche.