Appunti di Fisica Matematica III- II semestre 2008

Lezioni di Sandro Graffi

Appunti di Gloria Bartolini, Teresa Beltrani, Sara Gattoni, Marta Venturini

1 L'equazione della corda vibrante

1.1 L'equazione

L'equazione alle derivate parziali

$$\Delta u = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{1}$$

ovvero

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{2}$$

nell'incognita $u(x, y, z, t)$ funzione delle coordinate spaziali (x, y, z) e del tempo t si dice *equazione delle delle onde* o *equazione di D'Alembert*[1]. Essa descrive tutti i fenomeni ondulatori lineari. L'incognita u può essere infatti l'ampiezza di un'onda elettromagnetica, o di un'onda elastica, o di un'onda in un fluido, ecc.

Consideriamo ad esempio il caso particolare in cui vi sia dipendenza da una sola delle coordinate spaziali, ad esempio la x: $u = u(x, t)$. Allora l'equazione diventa:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{3}$$

e si dice *equazione della corda vibrante* perchè in questo caso $u(x, t)$ descrive anche le vibrazioni trasversali di una corda fissa agli estremi (vedremo in seguito questo esempio in grande dettaglio).

1.2 Derivazione dell'equazione

Consideriamo una corda flessibile ed inestensibile con estremi fissati $[0, L]$. La corda giace sull'asse x del piano xz (z verticale ascendente) all'istante iniziale $t = 0$. Si suppone che sia animata solo da moto *trasversale*: ogni punto della corda si muove solo perpendicolarmente all'asse x.

[1] Jean le Rond d'Alembert (Parigi 1717-Parigi 1783). L'equazione fu da lui scritta nel 1740.

Vogliamo determinare $z(x,t)$, la quota raggiunta dal punto x della corda all'istante t.
Dimostraimo che $z(x,t)$ altro non è che la soluzione dell'equazione di d'Alembert:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \tag{4}$$

Ricaviamo ora l'equazione in due modi:

1.2.1 Primo metodo:

Adattiamo l'equazione generale del moto dei continui in assenza di forze di massa,

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \vec{\nabla} \cdot T,$$

al nostro caso particolare. Si ha:

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \underbrace{\left\langle \vec{v}, \vec{\nabla} \right\rangle \vec{v}}_{0} \right) = \vec{\nabla} \cdot T$$

Per ipotesi,le vibrazioni sono piccole e quindi i termini quadratici nelle $\vec{v}$ si possono trascurare; l'equazione diventa allora

$$\rho \ddot{u} = \vec{\nabla} \cdot T$$

dove T è il tensore degli sforzi. Anticipiamo un risultato che vedremo in seguito: nella teoria lineare dell'elasticità gli sforzi sono proporzionali alle deformazioni: in questo caso possiamo senz'altro assumere $T = kD$, dove, dalla teoria della deformazione,

$$D_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right).$$

Ponendo $u = (0, 0, z)$ si ha:

$$\vec{\nabla} \cdot T = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

In questo modo trovo la seguente equazione differenziale del secondo ordine:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{k}{\rho}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

che coincide con l'equazione di D'Alembert sopra descritta per $\dfrac{k}{\rho} = v^2$.
Le equazioni del secondo ordine richiedono due condizioni iniziali che in meccanica sono la posizione iniziale e la velocità iniziale, $z_0(x)$ e $\dot{z}_0(x) = u(x)$.

1.2.2 Secondo metodo:

Ora ricaviamo in maniera diretta l'equazione di d'Alembert della corda vibrante.
Presi due punti P e P' di coordinate (x, z), (x', z') sulla corda sappiamo che la tensione a destra del punto P è un vettore tangente la curva, $\tau\vec{k}$, mentre quella a sinistra di P' è un vettore $-\tau'\vec{k'}$, con $\vec{k}$, $\vec{k'}$, τ,τ' dipendenti dalla coordinata curvilinea s lungo la corda.
La forza è:

$$\vec{F} = \tau\vec{k} - \tau'\vec{k'} = \frac{(\tau\vec{k} - \tau'\vec{k'})ds}{ds} = \frac{d}{ds}(\tau(s)\vec{k}(s))ds$$

con $\overline{PP'} = ds = dP$. Sappiamo anche che $\vec{F} = m\vec{a}$, dove $m(s) = \rho(s)ds$, $\rho(s)$ essendo la densità di massa lungo la corda. Da ciò segue che

$$\frac{d}{ds}(\tau(s)\vec{k}(s))ds = [\rho(s)ds]\ddot{P}$$

Queste equazione, scritta per componenti, diventa

$$\begin{cases} \dfrac{d}{ds}(\tau(s)k_x) = \rho(s)\ddot{x} \\ \\ \dfrac{d}{ds}(\tau(s)k_z) = \rho(s)\ddot{z} \end{cases}$$

Chiamiamo α l'angolo tra il vettore $\vec{k}$ e l'asse delle x. Allora:

$$dx = ds\cos(\alpha) \Longrightarrow \frac{dx}{\cos(\alpha)} = ds \approx dx$$

poichè α è per ipotesi piccolo: infatti stiamo considerando spostamenti piccoli di un pezzo di corda infinitesimo.
Dato che la corda è inestensibile, $\dot{s} = 0$ da cui $\Longrightarrow \dot{x} = 0 \Longrightarrow \ddot{x} = 0$; quindi non c'è moto nella corda lungo l'asse x.
Allora:

$$\frac{d}{dx}(\tau(s)k_x) = \rho(s)\ddot{x} = 0 \Longrightarrow \frac{d}{dx}(\tau(s)) = 0$$

poichè $\dfrac{d}{dx}k_x = 0$.
Ponendo

$$\frac{dz}{ds} = k_z = \frac{dz}{dx},$$

si ritrova cosí l'equazione della corda vibrante:

$$\tau\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \rho\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \Longrightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}, \quad v^2 = \frac{\tau}{\rho}$$

1.3 Integrale di d'Alembert

Vediamo ora di risolvere l'equazione delle onde. Per prima cosa consideriamo il caso cosiddetto *indefinito*, in cui x varia lungo l'intero asse reale.

1.3.1 L'integrale indefinito

Proposizione 1 *Tutte le soluzioni* $z(x,t) \in C^2(\mathbb{R}^2)$ *dell'equazione di d'Alembert (4),* $(x,t) \in \mathbb{R}^2$*, hanno la forma:*

$$z(x,t) = f(x - vt) + g(x + vt)$$

dove f *e* g *sono arbitrarie funzioni* $C^2(\mathbb{R})$*.*

Dimostrazione:

Poniamo $\xi = x - vt$ e $\eta = x + vt$ e facciamo vedere che la (4) equivale a:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta} = 0 \tag{5}$$

Si ha infatti:

$$\begin{cases} x = \dfrac{\xi + \eta}{2} \\ \\ t = -\dfrac{\xi - \eta}{2v} \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad z(\xi, \eta) = z(x - vt, x + vt) \tag{6}$$

Calcoliamo ora le derivate parziali di z rispetto a ξ, η ed esprimiamo le derivate parziali di z rispetto a x e t in funzione di queste. Per la (6) si ha:

$$\frac{\partial z}{\partial \xi} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial z}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial \xi} = \frac{1}{2}\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{1}{2v}\frac{\partial z}{\partial t}$$

$$\frac{\partial z}{\partial \eta} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial z}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial \eta} = \frac{1}{2}\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{1}{2v}\frac{\partial z}{\partial t}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial \eta} + \frac{\partial z}{\partial \xi}$$

$$\frac{1}{v}\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial \eta} - \frac{\partial z}{\partial \xi}$$

Da queste formule ricaviamo ora le derivate seconde di z rispetto a x e t:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial \eta \partial \xi}\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2}\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial \eta \partial \xi}\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2}\frac{\partial \eta}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial\xi\partial\eta}\frac{\partial\xi}{\partial t} + \frac{\partial^2 z}{\partial\eta^2}\frac{\partial\eta}{\partial t} - \frac{\partial^2 z}{\partial\xi^2}\frac{\partial\xi}{\partial t} - \frac{\partial^2 z}{\partial\eta\partial\xi}\frac{\partial\eta}{\partial t} = v\frac{\partial^2 z}{\partial\xi^2} - v\frac{\partial^2 z}{\partial\xi\partial\eta} - v\frac{\partial^2 z}{\partial\xi\partial\eta} + v\frac{\partial^2 z}{\partial\eta^2}$$

Ora dividiamo la seconda per v^2, cambiamo segno e sommiamo:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = 4\frac{\partial^2 z}{\partial\xi\partial\eta} = 0$$

come volevamo dimostrare.

Riconsideriamo la formula generale della soluzione, $z(x,t) = f(x-vt)+g(x+vt)$. Il termine $f(x-vt)$ definisce la *propagazione in avanti*, cioè la propagazione con velocità v, e il termine $g(x+vt)$ la *propagazione all'indietro*, cioè la propagazione con velocità $-v$.

Consideriamo infatti i tempi t_0 e $t_0+\tau$, cioè lasciamo trascorrere un tempo τ a partire dall'istante iniziale t_0 nel cui il punto iniziale si trova in x_0; il punto iniziale (x_0, t_0) evolve nel punto $(x_0 + v\tau, t_0 + \tau)$. Sostituendo a x e t le coordinate del secondo punto scritto troviamo che:

$$f(x_0 + v\tau - vt_0 - v\tau) = f(x_0 - vt_0)$$

Se invece il punto iniziale (x_0, t_0) evolve nel punto $(x_0 - v\tau, t_0 + \tau)$ troviamo che:

$$g(x_0 - v\tau + vt_0 + v\tau) = g(x_0 + vt_0)$$

In altre parole: la soluzione in avanti mantiene la medesima forma passando da t e x a $t+\tau$ e $x+v\tau$, e la soluzione all'indietro ha la stessa proprietà passando da t e x a $t+\tau$ e $x-v\tau$. Più precisamente, consideriamo due casi:

- se $x = vt$ e $f(0) = 0$ e la z dipende solo dalla funzione g quindi non ho una propagazione in avanti
- se $x = -vt$ e $g(0) = 0$ e la z dipende solo dalla funzione f per cui non si ha una propagazione all'indietro.

1.3.2 Imposizione delle condizioni iniziali. Integrale di d'Alembert

Ci proponiamo ora di trovare, a partire dalla soluzione generale, quella soluzione unica che soddisfa ogni assegnata scelta di condizioni iniziali. Trattandosi di un'equazione del secondo ordine, dovremo imporre, per avere una soluzione unica, due condizioni iniziali. Esse saranno la posizione iniziale della corda, denotata $z_0(x)$, e la velocità iniziale, denotata $\dot{z}_0(x)$. $z_0(x)$ e $\dot{z}_0(x)$ vanno considerate come assegnate funzioni su $\mathbb{R}$. Si ha:

Proposizione 2 *L'unica soluzione $z(x,t)$ dell'equazione (4) che soddisfa le condizioni iniziali*

$$z(x,t)|_{t=0} = z_0(x); \quad \frac{\partial z}{\partial t}(x,t)\,|_{t=0} = \dot{z}_0(x)$$

*dove $z_0(x)$ e $\dot{z}_0(x)$, ripetiamo, sono assegnate funzioni definite su $\mathbb{R}$, è data dalla formula seguente (detta **integrale di D'Alembert**)*

$$z(x,t) = \frac{1}{2}z_0(x-vt) + \frac{1}{2}z_0(x+vt) + \frac{1}{2v}\int_{x-vt}^{x+vt} \dot{z}_0(\xi)d\xi \tag{7}$$

Dimostrazione

Sappiamo che l'integrale generale è $z(x,t) = f(x-vt) + g(x+vt)$, dove f e g sono funzioni a priori arbitrarie. Pertanto:

$$z(x,0) = f(x) + g(x), \quad \frac{\partial z}{\partial t}(x,t)\,|_{t=0} = -vf'(x) + vg'(x)$$

Imponiamo che $z(x,0)$ e $\frac{\partial z}{\partial t}(x,t)\,|_{t=0}$ siano uguali alle assegnate condizioni iniziali. Si trova:

$$z_0(x) = f(x) + g(x); \quad \dot{z}_0(x) = -vf'(x) + vg'(x)$$

dalle quali si ricava, derivando la prima equazione

$$f'(x) + g'(x) = z_0'(x) \quad f'(x) - g'(x) = -\frac{\dot{z}_0(x)}{v}$$

Ora possiamo ricavare $f'(x)$ e $g'(x)$ e poi integrare. Si ottiene:

$$\begin{cases} f'(x) = \frac{1}{2}\left(z_0'(x) - \frac{\dot{z}_0(x)}{v}\right) \quad \overset{\Longrightarrow}{\textit{integrando}} \quad f(x) = \frac{1}{2}z_0(x) - \frac{1}{2v}\int_a^x \dot{z}_0(\xi)d\xi + c_1 \\ \\ g'(x) = \frac{1}{2}\left(z_0'(x) + \frac{\dot{z}_0(x)}{v}\right) \quad \overset{\Longrightarrow}{\textit{integrando}} \quad g(x) = \frac{1}{2}z_0(x) + \frac{1}{2v}\int_a^x \dot{z}_0(\xi)d\xi + c_2 \end{cases}$$

Scegliendo l'estremo di integrazione a in modo opportuno posso sempre fare in modo che risulti $c_1 = c_2 = 0$ e quindi la proposizione è dimostrata. .

Osservazione

Supponiamo per semplicità $\dot{z}_0(x) = 0$. Ammettiamo che il dato iniziale $z_0(x)$ abbia supporto contenuto in un intervallo limitato, ad esempio $|x| \leq L$; sia cioè $z_0(x) = 0$ se $|x| > L$. Allora la formula (7) ha come conseguenza immediata che la soluzione ha supporto solo nell'intervallo $[-L - vt, L + vt]$ (qui $v > 0$, $t > 0$):

$$z(x,t) = 0, \quad |x + vt| > L$$

Se chiamiamo *segnale* la condizione iniziale $z_0(x)$, questa osservazione significa che il segnale si propaga con velocità finita v. Pertanto v si dice anche velocità di propagazione dei segnali.

Per trattare il caso in cui la corda mantenga fissi gli estremi al trascorrere del tempo occorrono alcune premesse matematiche; principlamente, lo sviluppo in serie di Fourier[2], che ora ricorderemo.

[2]Jean Baptiste Joseph Fourier (Auxerre 1768-Parigi 1830). Il teorema sulla serie che porta il suo nome apparve nel 1822.

2 Le funzioni periodiche e il lo sviluppo in serie di Fourier

2.1 Funzioni periodiche

Definizione 1 *$f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ si dice periodica di periodo T se esiste $T > 0$ tale che $f(t+T) = f(t) \quad \forall\, t \in R$.*

Una funzione periodica è definita quindi su $\mathbb{R}$ (mod)T.

Si noti che se f è periodica di periodo T è periodica anche di periodo $kT\ \forall\, k \in \mathbb{N}$.

T si dice anche *periodo minimo.*

Esempio Le funzioni trigonometriche sono periodiche: $\sin x$ e $\cos x$ hanno periodo 2π; $\operatorname{tang} x$ e ctgx hanno periodo π.

Consideriamo ora $f : [0,T] \to \mathbb{R}$, $f \in C^2[0,T]$; sia f periodica. Questo equivale chiaramente a supporre $f(0) = f(T)$.

Definizione 2 *I coefficienti di Fourier (o di Eulero-Fourier) di f sono:*

$$f_n := \frac{1}{T}\int_0^T f(t) e^{-\frac{2\pi int}{T}} dt, \qquad n \in Z \tag{8}$$

Definizione 3 *La serie di Fourier di f è:*

$$f \quad \sim \quad \sum_{-\infty}^{+\infty} f_n e^{-\frac{i2\pi nt}{T}}, \qquad t \in [0,T] \tag{9}$$

Il simbolo $\sim$ significa che la serie a secondo membro corrisponde alla funzione f. La sua convergenza a f è affermata dal teorema che segue.

2.2 Teorema di Fourier (decomposizione di una funzione periodica secondo le armoniche fondamentali)

Sia $f \in C^2[0,T]$ reale e periodica: $f(0) = f(T)$. Allora, nel senso della convergenza uniforme rispetto a $t \in [0,\pi]$:

$$f = \sum_{-\infty}^{+\infty} f_n e^{i\frac{2\pi nt}{T}} \tag{10}$$

La serie (10) è detta forma esponenziale dello sviluppo di Fourier.

Equivalentemente, lo sviluppo in serie (10) può essere scritto sotto la forma seguente, *detta* sviluppo in serie di Fourier trigonometrica:

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) \tag{11}$$

dove

$$\begin{cases} a_n := \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T f(t)\cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) dt \\ \\ b_n := \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T f(t)\sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) dt \end{cases} \tag{12}$$

$$a_n = \frac{f_n + f_{-n}}{2}, \quad b_n = i\frac{f_n + f_{-n}}{2} \tag{13}$$

Osservazioni:

- La funzione $e_n(t) := e^{i\frac{2\pi nt}{T}}$, $n \in Z$ si dice **armonica fondamentale** n-**esima** relativa al periodo T; equivalentemente, $\sin\dfrac{2\pi nt}{T}$ e $\cos\dfrac{2\pi nt}{T}$ sono le armoniche n-esime, o armoniche fondamentali, in forma trigonometrica.

- L'armonica n-esima relativa al periodo T ha come periodo minimo il suo sottomultiplo $\dfrac{T}{n}$:

- Questo teorema afferma che ogni funzione periodica di periodo T è in generale combinazione lineare infinita, o sovrapposizione infinita, di armoniche fondamentali relative al periodo T.

2.3 Dimostrazione del teorema di Fourier:

Lemma 1 *Sia f reale. Allora:*

$$f_{-n} = \overline{f}_n \tag{14}$$

Dimostrazione

Basta fare il coniugato di f_n partendo dalla sua definizione (Definizione 2).

Applicando le formule di Eulero si ottiene immediatamente:

Lemma 2 *Se vale il Lemma 1, allora:*

$$f_p e^{i\frac{2\pi pt}{T}} + f_{-p}e^{-i\frac{2\pi pt}{T}} = (f_p + f_{-p})\cos\left(\frac{2\pi pt}{T}\right) + i(f_p - f_{-p})\sin\left(\frac{2\pi pt}{T}\right) \tag{15}$$

Osservazioni:

- Le funzioni $e_n(t) := e^{i\frac{2\pi nt}{T}}, \quad n \in Z$

  sono le **armoniche fondamentali** e possono essere scritte in forma esponenziale o trigonometrica.

- Se la funzione periodica ha periodo T, l'armonica ha come periodo il suo sottomultiplo $\dfrac{T}{n}$:

$$e_n\left(t+\tfrac{T}{n}\right) = e^{i\frac{2\pi n}{T}\left(t+\frac{T}{n}\right)} = e^{i\frac{2\pi nt}{T}+i2\pi} = e^{i\frac{2\pi nt}{T}}e^{i2\pi} = e_n(t)$$

Inizio della dimostrazione del teorema.

Cominciamo col dimostrare l'equivalenza fra gli sviluppi in serie (10) e (11) tenendo conto delle posizioni (12, 13). Si ha, per il Lemma 2:

$$f_p e^{i\frac{2\pi pt}{T}} + f_{-p}e^{-i\frac{2\pi pt}{T}} = f_p e^{i\frac{2\pi pt}{T}} + \overline{f_p}e^{-\overline{i\frac{2\pi pt}{T}}} =$$
$$= 2\left[\left(\frac{f_p+\overline{f_p}}{2}\right)\cos\left(\frac{2\pi pt}{T}\right) - \left(\frac{f_p-\overline{f_p}}{2i}\right)\sin\left(\frac{2\pi pt}{T}\right)\right] = 2\mathrm{Re}\left(f_p e^{i\frac{2\pi pt}{T}}\right).$$

Se nell'equazione trovata al posto di p mettiamo n e lo calcoliamo $\forall\, n$, ripercorrendo i passaggi precedenti troviamo che:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n e^{i\frac{2\pi nt}{T}} = 2\sum_{n=0}^{+\infty}\mathrm{Re}\left(f_n e^{i\frac{2\pi nt}{T}}\right) =$$
$$2\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{f_n+\overline{f_n}}{2}\right)\cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) + i\left(\frac{f_n-f_{-n}}{2}\right)\sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) =$$
$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) + b_n\sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)$$

e ciò dimostra l'asserto.

Facciamo ora vedere la convergenza della serie di Fourier:

Proposizione 3 *La serie* $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n e^{i\frac{2\pi nt}{T}}$ *converge uniformemente su* $[0, T]$.

Per dimostrare la proposizione ci occorre il seguente

Lemma 3 *Esiste $k > 0$ tale che*

$$|f_n| \leq \frac{k}{n^2}, \quad \forall\, n \neq 0,$$

cioè i coefficienti di Fourier sono maggiorati in valore assoluto dalla successione $\dfrac{k}{n^2}$, $n \in Z - \{0\}$.

Se questo è vero, la convergenza uniforme della serie segue immediatamente dalla maggiorazione:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left| f_n e^{i\frac{2\pi nt}{T}} \right| \leq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |f_n| \leq k \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$$

perchè la maggiorazione è indipendente da $t \in [0, T]$.

Dimostrazione del Lemma 3:

Premettiamo che vale la formula

$$e^{-i\frac{2\pi nt}{T}} = -\frac{T}{2\pi in}\frac{d}{dt}\left(e^{-i\frac{2\pi nt}{T}}\right).$$

Allora integrando per parti otteniamo:

$$f_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-i\frac{2\pi nt}{T}}\,dt = \frac{1}{T}\frac{T}{2\pi in}\int_0^T f(t)\frac{d}{dt}\left(e^{-i\frac{2\pi nt}{T}}\right)dt$$
$$\overset{2volteperparti}{\longrightarrow} \frac{T}{(2\pi i)^2 n^2}\int_0^T f''(t)e^{-i\frac{2\pi nt}{T}}\,dt$$

Prendendo ora il valore assoluto e maggiorando la derivata seconda si ottiene la maggiorazione richiesta:

$$|f_n| \leq \frac{k}{n^2}\int_0^T |f''(t)|dt \leq \frac{k'}{n^2} \quad , \quad k = \frac{T}{2\pi^2} \quad , \quad k' = k \max_{[0,T]} |f''(t)|$$

dove k e k' sono due costanti.

La sola cosa rimasta da verificare a questo punto è se la somma della serie sia proprio f; per dimostrare questo fatto dobbiamo fare uso di un altro risultato preliminare.

Lemma 4

$$\frac{1}{T}\int_0^T e_n(t)\overline{e_m(t)}dt = \begin{cases} 0 & se \quad m \neq n \\ 1 & se \quad m = n \end{cases}$$

Dimostrazione

Consideriamo anzitutto il caso $m = n$. Allora:

$$\frac{1}{T}\int_0^T e^{i\frac{2\pi nt}{T}} e^{-i\frac{2\pi nt}{T}}dt = \frac{1}{T}\int_0^T dt = 1$$

Se invece $m \neq n$, poniamo $k = n - m \in N$; $k \neq 0$ per ipotesi. Allora:

$$\frac{1}{T}\int_0^T e^{i\frac{2\pi nt}{T}} e^{-i\frac{2\pi nt}{T}}dt = \frac{1}{T}\int_0^T e^{i\frac{2\pi kt}{T}}dt = \frac{T}{2\pi ikT}\left[e^{i\frac{2\pi kt}{T}}\right]_0^T = 0$$

L'integrale di un'armonica non costante è sempre nullo poichè essa assume lo stesso valore sia per $t = 0$ che per $t = T$.

Osservazione:

Supponiamo che sia $f_0 = 0$. Allora si ha:

$$\int_0^T f(t)dt = 0.$$

Infatti per la convergenza uniforme della serie di Fourier possiamo integrare termine a termine lo sviluppo (10) e troviamo:

$$\int_0^T f(t)dt = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n \int_0^T e^{i\frac{2\pi nt}{T}} dt = f_0$$

e poichè $f_0 = 0$ allora anche l'integrale si annulla.

Si noti che coefficiente di Fourier f_0 altro non è che la media integrale della funzione f.

Riscriviamo ora il teorema di Fourier in notazione semplificata.

Data la funzione $f : [0, T] \longrightarrow R$ di classe C^2 con $f(t + T) = f(t)$ per Tpositivo, poniamo $\omega := \dfrac{2\pi}{T}$; ricordando la definizione di f_n e dei coefficienti a_n e b_n, ci resta da dimostrare che vale la formula

$$f = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n e^{in\omega t} = f_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(n\omega t) + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(n\omega t)$$

Dobbiamo dimostrare, ricordiamo, che la somma della serie di Fourier è la data funzione f. Ciò equivale a dimostrare che la differenza fra f e la somma parziale $N - esima$ $\sum_{n=-N}^{N} f_n e^{in\omega t}$ tende a zero per $N \longrightarrow \infty$.

Riscriviamo la somma parziale esplicitando i coefficienti di Fourier:

$$\sum_{n=-N}^{N} f_n e^{in\omega t} = \sum_{n=-N}^{N} e^{in\omega t} \underbrace{\frac{1}{T}\int_0^T f(\tau)e^{-in\omega\tau} d\tau}_{coeff \quad Fourier} = \int_0^T \frac{1}{T} \sum_{n=-N}^{N} e^{in\omega(t-\tau)} f(\tau)d\tau$$

Per verificare quanto richiesto ci occorrono due ulteriori lemmi:

Lemma 5

$$\frac{1}{T}\int_0^T \sum_{-N}^{N} e^{in\omega(t-\tau)} d\tau = 1 \quad \forall t$$

Dimostrazione:

Poniamo $\quad y = t - \tau \Rightarrow d\tau = -dy$; allora:

$$\frac{1}{T}\int_0^T \sum_{-N}^{N} e^{in\omega(t-\tau)} d\tau = -\frac{1}{T}\int_t^{t-T} \sum_{n=-N}^{N} e^{in\omega y} dy = \frac{1}{T}\int_{t-T}^{t} \sum_{n=-N}^{N} e^{in\omega y} dy =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{t-\mathbb{T}}^{t} e^{\frac{in2t\pi}{\tau}} dy = 1 & se \quad n = 0 \\ \\ \dfrac{1}{T} 2n\pi [e^{\frac{2int\pi}{T}}]_{t-T}^{t} = e^{\frac{in2t\pi}{T}} - e^{\frac{2i\pi(t-\tau)}{T}} = e^{\frac{2int\pi}{T}} - e^{\frac{2it\pi}{T}} = 0 & se \quad n \neq 0 \end{cases}$$

Lemma 6 *Sia:*

$$S_N := \sum_{n=-N}^{N} e^{in\omega(t-\tau)}$$

Allora:

$$S_N = \begin{cases} \sin\left[\left(\frac{N+1}{2}\right)\omega(t-\tau)\right] & se \quad t \neq \tau + mt \\ \\ 1 + 2N & se \quad t = \tau + mt \end{cases}$$

Dimostrazione

Per definizione possiamo scrivere:

$$S_N = 1 + \sum_{n=1}^{N} e^{in\omega y} + \sum_{n=1}^{N} e^{-in\omega y}.$$

Poniamo ancora $y = t - \tau$; quando $y = mT$ ottengo $S_N = 1 + N + N = 1 + 2N$.

Per $y \neq mT$ posso applicare la formula della progressione geometrica:

$$\sum_{n=1}^{N} e^{in\omega y} = \frac{e^{i\omega y} - e^{i(N+1)\omega y}}{1 - e^{i\omega y}} = \frac{e^{i\omega y}(1 - e^{iN\omega y})}{1 - e^{i\omega y}} =$$

$$= \frac{e^{i\omega y}(1 - e^{iN\omega y})}{e^{\frac{i\omega y}{2}} e^{-\frac{i\omega y}{2}} - e^{\frac{i\omega y}{2}} e^{\frac{i\omega y}{2}}} = \frac{e^{\frac{i\omega y}{2}}(1 - e^{iN\omega y})}{-2i\sin\left(\frac{\omega y}{2}\right)}$$

Facendo il complesso coniugato troviamo:

$$\sum_{n=1}^{N} e^{-in\omega y} = \frac{e^{-\frac{i\omega y}{2}}(1 - e^{-iN\omega y})}{2i\sin\left(\frac{\omega y}{2}\right)}$$

Allora:

$$S_N - 1 = \frac{e^{-i\frac{\omega y}{2}} - e^{-i\frac{N+1}{2}\omega y} - e^{\frac{i\omega y}{2}} + e^{i\frac{N+1}{2}\omega y}}{2i\sin\left(\frac{\omega y}{2}\right)} =$$

$$= \frac{-2i\sin\left(\frac{\omega y}{2}\right) + 2i\sin\left(\frac{N+1}{2}\omega y\right)}{2i\sin\left(\frac{\omega y}{2}\right)} = -1 + \frac{\sin\left(\frac{N+1}{2}\omega y\right)}{\sin\left(\frac{\omega y}{2}\right)}$$

e ciò conclude la dimostrazione del Lemma.

Tornando alla dimostrazione del teorema e ponendo $f(\tau) = f(\tau) + f(t) - f(t)$, per il Lemma 5 possiamo scrivere:

$$\sum_{n=-N}^{N} f_n e^{in\omega t} = \int_0^T \left(\frac{1}{T} \sum_{n=-N}^{N} f_n e^{in\omega(t-\tau)} \right) [f(\tau) - f(t) + f(t)] d\tau =$$

$$= f(t) \int_0^T \left(\frac{1}{T} \sum_{n=-N}^{N} f_n e^{in\omega(t-\tau)} \right) d\tau + \int_0^T \left(\frac{1}{T} \sum_{n=-N}^{N} f_n e^{in\omega(t-\tau)} \right) [f(\tau) - f(t)] d\tau =$$

$$= f(t) + \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\sin\left[\left(\frac{N+1}{2}\right)\omega(t-\tau)\right]}{\sin\left[\frac{\omega}{2}(t-\tau)\right]} (f(\tau) - f(t)) d\tau = f(t) + R_N$$

$$R_N := \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\sin\left[\left(\frac{N+1}{2}\right)\omega(t-\tau)\right]}{\sin\left[\frac{\omega}{2}(t-\tau)\right]} (f(\tau) - f(t)) d\tau$$

La dimostrazione sarà completa se facciamo vedere che:

$$\lim_{N \to +\infty} R_N(t) = 0$$

per $N \to \infty$ uniformemente su $[0, T]$.

Facciamo vedere allora che $R_N(t)$ è esprimibile come coefficiente di Fourier di ordine N di una famiglia di funzioni di τ che sono almeno C^2,uniformemente su t. Allora l'affermazione sarà conseguenza diretta del Lemma 3.

Infatti:

$$R_N = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2} (e^{iN\omega(t-\tau)} + e^{-iN\omega(t-\tau)})(f(t) - f(\tau)) d\tau -$$

$$- \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2i} (e^{iN\omega(t-\tau)} + e^{-iN\omega(t-\tau)}) \mathrm{ctg}\Big(\frac{\omega}{2}(t-\tau)\Big) [f(t) - f(\tau)] d\tau$$

Ora è facile verificare che la funzione $f(\tau) := \mathrm{ctg}\Big(\frac{\omega}{2}(t-\tau)\Big)[f(t) - f(\tau)]$ è almeno $C^2[0, T]$, uniformemente rispetto a $t \in [0, T]$. Pertanto per il Lemma 3 esiste $k > 0$ tale che $|R_N(t)| < \frac{k}{N^2}$, e quindi $||R_N(t)| \longrightarrow 0$ per $N \longrightarrow +\infty$ uniformemente su $t \in [0, T]$. Ciò conclude la dimostrazione del Teorema.

3 Integrazione dell'equazione della corda vibrante con estremi fissi

Vogliamo ora integrare l'equazione della corda vibrante con estremi fissi.

Poniamo le seguenti condizioni:

1. La lunghezza della corda è fissa (L).
2. Gli estremi della corda rimangono fissi lungo il moto: $u(0,t) = u(L,t) = 0$ $\forall t \in \mathbb{R}$;
3. Posizione e velocità iniziale sono rispettivamente $u(x,0) = u_0(x)$ e $\dot{u}(x,0) = \dot{u_0}(x)$

Utilizziamo il *metodo della separazione delle variabili*.

Esso consiste nel cercare le soluzioni sotto forma di prodotto di funzioni di una singola variabile: $u(x,t) = f(x)g(t)$. Ammettendo di avere trovate la f e la g, occorrerà dimostrare poi che tutte le soluzioni sono di questo tipo.

Innanzitutto andiamo a sostituire $u(x,t) = f(x)g(t)$ nella nostra equazione

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

Si trova

$$f''(x)g(t) - \frac{1}{v^2}f(x)g''(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{f''(x)}{f(x)} = \frac{1}{v^2}\frac{g''(t)}{g(t)}.$$

Il rapporto non può dipendere nè da x nè da t; pertanto potremo porre

$$\frac{f''(x)}{f(x)} = \frac{1}{v^2}\frac{g''(t)}{g(t)} = -\lambda$$

per una qualche costante $\lambda \in \mathbb{R}$, detta **costante di integrazione**, che determineremo in seguito.

Il nostro problema si riduce cosí alle seguenti due equazioni differenziali ordinarie:

$$\begin{cases} -f''(x) = \lambda f(x) \\ \\ -g''(t) = v^2 \lambda g(t) \end{cases}$$

Nella prima equazione si cercano tutte e sole le soluzioni tali da soddisfare le condizioni al contorno prima imposte. Perciò:

$$\begin{cases} -f''(x) = \lambda f(x) \\ \\ f(0) = f(L) = 0 \end{cases} \tag{16}$$

Esiste, come vedremo, un solo insieme discreto di λ per cui trovo le soluzioni cercate.

3.1 Autovalori e autofunzioni

Consideriamo la funzione: $T(u) : u \to -u''$

Essa è una trasformazione lineare che agisce sullo spazio lineare

$D(T) = \{u \in C^2[0, L] \,|\, u(0) = u(L) = 0\}$.

La struttura di T è lineare. Infatti si verifica subito, per la linearità delle operazioni di derivazione, che:

$$T(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) = \alpha_1 T(u_1) + \alpha_2 T(u_2), \quad \forall\, (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{C}. \quad \forall\, (u_1, u_2) \in D(T)$$

Si vede dunque che la soluzione del problema (16), cioè la ricerca delle soluzioni dell'equazione differenziale $u" + \lambda u = 0$ che soddisfacciano le condizioni al bordo $u(0) = u(L) = 0$, si traduce nella ricerca di quelle particolari funzioni $f \in D(T)$, $f \neq 0$, su cui la trasformazione lineare T agisce semplicemente come una moltiplicazione:

$$Tf = \lambda f \tag{17}$$

In altri termini, ricordando le definizioni dell'algebra lineare, si cercano gli *autovettori* di T corrispondenti agli *autovalori* λ; in questo caso, trattandosi di soluzioni di un'equazione differenziale, gli autovettori si dicono anche *autofunzioni*. Le incognite sono dunque gli autovalori, cioè i valori che può assumere la costante di separazione λ, e le corrispondenti autofunzioni.

Teorema 1 *Il problema (16) o, equivalentemente, (17) ammette le soluzioni seguenti:*

- *Autovalori:*

$$\lambda = \{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}, \qquad \lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{L^2}$$

- *Autofunzioni (normalizzate):*

$$f_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad n = 1, \dots$$

Dimostrazione

Cerchiamo di rsiolvere l'equazione differenziale cercando le soluzioni sotto la forma $f(x) = e^{\alpha x}$. Sostituendo nell'equazione differenziale $f" + \lambda f = 0$ si trova:

$$\alpha^2 e^{\alpha x} + \lambda e^{\alpha x} = 0 \Rightarrow e^{\alpha x}(\alpha^2 + \lambda) = 0 \Rightarrow \alpha^2 = -\lambda \Rightarrow \alpha = \pm i\sqrt{\lambda}x$$

Si ottengono cosí le due soluzioni linearmente indipendenti $f_{\pm}(x) = e^{\pm i\sqrt{\lambda}x}$. Ogni altra soluzione è combinazione lineare di queste. Quindi la soluzione generale è:

$$f(x) = c_1 e^{i\sqrt{\lambda}x} + c_2 e^{-i\sqrt{\lambda}x}$$

dove le costanti c_1 e c_2 devono essere determinate tramite le condizioni al contorno. Vado a sostituire 0 e L al posto di x, e impongo le condizioni $f(0) = 0, f(L) = 0$. Si trova:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 e^{i\sqrt{\lambda}L} + c_2 e^{-i\sqrt{\lambda}L} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_2 = -c_1 \\ c_1(e^{i\sqrt{\lambda}L} - e^{-i\sqrt{\lambda}L}) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 2ic_1 \sin(\sqrt{\lambda}L) = 0 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\lambda}L = n\pi \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{n^2\pi^2}{L^2},\ n = 1, 2, 3 \dots$$

Il valore $n = 0$ non può essere accettato come dimostreremo subito. Trovati gli autovalori, le autofunzioni sono date da:

$$f_n(x) = c_1(e^{in\pi x/L} - e^{-in\pi x/L}) = 2ic_1 \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Il valore $n = 0$ va escluso perchè in tal caso si avrebbe la soluzione $f_n \equiv 0$ che per definizione non può essere un'autofunzione.

Determiniamo ora la costante c_1 imponendo la normalizzazione dell'autofunzione. Richiediamo cioè che sia:

$$\int_0^L |f_n|^2 dx = 1$$

Ponendo $\gamma_n := 2ic_1$ ciò equivale a richiedere:

$$I_n := \gamma_n^2 \int_0^L \sin^2\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx = 1$$

Eseguiamo la sostituzione $\dfrac{\pi x}{L} = t \quad$ da cui $\quad dx = \dfrac{L}{\pi}dt$. Ne segue:

$$I_n = \frac{L}{\pi}\gamma_n^2 \int_0^\pi \sin^2(nt)dt.$$

Utilizzando le formule di Eulero si può calcolare l'integrale e si ottiene:

$$\int_0^\pi \sin^2(nt)dt = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad I_n = b_n^2 \frac{L}{\pi}\frac{\pi}{2} \Rightarrow$$

$$\gamma_n^2 \frac{L}{2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \gamma_n = \sqrt{\frac{2}{L}}$$

Ho quindi normalizzato la $f_n(x)$:

$$f_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Questo conclude la dimostrazione del Teorema.

Per quale motivo si sceglie questa normalizzazione?
Date due funzioni f e g in $D(T)$, definiamo il loro *prodotto scalare* $\langle f, g\rangle$ nel modo seguente:

$$\langle f, g\rangle := \int_0^\pi f(x)\overline{g(x)}dx.$$

Si può verificare facilmente che questo prodotto scalare gode delle medesime proprietà del prodotto scalare euclideo in $\mathbb{C}^N$. In particolare,

$$\sqrt{\langle f, f\rangle} := \|f\|^2 = \int_0^\pi |f(x)|^2 dx$$

è una norma; inoltre si verifica subito che le autofunzioni corrispondenti ad autovalori differenti sono ortogonali rispetto al prodotto scalare appena definito:

$$\langle f_n, f_m\rangle = \delta_{mn}$$

Dunque le autofunzioni $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$ formano un sistema ortonormale; sono una base di $D(T)$ per il Teorema di Fourier. Infatti:

Proposizione 4 *Sia $u(x) \in D(T)$ arbitraria. Allora si ha, nel senso delle convergenza uniforme:*

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n f_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

dove:

$$b_n = \sqrt{\frac{2}{L}} \int_0^{2L} u(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

Qui $u(x)$ si considera prolungata periodicamente da $[0, L]$ a tutto l'intervallo $[0, 2L]$.

Dimostrazione

Per il teorema dello sviluppo in serie di Fourier sotto forma trigonometrica possiamo scrivere, nel senso della convergenza uniforme su $[0, 2L]$:

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right]$$

D'altra parte, poichè $\sin(n\pi) = 0 \, \forall \, n \in \mathbb{Z}$, mentre $\cos(n\pi) = (-1)^n$, le condizioni $u(0) = u(L) = 0$ implicano chiaramente $a_n = 0 \, \forall \, n \in \mathbb{N}$. Ciò prova l'asserto.

Occupiamoci ora della seconda equazione cioè di $g''(t) = -v^2 \lambda g(t)$. Abbiamo già visto che

$$\lambda = \frac{n^2\pi^2}{L^2} \quad \Longrightarrow \quad g''(t) = -\frac{v^2\pi^2 n^2}{L^2} g(t)$$

Cerchiamo la soluzione di quest'ultima equazione differenziale che si annulla per $t = 0$. Essa corrisponde a richiedere $u(x,t)|_{t=0} = 0 \; \forall \, x \in [0, L]$, cioè a richiedere che la corda si trovi lungo l'asse delle x all'istante iniziale.

Per quanto visto sopra, le soluzioni saranno:

$$g_n(t) = c_n \sin\left(\frac{vn\pi t}{L}\right), \quad n = 1, \ldots$$

dove le c_n sono costanti di normalizzazione. Si noti che le funzioni $g_n(t)$ sono periodiche di periodo minimo $\dfrac{2L}{v}$.

Analogamente, se cerchiamo la soluzione tale che la sua derivata si annulli per $t = 0$, troveremo:

$$g_n(t) = c_n \cos\left(\frac{vn\pi t}{L}\right), \quad n = 1, \ldots$$

Possiamo a questo punto enunciare e dimostrare il risultato finale dell'integrazione dell'equazione della corda vibrante con estremi fissi tramite il metodo della separazione delle variabili:

Teorema 2 *La soluzione dell'equazione delle onde (4) con estremi fissi, che soddisfa le condizioni iniziali:*

$$u(x,t)|_{t=0} = \mu(x),\ \forall\, x \in [0,L]; \quad \dot{u}(x,t)|_{t=0} := \left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = \nu(x)$$

dove $\mu(x), \nu(x)$ sono assegnate funzioni in $D(T)$ con sviluppo in serie di Fourier

$$\mu(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad \nu(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \tag{18}$$

ammette la rappresentazione seguente:

$$\begin{cases} u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\cos\left(\frac{v\pi}{L}nt\right) \\ \\ +\frac{L}{v\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\nu_n}{n}\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\sin\left(\frac{v\pi}{L}nt\right) \end{cases} \tag{19}$$

Dimostrazione

Poichè $v(x) \in D(T)$, le serie (18) convergono uniformemente su $[0,L]$, e la stessa affermazione vale per le due serie della formula (19). Per costruzione, le funzioni

$$u_n(x,t) := \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\sin\left(\frac{v\pi}{L}nt\right)$$

risolvono l'equazione delle onde (4). Poichè l'equazione è lineare, combinazioni lineari arbitrarie di queste funzioni sono ancora soluzioni. Quindi la serie nella prima equazione della (19) risolve l'equazione data la sua convergenza uniforme. Inoltre:

$$u(x,t)|_{t=0} = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = \mu(x)$$

La convergenza uniforme assicura per di più la derivabilità termine a termine di $u(x,t)$ rispetto a t; eseguendo questa operazione si trova

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = -\frac{v\pi}{L}\sum_{n=1}^{\infty} n\mu_n \sin\left(\frac{x\pi}{L}\right)\sin\left(\frac{v\pi}{L}nt\right)$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty} \nu_n \sin\left(\frac{x\pi}{L}\right)\cos\left(\frac{v\pi}{L}nt\right)$$

da cui si ricava immediatamente

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\right|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} \nu_n = \sin\left(\frac{x\pi}{L}\right) = \nu(x)$$

e ciò conclude la dimostrazione.

3.2 Strumenti musicali. Armoniche fondamentali ed emissione delle note

Fra i casi concreti più importanti di realizzazioni esplicite di corde vibranti ad estremi fissi vi sono tutti gli strumenti musicali a corde: archi (violini, viole, violoncelli, contrabbassi), arpe, chitarre, clavicembali, pianoforti. Le corde sono inizialmente a riposo e vengono messe in moto in modi diversi: o tramite gli archetti (archi), o pizzicandole (chitarre, arpe, clavicembali), o percuotendole con martelletti (pianoforti).

La *frequenza fondamentale* di oscillazione della corda è per definizione l'inverso del periodo minimo dell'oscillazione temporale:

$$\nu_0 := \frac{v}{2L}$$

Gli inversi dei periodi sottomultipli di quello fondamentale sono le *armoniche*, o *armoniche superiori*

$$\nu_n = \frac{v}{2L} n$$

Si noti che le armoniche sono proporzionali ai numeri interi.

Osservazione

Queste definizioni spiegano come mai si usi il termine di armoniche anche per le funzioni $\sin nt$ o $\cos nt$, e inoltre perchè la serie definita dalla somma di tutte le frequenze inverse:

$$\frac{2L}{v} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

prena il nome di *serie armonica.* È noto che la serie armonica diverge positivamente.

La soluzione generale (19) valida per tutte le condizioni iniziali contiene in generale tutte le frequenze. Si isola la k-esima frequenza scegliendo una condizione iniziale per cui sia $\mu_n = \nu_n = 0 \ \forall\, n \neq k$;
Scegliendo o $\mu_1 \neq 0$ o $\nu_1 \neq 0$, e tutti gli altri zero, si isola la frequenza fondamentale, detta il *la naturale.* La realizzazione concreta di tale condizione iniziale dipende dallo strumento: in alcuni si parte con piccola deformazione a velocità nulla, e quindi si cerca di realizzare $\mu_1 \neq 0$ e tutti gli altri coefficienti zero, in altri il contrario, cioè $\nu_1 \neq 0$. L'intensità del suono emesso è proporzionale alla taglia di questi coefficienti.

Esempi del primo caso sono quelli in cui la corda viene pizzicata, mentre esempi del secondo sono quelli in cui il movimento viene provocato dall'archetto.

L'ottava è l'intervallo fra la frequenza fondamentale e la prima armonica, le le 7 note marcando la suddivisione negli 8 intervalli. Le varie suddivisioni dell'ottava fra toni, semitoni ecc. danno origine alle varie scale: naturale, temperata, dodecafonica, ecc. Per generare contemporaneamente, con il medesimo strumento, suoni che differiscano di una o più ottava si usano corde di lunghezze diverse, tensioni diverse, ecc; da qui la necessità dell'accordatura.

4 Elasticità lineare: deduzione della legge di Hooke

[3] Vogliamo ricavare le equazioni del moto di un corpo elastico nell'approssimazione lineare, quella in cui i quadrati delle deformazioni risultano trascurabili rispetto alle deformazioni medesime. A questo scopo, ancora prima di definire cosa si intende per corpo elastico, premettiamo alcune nozioni su lavoro ed energia potenziale nei corpi deformabili.

4.1 Lavoro, potenziale, energia libera

Sia $T = T_{ik}$ il tensore degli sforzi di Cauchy[4] di un corpo deformabile, e

$$u_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)$$

il tensore delle deformazioni. Allora si ha:

Proposizione 5 *Il lavoro infinitesimo δL compiuto agli sforzi interni a seguito di una qualsiasi deformazione infinitesima virtuale o reale ha l'espressione*

$$\delta L = -\sum_{i,j=1}^{3} T_{ik}\delta(u_{ik}) := -T_{ik}\delta(u_{ik}) \tag{20}$$

Osservazione

Si usa qui il simbolo δ perchè il lavoro può essere virtuale. Se la deformazione infinitesima è reale, $\delta(u_{ik}) = d(u_{ik})$ si usa il simbolo consueto dL. Notiamo anche che nella formula precedente abbiamo fatto uso della convenzione della somma sugli indici ripetuti, e cosí faremo in seguito.

Dimostrazione

Il lavoro totale è l'integrale sul volume V del corpo del lavoro elementare esercitato dagli sforzi interni lungo spostamenti infinitesimi $\delta\vec{u}$. Gli sforzi interni sono dati da

[3] Questa parte è essenzialmente tratta dal trattato di L.Landau e E.M.Lifshitz, *Teoria dell'elasticità*, Vol.7 del Corso di Fisica Teorica.

[4] Augustin-Louis Cauchy (Parigi 1789-Parigi 1857), fondatore della moderna analisi infinitesimale e della moderna meccanica dei continui. Dal 1831 al 1837, avendo seguito nell'esilio, come precettore dei suoi figli, il Re Carlo X, cacciato dalla Francia a seguito della rivoluzione del luglio 1830, fu Professore di Meccanica superiore all'Università di Torino. L'equazione indefinita del moto dei corpi deformabili è dovuta a lui.

$\nabla \cdot T$, divergenza del tensore degli sforzi di Cauchy T. Pertanto:

$$L = \int_V (\overrightarrow{\nabla} \cdot T) \cdot \delta \overrightarrow{u} dV = \int_V \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} \delta(u_i) dV := \int_V \delta L dV$$

dove ovviamente

$$\delta L := \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} \delta(u_i).$$

Ora applichiamo la formula d'integrazione per parti al calcolo degli integrali

$$\int_V \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} \delta(u_i) dV$$

Sia $\Sigma := \partial V$, la frontiera di V. Assumiamo che Σ sia una superficie regolare chiusa in $\mathbb{R}^3$; sia $d\sigma$ l'elemento d'area su Σ. Allora applicando la formula di integrazione per parti si ottiene

$$\int_V \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} \delta(u_i) dV = \int_\Sigma T_{ik} \delta(u_i) d\Sigma_k - \int_V T_{ik} \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_k} dV$$

Supponiamo che il corpo sia molto grande e che non possa essere deformato vicino alla sua frontiera; allora le forze interne dovranno annullarsi su Σ, il che implica l'annullarsi del primo integrale. Quindi ottengo, tenendo conto anche della simmetria del tensore delle deformazioni:

$$\int_V \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} \delta(u_i) dV = \int_V T_{ik} (\frac{\partial \delta u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \delta u_k}{\partial x_i}) dV$$
$$= \int_V T_{ik} \delta(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}) dV = - \int_V T_{ik} \delta(u_{ik}) dV$$

Quindi abbiamo trovato che:

$$\int_V \delta L dV = - \int_V T_{ik} \delta(u_{ik}) dV$$

dalla quale segue subito, per l'arbitrarietà di V, che:

$$\delta L = -T_{ik} \delta(u_{ik})$$

dove, ripetiamo, T_{ik} sono le componenti del tensore degli sforzi di Cauchy e u_{ik} sono le componenti del tensore di deformazione e si impiega la convenzione della somma sugli indici ripetuti. Ciò conclude la dimostrazione.

Definizione 4 *Un corpo deformabile si dice* ***elastico*** *se la deformazione scompare, una volta rimosse le forze esterne che su di esso agiscono.*
Se invece tolte le forze esterne rimane una deformazione residua, il corpo si dice ***plastico****.*

In quel che segue ci occuperemo solo di corpi elastici.

Calcoliamo ora l'*energia libera* di un corpo deformabile.
Ricordiamo dalla termodinamica che l'energia libera (di Helmholtz) F, detta anche *potenziale termodinamico* è definita come segue:

$$F = U - TS$$

Qui U è l'energia interna del corpo, T la temperatura assoluta, S l'entropia, legata alla temperatura assoluta T e al calore Q dalla relazione differenziale $dS = \dfrac{\delta Q}{T}$.

Osservazione
Non si confonda la temperatura assoluta con il tensore degli sforzi, malauguratamente indicati col medesimo simbolo. Un modo per evitare la confusione è fare apparire sempre gli indici nel tensore degli sforzi.

Vogliamo scrivere l'energia libera in funzione della deformazione ed esplicitare la relazione tra l'energia libera e gli sforzi.

Assumiamo che il corpo prima della deformazione sia in equilibrio termodinamico, e che la deformazione sia piccola e ottenuta in modo cosí "impercettibile " da non alterare lo stato di equilibrio termodnamico del corpo.

Il primo principio della termodinamica afferma che:

$$\delta Q = dU + dL \Longrightarrow dU = \delta Q - dL$$

Applicando la formula (20) per esprimere dL troviamo

$$dU = TdS + T_{ik}\delta(u_{ik}), \tag{21}$$

espressione valida per una valida per un corpo deformabile in generale.

Premettiamo al caso generale un caso particolare molto significativo:

1) **Fluido Perfetto**:

   Nel caso del fluido perfetto sappiamo che il tensore degli sforzi è proporzionale all'identità; il coefficiente di proporzionalità è l'opposto della pressione: $T_{ik} = -pI$.

   Quindi:

   $$dU = TdS - T_{ik}\delta(u_{ik}) = TdS - p\delta(u_{ii})$$

   dato che $T_{ik} = 0$ per $i \neq k$ e $T_{ii} = -p$.

   Ricordiamo ora che il coefficiente di dilatazione dei volumi è la traccia del tensore di deformazione: $u_{ii} = \sum u_{ii}$

   Quindi:

   $$\delta(u_{ii}) = \delta(\sum_{i=1}^{3}(u_{ii})) = \delta V.$$

   Allora otteniamo:

   $$dU = TdS - pdV \Longleftrightarrow \frac{dL + dU}{T} = dS \Longleftrightarrow \delta Q = dU + pdV$$

   che è la ben nota espressione del primo principio della termodinamica per un gas perfetto.

2) **Caso generale**:

   Ricordiamo che l'energia libera di Helmholtz è:

   $$F = U - TS$$

   Facciamone il differenziale (assumendo ad esempio come variabili di stato V e T):

   $$dF = dU - SdT - TdS$$

Per quanto visto prima: $dU = TdS + T_{ik}\delta(u_{ik})$, quindi sostituendo otteniamo:

$$dF = -SdT + T_{ik}d(u_{ik})$$

Allora possiamo ricavare:

$$T_{ik} = \left(\frac{\partial F}{\partial u_{ik}}\right)_T$$

(la notazione significa che la derivazione viene eseguita tenendo costante la temperatura).

4.2 La legge di Hooke

Il principio variazionale della termodinamica afferma quanto segue:
lo stato di equilibrio termodiminamico è il minimo assoluto dell'energia libera di Helmholtz, ossia del potenziale termodinamico.
Pertanto:
Condizione necessaria affinchè il corpo si trovi in equilibrio termodinamico è che sia $dF = 0$.
Facciamo ora la seguente:

Ipotesi 1
L'energia libera, o potenziale termodinamico, dipende solo dal tensore di deformazione

Poichè l'energia libera è una quantità scalare, essa potrà dipendere solo dai due scalari indipendenti associati al tensore di deformazione, che sono la sua traccia, somma degli autovalori, e il suo determinante, prodotto degli autovalori.
L'ipotesi che segue è l'ipotesi fondamentale della teoria dell'elasticità lineare:

Ipotesi 1
L'energia libera, o potenziale termodinamico, è una funzione quadratica degli invarianti del tensore di deformazione.

Questa ipotesi equivale ad ammettere che le deformazioni siano cosí piccole da potere trascurare i termini di ordine maggiore al secondo nello sviluppo in serie di Taylor dell'energia libera. Essa assicura, tramite la condizione di minimo che diventa un'equazione lineare, trascurando che gli sforzi dipendano linearmente dalle deformazioni, e viceversa.

Le ipotesi 1 e 2 comportano quindi che il potenziale termodinamico F ha la seguente espressione:

$$F = F_0 + \frac{1}{2}\lambda(u_{ii})^2 + \mu u_{ik}^2 \tag{22}$$

dove λ e μ sono dette *costanti di Lamé*[5]

Il secondo termine è l'invariante del primo ordine negli elementi della matrice rispetto alla deformazione (traccia della matrice); il terzo termine è l'invariante del secondo ordine. Il primo termine è l'energia libera del corpo prima della deformazione; si tratta di una costante che d'ora in poi ometteremo.

Nel caso particolare in cui $u_{ii} = 0$, cioè la traccia del tensore di deformazione è nulla, il moto è di *puro scorrimento* (non ci sono nè dilatazioni, nè compressioni, quindi il volume non cambia).

In generale si può scrivere:

$$u_{ik} = (u_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik}u_{ll}) + (\frac{1}{3}\delta_{ik}u_{ll}) \tag{23}$$

Il secondo termine è chiaramente una compressione idrostatica; infatti:

$$\mathrm{Tr}\,\frac{1}{3}\delta_{ik}u_{ll} = \frac{1}{3}\cdot 3u_{ll} = u_{11} + u_{22} + u_{33}$$

mentre il primo termine è un puro scorrimento, perchè

$$\mathrm{Tr}(u_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik}u_{ll}) = u_{11} + u_{22} + u_{33} - \frac{1}{3}\cdot 3u_{ll} = u_{11} + u_{22} + u_{33} = 0$$

Abbiamo cosí verificato la seguente:

Proposizione 6 *Il tensore di deformazione si può sempre scrivere come somma di uno scorrimento e di una compressione idrostatica.*

[5]Gabriel Lamé (Tours 1795-Parigi 1870), matematico francese. Noto anche per le *curve di Lamé*, Esses sono le curve piane che generalizzano l'ellisse, di equazione

$$\left|\frac{x}{a}\right|^n + \left|\frac{y}{b}\right|^n = 1$$

.

Corollario 1 *L'energia libera (22) può essere riscritta nel modo seguente:*

$$F = \mu(u_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik}u_{ll})^2 + \frac{1}{2}Ku_{ll}^2$$

dove $K := \lambda + \frac{2}{3}\mu$.

K *si dice* modulo di compressione idrostatica *e* μ modulo di rigidità.

Dimostrazione

Basta sostituire la (23) in (22). Si trova:

$$F = \mu(u_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik})^2 + \frac{2}{3}\mu\delta_{ik}u_{ll}(u_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik}u_{ll}) + \lambda u_{ii}^2 + \mu\frac{1}{9}(\delta_{ik}u_{ll})^2 + \lambda u_{ii}^2$$

Svolgendo il calcolo e sostituendo $K = \lambda + \frac{2}{3}\mu$ si prova l'asserto..

Dimostriamo ora che il modulo di compressione K è positivo, cosí come la costante di Lamé μ.

Infatti, ricordiamo, se il corpo deformabile deve trovarsi in uno stato di equilibrio termodinamico la sua energia libera deve avere un minimo assoluto. Se non vi sono forze esterne, F come funzione del tensore di deformazione avrà il minimo a deformazione nulla, cioè $u_{ik} = 0$. Dal Corollario 1 deduciamo subito che la condizione $K > 0$, $\mu > 0$ è sufficiente affinchè F abbia un minimo assoluto in $u_{ik} = 0$. Facciamo vedere che questa condizione è anche necessaria. Infatti se consideriamo una deformazione per cui $u_{ll} = 0$ troviamo che deve essere $\mu > 0$ perchè il secondo termine è nullo; se invece la deformazione è proporzionale all'identità è nullo il primo termine e pertanto $K > 0$. Riassumendo:

Corollario 2 *Nelle ipotesi 1 e 2, condizione necessaria e sufficiente affinchè l'energia libera F abbia un minimo assoluto per $u_{ik} = 0$, cioè a deformazione nulla, è che sia $K > 0$ e $\mu > 0$.*

Vogliamo che a deformazione nulla corrisponda s sforzo nullo:

$$T_{ik} = \left(\frac{\partial F}{\partial u_{ik}}\right)_{u_{ik=0}} = 0$$

Quest richiesta equivale a imporre la condizione di minimo e quindi troviamo la Legge di Hooke[6], espressa dal seguente

[6]Robert Hooke (Freshwater 1635-Londra 1703), inglese, fu uno dei più grandi sceinziati della seconda metà del Seicento, assieme a Newton, Leibnitz, Huygens.

Teorema 3 *Nelle ipotesi precedenti le relazione fra sforzi e deformazioni, diretta e inversa, sono:*

$$\begin{cases} u_{ik} = \dfrac{\delta_{ik} T_{ll}}{9k} + (T_{ik} - \dfrac{1}{3}\delta_{ik} T_{ll}) \dfrac{1}{2\mu} \\ T_{ik} = k u_{ll} \delta_{ik} + 2\mu (u_{ik} - \dfrac{1}{3}\delta_i k u_{ll}) \end{cases}$$

dove la prima equazione esprime le deformazioni in funzione degli sforzi e la seconda gli sforzi in funzione delle deformazioni.

Osservazioni

1. Quindi la relazione fra sforzi e le deformazioni è lineare. In tale senso si dice che la legge di Hooke esprime la teoria lineare dell'elasticità.

2. Se $u_{ll} = 0$ il moto è di *puro scorrimento* e $T_{ik} = 2\mu u_{ik}$, e quindi sforzi e deformazioni sono direttamente proporzionali.

Dimostrazione

Calcoliamo il differenziale dell'energia libera:

$$dF = k u_{ll} d(u_{ll}) + 2\mu (u_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik} u_{ll}) d(u_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik} u_{ll})$$

$$dF = k u_{ll} d(u_{ll}) + 2\mu (u_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik} u_{ll}) du_{ik}$$

$$dF = k u_{ll} \delta_{ik} du_{ik} + 2\mu (u_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik} u_{ll}) du_{ik}$$

$$dF = [k u_{ll} \delta_{ik} + 2\mu (u_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik} u_{ll})] du_{ik}$$

D'altra parte:

$$dF = \sum \frac{\partial F}{\partial u_{ik}} du_{ik}$$

Quindi, identificando:

$$T_{ik} = \frac{\partial F}{\partial u_{ik}} = k u_{ll} \delta_{ik} + 2\mu (u_{ik} - \frac{1}{3}\mu \delta_{ik} u_{ll})$$

e imponendo la condizione

$$T_{ik} = \frac{\partial F}{\partial u_{ik}} = 0$$

si conclude la dimostrazione.

5 Deformazioni omogenee

Ricordiamo anzitutto il teorema di Eulero[7] sulle funzioni omogenee.

Una funzione $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice omogenea di grado m se $F(\lambda x) = \lambda^m x \; \forall \, \lambda > 0$.

Se F è una funzione omogenea di grado m, allora $xF'(x) = mF$

Ad esempio:

$$F(x) = x^m \Rightarrow xF'(x) = mx^{m-1} = mF$$

Esempio: funzione omogenea di grado 2 in 2 variabili

$$F(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$$
$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2ax + by$$
$$\frac{\partial F}{\partial y} = bx + 2cy$$

Ora:

$$x\frac{dF}{dx} + y\frac{\partial F}{\partial y} = 2ax^2 + bxy + bxy + 2cy^2 = 2(ax^2 + bxy + cy^2) = 2F$$

In generale vale quindi la formula:

$$x\frac{\partial F}{\partial x} + y\frac{\partial F}{\partial y} = 2F$$

Osservazione:

La formula suddetta vale in $\mathbb{R}^m$. Questo è il contenuto del teorema di Eulero.

Definizione 5 *Una funzione* $F(x_1, \ldots, x_n) : \mathbb{R}^n\mathbb{R}$ *si dice* omogenea di grado m *se*

$$F(\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n) = \lambda^m F(x_1, \ldots, x_n) \qquad \forall \, \lambda > 0$$

Teorema 4 *(Eulero)*

Se F è omogenea di grado m, allora

$$\vec{x} \cdot \vec{\nabla} F = mF \tag{24}$$

[7] Leonhard Euler, italianizzato in Leonardo Eulero (Basilea 1707-S.Pietroburgo 1783) è stato uno dei più grandi matematici di tutti i tempi; da molti è considerato il più grande in assoluto. Di sicuro è stato il più prolifico.

Posso applicare il teorema alla $F = F(u_{ik})$:

$$u_{ik}\frac{\partial F}{\partial u_{ik}} = 2F$$

ma: $\dfrac{\partial F}{\partial u_{ik}} = T_{ik}$ allora, procedendo a ritroso, ottengo il valore dell'energia libera:

$$F = \frac{1}{2}u_{ik}T_{ik}$$

Definizione 6 *Una deformazione si dice* ***omogenea*** *se u_{ik} =costante lungo tutto il volume.*

Esempio: la compressione idrostatica

Facciamo ora un

Esempio di calcolo del tensore degli sforzi per una compressione omogenea.

Consideriamo un corpo continuo elastico (ad esempio un cilindro) lungo l'asse z; vogliamo determinare la deformazione del corpo.

Immaginiamo che non ci siano forze lungo la superficie laterale; le sole forze che agiscono sul corpo siano applicate agli estremi.

Sia p la pressione (o trazione) applicata agli estremi; vogliamo determinare la distribuzione degli sforzi.

Identifichiamo l'asse 1 con x, l'asse 2 con y, l'asse 3 con z e calcoliamo T_{ik}, cioè

$$\begin{pmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix}$$

Poichè per ipotesi cerchiamo trasformazioni omogenee (u_{ik} =costante) allora necessariamente per la legge di Hooke dovrà essere T_{ik} =costante.

Sia $\vec{n}$ la normale alla superficie che rappresenta gli estremi (le basi, nell'esempio del corpos cilindrico). Allora per definizione di tensore degli sforzi di Cauchy si ha:

$$T_{ik}n_k = p_i$$

dove $\vec{p}$ è la trazione, o pressione, che agisce sugli estremi. Notiamo che $\vec{n}//z$ lungo le basi e $\vec{n}\perp z$ lungo la superficie laterale. Ne segue, data l'assenza di forze sulla superficie laterale, che $T_{ik} = 0$ ovunque fatta eccezione per $i = k = 3$, cioè $T_{zz} \neq 0$. Lungo l'asse z troverò che: $T_{zk}n_k = p_z$; dato che $\vec{n} = (0, 0, 1)$ e $p_z = p$ si conclude che $T_{zz} = p$. Il solo sforzo che viene esercitato è la pressione agli estremi.

Conoscendo ora la trazione che agisce sul corpo dobbiamo calcolare la deformazione che esso subisce. Si ha, per la legge di Hooke:

$u_{ik} = 0$ se $i \neq k$, $u_{ik} \neq 0$ se $i = k$.

Calcoliamo le componenti del tensore delle deformazioni:

$$u_{xx} = \frac{p}{9k} - \frac{p}{6\mu} = \frac{1}{3}p\left(\frac{1}{3k} - \frac{1}{2\mu}\right)$$

$$u_{yy} = \frac{1}{3}p\left(\frac{1}{3k} - \frac{1}{2\mu}\right)$$

$$u_{zz} = \frac{1}{3}p\left(\frac{1}{3k} - \frac{1}{\mu}\right)$$

L'assenza delle componenti fuori dalla diagonale diagonale significa che non c'è torsione.

È conveniente introdurre al posto del modulo di compressione k e della costante di Lamé μ altre due costanti che caratterizzano i materiali elastici. La prima è il modulo di Young.

Definizione:

MODULO DI YOUNG:

$$E = \left[\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3k} + \frac{1}{\mu}\right)\right]^{-1} = \frac{9k\mu}{3k + \mu}$$

Esempio: nel caso precedente del corpo elastico compresso solo lungo l'asse z otteniamo: $u_{zz} = \frac{P}{E}$.

Consideriamo ora i rapporti relativi tra le componenti del vettore delle deformazioni.

Definizione:

RAPPORTO DI POISSON:

$$\frac{u_{xx}}{u_{zz}} = \frac{u_{yy}}{u_{zz}} = -\sigma$$

Poichè $u_{xx} = u_{yy}$ allora:

$$\sigma = -\frac{\frac{1}{3k} - \frac{1}{2\mu}}{\frac{1}{3k} + \frac{1}{\mu}} = \frac{1}{2}\frac{3k - 2\mu}{3k + \mu}.$$

$$\Rightarrow E = \frac{9k\mu}{3k + \mu} \qquad \sigma = -\frac{u_{xx}}{u_{zz}} = \frac{1}{2}\frac{3k - 2\mu}{3k + \mu}$$

Osservazioni:

- Poichè $k > 0$,$\mu > 0$ allora: $-1 \leq \sigma \leq \frac{1}{2}$

  se $k = 0 \Rightarrow \sigma = 0$

  se $\mu = 0 \Rightarrow \sigma = \frac{1}{2}$

- L'invariante relativo al volume è p, la traccia del tensore di deformazione.

- L'energia libera vale

$$F = \frac{1}{2}u_{ik}T_{ik} = \frac{1}{2}u_{zz}T_{zz} = \frac{p^2}{2E}$$

Riassumendo, abbiamo considerato l'applicazione della legge di Hooke nel caso più semplice. Abbiamo calcolato l'energia libera F sviluppandola in serie di Taylor e minimizzandola per raggiungere l'equilibrio. Le condizioni di equilibrio, espresse dalla legge di Hooke, sono quelle di annullamento delle derivate prime.

Abbiamo definito il modulo di Young[8], E, e il rapporto di Poisson[9], σ, nel caso di deformazioni omogenee. In realtà le formule valgono in generale.
Preso $k = \frac{2}{3}\mu + \lambda$, vogliamo esprimere la Legge di Hooke in funzione di E e σ.
Partendo dalla formula dell'energia libera di Helmoltz e sostituendo a μ e k le formule trovate in precedenza, si ottiene l'equazione:

$$F = \frac{E}{2(1+\sigma)}\left(u_{ik}^2 + \frac{\sigma}{1-2\sigma}u_{ll}^2\right)$$

[8]Thomas Young, Milverton 1773, Londra 1829.
[9]Simeon-Denis Poisson, Pithiviers 1781-Parigi 1840.

Ora:

$$\begin{cases} T_{ik} = \dfrac{E}{1+\sigma}\left(u_{ik} + \dfrac{\sigma}{1-2\sigma}u_{ll}\delta_{ik}\right) \\ \\ u_{ik} = \dfrac{[(1+\sigma)T_{ik} - \sigma T_{ll}\delta_{ik}]}{E} \end{cases}$$

Scrivendo per componenti otteniamo che:

$$\begin{cases} T_{xx} = \dfrac{E}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}[(1-\sigma)u_{xx} + \sigma(u_{yy} + u_{zz})] \\ \\ T_{yy} = \dfrac{E}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}[(1-\sigma)u_{yy} + \sigma(u_{xx} + u_{zz})] \\ \\ T_{zz} = \dfrac{E}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}[(1-\sigma)u_{zz} + \sigma(u_{yy} + u_{xx})] \\ \\ T_{xy} = \dfrac{E}{1+\sigma}u_{xy} \\ \\ T_{xz} = \dfrac{E}{1+\sigma}u_{xz} \\ \\ T_{yz} = \dfrac{E}{1+\sigma}u_{yz} \end{cases}$$

Esprimendo le componenti della deformazione come funzione degli sforzi, si ha:

$$\begin{cases} u_{xx} = \dfrac{1}{E}[T_{xx} - \sigma(T_{yy} + T_{zz})] \\ \\ u_{yy} = \dfrac{1}{E}[T_{yy} - \sigma(T_{xx} + T_{zz})] \\ \\ u_{zz} = \dfrac{1}{E}[T_{zz} - \sigma(T_{yy} + T_{xx})] \\ \\ u_{xy} = \dfrac{1+\sigma}{E}T_{xy} \\ \\ u_{xz} = \dfrac{1+\sigma}{E}T_{xz} \\ \\ u_{yz} = \dfrac{1+\sigma}{E}T_{yz} \end{cases}$$

che è ciò che si ottiene se la deformazione è omogenea.

5.1 Trave con compressione unilaterale

In questo caso si ha una deformazione soltanto lungo l'asse delle z e non si ha una deformazione di taglio. Basterà allora calcolare soltanto la componente u_{zz}. Sapendo che T_{zz} è una pressione normale, la si pone uguale a p. Allora poichè

$$T_{xx} = \frac{E\sigma}{(1+\sigma)(1-2\sigma)} u_{zz} = T_{yy} \quad \longrightarrow \quad E u_{zz} + \frac{2E\sigma^2}{(1+\sigma)(1-2\sigma)} u_{zz} = p \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad T_{xx} + T_{yy} = \frac{2E\sigma}{(1+\sigma)(1-2\sigma)} u_{zz} \quad \text{e} \quad T_{zz} = \frac{E(1+\sigma)}{(1+\sigma)(1-2\sigma)} u_{zz} = p$$

Da qui si ricava:

$$u_{zz} = \frac{P}{E} \frac{(1+\sigma)(1-2\sigma)}{(1-2\sigma)}$$

$$T_{xx} = \frac{p\sigma}{1-\sigma} = T_{yy}$$

La compressione provoca sforzi longitudinali di taglio, manca perciò la torsione.

6 Onde elastiche

6.1 Equazioni del moto. Equilibrio di un corpo elastico

Riprendiamo l'equazione del moto indefinita dei corpi deformabili

$$\rho\ddot{\vec{u}} = \vec{\nabla} \cdot T + \rho\vec{f}$$

dove T è sempre il tensore degli sforzi di Cauchy, ρ la densità e $\vec{f}$ la forza di massa. Deduciamo da questa equazione l'equazione differenziale del moto che le deformazioni devono soddisfare. Usiamo l'espressione del tensore degli sforzi data dalla legge di Hooke:

$$T_{ik} = \frac{E}{1+\sigma}\left(u_{ik} + \frac{\sigma}{1-2\sigma}u_{ll}\delta_{ik}\right)$$

e ricordiamo anche l'espressione del tensore delle deformazioni:

$$u_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)$$

Eseguendo l'operazione della divergenza e scrivendo il risultato per componenti troviamo:

$$\vec{\nabla} \cdot T + \rho\vec{f} = \frac{E}{2(1+\sigma)}\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2} + \frac{E}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}\frac{\partial^2 u_l}{\partial x_i \partial x_l} + \rho f_i$$

che possiamo riscrivere cosí, ricordando che $\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} u = \Delta u$:

$$\frac{E}{2(1+\sigma)}\Delta\vec{u} + \frac{E}{(1+\sigma)(-2\sigma)}\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) + \rho\vec{f}$$

Quindi l'equazione del moto diventa:

$$\rho\ddot{\vec{u}} = \frac{E}{2(1+\sigma)}\Delta\vec{u} + \frac{E}{2(1+\sigma)(1-2\sigma)}\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{u})$$

Per l'equilibrio, deve essere necessariamente $\ddot{\vec{u}} = 0$. Quindi la condizione necessaria per l'equilibrio è

$$\vec{\nabla} \cdot T + \rho\vec{f} = 0 \tag{25}$$

ovvero

$$\Delta\vec{u} + \frac{1}{1-2\sigma}\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) = -\frac{2(1+\sigma)}{E}\vec{f}$$

6.2 Onde elastiche

Ora discutiamo il caso particolare di elasticità in cui $\vec{f} = 0$, cioè non ci sono forze di massa.

Definiamo **l'equazione delle onde elastiche**:

$$\rho\ddot{\vec{u}} = \frac{E}{2(1+\sigma)}\Delta\vec{u} + \frac{E}{2(1+\sigma)(1-2\sigma)}\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}) \tag{26}$$

Definizione 7 *È detta* **onda longitudinale** *una soluzione $\vec{u}$ della (26) che sia funzione solo di (x, t).*

$u_x(x, t)$ è la *componente longitudinale* della deformazione.
$u_y(x, t), u_z(x, t)$ costituiscono la *componente trasversa*. Pertanto: $\Rightarrow u_\perp = u_y e_y + u_z e_z$

Si noti che:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{u} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = \frac{\partial u_x}{\partial x}.$$

Proiettiamo ora la (26) sugli assi:

- ASSE x:

$$\rho\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} = \frac{E}{2(1+\sigma)}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{E}{2(1+\sigma)(1-2\sigma)}\vec{\nabla}\cdot\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}\right) =$$

$$= \rho\frac{\partial_2 u_z}{\partial t_2} = \frac{E}{2(1+\sigma)}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{E}{2(1+\sigma)(1-2\sigma)}\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}$$

$$\Rightarrow \quad \rho\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = \frac{E}{2(1+\sigma)}\left[1 + \frac{1}{1-2\sigma}\right]\frac{\partial^2 u_x}{\partial^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = \frac{2E(1-\sigma)}{2\rho(1+\sigma)(1-2\sigma)}\frac{\partial^2 u_x}{\partial x_i^2}$$

Si trova cosí che le onde longitudinali soddisfano l'equazione di D'Alembert ; la velocità di propagazione longitudinale è data da:

$$v_l = \sqrt{\frac{E(1-\sigma)}{\rho(1+\sigma)(1-2\sigma)}}$$

- ASSE y: l'equazione è:

$$\frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} = \frac{E}{2\rho(1+\sigma)}\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2}$$

Ancora un'equazione di d'Alembert. La velocità trasversa è data da:

$$v_t = \sqrt{\frac{E(1-\sigma)}{2\rho(1+\sigma)}}$$

Si noti che:

$$\frac{1-\sigma}{1-2\sigma} > 1 \quad \Rightarrow \quad v_l > v_t$$

Inoltre le due componenti y e z si propagano esattamente nello stesso modo. Per l'asse z vale quanto detto per l'asse y. Allora, accettando l'approssimazione dell'elasticità lineare e utilizzando il modulo di Young e Poisson possiamo ricavare la velocità di propagazione delle onde elastiche in tutti le direzioni.

Caso dell'onda monocromatica:

Ricerchiamo la soluzione dell' equazione di d'Alembert nella forma: $u = \varphi(x)e^{iwt}$. Questi forma si dice *onda monocromatica.* Infatti la dipendenza temporale è periodica di periodo $T = \frac{2\pi}{\omega}$; essa quindi ammette *una sola* frequenza fissata $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$. Nella teoria elettromagnetica della luce i colori corrispondono a valori specifici della frequenza delle onde elettromagnetiche; se vi è una sola frequenza si dice che l'onda è monocromatica, e questa locuzione viene estesa per analogia a qualunque fenomeno ondulatorio.

Sostituendo ora il risultato nell'equazione delle onde si ottiene :

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2}e^{i\omega t} = -\frac{\omega^2}{v^2}\varphi e^{i\omega t} \Rightarrow \varphi^2(x) + k^2\varphi(x) = 0$$

con $k = \frac{\omega}{v}$.

Integriamo l'equazione appena trovata per ottenere le soluzioni.

Si pone, al solito:

$$\varphi(x) = e^{i\alpha x} \Rightarrow \alpha^2 + k^2 = 0 \Rightarrow \alpha = \pm ik$$

e si trovano le due soluzioni linearmente indipendenti: $\varphi_{\pm}(x) = e^{\pm ikx}$ cosí che le soluzioni saranno della forma:

$$u(x,t) = (c_1 e^{ikx} + c_2 e^{ikx})e^{i\omega t} = c_1 e^{i(kx+\omega t)} + c_2 e^{-i(kx+\omega t)}.$$

Si è cosí ottenuta la forma generale delle soluzioni dell'equazione sotto forma di onde monocromatiche. Esse si sono periodiche in x di periodo $\frac{2\pi}{k}$ e si propagano nel tempo t con periodo $\frac{2\pi}{\omega}$.

Passando al solito alla forma trigonometrica si può concludere quanto segue: definendo $k = \frac{\omega}{v}$ l'equazione delle onde elastiche ammette soluzioni del tipo onda monocromatica espresse dalla formula seguente:

$$u = \cos(kx - \omega t), \quad u = \cos(kx + \omega t), \quad u = \sin(kx - \omega t), \quad u = \sin(kx + \omega t)$$

Ritorniamo ora all' equazione delle onde elastiche già considerata:

$$\rho\ddot{\vec{u}} = \frac{E}{2(1+\sigma)}\Delta\vec{u} + \frac{E}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\cdot\vec{u})$$

Fin'ora abbiamo ricercato le soluzioni sotto forma di onda longitudinale. Consideriamo ora il caso in cui u è funzione di tutte e tre le variabili spaziali.

Facciamo vedere che la decomposizione della soluzione in onde longitudinale e trasversa vale anche nel caso generale. Più precisamente:

Proposizione 7 *Le deformazioni longitudinale $\vec{u}_l$ e trasversa $\vec{u}_t$ soddisfano le equazioni di d'Alembert*

$$\ddot{\vec{u}}_l - v_l^2\Delta\vec{u}_l = 0, \quad \ddot{\vec{u}}_t - v_t^2\Delta\vec{u}_t = 0$$

con le medesime espressioni delle velocità di propagazione v_l e v_t ricavate sopra.

Ricerchiamo dapprima la velocità di propagazione longitudinale e trasversa.

Notiamo innanzitutto che l'equazione:

$$\ddot{\vec{u}} = v_t^2\Delta\vec{u} + (v_l^2 - v_t^2)\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{u})$$

è esattamente equivalente a quella sopra, cioè all'equazione (26). .

Infatti:

$$\ddot{\vec{u}} = \frac{E}{2(1+\sigma)}\Delta\vec{u} + \left[\frac{E(i-\sigma)}{\rho(1+\sigma)(1-2\sigma)} - \frac{E}{2\rho(1+\sigma)}\right]\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{u})$$

Ora:
$$\left[\frac{E(i-\sigma)}{\rho(1+\sigma)(1-2\sigma)}-\frac{E}{2\rho(1+\sigma)}\right]=E\frac{2(1-\sigma)-(1-2\sigma)}{2\rho(i+\sigma)(1-2\sigma)}=$$
$$=\frac{E}{2\rho}\frac{(2-2\sigma-1+2\sigma)}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}=\frac{E}{2\rho(1+\sigma)(1-2\sigma)}$$
e quindi si riottiene la (26).

Poniamo poi: $\vec{u}=\vec{u_l}+\vec{u_t}$; con

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{u_t}=0;\quad \vec{\nabla}\wedge\vec{u_l}=0;$$

dimostreremo in seguito che questa posizione è sempre possibile. Si trova:

$$\ddot{\vec{u_t}}+\ddot{\vec{u_l}}=v_t^2\Delta(\vec{u_t}+\vec{u_l})+(v_l^2-v_t^2)\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{u_l}) \tag{27}$$

Poichè $\vec{\nabla}\cdot\vec{u_t}=0 \quad\Rightarrow\quad \vec{\nabla}\cdot\ddot{\vec{u_t}}=0$. Allora, facendo la divergenza di ambo i membri, si trova:
$$\vec{\nabla}\cdot\ddot{\vec{u_l}}=v_t^2(\Delta\vec{\nabla}\cdot\vec{u_t}+\vec{\nabla}\cdot\Delta\vec{u_l})+(v_l^2-v_t^2)\Delta(\vec{\nabla}\cdot\vec{u_l})$$
$$\Rightarrow\vec{\nabla}\cdot(\ddot{\vec{u_l}}-v_t^2\Delta\vec{u_l}-v_l^2\Delta\vec{u_l}+v_t^2\Delta\vec{u_t})=0\quad\Rightarrow\quad\vec{\nabla}\cdot(\ddot{\vec{u_l}}-v_l^2\Delta\vec{u_l})=0$$
D'altra parte la condizione $\nabla\wedge\vec{u_l}=0$ implica anche $\vec{\nabla}\wedge(\ddot{\vec{u_l}}-v_l^2\Delta\vec{u_l})=0$. Supponiamo ora di avere dimostrato quanto segue:

$$\vec{\nabla}\cdot v=0;\quad \vec{\nabla}\wedge v=0\quad\forall\vec{x}\in\mathbb{R}^3\Rightarrow\quad v=0 \tag{28}$$

Possiamo pertanto concludere che la parte longitudinale soddisfa l'equazione delle onde con velocità v_l:
$$\ddot{\vec{u_l}}-v_l^2\Delta\vec{u_l}=0$$
Devo ora mostrare che anche la parte trasversale soddisfa l'equazione, stavolta con velocità v_t. Facciamo il rotazionale della (27). Poichè il rotazionale di ogni gradiente è sempre zero, otteniamo:
$$\vec{\nabla}\wedge(\ddot{\vec{u_t}}-v_t^2\Delta\vec{u_t})=0$$
Osserviamo ora che si ha anche $\vec{\nabla}\cdot(\ddot{\vec{u_t}}-v_t^2\Delta\vec{u_t})=0$ perchè $\vec{\nabla}\cdot\vec{u_t}=0$. quindi possiamo ancora concludere , come sopra, che $\ddot{\vec{u_t}}-v_t^2\Delta\vec{u_t}=0$.
L'unica cosa che rimande da dimostrare è l'annullarsi del campo vettoriale $\vec{v}$ tutte

le volte che la sua divergenza e il suo rotazionale sono entrambi nulli su tutto $\mathbb{R}^3$. A questo scopo ricordiamo che se $\vec{\nabla} \wedge \vec{v} = 0$ su $\mathbb{R}^3$ allora il campo vettoriale deriva da un potenziale, cioè esiste $\Phi : \mathbb{R}^3 \in \mathbb{R}$ tale che $\vec{v} = -\vec{\nabla}\Phi$. La condizione $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$ si riscrive pertanto cosí:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}\Phi = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \Delta\Phi = 0$$

Dimostreremo, tramite la trasformazione di Fourier che ora passeremo a descrivere, che sotto condizioni piuttosto generali di annullamento all'infinito l'equazione di Laplace $\Delta\Phi = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^3$ ammette solo la soluzione nulla. Ciò conclude la dimostrazione della proposizione.

7 Trasformazione di Fourier

Ricordiamo che data una funzione periodica $f : [0,T] \to \mathbb{R}$ almeno C^2 con $f(t+T) = f(t)$, vale, nel senso della convergenza uniforme su $[0,T]$, lo sviluppo in serie di Fourier:

$$f = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n e^{i\frac{2\pi nt}{T}}$$

$$f_n := \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-i\frac{2\pi nt}{T}}\,dt$$

Introduciamo le notazioni:

$$\omega := \frac{2\pi n}{T}, \quad \Delta\omega := \omega_{n+1} - \omega_n = \frac{2\pi}{T}.$$

Poniamo inoltre:

$$\varphi(\omega) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-i\omega t}dt.$$

Allora si vede subito che lo sviluppo in serie di Fourier può essere riscritto sotto la forma seguente:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \varphi(\omega_n)\cdot\Delta\omega$$

Formalmente quest'ultima formula altro non è che una somma di Riemann che approssima l'integrale generalizzato

$$I(\omega) := \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\omega)d\omega.$$

Perciò, immaginando di fare tendere T all'infinito, formalmente la serie di Fourier si trasforma in un integrale. Ciò motiva la seguente

Definizione 8 *(Trasformata di Fourier) Sia data una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ assolutamente integrabile, cioè tale che*

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|\,dx < +\infty$$

Allora la sua trasformata di Fourier $\hat{f}(\xi) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *è definita nel modo seguente*

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-i\xi x}dx \tag{29}$$

Osservazione

L'integrale esiste per ogni ξ: infatti

$$|\hat{f}(\xi)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} |f(x)|dx < +\infty$$

e dunque se f è assolutamente integrabile la trasformata di Fourier non solo esiste ma è anche limitata.

Applicando lo stesso ragionamento per analogia la trasformata di Fourier viene invertita in modo simile a quanto si è visto nel caso della serie.

Ricordiamo che f viene ritrovato a partire dalle f_n, dove

$$f_n := \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-in\omega t}dt.$$

sommando la serie di Fourier

$$f = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n e^{in\omega t}$$

Procedendo come sopra, si definisce la trasformata di Fourier inversa tramite l'integrale

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} f(\hat{\xi})e^{ix\xi}d\xi$$

Vale il risultato seguente, che riportiamo senza dimostrazione:

Proposizione 8 *Supponiamo che la trasformata di Fourier $\hat{f}$ di $f(x)$ sia assolutamente integrabile su $\mathbb{R}$. Allora:*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)e^{i\xi x}d\xi. \tag{30}$$

Esempio:

Sia $f(x) = e^{-ax^2-bx}$ con $x \in \mathbb{R}$, $a > 0$ e $b \in \mathbb{C}$. La sua trasformata di Fourier è

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-ax^2-bx-ix\xi}dx = \frac{1}{\sqrt{2a}}e^{-\frac{(\xi-ib)^2}{a}}.$$

Per calcolare questo integrale, detto integrale gaussiano, esiste un metodo che è il seguente:

1. Completiamo il quadrato all'esponente:
$$ax^2 + bx = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2}\right) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2.$$
   Allora si ottiene:
$$\hat{f}(\xi) = \frac{e^{\frac{b^2}{4a}}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - ix\xi} dx.$$

2. Applichiamo il cambiamento di variabile $x + \dfrac{b}{2a} = u \Rightarrow dx = du$. S ricava:
$$\hat{f}(\xi) = \frac{e^{\frac{b^2}{4a} + i\frac{b}{2a}}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-au^2 - i\xi u} du$$

3. Completiamo il nuovo quadrato con lo stesso procedimento del punto 1): $au^2 + i\xi u = a\left(u + \dfrac{i\xi}{2a}\right)^2 + \dfrac{\xi^2}{4a}$. Si trova:
$$\hat{f}(\xi) = \frac{e^{\frac{b^2}{4a} + i\frac{b}{2a} - \frac{\xi^2}{4a}}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-a\left(u+\frac{i\xi}{2a}\right)^2} du$$

4. Applichiamo il cambiamento di variabile $u + \frac{i\xi}{2a} = y$; allora si ottiene:
$$\hat{f}(\xi) = \frac{e^{\frac{b^2}{4a} + i\frac{b}{2a} - \frac{\xi^2}{4a}}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ay^2} dy$$
   dove l'integrale è di Gauss che vale $\sqrt{\dfrac{\pi}{a}}$.
$$\hat{f}(\xi) = \frac{e^{\frac{b^2}{4a} + i\frac{b}{2a} - \frac{\xi^2}{4a}}}{\sqrt{2a}} = \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-\frac{(\xi - ib)^2}{a}}$$

5. Applicando la formula (30) alla $\hat{f}(\xi)$ appena calcolata e seguendo il medesimo procedimento si riottiene $f(x)$.

Introduciamo ora un'operazione fondamentale nel contesto della trasformazione di Fourier.

Definizione 9 *(Prodotto di convoluzione)*
Date due funzioni integrabili f e g, il loro prodotto di convoluzione $(f * g)(x)$, o semplicemente la loro convoluzione *è definito nel modo seguente:*
$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y)g(x - y)dy$$

Consideriamo la mappa $F : f \to \hat{f}$ che associa a f la sua trasformata di Fourier $\hat{f}$; denotiamo poi F^{-1} la sua inversa, cioè la mappa che a $\hat{f}$ associa f. Allora si ha il seguente teorema, che riportiamo senza dimostrazione:

Teorema 5 *(Teorema della convoluzione)*
Siano f e g assolutamente integrabili su $\mathbb{R}$, e cosí le loro trasformate di Fourier $\hat{f}(\xi)$ e $\hat{g}(\xi)$. Allora:

1. *La trasformata di Fourier $F(fg)$ del prodotto $f(x)g(x)$ è uguale al prodotto di convoluzione delle trasformate $(f * g)(\xi)$, cioè:*

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)e^{-ix\xi}\,dx = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi')\hat{g}(\xi-\xi')\,d\xi'$$

2. *La trasformata di Fourier $F(f * g)(\xi)$ del prodotto di convoluzione $\int_R f(y)g(x-y)\,dy$ è uguale al prodotto delle trasformate $\hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi)$, cioè:*

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(y)g(x-y)\,dy \right) e^{-ix\xi}\,dx = \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi)$$

La proprietà fondamentale della trasformata di Fourier è quella di trasformare derivazioni in moltiplicazioni, e viceversa. Questa proprietà vale sia per la serie di Fourier (detta trasformata di Fourier discreta) che per la trasformata di Fourier, detta trasformata di Fourier continua. Vale infatti il seguente risultato

Teorema 6 *(Trasformazione delle derivazioni).*

1. *(Caso discreto). Sia $f(t) \in C^\infty[0,T]$ periodica. Siano f_n i suoi coefficienti di Fourier. Sia $\omega := \frac{2\pi}{T}$. Allora, $\forall\, k \in \mathbb{N}$, $|n|^k|f_n| \to 0$ per $|n| \to \infty$ e i coefficienti di Fourier della funzione $f^{(k)}(x)$ sono*

$$f_n^{(k)} = (in\omega)^k f_n$$

   e quindi si ha:

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (in\omega)^k f_n e^{in\omega t}$$

2. *(Caso continuo). Sia $f(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, dove:*

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) = \{ f \in C^\infty(\mathbb{R}) \,|\, x^m |f^{(k)}(x)| \to 0, |x| \to \infty \}, \quad \forall\, k = 0, 1, \ldots;\ \forall\, m \in \mathbb{N}$$

Allora la mappa $F : f \to \hat{f}$ mappa $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ in sè e si ha

$$F(f^{(k)})(\xi) := \int_{\mathbb{R}} f^{(k)}(x)e^{-ix\xi}\,dx = (-i\xi)^k \hat{f}(\xi)$$

$$F((-ix)^k f)(\xi) := \int_{\mathbb{R}} (-ix)^k f(x)e^{-ix\xi}\,dx = \hat{f}^{k)}(\xi)$$

Esempio $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ contiene tutte le funzioni del tipo

$$f(x) = e^{-P(x)}Q(x), \qquad x \in \mathbb{R}$$

dove $P(x)$ è un qualsiasi polinomio pari e $Q(x)$ un qualsiasi polinomio.

Dimostrazione

Poichè $f \in C^\infty$, il ragionamento per la dimostrazione del Lemma 3 del Cap.2, basato sulla integrazione per parti, può essere iterato indefinitamente. Si conclude che $\forall\, p \in \mathbb{N}$ esiste una costante $C_p > 0$ tale che

$$|f_n| \leq \frac{C_p}{!n|^p}$$

Dunque la serie di Fourier

$$f = \sum_{-\infty}^{+\infty})f_n e^{-in\omega t}$$

può essere derivata termine a termine quante volte si vuole. Pertanto:

$$(-i)^k f^{(k)} = \sum_{-\infty}^{+\infty}(n\omega)^k f_n e^{-in\omega t}.$$

e ciò dimostra l'affermazione 1.

Proviamo ora l'affermazione 2. Se $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ l'integrale

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ix\xi}dx$$

può essere derivato termine a termine quante volte si vuole. Si ottiene:

$$\hat{f}^{(k)}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty}(-ix)^k f(x)e^{-ix\xi}dx$$

Per dimostrare l'ultima formula, integriamo per parti. Si trova:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)e^{-ix\xi}dx = \underbrace{\left[f(x)e^{-ix\xi}\right]_{-\infty}^{+\infty}}_{0} + i\xi\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-ix\xi}dx = i\xi\hat{f}(\xi).$$

Integriamo per parti una seconda volta:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f''(x)e^{-ix\xi}dx = \underbrace{\left[f'(x)e^{-ix\xi}\right]_{-\infty}^{+\infty}}_{0} + i\xi \int_{\mathbb{R}} f'(x)e^{-ix\xi}dx =$$

$$= (i\xi)^2 \int_R f(x)e^{-i\xi x}dx = (i\xi)^2 \hat{f}(\xi).$$

Proseguendo in questo modo, si prova facilmente che, in generale $F(f^k(x)) = (i\xi)^k \hat{f}(\xi)$. Ciò prova l'asserzione 2 e con questa il Teorema.

L'interesse fondamentale di questo teorema è che esso trasforma le equazioni differenziali lineari in equazioni algebriche. Si ha infatti:

Corollario 3 *Sia data l'equazione differenziale lineare di ordine k nell'incognita $f(x)$:*

$$f^{(k)}(x) + a_1 f^{(k-1)}(x) + \ldots + a_n f(x) = g(x) \tag{31}$$

dove il termine noto $g(x)$ è una funzione assolutamente integrabile e le $a_1, \ldots, a_n$ sono costanti complesse. Si ponga:

$$P_k(\xi) := (i\xi)^k + a_1(i\xi)^{k-1} + \ldots + a_n$$

Allora la soluzione (formale) dell'equazione differenziale è data dalla formula

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} Q_k(x-y)g(x-y) \tag{32}$$

dove:

$$Q_k(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{ix\xi}}{P_k(i\xi)}\, d\xi \tag{33}$$

Osservazione

Questa soluzione è formale, va perchè $P_n(i\xi)$ potrebbe annullarsi in qualche punto e non sarebbe più integrabile e di conseguenza la funzione $\frac{1}{P_k(i\xi)}$ potrebbe non essere integrabile. Per applicare la formula (33) occorre quindi verificare che il polinomio $P_k(i\xi)$ non si annulla mai per $\xi \in \mathbb{R}$.

Dimostrazione

Si applica la trasformata di Fourier ad ambo i membri e si sfrutta la sua linearità. Per il teorema precedente otterremo:

$$\underbrace{\left[(i\xi)^k + a_1(i\xi)^{k-1} + \ldots + a_n\right]}_{P_k(i\xi),\, polinomio\, di\, ordine\, k} \hat{f}(\xi) = \hat{g}(\xi)$$

$$\left.\begin{array}{l}\hat{f}(\xi) = \frac{\hat{g}(\xi)}{P_k(i\xi)} \\ \\ F^{-1}\left(\frac{1}{P_k(i\xi)}\right) = Q_k(x)\end{array}\right\} \Rightarrow f(x) = \int_R Q_k(y)g(x-y)dy \tag{34}$$

e ciò conclude la dimostrazione.

La trasformata di Fourier può essere estesa senza difficoltà al caso delle funzioni di più variabili. Ciò permetterà, come vedremo, l'integrazione immediata di importanti equazioni alle derivate parziali.

7.1 Trasformazione di Fourier in $\mathbb{R}^n$

Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ assolutamente integrabile in $\mathbb{R}^n$; $x = (x_1, ..., x_n)$

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|dx := \int_{-\infty}^{+\infty} ... \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x_1, ..., x_n)|dx_1...dx_n < +\infty$$

Si noti che ciò richiede $f(x) \approx \frac{1}{|x|^{n+\alpha}}, \quad \alpha > 0$, per $|x| \to \infty$.

Definizione 10 *La trasformata di Fourier* $f^(\xi) := \hat{f}(\xi_1, \dots, \xi_n) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ *di* f *è definita nel modo seguente:*

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x,\xi\rangle}\, dx := \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x_1\xi_1+\ldots+x_n\xi_n)}\, dx_1 \cdots dx_n$$

I teoremi di inversione, convoluzione, di trasformazione di derivazioni in moltiplicazioni valgono anche nel caso della trasformazione di Fourier in $\mathbb{R}^n$. Ci limitiamo qui a elencare i risultati con le ovvie modifiche di notazione, perchè le dimostrazioni non offrono sostanziali nuove difficoltà. Ci limiteremo ad un cenno nel caso della trasformazione di derivazioni in moltiplicazioni perchè qui si ha a che fare con derivate parziali.

1. (Formula di inversione) Sia $\hat{f}(\xi)$ assolutamente integrabile su $\mathbb{R}^n$. Allora:

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle x,\xi\rangle}\, d\xi := \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x_1\xi_1+\ldots+x_n\xi_n)}\, d\xi_1 \cdots d\xi_n$$

2. Formula di convoluzione: Siano f e g assolutamente integrabili su $\mathbb{R}^n$, e cosí le loro trasformate di Fourier $\hat{f}(\xi)$ e $\hat{g}(\xi)$. Allora:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x)e^{-i\langle x,\xi\rangle}\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi')\hat{g}(\xi-\xi')\, d\xi'$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)\, dy\right) e^{-i\langle x,\xi\rangle}\, dx = \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi)$$

3.

$$F[(i\partial_{x_1})^{k_1}(i\partial_{x_2})^{k_2}\cdots(i\partial_{x_n})^{k_n}f(x_1,...,x_n)] = \xi_1^{k_1}\cdots\xi_n^{k_n}\hat{f}(\xi_1,...,\xi_n)$$

Accenniamo solo alla dimostrazione del punto 3. Usiamo la notazione:

$$(D_{x_k}f)(x) := i\frac{\partial f}{\partial x_k}, \quad f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$$

Allora

$$\Rightarrow F(D_{x_1}^{\alpha_1}D_{x_2}^{\alpha_2}\cdots D_{x_n}^{\alpha_n}f) = (\xi_1^{\alpha 1})(\xi_2^{\alpha_2})\cdots(\xi_n^{\alpha_n})\hat{f}(\xi_1,...,\xi_n).$$

Consideriamo ora la trasformata di Fourier di $D_{x_1}f$, per esempio. Si ha:

$$F(D_{x_1}f)(\xi) = i\int_{\mathbb{R}^n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)(x)\, e^{-i\xi_1 x_1 - ... - i\xi_n x_n}dx_1\cdots dx_n$$

Si integra per parti rispetto a x_1 e si trova:

$$\Big[f(x_1,...,x_n)\, e^{-i<\xi,x>}\Big]_{x_1=-\infty}^{x_1=+\infty} + \xi_1\int_{\mathbb{R}^n} f(x_1,...,x_n)\, e^{-i<\xi,x>}dx_1\cdots dx_n$$

Ora il fattor finito si annulla perchè $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, e quindi:

$$F(D_{x_1}f)(\xi) = \xi_1\xi_1\int_{\mathbb{R}^n} f(x_1,...,x_n)\, e^{-i<\xi,x>}dx_1\cdots dx_n = \hat{f}(\xi)$$

Poichè $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, possiamo iterare il procedimento integrando per parti quante volte vogliamo in qualsiasi variabile. Si ottiene cosí la formula del punto 3.

7.2 Equazione di Poisson ed equazione di Laplace in $\mathbb{R}^3$

Sappiamo dall'elettrostatica che il campo elettrico **E** generato da una distribuzione di carica ρ soddisfa l'equazione

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \rho$$

Se il campo deriva da un potenziale, cioè $\vec{E} = \vec{\nabla}\Phi,\, : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, l'equazione precedente diventa

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\Phi = \rho \quad \text{cioe}' \quad \Delta\Phi = \rho \tag{35}$$

Allo stesso modo, supponiamo di cercare un campo vettoriale $\vec{u}$ di velocità di un fluido, campo irrotazionale e di assegnata divergenza uguale a ρ; per l'irrotazionalità esisterà il potenziale Φ e quindi si otterrà ancora l'equazione (35). Definiamo quindi ingenerale

Definizione 11 *L'equazione differenziale alle derivate parziali nell'incognita* $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{C}$*:*

$$\Delta\Phi = \rho \tag{36}$$

dove ρ *è un'assegnata funzione da* $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$*, si dice* equazione di Poisson *su* $\mathbb{R}^3$*. Nel caso particolare in cui* $\rho = 0$ *si ottiene l'equazione*

$$\Delta\Phi = 0 \tag{37}$$

che si dice equazione di Laplace*.*

La trasformata di Fourier permette di ottenere immediatamente la soluzione dell'equazione di Poisson in $\mathbb{R}^3$. Infatti:

Teorema 7 *Siano* $\rho(x)$ *e la sua trasformata di Fourier* $\hat{\rho}(\xi)$ *integrabili su* $\mathbb{R}^3$*. Allora la soluzione dell'equazione di Poisson si scrive:*

$$\Phi(x) = \pi \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(y)}{|x-y|}\, dy, \quad |x-y| = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 + (x_3-y_3)^2}$$

Osservazione

Per le ipotesi su $\rho(x)$ la funzione $\Phi(x)$ è definita $\forall\, x \in \mathbb{R}^3$ perchè l'integrale esiste $\forall\, x \in \mathbb{R}^3$. Infatti esso è convergente all'infinito perchè ρ è assolutamente integrabile e $|x-y|^{-1} \to 0, |y| \to \infty$, per ogni fissato $x \in \mathbb{R}^3$. D'altra parte, scrivendo l'integrale di convoluzione nella forma equivalente

$$\Phi(x) = \pi \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(y-x)}{|y|}\, dy$$

si vede che anche la funzione è integrabile anche a $y = 0$. Basta infatti passare a coordinate polari; se poniamo $r = |y|$ il fattore r^2 dello Jacobiano cancella il fattore $1/r$.

Dimostrazione

Data l'equazione di Poisson, facciamone la trasformata di Fourier. Otteniamo:

$$(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2)\widehat{\Phi}(\xi) = \widehat{\rho}(\xi)$$

da cui

$$\widehat{\Phi}(\xi) = \widehat{g}(\xi)\widehat{\rho}(\xi), \quad \widehat{g}(\xi) := \frac{1}{(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2)}$$

Osserviamo che, per il medesimo ragionamento dell'osservazione precedente, $\widehat{\Phi}(\xi)$ è assolutamente integrabile su $\mathbb{R}^3$ perchè lo è $\widehat{\rho}(\xi)$. Calcoliamo ora la trasformata di Fourier inversa di $\widehat{g}(\xi)$. Eseguendo il cambiamento di variabile nelle coordinate polari

$$y_1 = p\sin\theta\cos\phi,\ y_2 = p\sin\theta\sin\phi,\ y_3 = p\cos\phi, \quad p \in]0,+\infty[, \theta \in [0,\pi], \phi \in [0,2\pi]$$

si trova

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} \widehat{g}(\xi) e^{i\langle x,\xi\rangle}\, d\xi = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{i\langle x,\xi\rangle}}{(\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2)}\, d\xi \\ = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} &\int_0^{+\infty} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{p^2 e^{|p|\,|x|\cos\theta}}{p^2}\, d\phi\, d\theta\, dp = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} \int_0^{\pi} e^{|p|\,|x|\cos\theta}\, d\theta\, dp \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}|x|} \int_0^{+\infty} \frac{\sin p|x|}{|x|}\, dp = \frac{2}{\sqrt{2\pi}|x|} \int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\, du = \frac{\pi}{|x|} \end{aligned}$$

Pertanto, applicando il teorema di convoluzione:

$$\Phi(x) = g(x) * \rho(x) = \pi \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(y)}{|x-y|}\, dy$$

e il teorema è dimostrato.

Corollario 4 *Sia $\Phi(x)$ una soluzione dell'equazione di Laplace tale che la sua trasformata di Fourier $\widehat{\Phi}$ esiste ed è1 continua a 0. Allora $\Phi \equiv 0$.*

Dimostrazione

Eseguendo, come sopra, la trasformata di Fourier dell'equazione troviamo:

$$(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2)\hat{\Phi}(\xi) = 0$$

Dato che $(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2)$ si annulla se e solo se $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 0$, allora l'ipotei di continuità implica che $\hat{\Phi}(\xi) = 0 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^3$. Quindi $\Phi(x) \equiv 0$ e il Corollario è dimostrato.

Possiamo ora concludere il ragionamento lasciato in sospeso alla fine del Cap. 6. Si trattava di dimostrare che un campo vettoriale $\vec{u}$ su $\mathbb{R}^3$ tale che $na\vec{b}la \cdot u = 0$ e $na\vec{b}la \wedge u = 0$ è identicamente nullo. Avevamo fatto vedere che l'ipotesi equivale a $\Delta\Phi = 0$. Possiamo dunque concludere che, sotto l'ipotesi precedent edi continuità e integrabilità, l'affermazione è provata.

8 Equazione del calore

8.1 Derivazione dell'equazione

La temperatura (assoluta) T misurata in un punto $P = (x, y, z)$ di un corpo continuo è una funzione della posizione e del tempo: $T = T(x, y, z; t)$. L'equazione del calore esprime la variazione della temperatura nello spazio e nel tempo in conseguenza del processo di raffreddamento o di riscaldamento dovuto all'eventuale presenza di sorgenti di calore.
Consideriamo il caso di assenza di sorgenti. Viene assegnata la temperatura iniziale:

$$T(x, y, z; t)_{t=0} = T_0(x, y, z).$$

L'**equazione del calore** afferma che in assenza di sorgenti la temperatura soddisfa l'equazione differenziale:

$$\Delta T(x, y, z; t) = \frac{1}{D}\frac{\partial T(x, y, z; t)}{\partial t}$$

ovvero:

$$\left(\Delta - \frac{1}{D}\frac{\partial}{\partial t}\right) T = 0$$

Se il corpo continuo è limitato da una frontiera $\delta\Omega$, occorrerà fissare anche la temperatura sulla frontiera, cioè richiedere:

$$T(x, y, z; t)|_{\partial\Omega} = f(x, y, z)|_{(x,y,z)\in\delta\Omega}$$

dove f è un'assegnata funzione regolare. Se il corpo occupa tutto lo spazio, si assume senz'altro temperatura nulla all'infinito.

Ricaviamo l'equazione del calore, ammettendo la legge di Fourier, che ora ricorderemo, che lega la variazione della temperatura al flusso di calore.

È un dato di esperienza comune la constatazione che in un corpo qualsiasi il calore fluisce dalle parti più calde a quelle più fredde, mentre non succede mai il viceversa. Per rendere quantitativa questa constatazione empirica, cominciamo col considerare una parete piana indefinita le cui estremità (verticali) 1 e 2 sono mantenute a temperature costanti $T_2 < T_1$. Definiamo la *densità di corrente termica* Q come la quantità di calore che attraversa l'unità di superficie nell'unità di tempo. Allora ammetteremo (legge di Fourier) che *la densità di corrente termica è direttamente proporzionale alla differenza di temperatura e inversamente proporzionale allo spessore della parete.* In formule

$$Q = \kappa \frac{T_1 - T_2}{s} \tag{38}$$

Qui s è lo spessore della parte e κ il *coefficiente di conducibilità termica*, che varia da materiale a materiale.

Il caso generale si riduce facilmente a questo. Siano ora Σ_1 e Σ_2 due *superficie isoterme* del corpo Ω arbitrariamente vicine. Su Σ_1 avremo $T(x, y, z) = T_1$, e su Σ_2 $T(x, y, z) = T_2 = T_1 + dT$. Sia $\vec{n}$ la normale, che localmente possiamo considerare comune alle due superfici, inoltre, sempre localmente, possiamo assimilare il tratto di materia compreso fra le due superfici al tratto di materia compreso fra i corrispondenti piani tangenti, che sono paralleli. Localmente significa che queste affermazioni sono vere a meno di infinitesimi di ordine superiore. Ci siamo cosí ricondotti al caso precedente: la densità di corrente termica che attraversa la superficie isoterma di equazione $T = cost.$ e di normale $\vec{n}$ è data dalla (38) mettendo T al posto di T_1, $T + dT$ al posto di T_2, e ds, distanza infinitesima fra le due superfici, al posto di s. Si ottiene:

$$Q_s = -\kappa \frac{dT}{ds} \tag{39}$$

Il segno meno corrisponde al fatto che se la temperatura cresce per s crescente la corrente termica deve decrescere.

Quindi la formula generale per la densità di corrente termica sarà

$$\vec{Q} = -\kappa \vec{\nabla} T \tag{40}$$

che è la forma consueta in cui viene scritta la legge di Fourier. Poichè la derivata nella direzione $\vec{n}$ vale

$$\frac{dT}{dn} = \vec{\nabla} T \cdot \vec{n}$$

la (39) può essere riscritta cosí

$$Q_n = -\kappa \frac{dT}{dn}$$

dove $Q_n = \vec{Q} \cdot \vec{n}$.

Consideriamo un corpo solido Ω il cui bordo sia la superficie $S = \partial\Omega$, di elemento $d\sigma$; la temperatura nel tempo dt aumenta (o diminuisce, a seconda del segno della derivata) di $\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right) dt$. Come sono legati il calore e l'aumento di temperatura?

Il **Calore Specifico (c)** è la quantità di calore da fornire a un grammo di sostanza per alzare la sua temperatura di un grado centigrado.

Se considero l'elemento di massa $dm = \rho dV$, l'aumento di della quantità di calore ivi contenuta nel tempo dt è:

$$c\,\rho\,dV\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right) dt$$

Quindi il l'aumento totale di calore nel tempo dt è:

$$Qdt = \int_\Omega c\,\rho\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right) dt\,dV$$

e la quantità di calore necessaria per alzare la temperatura di un grado centigrado nell'unità di tempo l'intero corpo, cioè il calore totale, è:

$$Q = \int_\Omega c\,\rho\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right) dV$$

Poichè si esclude che vi siano sorgenti o perdite di calore, questo incremento dovrà essere uguale al flusso di corrente termica che entra attraverso la superficie $\delta\Omega$. Denotando ancora $\vec{n}$ la normale (esterna) alla superficie, abbiamo visto che $Q_n = -\kappa\frac{dT}{dn}$. Dunque il flusso di calore entrante per l'elemento di superficie sarà $Q_n d\sigma = -\kappa\frac{dT}{dn}d\sigma$, e quindi il flusso totale ha l'espressione

$$Q = \kappa\int_{\partial\Omega}\frac{dT}{dn}\,d\sigma$$

Abbiamo due espressioni per il calore Q. Uguagliandole si ottiene:

$$\kappa\int_{\partial\Omega}\frac{dT}{dn}\,d\sigma = \int_\Omega c\,\rho\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right) dV$$

Ora applichiamo il teorema di Gauss all'integrale di superficie. Si trova:

$$\kappa\int_\omega \Delta T\,dV = \int_\Omega c\,\rho\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right) dV$$

da cui, per l'arbitrarietà di V:

$$\Delta T = \frac{1}{D}\frac{\partial T}{\partial t}$$

dove si è posto:

$$D := \frac{\kappa}{c\rho}$$

Abbiamo cosí ricavato l'equazione del calore.

8.2 Soluzione dell'equazione del calore su tutto lo spazio

Dati $T(x,t)$ e $T(x)|_{t=0} = T_0(x)$ con $x \in \mathbb{R}$, abbiamo ricavato l'equazione:

$$\Delta T = \frac{1}{D}\frac{\partial T}{\partial t}.$$

Per risolvere l'equazione, e studiare cosí la propagazione del calore, facciamo la trasformata di Fourier di ambo i membri dell'equazione. Poniamo:

$$\widehat{T}(\xi,t) := \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} T(x,t) e^{-i\langle x,\xi\rangle} dx$$

Sostituendo nell'equazione, e ammettendo di potere derivare rispetto al tempo sotto il segno di integrazione, arriviamo all'equazione

$$-|\xi|^2 \,\hat{T}(\xi,t) = \frac{1}{D}\frac{\partial \hat{T}}{\partial t}(\xi,t). \quad |\xi|^2 := \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2$$

a cui assegnamo naturalmente come condizione iniziale la trasformata di Fourier della condizione iniziale $T_0(x)$:

$$\widehat{T_0}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} T_0(x) e^{-i\langle x,\xi\rangle} dx.$$

Quindi il problema si riformula cosí:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{D}\dfrac{\partial \hat{T}(\xi,t)}{\partial t} = -|\xi|^2 \hat{T}(\xi,t) \\ \\ \hat{T}(\xi,t)|_{t=0} = \hat{T}_0(\xi) \end{cases}$$

Con la trasformazione di Fourier abbiamo in pratica eliminato le derivate del secondo ordine rispetto alle coordinate spaziali.

Si noti infatti che abbiamo a che fare con un'equazione differenziale del primo ordine rispetto al tempo a coefficienti costanti:

$$\frac{1}{D}\frac{d\widehat{T}}{dt}u = A\,T \Rightarrow \frac{d\widehat{T}}{dt}u = DA\,u$$

dove D e A A sono costanti rispetto a t. La soluzione di questa equazione differenziale è

$$T(t) = \widehat{T}_0 e^{-ADt} = \widehat{T}_0(\xi) e^{-D\xi^2 t}$$

Allora la trasformata di Fourier della soluzione varia nel tempo in questo modo:

$$\widehat{T}(\xi,t) = \widehat{T}_0(\xi).e^{-D|\xi|^2 t}$$

Per trovare la soluzione $T(x,t)$ dobbiamo invertire la trasformazione di Fourier:

$$T(x,t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} e^{-D|\xi|^2 t}\, \hat{T}_0(\xi)\, e^{i\langle x,\xi\rangle} d\xi$$

Per il teorema di convoluzione si avrà

$$T(x,t) = \int_{\mathbb{R}^3} K(x-y,t) T_0(y)\, dy$$

dove:

$$K(x,t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} e^{-D|\xi|^2 t}\, e^{i\langle x,\xi\rangle} d\xi$$

Ora abbiamo già eseguito il calcolo dell'integrale seguente:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-D\xi^2 t}\, e^{ix\xi}\, d\xi = \frac{1}{\sqrt{Dt}}\, e^{-\frac{x^2}{2Dt}}$$

e quindi:

$$K(x,t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} e^{-D|\xi|^2 t}\, e^{i\langle x,\xi\rangle} d\xi =$$

$$\frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\xi_1^2}{2t}} e^{ix_1\xi_1}\, d\xi_1 \cdot \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\xi_1^2}{2t}} e^{ix_1\xi_1}\, d\xi_1 \cdot \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\xi_1^2}{2t}} e^{ix_1\xi_1}\, d\xi_1$$

$$= \frac{1}{(2\pi Dt)^{3/2}} e^{-\frac{x_1^2+x_2^2+x_3^2}{2Dt}} = \frac{1}{(2\pi Dt)^{3/2}} e^{-\frac{|x|^2}{2Dt}}$$

Concludendo:

Proposizione 9 *La soluzione del calore in $\mathbb{R}^3$ con dato iniziale $T_0(x)$ a $t = 0$ è data dalla formula*

$$T(x,t) = \int_{\mathbb{R}^3} K(x-y) T_0(y)\, dy$$

dove $K(x-y)$ è il nucleo del calore*:*

$$K(x-y) = \frac{1}{(2\pi Dt)^{3/2}}\, e^{-\frac{|x-y|^2}{2Dt}}$$

in:

$$T(x,t) = \frac{1}{\sqrt{Dt}} \int_{-\infty}^{+\infty} K(x-y)\, T_0(y)\, dy$$

Osservazione

La soluzione dell'equazione del calore è un esempio di evoluzione temporale *irreversibile*: se si inverte il senso del tempo, cioè si considera l'evoluzione all'indietro, l'andamento della soluzione è del tutto differente.

8.3 Paradosso della propagazione istantanea

Facciamo ora vedere come la soluzione dell'equazione del calore porti ad un apparente paradosso, cioè la propagazione del calore medesimo a velocità infinita. Indicheremo anche una possibile via d'uscita dal paradosso.

Consideriamo per semplicità il caso unidimensionale; ad esempio, una sbarra a temperatura diversa da zero solo in un tratto:

$$T_0(y) = \begin{cases} 1 & \text{se } -1 \le y \le 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

La soluzione dell'equazione del calore determina la temperatura ad ogni istante successivo t, anche arbitrariamente piccolo, $t = \epsilon$:

$$T(x,\epsilon) = \int_{-1}^{1} K(x-y;\epsilon) T_0(y)\, dy = \frac{1}{\sqrt{D\epsilon}} \int_{-1}^{1} e^{-\frac{(x-y)^2}{2D\epsilon}} dy$$

Questa formula mostra che la temperatura è positiva in *ogni* punto della sbarra, anche arbitrariamente lontano dall'origine, pur se è trascorso solo un tempo arbitrariamente piccolo. Questo contraddice ogni dato di esperienza comune. Dunque si dovrebbe concludere che il calore si propaga istantaneamente, cioè con velocità infinita. Poichè l'unica ipotesi di natura fisica che sta alla base della deduzione dell'equazione è la legge di Fourier, si dovrebbe concludere che essa conduce al paradosso della propagazione istantantanea.

Analizziamo più da vicino questo punto delicato. Si ha:

$$K(x-y;\epsilon) = \frac{1}{\sqrt{D\epsilon}} e^{-\frac{(x-y)^2}{2D\epsilon}} = \frac{1}{\sqrt{D\epsilon} e^{\frac{(x-y)^2}{2D\epsilon}}}$$

Mostriamo ora che se $(x-y)^2$ è dell'ordine di ϵ o più grande il nucleo $K(x-y;\epsilon)$ è trascurabile, nel senso che il suo sviluppo in serie di Taylor attorno a $\epsilon \downarrow 0$ è identicamente nullo. Infatti, sia

$$(x-y)^2 \sim \epsilon^\alpha, \qquad \alpha < 1.$$

Allora si trova:

$$e^{\frac{-(x-y)^2}{2D\epsilon}} \sim e^{-1/\epsilon^{(1-\alpha)}}.$$

D'altra parte:

$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{e^{-1/\epsilon^(1-\alpha)}}{\epsilon^n} = 0 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Quindi $K(x-y:\epsilon)$ ha sviluppo in serie di Taylor in ϵ identicamente nullo se $|x-y| < \epsilon^\alpha \; \forall\, \alpha < 1/2$. Quindi affinchè la propagazione del calore sia visibile, nel senso che K cominci ad essere significativamente diverso da zero quando ϵ è piccolo, dovrà risultare:

$$(x-y) \sim \sqrt{\epsilon} \Longrightarrow x = y + \sqrt{\epsilon}$$

Ora se ϵ è piccolo $\sqrt{\epsilon} >> \epsilon$. Questo significa che se al termine di un intervallo di tempo di ordine ϵ andiamo a guardare la soluzione a distanza $\sqrt{\epsilon}$ dal supporto della temperatura troveremo una quantità trascurabile. Poichè $\sqrt{\epsilon} >> \epsilon$, e $|y| < 1$, la regione

$$\{x \in \mathbb{R} \,|\, x \sim y + \sqrt{\epsilon} \,|\, y \in [-1,1]\}$$

si trova a distanza molto maggiore dal supporto della condizione iniziale della regione

$$\{x \in \mathbb{R} \,|\, x \sim y + \epsilon \,|\, y \in [-1,1]\}$$

nella quale viene trasformato il supporto al termine di un tempo ϵ tramite il moto uniforme.

Concludendo: al termine di un intervallo di tempo di ordine ϵ la temperatura, inizialmente nulla fuori dall'intervallo $[-1,1]$, sarà ancora praticamente trascurabile furoi dall'intervallo $[-1-\sqrt{\epsilon}, 1+\sqrt{\epsilon}]$.