

Oggetti e rappresentazioni

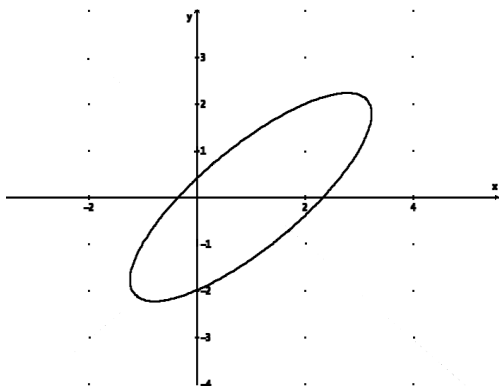
Massimo Ferri

Dip. di Matematica

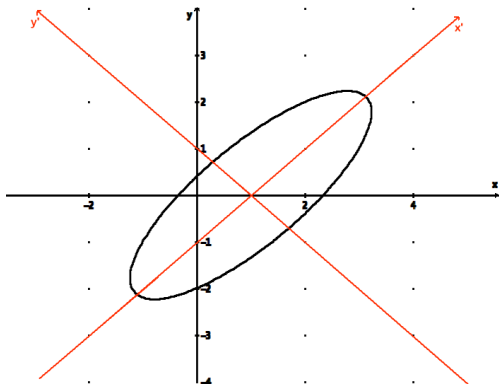
29/4/2011

- 1 **Curve ed equazioni**
- 2 **Trasformazioni lineari e matrici**
- 3 **Gruppi e presentazioni**
- 4 **Nodi e diagrammi**
- 5 **Superfici**
- 6 **3-varietà**

- 1 Curve ed equazioni**
- 2 Trasformazioni lineari e matrici
- 3 Gruppi e presentazioni
- 4 Nodi e diagrammi
- 5 Superfici
- 6 3-varietà



$$5x^2 + 5y^2 - 8xy + 8y - 4 = 0$$

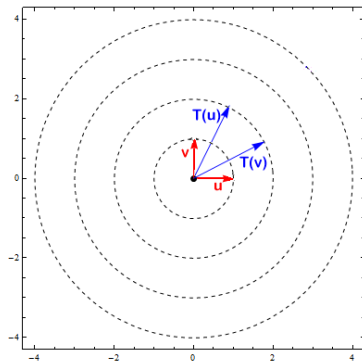


$$5x^2 + 5y^2 - 8xy + 8y - 4 = 0$$

$$\frac{x'^2}{9} + y'^2 = 1$$

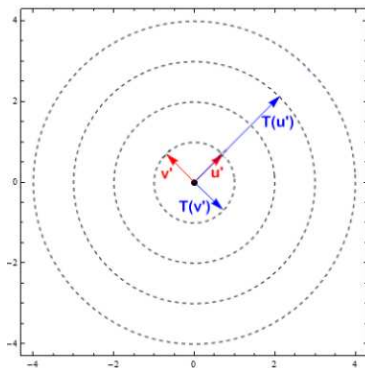
- 1 Curve ed equazioni
- 2 Trasformazioni lineari e matrici**
- 3 Gruppi e presentazioni
- 4 Nodi e diagrammi
- 5 Superfici
- 6 3-varietà

Un endomorfismo, diverse matrici



$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Un endomorfismo, diverse matrici



$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Fra vettoriale e matriciale

Def. Date $A, C \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, A è *simile* a C se esistono uno spazio vettoriale V , sue basi \mathcal{B} e \mathcal{B}' e un suo endomorfismo T , tali che A rappresenta T rispetto a \mathcal{B} , e C rappresenta T rispetto a \mathcal{B}' .

Fra vettoriale e matriciale

Def. Date $A, C \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, A è *simile* a C se esistono uno spazio vettoriale V , sue basi \mathcal{B} e \mathcal{B}' e un suo endomorfismo T , tali che A rappresenta T rispetto a \mathcal{B} , e C rappresenta T rispetto a \mathcal{B}' .

Teor. A è simile a C se e solo se esiste $E \in GL_n(\mathbf{K})$ tale che $A = E^{-1} \cdot C \cdot E$.

Fra vettoriale e matriciale

Def. Date $A, C \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, A è *simile* a C se esistono uno spazio vettoriale V , sue basi \mathcal{B} e \mathcal{B}' e un suo endomorfismo T , tali che A rappresenta T rispetto a \mathcal{B} , e C rappresenta T rispetto a \mathcal{B}' .

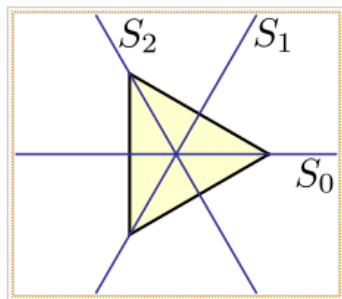
Teor. A è simile a C se e solo se esiste $E \in GL_n(\mathbf{K})$ tale che $A = E^{-1} \cdot C \cdot E$.

Teor. Ogni matrice a elementi in un campo algebricamente chiuso è simile alla sua forma di Jordan.

- 1 Curve ed equazioni
- 2 Trasformazioni lineari e matrici
- 3 Gruppi e presentazioni**
- 4 Nodi e diagrammi
- 5 Superfici
- 6 3-varietà

Cosa abbiamo di un gruppo?

	R_0	R_1	R_2	S_0	S_1	S_2
R_0	R_0	R_1	R_2	S_0	S_1	S_2
R_1	R_1	R_2	R_0	S_1	S_2	S_0
R_2	R_2	R_0	R_1	S_2	S_0	S_1
S_0	S_0	S_2	S_1	R_0	R_2	R_1
S_1	S_1	S_0	S_2	R_1	R_0	R_2
S_2	S_2	S_1	S_0	R_2	R_1	R_0



La tavola di Cayley del gruppo diedrico D_3 delle simmetrie di un triangolo equilatero.

Spesso abbiamo solo una presentazione

Teor. Ogni gruppo è isomorfo a un quoziente di un gruppo libero.

Spesso abbiamo solo una presentazione

Teor. Ogni gruppo è isomorfo a un quoziente di un gruppo libero.

Def. Una *presentazione di un gruppo* è una coppia $\langle X|R \rangle$ dove X è un insieme di generatori del gruppo libero $F(X)$ ed R è un sottoinsieme di $F(X)$.

Spesso abbiamo solo una presentazione

Teor. Ogni gruppo è isomorfo a un quoziente di un gruppo libero.

Def. Una *presentazione di un gruppo* è una coppia $\langle X|R \rangle$ dove X è un insieme di generatori del gruppo libero $F(X)$ ed R è un sottoinsieme di $F(X)$.

Il gruppo presentato da $\langle X|R \rangle$ è il gruppo quoziente $F(X)/N$ dove N è il sottogruppo normale generato da R .

Spesso abbiamo solo una presentazione

Teor. Ogni gruppo è isomorfo a un quoziente di un gruppo libero.

Def. Una *presentazione di un gruppo* è una coppia $\langle X|R \rangle$ dove X è un insieme di generatori del gruppo libero $F(X)$ ed R è un sottoinsieme di $F(X)$.

Il gruppo presentato da $\langle X|R \rangle$ è il gruppo quoziente $F(X)/N$ dove N è il sottogruppo normale generato da R .

Esempi

- 1 $\mathbf{Z}_3 = \langle a|a^3 \rangle$
- 2 $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z} = \langle a, b|aba^{-1}b^{-1} \rangle$
- 3 $\langle a, b|a^n, b^2, abab \rangle$ è il gruppo diedrico D_n

Un gruppo, tante presentazioni

Un gruppo può avere molte presentazioni diverse, per esempio $\langle x, y \mid xyxy^{-1}x^{-1}y^{-1} \rangle$ e $\langle a, b \mid a^3b^{-2} \rangle$ sono presentazioni di gruppi isomorfi.

Un gruppo, tante presentazioni

Un gruppo può avere molte presentazioni diverse, per esempio $\langle x, y | xyxy^{-1}x^{-1}y^{-1} \rangle$ e $\langle a, b | a^3b^{-2} \rangle$ sono presentazioni di gruppi isomorfi.

Trasformazioni di Tietze Sia $G = \langle X | R \rangle$ un gruppo di presentazione finita, con generatori $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ e relatori $R = \{r_1, r_2, \dots, r_m\}$.

- 1 Se s è una conseguenza di $R = \{r_1, r_2, \dots, r_m\}$ (cioè si ottiene come prodotto di r_i), allora $G = \langle X | R \rangle = \langle x_1, x_2, \dots, x_n | r_1, r_2, \dots, r_m, s \rangle$
- 2 Se $\xi \in F(X)$, allora $G = \langle X | R \rangle = \langle X \cup \{y\} | R \cup y\xi^{-1} \rangle = \langle x_1, x_2, \dots, x_n, y | r_1, r_2, \dots, r_m, y\xi^{-1} \rangle$

Una notizia buona e due cattive

Teor. (H. Tietze, 1908) Date due presentazioni finite $\langle X|R \rangle$ e $\langle X'|R' \rangle$ di uno stesso gruppo, esiste una successione finita di trasformazioni 1 e 2 (e loro inverse) che porta da $\langle X|R \rangle$ a $\langle X'|R' \rangle$.

Una notizia buona e due cattive

Teor. (H. Tietze, 1908) Date due presentazioni finite $\langle X|R \rangle$ e $\langle X'|R' \rangle$ di uno stesso gruppo, esiste una successione finita di trasformazioni 1 e 2 (e loro inverse) che porta da $\langle X|R \rangle$ a $\langle X'|R' \rangle$.

Teor. (S. Adian, 1957) Il problema dell'isomorfismo di due gruppi finitamente presentati è indecidibile.

Una notizia buona e due cattive

Teor. (H. Tietze, 1908) Date due presentazioni finite $\langle X|R \rangle$ e $\langle X'|R' \rangle$ di uno stesso gruppo, esiste una successione finita di trasformazioni 1 e 2 (e loro inverse) che porta da $\langle X|R \rangle$ a $\langle X'|R' \rangle$.

Teor. (S. Adian, 1957) Il problema dell'isomorfismo di due gruppi finitamente presentati è indecidibile.

Cor. (A. Markov, 1958) Il problema dell'omeomorfismo di due n -varietà ($n \geq 4$) è indecidibile.

Ma se il gruppo è abeliano...

Teor. Se G è un gruppo abeliano finitamente generato, allora G è isomorfo a

- \mathbf{Z}^n oppure
- $\mathbf{Z}^n \oplus_1^r \mathbf{Z}_{d_i}$ dove $n \geq 0$, d_i sono numeri interi ≥ 2 e se $i < j$, d_i divide d_j e sono univocamente individuati da G .

Ma se il gruppo è abeliano...

Teor. Se G è un gruppo abeliano finitamente generato, allora G è isomorfo a

- \mathbf{Z}^n oppure
- $\mathbf{Z}^n \oplus_1^r \mathbf{Z}_{d_i}$ dove $n \geq 0$, d_i sono numeri interi ≥ 2 e se $i < j$, d_i divide d_j e sono univocamente individuati da G .

Teor. Se G è un gruppo abeliano finitamente generato, allora G è isomorfo a

- \mathbf{Z}^n oppure
- $\mathbf{Z}^n \oplus_1^r \mathbf{Z}_{d_i}$ dove $n \geq 0$, d_i sono numeri interi potenze di numeri primi.

- 1 Curve ed equazioni
- 2 Trasformazioni lineari e matrici
- 3 Gruppi e presentazioni
- 4 Nodi e diagrammi**
- 5 Superfici
- 6 3-varietà

Nodi e loro equivalenza

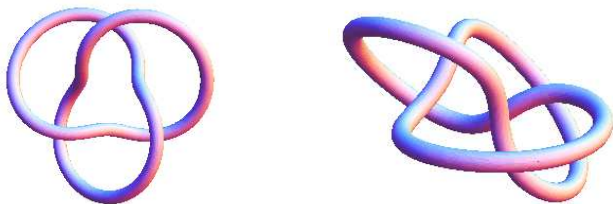
Def. Un *nodo* è una coppia topologica $\mathcal{K} = (\mathbf{S}^3, K)$, dove K è omeomorfo a \mathbf{S}^1 .

Nodi e loro equivalenza

Def. Un *nodo* è una coppia topologica $\mathcal{K} = (\mathbf{S}^3, K)$, dove K è omeomorfo a \mathbf{S}^1 .

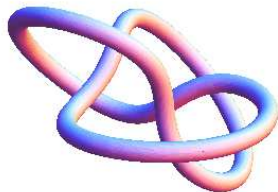
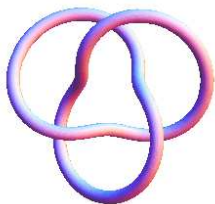
Def. Il nodo $\mathcal{K} = (\mathbf{S}^3, K)$ è *equivalente* al nodo $\mathcal{K}' = (\mathbf{S}^3, K')$ se esiste un omeomorfismo $f : \mathbf{S}^3 \rightarrow \mathbf{S}^3$, isotopo all'identità, tale che sia $f(K) = K'$.

Diagrammi come proiezioni



Due viste dello stesso nodo trifoglio.

Diagrammi come proiezioni



Due viste dello stesso nodo trifoglio.



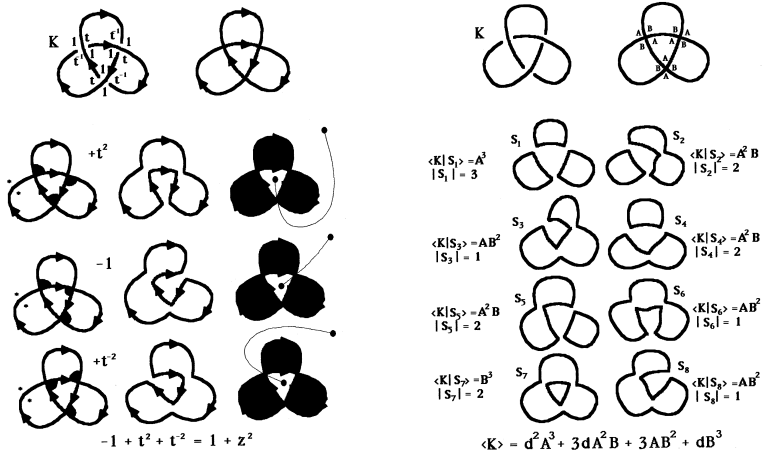
I corrispondenti diagrammi.

Diagrammi come grafi

Che i diagrammi divengano oggetti combinatorii (grafi con spigoli etichettati) è evidente nei lavori di L. Kauffman

Diagrammi come grafi

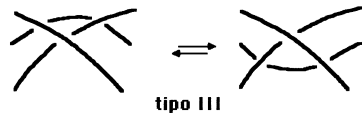
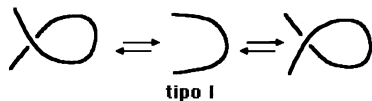
Che i diagrammi divengano oggetti combinatorii (grafi con spigoli etichettati) è evidente nei lavori di L. Kauffman



Costruzione dei polinomi di Conway e bracket mediante "stati".

Mosse di Reidemeister

Teor. (K. Reidemeister, 1935) Dati diagrammi D, D' di nodi equivalenti, esiste una successione finita di trasformazioni di tipo I, II, III che porta D in D' .



Il problema della non equivalenza è difficile

$\mathcal{K} = (\mathbf{S}^3, K)$ è equivalente a $\mathcal{K}' = (\mathbf{S}^3, K')$

Il problema della non equivalenza è difficile

$\mathcal{K} = (\mathbf{S}^3, K)$ è equivalente a $\mathcal{K}' = (\mathbf{S}^3, K')$

↓

$(\mathbf{S}^3 - K)$ è omeomorfo a $(\mathbf{S}^3 - K')$

Il problema della non equivalenza è difficile

$\mathcal{K} = (\mathbf{S}^3, K)$ è equivalente a $\mathcal{K}' = (\mathbf{S}^3, K')$

\Downarrow

$(\mathbf{S}^3 - K)$ è omeomorfo a $(\mathbf{S}^3 - K')$

\Downarrow

$\pi_1(\mathbf{S}^3 - K)$ è isomorfo a $\pi_1(\mathbf{S}^3 - K')$

Il problema della non equivalenza è difficile

$\mathcal{K} = (\mathbf{S}^3, K)$ è equivalente a $\mathcal{K}' = (\mathbf{S}^3, K')$

↓

$(\mathbf{S}^3 - K)$ è omeomorfo a $(\mathbf{S}^3 - K')$

↓

$\pi_1(\mathbf{S}^3 - K)$ è isomorfo a $\pi_1(\mathbf{S}^3 - K')$

↓

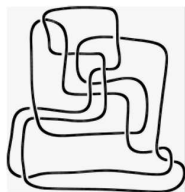
Il polinomio di Alexander della presentazione di Wirtinger di $\pi_1(\mathbf{S}^3 - K)$ è identico a quello di $\pi_1(\mathbf{S}^3 - K')$

Una notizia buona e una cattiva

Esiste un algoritmo per la decisione dell'equivalenza di due nodi (W. Haken e G. Hemion, 1992).

Esso si applica a triangolazioni di \mathbf{S}^3 in cui i sottospazi K, K' sono parte dell'1-scheletro e utilizza superfici.

L'algoritmo è derivato dall'algoritmo di riconoscimento del nodo banale (W. Haken, 1961)



Una notizia buona e una cattiva

Esiste un algoritmo per la decisione dell'equivalenza di due nodi (W. Haken e G. Hemion, 1992).

Esso si applica a triangolazioni di \mathbf{S}^3 in cui i sottospazi K, K' sono parte dell'1-scheletro e utilizza superfici.

L'algoritmo è derivato dall'algoritmo di riconoscimento del nodo banale (W. Haken, 1961)

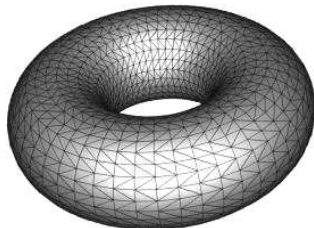
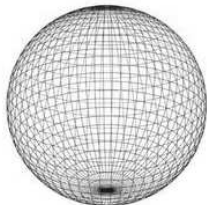


Purtroppo non si conosce una versione dell'algoritmo che si applichi ai diagrammi dei nodi.

- 1 Curve ed equazioni
- 2 Trasformazioni lineari e matrici
- 3 Gruppi e presentazioni
- 4 Nodi e diagrammi
- 5 Superfici**
- 6 3-varietà

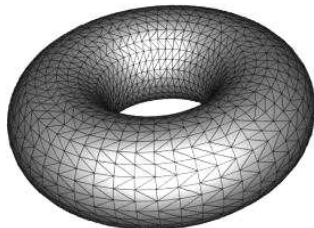
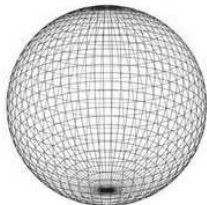
Triangolazioni

Le superfici sono normalmente espresse da loro triangolazioni.



Triangolazioni

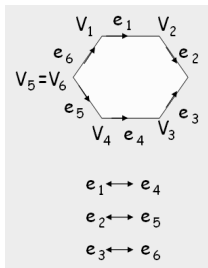
Le superfici sono normalmente espresse da loro triangolazioni.



Dal punto di vista informatico questo significa l'uso di enormi matrici d'incidenza.

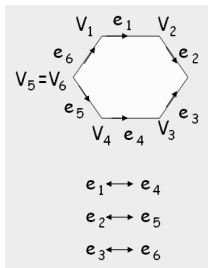
Sviluppi

Per lo studio teorico è più comoda la rappresentazione mediante uno sviluppo



Sviluppi

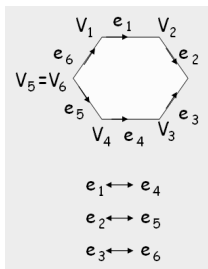
Per lo studio teorico è più comoda la rappresentazione mediante uno sviluppo



Naturalmente si ripresenta il problema: quali sviluppi rappresentano superfici omeomorfe?

Sviluppi

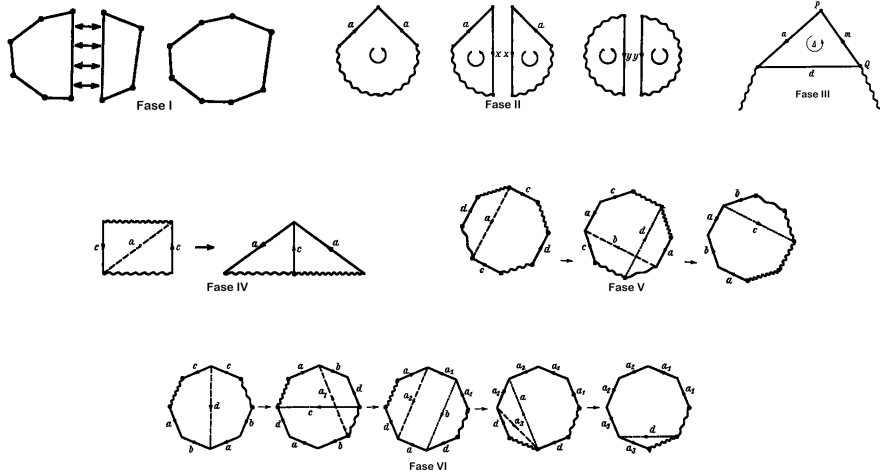
Per lo studio teorico è più comoda la rappresentazione mediante uno sviluppo



Naturalmente si ripresenta il problema: quali sviluppi rappresentano superfici omeomorfe?

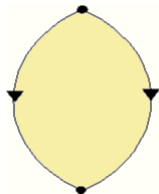
Per fortuna esistono trasformazioni, organizzate in 6 fasi, che portano ogni sviluppo in una forma normale.

Taglia-e-cuci

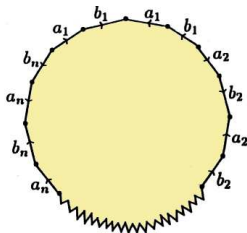


Forme normali

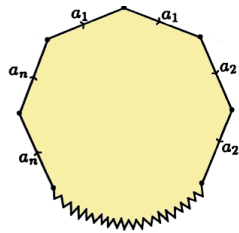
Teor. (M. Dehn e P. Heegaard, 1907) Ogni superficie connessa, compatta, con bordo vuoto è omeomorfa allo spazio quoziente indicato da uno dei seguenti sviluppi, per un opportuno n .



La sfera \mathbf{S}^2



La somma di n tori



La somma di n piani proiettivi

- 1 Curve ed equazioni
- 2 Trasformazioni lineari e matrici
- 3 Gruppi e presentazioni
- 4 Nodi e diagrammi
- 5 Superfici
- 6 3-varietà**

Classificazione ancora irrisolta

Le varietà 3-dimensionali sfuggono ancora ad una classificazione, e si trovano dunque in posizione intermedia fra la soluzione positiva in dimensione 2 e quella di non classificabilità in dimensione ≥ 4 .

Classificazione ancora irrisolta

Le varietà 3-dimensionali sfuggono ancora ad una classificazione, e si trovano dunque in posizione intermedia fra la soluzione positiva in dimensione 2 e quella di non classificabilità in dimensione ≥ 4 .

Nel secolo scorso ci fu una ricerca di riduzione della classificazione a problemi collegati a superfici, nodi o grafi.

Classificazione ancora irrisolta

Le varietà 3-dimensionali sfuggono ancora ad una classificazione, e si trovano dunque in posizione intermedia fra la soluzione positiva in dimensione 2 e quella di non classificabilità in dimensione ≥ 4 .

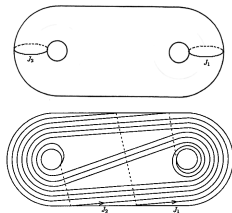
Nel secolo scorso ci fu una ricerca di riduzione della classificazione a problemi collegati a superfici, nodi o grafi.

Ciò comportava teoremi di rappresentazione e teoremi di equivalenza; oltre alla ricerca di enti definiti sulle rappresentazioni e invarianti per equivalenza.

Spezzamenti di Heegaard

Spezzamento in corpi di maniglie.

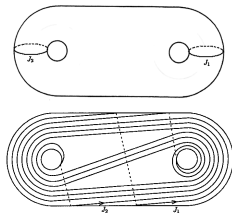
Esistenza: P. Heegaard, 1906.



Spezzamenti di Heegaard

Spezzamento in corpi di maniglie.

Esistenza: P. Heegaard, 1906.



Equivalenza: K. Reidemeister e J. Singer, 1933.

Nodi etichettati

Chirurgia su un nodo.

Esistenza: R. Lickorish, 1962.



Nodi etichettati

Chirurgia su un nodo.

Esistenza: R. Lickorish, 1962.

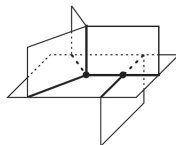


Equivalenza: R. Kirby, R. Fenn e C. Rourke, 1979.

Spine standard

Collasso su sottocomplessi 2-dimensionali.

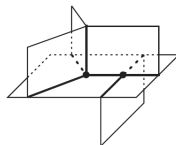
Esistenza: S. Matveev, 1973.



Spine standard

Collasso su sottocomplessi 2-dimensionali.

Esistenza: S. Matveev, 1973.



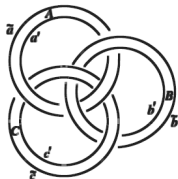
Equivalenza: S. Matveev, R. Piergallini, 1988.

... e molto altro

Rivestimenti di \mathbf{S}^3 ramificati su un link.

Esistenza: H. Hilden, U. Hirsch e J. Montesinos, 1974.

Equivalenza: R. Piergallini, 1995.

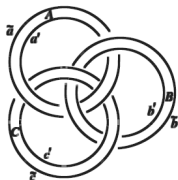


... e molto altro

Rivestimenti di \mathbf{S}^3 ramificati su un link.

Esistenza: H. Hilden, U. Hirsch e J. Montesinos, 1974.

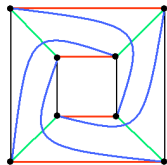
Equivalenza: R. Piergallini, 1995.



Grafi colorati sugli spigoli.

Esistenza: M. Pezzana, 1976.

Equivalenza: M.F. e C. Gagliardi, 1982.



La speranza è nella geometria ☹

Teor.: (ex-Conggettura di Geometrizzazione: W. Thurston, 1982)
(G. Perelman, H.-D. Cao, X.-P. Xhu, 2006)

Sia M una 3-varietà compatta, orientabile, prima. Allora esiste un'immersione in M di una unione disgiunta finita, eventualmente vuota, di tori incomprimibili, tale che ogni componente del complementare ammette una metrica riemanniana omogenea di volume finito.

- 1 Curve ed equazioni
- 2 Trasformazioni lineari e matrici
- 3 Gruppi e presentazioni
- 4 Nodi e diagrammi
- 5 Superfici
- 6 3-varietà

GRAZIE PER L'ATTENZIONE!