

Cinematica

Liberamente ispirata alla Parte I degli Elementi di Meccanica razionale

di Dario Graffi

e al Cap. I della Teoria classica dei campi

di L.D.Landau e E.M.Lifshitz

a cura di Sandro Graffi

(ad uso degli studenti del corso di Fisica matematica II)

Chapter 1

Cinematica

1.1 Cinematica del punto

1.1.1 Descrizione cartesiana. Equazioni parametriche, traiettoria, velocità, accelerazione

Sia S uno spazio affine modellato su $\mathbb{R}^3$, e t una variabile reale. Salvo avvertenza contraria, ogni funzione della variabile reale $\mathbb{R}$ a valori in S o in $\mathbb{R}^3$ sarà sempre derivabile almeno due volte con derivate continue. Si definisce:

Definizione 1.1

1. Moto di un punto una qualsiasi funzione $t \mapsto P(t)$ da $I \subset \mathbb{R}$ a valori in S . t è il tempo.
2. Sia $O \in S$. Allora $P(t) - O \in \mathbb{R}^3$. Si fissi un sistema cartesiano ortogonale orientato con origine in O . Si denotino (x, y, z) le coordinate, e $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ i vettori della base canonica. Si ha allora:

$$P(t) - O = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k} \quad (1.1.1)$$

Le funzioni $(x(t), y(t), z(t))$ si dicono componenti cartesiane del moto.

3. Il grafico $\bigcup_{t \in I} [P(t) - O] \subset \mathbb{R}^3$ della funzione $t \mapsto P(t) - O : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ si dice traiettoria del moto.

4. Il vettore

$$\mathbf{v} := \frac{d(P(t) - O)}{dt} = \frac{dP(t)}{dt} = \dot{x}(t)\mathbf{i} + \dot{y}(t)\mathbf{j} + \dot{z}(t)\mathbf{k} \quad (1.1.2)$$

si dice velocità del moto. Le funzioni $(\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t))$ si dicono componenti cartesiane della velocità. Spesso si usa l'abbreviazione $\dot{P} = \frac{dP(t)}{dt}$.

5. La norma del vettore velocità:

$$v := \|\mathbf{v}\| = \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2} \quad (1.1.3)$$

si dice velocità scalare.

6. Il vettore

$$\mathbf{a} := \frac{d^2(P(t) - O)}{dt^2} = \frac{dP^2(t)}{dt^2} = \ddot{x}(t)\mathbf{i} + \ddot{y}(t)\mathbf{j} + \ddot{z}(t)\mathbf{k} \quad (1.1.4)$$

si dice accelerazione del moto. Le funzioni $(\ddot{x}(t), \ddot{y}(t), \ddot{z}(t))$ si dicono componenti cartesiane dell'accelerazione.

7. La norma del vettore accelerazione:

$$a := \|\mathbf{a}\| = \sqrt{\ddot{x}(t)^2 + \ddot{y}(t)^2 + \ddot{z}(t)^2} \quad (1.1.5)$$

si dice accelerazione scalare.

8. Se la traiettoria è una retta, il moto si dice rettilineo. Se è una circonferenza, il moto si dice circolare.

9. Se v è costante il moto si dice uniforme.

10. Un moto per cui risulti $v = 0 \forall t$ si dice quiete.

Esempio 1 (Moto rettilineo)

Se $y(t) = y_0$, $z(t) = z_0$, si ha:

$$P(t) - O = x(t)\mathbf{i} + y_0\mathbf{j} + z_0\mathbf{k}$$

Quindi il moto ha luogo sulla retta di equazioni $y = y_0, z = z_0$ parallela all'asse delle x in $\mathbb{R}^3$. La traiettoria è dunque il codominio della funzione $t \mapsto x(t) : I \rightarrow \mathbb{R}$. Ad esempio se $x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$ (moto armonico di ampiezza A , pulsazione ω e fase ϕ) la traiettoria è il segmento chiuso $[-A, A]$; se $x(t) = \frac{1}{2}at^2$ (moto uniformemente accelerato) la traiettoria è il semiasse reale non negativo se $a > 0$ e il semiasse non positivo se $a < 0$.

Esempio 2 (Moto circolare)

Se $x(t) = R\cos u(t)$, $y(t) = R\sin u(t)$, $z = z_0$, $R > 0$, si ha:

$$P(t) - O = R\cos u(t)\mathbf{i} + R\sin u(t)\mathbf{j} + z_0\mathbf{k}$$

Qui $t \mapsto u(t) : I \rightarrow \mathbb{R}$ è un'arbitraria funzione regolare. Se $u(t) = \omega t$ dove ω è una costante (che possiamo sempre scegliere positiva) il moto circolare si dice *uniforme*.

Esempio 3 (Moto elicoidale cilindrico a passo costante)

Se $x(t) = R \cos t, y(t) = R \sin t, z(t) = Kt$, $R > 0, K > 0$, si ha:

$$P(t) - O = R \cos t \mathbf{i} + R \sin t \mathbf{j} + Kt \mathbf{k}$$

Osservazioni

1. In quanto precede abbiamo implicitamente definito la derivata di una funzione $t \mapsto P(t) - O : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ come il vettore costituito dalle derivate delle componenti.
2. La traiettoria del moto è una curva nello spazio. Le funzioni $(x(t), y(t), z(t))$, cioè le componenti cartesiane del moto, ne costituiscono delle *equazioni parametriche*. Per ottenere la curva, cioè la traiettoria, dalle equazioni parametriche si deve eliminare il parametro.

Esempio 2 (Continuazione)

Eliminiamo t quadrando e sommando:

$$x^2 + y^2 = R^2(\cos^2 t + \sin^2 t) = R^2$$

Quindi la traiettoria è la circonferenza di raggio R che giace nel piano a distanza z_0 dal piano orizzontale (x, y) .

Esempio 3 Eliminiamo t dalle prime due equazioni quadrando e sommando. Come sopra, otteniamo

$$x^2 + y^2 = R^2$$

che è l'equazione di un cilindro; d'altra parte, da $x(t) = R \cos t, y(t) = R \sin t$ otteniamo anche

$$t = \arctg \frac{y}{x}$$

Quindi la traiettoria è l'elica cilindrica definita dalle equazioni

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = R^2 \\ z = \arctg \frac{y}{x} \end{cases}$$

1.1.2 Descrizione intrinseca. Equazione oraria, ascissa curvilinea. Versori tangente e normale

Definizione 1.2

1. Sia $v(t) \neq 0 \forall t \in I$. La quantità:

$$s(t) := \int_{t_0}^t v(\tau) d\tau = \int_{t_0}^t \sqrt{\dot{x}(\tau)^2 + \dot{y}(\tau)^2 + \dot{z}(\tau)^2} d\tau, \quad t \in I \quad (1.1.6)$$

si dice spazio percorso dal moto nell'intervallo $[t_0, t]$, o ascissa curvilinea, percorsa nel verso degli archi crescenti. La funzione $t \mapsto s(t) : I \rightarrow \mathbb{R}_+$ è invertibile perchè strettamente crescente.

2. Analogamente

$$s(t) := - \int_{t_0}^t v(\tau) d\tau = - \int_{t_0}^t \sqrt{\dot{x}(\tau)^2 + \dot{y}(\tau)^2 + \dot{z}(\tau)^2} d\tau, \quad t \in I$$

è l'ascissa curvilinea, percorsa nel verso degli archi decrescenti. Per convenzione, sceglieremo sempre il verso degli archi crescenti.

3. Sia $s \mapsto t(s) : \mathbb{R}_+ \rightarrow I$ la funzione inversa di $t \mapsto s(t)$. $s(t)$ si dice ascissa curvilinea del punto mobile o lunghezza d'arco sulla traiettoria.

4. Poniamo:

$$P(s) := P \circ t(s) \iff x(s) := x \circ t(s), \quad y(s) := y \circ t(s), \quad z(s) := z \circ t(s) \quad (1.1.7)$$

$P(s)$ si dice moto parametrizzato dall'ascissa curvilinea, o, equivalentemente curva parametrizzata dall'ascissa curvilinea.

Esempio 2

Si ha, ponendo per semplicità $t_0 = 0$:

$$v(t) = \sqrt{R^2(\cos^2 t + \sin^2 t)} = R, \quad s(t) = Rt, \quad t(s) = \frac{s}{R}.$$

Quindi $\dot{s} = 0$ e il moto è uniforme. Inoltre:

$$x(s) = R \cos \frac{s}{R}, \quad y(s) = R \sin \frac{s}{R}, \quad P(s) = R \cos \frac{s}{R} \mathbf{i} + R \sin \frac{s}{R} \mathbf{j}$$

Notare che quando t varia da 0 a 2π s varia da 0 a $2\pi R$, lunghezza d'arco dell'intera circonferenza.

1.1.3 Descrizione intrinseca. Velocità. Accelerazione tangenziale e normale

Lemma 1.1 Sia $P(s)$ un moto riferito all'ascissa curvilinea s , $s_1 \leq s \leq s_2$. Sia:

$$\mathbf{t}(s) := \frac{dP(s)}{ds} = \frac{dx(s)}{ds} \mathbf{i} + \frac{dy(s)}{ds} \mathbf{j} + \frac{dz(s)}{ds} \mathbf{k} \quad (1.1.8)$$

Allora $\|\mathbf{t}(s)\|$ è un vettore unitario ($\|\mathbf{t}(s)\| = 1$) tangente alla traiettoria, nel punto $P(s)$, secondo il verso degli archi crescenti.

Osservazione Un vettore di lunghezza uno si dice *versore*. $\mathbf{t}(s)$ è dunque il *versore tangente* alla traiettoria nel punto $P(s)$.

Dimostrazione

Consideriamo il vettore:

$$\Delta P(s) := P(s + ds) - P(s)$$

Si tratta chiaramente della corda tesa fra i due punti $P(s + ds)$ e $P(s)$ della traiettoria separati da un arco di lunghezza ds . Pertanto le affermazioni del Lemma sono conseguenze immediate del fatto noto che l'arco tende alla corda all'annullarsi della lunghezza dell'arco medesimo. Il Lemma è dimostrato.

Esempio 2 Si ha:

$$\frac{dx(s)}{ds} = -\sin \frac{s}{R}, \quad \frac{dy(s)}{ds} = \cos \frac{s}{R}$$

e quindi:

$$\mathbf{t}(s) := \frac{dP(s)}{ds} = -\sin \frac{s}{R} \mathbf{i} + \cos \frac{s}{R} \mathbf{j}$$

da cui $\|\mathbf{t}(s)\| = 1$. Come deve, $\mathbf{t}(s)$ è diretto nel verso degli archi crescenti, e quindi antiorario.

Proposizione 1.1 (*Espressione intrinseca della velocità*)

Vale la formula:

$$\mathbf{v}(t) = \dot{s}(t) \mathbf{t}(s(t)) \quad (1.1.9)$$

Osservazione Il vettore velocità è dunque sempre tangente alla traiettoria.

Dimostrazione Si ha, applicando il Lemma precedente:

$$\mathbf{v}(t) = \frac{dP}{dt} = \frac{dP}{ds} \frac{ds}{dt} = \dot{s}(t) \mathbf{t}(s(t))$$

e ciò prova l'asserto.

Esercizio 1 Esprimere il vettore velocità intrinseco $\mathbf{v} = \dot{s} \mathbf{t}$ in funzione delle componenti cartesiane di $\mathbf{v}$.

Soluzione

Si ha:

$$\mathbf{v} = \dot{s}(t) \mathbf{t}(s(t)) = \dot{x}(t) \mathbf{i} + \dot{y}(t) \mathbf{j} + \dot{z}(t) \mathbf{k}$$

da cui $\dot{s}(t) = \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2}$. Moltiplicando scalarmente per $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ rispettivamente si trova:

$$\begin{aligned} t_x(t) &:= \mathbf{t}(s(t)) \cdot \mathbf{i} = \frac{\dot{x}(t)}{\sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2}}, \\ t_y(t) &:= \mathbf{t}(s(t)) \cdot \mathbf{j} = \frac{\dot{y}(t)}{\sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2}}, \\ t_z(t) &:= \mathbf{t}(s(t)) \cdot \mathbf{k} = \frac{\dot{z}(t)}{\sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2}}. \end{aligned}$$

Passiamo ora all'espressione dell'accelerazione. Premettiamo il seguente:

Lemma 1.2 *Sia $t \mapsto \mathbf{u}(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\|\mathbf{u}(t)\| = 1$ una funzione derivabile a valori nei vettori unitari. Allora $\frac{d\mathbf{u}(t)}{dt} \perp \mathbf{u}(t)$, ovvero $\mathbf{u}(t) \cdot \dot{\mathbf{u}}(t) = 0$.*

Dimostrazione

Poichè $\|\mathbf{u}(t)\| = 1$ si ha:

$$0 = \frac{d}{dt}\|\mathbf{u}(t)\|^2 = \frac{d}{dt}\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{u}(t) = 2\mathbf{u}(t) \cdot \dot{\mathbf{u}}(t)$$

Dunque $\frac{d\mathbf{u}(t)}{dt} \perp \mathbf{u}(t)$ e il lemma è dimostrato.

Proposizione 1.2 (*Espressione intrinseca dell'accelerazione*)

Vale la formula:

$$\mathbf{a}(t) = \ddot{s}(t)\mathbf{t}(s(t)) + \frac{\dot{s}(t)^2}{\rho(s(t))}\mathbf{n}(s(t)) \quad (1.1.10)$$

Qui $\mathbf{n}(s(t))$ è il versore normale interno alla traiettoria, o normale principale alla traiettoria nel punto di ascissa curvilinea $s(t)$ e ρ è il raggio di prima curvatura, o raggio di flessione nel medesimo punto.

Osservazione

La componente $a_t := \ddot{s}(t)\mathbf{t}(s(t))$ di $\mathbf{a}$ è diretta lungo la tangente e si dice pertanto *accelerazione tangenziale*; la componente $a_n := \frac{\dot{s}(t)^2}{\rho(s(t))}\mathbf{n}(s(t))$ è diretta lungo la normale interna alla traiettoria e si dice pertanto *accelerazione normale*, o *centripeta*.

Dimostrazione

Si ha, derivando la (1.1.9):

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} = \ddot{s}(t)\mathbf{t}(s(t)) + \dot{s}(t)\frac{d\mathbf{t}(s(t))}{dt} = \ddot{s}(t)\mathbf{t}(s(t)) + \dot{s}(t)^2\frac{d\mathbf{t}(s)}{ds}\bigg|_{s=s(t)}$$

Per il Lemma precedente possiamo scrivere:

$$\frac{d\mathbf{t}(s)}{ds} = \mathbf{N}(s), \quad \mathbf{N}(s) \perp \mathbf{t}(s)$$

$\mathbf{N}(s)$ è normale a $\mathbf{t}(s)$ e quindi anche alla traiettoria nel punto $s = s(t)$. Se ora poniamo:

$$\|\mathbf{N}(s)\| = \rho, \quad \mathbf{n}(s) = \frac{\mathbf{N}(s)}{\rho}$$

la (1.1.10) è dimostrata.

Esempio 2 (Continuazione)

Si ha:

$$\mathbf{N}(s) = \frac{d\mathbf{t}(s)}{ds} = \frac{d}{ds}\left[-\sin\frac{s}{R}\mathbf{i} + \cos\frac{s}{R}\mathbf{j}\right] = -\frac{1}{R}\left[\cos\frac{s}{R}\mathbf{i} + \sin\frac{s}{R}\mathbf{j}\right]$$

Dunque $\frac{1}{\rho} = \frac{1}{R}$, cioè la curvatura è il raggio della circonferenza; inoltre $\mathbf{n}(s) = -\left[\cos\frac{s}{R}\mathbf{i} + \sin\frac{s}{R}\mathbf{j}\right]$ è un vettore diretto lungo il raggio con verso verso il centro; questo spiega perchè l'accelerazione normale si dice anche centripeta.

Osservazioni

1. $\frac{1}{\rho(s)}$ è la *prima curvatura*, o *flessione* della traiettoria nel punto di ascissa curvilinea s . Essa misura di quanto la traiettoria si discosta dalla retta, che si riottiene per $\rho(s) \rightarrow \infty$.
2. Se $\frac{d\mathbf{t}(s)}{ds} = 0$ il moto è rettilineo e l'accelerazione centripeta è nulla.
3. Se $\ddot{s}(t) = \text{cost.}$, cioè se il moto è uniforme, $\frac{d\mathbf{t}(s)}{ds} \neq 0$ l'accelerazione è tutta centripeta.
4. Nel caso del moto circolare uniforme dell'Esercizio 2 si ha $\dot{s} = R$ e quindi si ottiene la formula:

$$\mathbf{a} = -\frac{1}{R}R^2\left[\cos\frac{s}{R}\mathbf{i} + \sin\frac{s}{R}\mathbf{j}\right]$$

che possiamo chiaramente riscrivere nel modo seguente:

$$\frac{d^2(P - O)}{dt^2} = -(P - O).$$

Ritroviamo così la nota legge del moto circolare uniforme: l'accelerazione è tutta centripeta e vale l'opposto della distanza del punto mobile dall'origine.

Esercizio 2 (Continuazione) Esprimere il vettore accelerazione intrinseco $\mathbf{a}(t) = \ddot{s}(t)\mathbf{t}(s(t)) + \frac{\dot{s}(t)^2}{\rho(s(t))}\mathbf{n}(s(t))$ in funzione delle componenti cartesiane di $\mathbf{a}$.

Soluzione

Si ha:

$$\mathbf{a}(t) = \ddot{s}(t)\mathbf{t}(s(t)) + \frac{\dot{s}(t)^2}{\rho(s(t))}\mathbf{n}(s(t)) = \ddot{x}(t)\mathbf{i} + \ddot{y}(t)\mathbf{j} + \ddot{z}(t)\mathbf{k} \quad (1.1.11)$$

Dalla parte precedente dell'esercizio sappiamo:

$$\begin{aligned} t_x(t) &= \frac{\dot{x}(t)}{\sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2}} = \frac{\dot{x}(t)}{\dot{s}(t)} \\ t_y(t) &= \frac{\dot{y}(t)}{\sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2}} = \frac{\dot{y}(t)}{\dot{s}(t)} \\ t_z(t) &= \frac{\dot{z}(t)}{\sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2}} = \frac{\dot{z}(t)}{\dot{s}(t)}. \end{aligned}$$

Moltiplichiamo la (1.1.11) scalarmente per sè stessa. Troviamo (omettiamo per semplicità la dipendenza da t):

$$a^2 = \ddot{s}^2 + \frac{\dot{s}^4}{\rho^2} \implies \rho^2 = \frac{\dot{s}^4}{a^2 - \ddot{s}^2}$$

Sostituendo $a^2 = \ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2$ ed eseguendo le semplificazioni nel denominatore si ottiene:

$$\rho = \frac{\dot{s}^3}{\sqrt{(\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x})^2 + (\dot{x}\ddot{z} - \dot{z}\ddot{x})^2 + (\dot{y}\ddot{z} - \dot{z}\ddot{y})^2}} := \frac{\dot{s}^3}{L}. \quad (1.1.12)$$

(Si noti che questa formula permette di ricavare il raggio di curvatura per via puramente cinematica). Rimane da determinare il versore normale $\mathbf{n}$, ovvero le sue componenti cartesiane. Moltiplicando ancora la (1.1.11) scalarmente per $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ rispettivamente troviamo :

$$\frac{\ddot{s}\dot{x}}{\dot{s}} + \frac{\dot{s}^2}{\rho}n_x = \ddot{x}, \quad \frac{\ddot{s}\dot{y}}{\dot{s}} + \frac{\dot{s}^2}{\rho}n_y = \ddot{y}, \quad \frac{\ddot{s}\dot{z}}{\dot{s}} + \frac{\dot{s}^2}{\rho}n_z = \ddot{z}$$

da cui

$$n_x = \frac{\rho}{\dot{s}^2}(\ddot{x} - \frac{\ddot{s}\dot{x}}{\dot{s}}), \quad n_y = \frac{\rho}{\dot{s}^2}(\ddot{y} - \frac{\ddot{s}\dot{y}}{\dot{s}}), \quad n_z = \frac{\rho}{\dot{s}^2}(\ddot{z} - \frac{\ddot{s}\dot{z}}{\dot{s}})$$

Sostituendo l'espressione (1.1.12) del raggio di curvatura ρ si ottiene l'espressione completa di $\mathbf{n}$ in funzione delle componenti cartesiane:

$$n_x = \frac{1}{L}(\ddot{x} - \ddot{s}\dot{x}), \quad n_y = \frac{1}{L}(\ddot{y} - \ddot{s}\dot{y}), \quad n_z = \frac{1}{L}(\ddot{z} - \ddot{s}\dot{z})$$

Caso particolare Se la curva è piana l'espressione (1.1.12) per la curvatura si semplifica. Infatti possiamo porre $z = \dot{z} = \ddot{z} = 0$ e troviamo:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{|\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}|}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Omettiamo i facili calcoli che portano all'espressione delle componenti cartesiane in funzione di quelle intrinseche.

1.1.4 Torsione. Triedro principale

Si definisca poi il *vettore binormale* $\mathbf{b}(s)$ alla curva nel punto s il vettore unitario

$$\mathbf{b}(s) = \mathbf{t}(s) \wedge \mathbf{n}(s) \quad (1.1.13)$$

Dato s , la terna di vettori unitari ortogonali $(\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s))$ si dice *triedro principale mobile* della curva o *sistema di riferimento mobile* o *terna intrinseca*.

La formula precedente mostra che l'accelerazione è interamente contenuta nel piano $(\mathbf{t}, \mathbf{n})$, cioè non ha componenti lungo la binormale. Si noti poi che se $\frac{d\mathbf{b}(s)}{ds} = 0$ la curva è piana: pertanto, così come la variazione di $(\mathbf{t}(s))$ misura lo scostamento dalla rettilinearità, la variazione di $\mathbf{b}(s)$ misura lo scostamento della curva dalla planarità. Ciò motiva la seguente

Definizione 1.3 *Per una curva nello spazio*

1. Il valore assoluto $\left\| \frac{d\mathbf{t}(s)}{ds} \right\| = \frac{1}{\rho}$ della variazione del vettore tangente si dice *prima curvatura o flessione*. (L'inverso ρ , raggio di prima curvatura o raggio di flessione).
2. Il valore assoluto $\left\| \frac{d\mathbf{b}(s)}{ds} \right\| = \frac{1}{\tau}$ della variazione del vettore binormale si dice *seconda curvatura o torsione*. (L'inverso τ , raggio di seconda curvatura o raggio di torsione).

Completiamo ora le relazioni fra i vettori del triedro principale e le loro derivate rispetto all'ascissa curvilinea, enunciando ma non dimostrando il risultato fondamentale in quest'ambito

Teorema 1.1 (Formule di Frenet-Serret)

Valgono le formule seguenti

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{t}(s)}{ds} = \frac{1}{\rho}\mathbf{n}(s) \\ \frac{d\mathbf{n}(s)}{ds} = -\frac{1}{\rho}\mathbf{t}(s) - \frac{1}{\tau}\mathbf{b}(s) \\ \frac{d\mathbf{b}(s)}{ds} = \frac{1}{\tau}\mathbf{n}(s) \end{cases} \quad (1.1.14)$$

Concludiamo questo paragrafo ricavando le formule per la flessione $\frac{1}{\rho}$ e la torsione $\frac{1}{\tau}$ in funzione dell'ascissa curvilinea.

1. *Flessione=Prima curvatura* Si ha $\frac{1}{\rho} = \|\mathbf{N}\|$ e pertanto

$$\frac{1}{\rho} = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2}$$

2. *Torsione=seconda curvatura*. Vale la formula

$$\frac{1}{\tau} = -\rho^2 \det \begin{pmatrix} \frac{dx}{ds} & \frac{dy}{ds} & \frac{dz}{ds} \\ \frac{d^2x}{ds^2} & \frac{d^2y}{ds^2} & \frac{d^2z}{ds^2} \\ \frac{d^3x}{ds^3} & \frac{d^3y}{ds^3} & \frac{d^3z}{ds^3} \end{pmatrix}$$

Infatti:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau} &= \left\langle \frac{d\mathbf{b}}{ds}, \mathbf{n} \right\rangle = \left\langle \frac{d}{ds}(\mathbf{t} \wedge \mathbf{n}), \mathbf{n} \right\rangle = \left\langle \frac{d}{ds}(\mathbf{t} \wedge \rho\mathbf{N}), \rho\mathbf{N} \right\rangle = \\ &= \left\langle \left(\frac{d\mathbf{t}}{ds} \wedge \rho\mathbf{N} \right), \rho\mathbf{N} \right\rangle + \left\langle \mathbf{t} \wedge \frac{d}{ds}(\rho\mathbf{N}), \rho\mathbf{N} \right\rangle = 0 + 0 + \left\langle \left(\mathbf{t} \wedge \rho \frac{d\mathbf{N}}{ds} \right), \rho\mathbf{N} \right\rangle \\ &= -\rho^2 \left\langle \left(\frac{d\mathbf{N}}{ds} \wedge \mathbf{t} \right), \mathbf{N} \right\rangle = -\rho^2 \left\langle \mathbf{t} \wedge \mathbf{N}, \frac{d\mathbf{N}}{ds} \right\rangle \end{aligned}$$

per l'invarianza del determinante che esprime il prodotto misto rispetto alle permutazioni delle righe. La formula voluta segue appunto dalla nota formula che esprime il prodotto misto $\langle \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle^1$ dei tre vettori $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$:

$$\langle \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle \equiv \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$$

Esempio 3 (Continuazione) Calcoliamo prima e seconda curvatura, cioè flessione e torsione, per l'elica cilindrica.

Soluzione

$$\begin{cases} x = R \cos u \\ y = R \sin u \\ z = u \end{cases}$$

Intensità della velocità $\dot{s}$ e ascissa curvilinea s :

$$|\dot{s}| = \sqrt{\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2 + \left(\frac{dz}{du}\right)^2} = \sqrt{1 + R^2}$$

$$s(u) = \sqrt{1 + R^2}u \implies u = sa, \quad a = \frac{1}{\sqrt{1 + R^2}}$$

avendo al solito scelto l'origine degli archi a $u = 0$. Pertanto le equazioni parametriche in funzione dell'ascissa curvilinea sono

$$\begin{cases} x = R \cos sa \\ y = R \sin sa \\ z = sa \end{cases}$$

Dunque

$$\begin{aligned} \mathbf{t}(s) &= \frac{dP}{ds} = (-R \sin sa, R \cos sa, a) \\ \mathbf{N}(s) &= \frac{d^2P}{ds^2} = (-Ra^2 \cos sa, -Ra^2 \sin sa, 0) \\ \frac{d^3P}{ds^3} &= (Ra^3 \sin sa, -Ra^3 \cos sa, 0) \end{aligned}$$

Dunque: $\frac{1}{\rho} = \left\| \frac{d^2P}{ds^2} \right\| = Ra^2$, cioè la curva ha flessione (o prima curvatura) costante; inoltre

$$\frac{1}{\tau} = -\rho^2 \det \begin{pmatrix} -R \sin sa & R \cos sa & a \\ -Ra^2 \cos sa & -Ra^2 \sin sa & 0 \\ Ra^3 \sin sa & -Ra^3 \cos sa & 0 \end{pmatrix} = -a$$

da cui si vede che anche la seconda curvatura, cioè la torsione, è costante.

¹Scritto tradizionalmente in meccanica come $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$

1.1.5 Moto piano in coordinate polari

Consideriamo la famiglia $R(\varphi)$ di trasformazioni lineari (endomorfismi) da $\mathbb{R}^2$ in sè rappresentata dalle seguente famiglia di matrici 2×2 (abuso di notazione)

$$R(\varphi) := \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

Si noti che $R(0) = R(2\pi) = I$ (matrice identità 2×2). L'endomorfismo (trasformazione) da $\mathbb{R}^2$ in sè generato da $R(\varphi)$ è chiaramente una rotazione attorno all'origine (quindi "attorno all'asse z "). Consideriamo infatti il punto P di coordinate cartesiane $(x, y) : P - O = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$. L'azione di $R(\varphi)$ è:

$$R(\varphi)(P - O) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi x - \sin\varphi y \\ \sin\varphi x + \cos\varphi y \end{pmatrix}$$

Dunque l'immagine di P è P' con coordinate $P' - O = ((\cos\varphi x - \sin\varphi y)\mathbf{i} + (\sin\varphi x + \cos\varphi y)\mathbf{j})$. La rotazione lascia inalterate le lunghezze dei vettori:

$$\|P' - O\| = \sqrt{(\cos\varphi x - \sin\varphi y)^2 + (\sin\varphi x + \cos\varphi y)^2} = \sqrt{x^2 + y^2} = \|P - O\|$$

In particolare, se $P - O = \mathbf{i}$, cioè $x = 1$, $y = 0$, o $P - O = \mathbf{j}$, cioè $x = 0$, $y = 1$ si ottiene rispettivamente

$$R(\varphi)\mathbf{i} = \cos\varphi\mathbf{i} + \sin\varphi\mathbf{j} := \mathbf{e}_r; \quad R(\varphi)\mathbf{j} = -\sin\varphi\mathbf{i} + \cos\varphi\mathbf{j} := \mathbf{e}_\varphi; \quad (1.1.15)$$

Il versore $\mathbf{e}_r$, di componenti cartesiane $(\cos\varphi, \sin\varphi)$ si dice *versore radiale*, mentre il versore $\mathbf{e}_\varphi$ di componenti cartesiane $(-\sin\varphi, \cos\varphi)$ si dice *versore trasverso*. La locuzione trae origine dalle constatazioni seguenti: anzitutto, se definiamo il *raggio* $r := \|P - O\| = \|P' - O\| = \sqrt{x^2 + y^2}$, e il *raggio vettore* come $\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r$ allora, per il teorema di Pitagora:

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi \iff P - O = r\mathbf{e}_r \quad (1.1.16)$$

Inoltre si vede subito che

1. $\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_\varphi = 0$, e quindi $\mathbf{e}_\varphi$ è *trasverso* a $\mathbf{e}_r$. La trasformazione definita dalle prime due equazioni della (1.1.16) è la *trasformazione in coordinate polari* (r, φ) . È iniettiva fra $] =, +\infty[\times]0, 2\pi[$ e $\mathbb{R}^2$ provato dell'origine; la trasformazione inversa è data da:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \arctg \frac{y}{x}$$

- 2.

$$\frac{d\mathbf{e}_r}{d\varphi} = \mathbf{e}_\varphi; \quad \frac{d\mathbf{e}_\varphi}{d\varphi} = -\mathbf{e}_r \quad (1.1.17)$$

Lemma 1.3 *In coordinate polari (r, φ) la velocità di un punto mobile nel piano ha l'espressione seguente*

$$\mathbf{v} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi \quad (1.1.18)$$

Osservazioni.

1. Poichè le direzioni definite dai vettori di base $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi)$ si dicono *direzione radiale* e *direzione trasversa*, le componenti $v_r = \dot{r}$ e $v_\varphi = r\dot{\varphi}$ della velocità lungo queste direzioni prendono il nome di *velocità radiale* e *velocità trasversa*.
2. Se il moto è circolare, $r = \text{cost}$, $\dot{r} = 0$. Dunque la velocità è in questo caso tutta trasversa, come deve risultare dal fatto che la velocità è tangente alla traiettoria.
3. Si definisce velocità angolare ω del moto circolare l'angolo spazzato nell'unità di tempo:

$$\omega := \frac{d\varphi}{dt} \quad (1.1.19)$$

Allora si ha subito $v = \omega r$. In parole: *la velocità scalare di un punto in un moto circolare vale il prodotto del raggio per la velocità angolare.*

Dimostrazione.

Si ha

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d}{dt}[x\mathbf{i} + y\mathbf{j}] = \frac{d}{dt}[r\mathbf{e}_r] = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi$$

La seconda uguaglianza viene dalla definizione di coordinate polari ($x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$) e di base canonica, e la terza uguaglianza dalla (1.1.16). Ciò prova il Lemma.

Esercizio

Ricavare le formule di trasformazione fra le componenti cartesiane, intrinseche e polari della velocità di un moto piano.

Soluzione

1. Cartesiane $\leftrightarrow$ polari.

Proiettando la relazione $\mathbf{v} = \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi$ lungo le direzioni $\mathbf{i}_1, \mathbf{j}$ otteniamo, ricordando la definizione di $\mathbf{e}_r$ e $\mathbf{e}_\varphi$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi = v_r\cos\varphi - v_\varphi\sin\varphi \\ \dot{y} &= \dot{r}\sin\varphi + r\dot{\varphi}\cos\varphi = v_r\sin\varphi + v_\varphi\cos\varphi \end{aligned}$$

mentre, ovviamente

$$\dot{s} = \sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2} = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2} = \sqrt{v_r^2 + v_\varphi^2}$$

Viceversa, per ottenere le componenti polari in funzione di quelle cartesiane basta invertire e riesprimere tutto in funzione di $(x, y; \dot{x}, \dot{y})$. Si trova immediatamente

$$\begin{aligned} \dot{r} &= v_r = \dot{x}\cos\varphi + \dot{y}\sin\varphi = \frac{x\dot{x}}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{y\dot{y}}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ r\dot{\varphi} &= v_\varphi = -\dot{x}\sin\varphi + \dot{y}\cos\varphi = -\frac{y\dot{x}}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{x\dot{y}}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{aligned}$$

2. Intrinseche $\leftrightarrow$ polari. Proiettando stavolta la relazione $\mathbf{v} = \dot{s}\mathbf{t} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi$ lungo le direzioni $\mathbf{e}_r$ e $\mathbf{e}_\varphi$ otteniamo

$$t_r \equiv \langle \mathbf{t}, \mathbf{e}_r \rangle = \frac{\dot{r}}{\dot{s}} = \frac{\dot{r}}{\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2} = \frac{v_r}{v_r^2 + v_\varphi^2}$$

$$t_\varphi \equiv \langle \mathbf{t}, \mathbf{e}_\varphi \rangle = \frac{r\dot{\varphi}}{\dot{s}} = \frac{r\dot{\varphi}}{\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2} = \frac{v_\varphi}{v_r^2 + v_\varphi^2}$$

e quindi le componenti intrinseche in funzione di quelle polari. Omettiamo il viceversa. Calcoliamo ora l'accelerazione.

Lemma 1.4 *In coordinate polari (r, φ) l'accelerazione di un punto mobile nel piano ha l'espressione seguente*

$$\mathbf{a} = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\mathbf{e}_r + (2r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})\mathbf{e}_\varphi \quad (1.1.20)$$

La componente lungo $\mathbf{e}_r$ è l'accelerazione radiale, quella lungo $\mathbf{e}_\varphi$ l'accelerazione centripeta.

Dimostrazione

Deriviamo la (1.1.18):

$$\begin{aligned} \mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= \ddot{r}\mathbf{e}_r + \dot{r}\dot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi + \dot{r})\dot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi + r\ddot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi - r\dot{\varphi}^2\mathbf{e}_r = \\ &= (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\mathbf{e}_r + (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})\mathbf{e}_\varphi \end{aligned}$$

che è la (1.1.20).

Osservazioni

1. Se il moto è circolare l'accelerazione vale

$$\mathbf{a} = -r\dot{\varphi}^2\mathbf{e}_r + r\ddot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi$$

2. Se poi il moto circolare è uniforme, cioè $\dot{\varphi} = \omega$, allora:

$$\mathbf{a} = -r\omega^2\mathbf{e}_r = -\omega^2(P - O)$$

Cioè l'accelerazione è tutta centripeta, e proporzionale al raggio.

1.2 Cinematica relativa

Supponiamo di dovere descrivere il moto di un punto P da due sistemi di riferimento differenti, detti anche *osservatori*, denotati S_1 e S_2 , in moto l'uno rispetto all'altro. Il problema della cinematica relativa si formula così:

Noto il moto del punto P rispetto all'osservatore S_2 , e noto il moto del sistema S_2 rispetto all'osservatore S_1 , determinare il moto di P rispetto a S_1 .

Occorre fare alcune precisazioni.

1. Per sistema di riferimento, od osservatore, si intende uno sistema cartesiano ortogonale orientato. Il ruolo dei due sistemi S_1 ed S_2 nell'affermazione precedente è assolutamente intercambiabile.
2. La determinazione del moto di P rispetto all'osservatore S_1 consiste nella determinazione delle sue coordinate, della sua velocità e della sua accelerazione a partire dalle sue coordinate, dalla sua velocità e alla sua accelerazione rispetto all'osservatore S_2 nonchè del moto di S_2 rispetto a S_1 .
3. Preciseremo qui di seguito, parlando di trasformazione delle coordinate, cosa si intende per moto di un sistema di riferimento rispetto ad un altro.

Le proprietà intuitive degli osservatori in moto relativo che si ammettono sono espresse dal seguente

Postulato

1. *Il tempo trascorre allo stesso modo per tutti gli osservatori in moto l'uno rispetto all'altro.*
2. *Le distanze, gli angoli e l'orientamento non cambiano al cambiare dell'osservatore.*

1.2.1 Trasformazione delle coordinate

Il postulato precedente permette di caratterizzare il moto di un qualunque osservatore rispetto ad un qualunque altro. Denotiamo con $O_i, x_i, y_i, z_i, \mathbf{i}_i, \mathbf{j}_i, \mathbf{k}_i, i = 1, 2$ l'origine delle coordinate, gli assi coordinati e i corrispondenti versori nel riferimento S_i . In generale, useremo il suffisso 2 per denotare quantità osservate da S_2 e il suffisso 1 per denotare le medesime quantità osservate da S_1 . Quindi $P_1(t) : \mathbb{R} \rightarrow S_1, P_1(t) - O_1 = x_1\mathbf{i}_1 + y_1\mathbf{j}_1 + z_1\mathbf{k}_1$, denota il moto osservato da S_1 , $P_2(t) : \mathbb{R} \rightarrow S_2, P_2(t) - O_2 = x_2\mathbf{i}_2 + y_2\mathbf{j}_2 + z_2\mathbf{k}_2$. La caratterizzazione è allora espressa da teorema seguente:

Teorema 1.2 *La relazione fra le coordinate $P - O_2$ e $P - O_1$ del medesimo punto P viste dagli osservatori S_1 e S_2 in moto reciproco, dove per convenzione si considera il sistema S_1 come mobile e il sistema S_2 come fisso, è la seguente trasformazione lineare non omogenea (trasformazione affine):*

$$(P - O_2)(t) = (O_1(t) - O_2) + R(t)(P - O_1) \quad (1.2.21)$$

Qui $R(t)$ è una matrice di rotazione propria, e quindi ortogonale con $\det R(t) = 1$, per ogni $t \in \mathbb{R}$.

Dimostrazione

La (1.2.21) conserva ovviamente distanze e angoli. Si ha infatti, considerando un altro

punto Q :

$$\|(P - Q)\| = \|R(t)(P - Q)\| = \|(P - Q)\|$$

poichè $R(t)$ conserva le distanze. Inoltre:

$$\begin{aligned} [(P - O_2) - (O_1(t) - O_2)] \cdot [(Q - O_2) - (O_1(t) - O_2)] &= \\ R(t)(P - O_1) \cdot R(t)(Q - O_1) &= (P - O_1) \cdot (Q - O_1) \\ \|(P - O_2) - (O_1(t) - O_2)\| &= \|(P - O_1)\|; \quad \|(Q - O_2) - (O_1(t) - O_2)\| = \|(Q - O_1)\| \end{aligned}$$

ancora per l'ortogonalità di $R(t)$. Ora l'angolo θ fra $[(P - O_2) - (O_1(t) - O_2)]$ e $[(Q - O_2) - (O_1(t) - O_2)]$ vale

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{[(P - O_2) - (O_1(t) - O_2)] \cdot [(Q - O_2) - (O_1(t) - O_2)]}{\|(P - O_2) - (O_1(t) - O_2)\| \cdot \|(Q - O_2) - (O_1(t) - O_2)\|} \\ &= \frac{(P - O_1) \cdot (Q - O_1)}{\|(P - O_1)\| \cdot \|(Q - O_1)\|} \end{aligned}$$

che è l'angolo fra $(P - O_1)$ e $(Q - O_1)$. D'altra parte l'angolo fra $P - O_2$ e $Q - O_2$ vale ovviamente l'angolo fra $[(P - O_2) - (O_1(t) - O_2)]$ e $[(Q - O_2) - (O_1(t) - O_2)]$ e quindi anche gli angoli si conservano.

Viceversa, consideriamo dapprima il caso $O_1 = O_2$, cioè il caso in cui i due osservatori hanno l'origine in comune. Se la trasformazione da S_1 a S_2 deve conservare gli angoli, per quanto appena visto deve conservare i prodotti scalari. Poichè il prodotto scalare è lineare, anche la trasformazione che lo conserva dovrà esserlo. Essa sarà dunque un'isometria, rappresentata per ogni t da una matrice 3×3 , denotata $R(t)$. Ora, denotando $R(t)^T$ la matrice trasposta di $R(t)$:

$$\begin{aligned} R(t)(P - O_1) \cdot R(t)(Q - O_1) &= (P - O_1) \cdot (Q - O_1) \implies \\ (P - O_1) \cdot R(t)^T R(t)(Q - O_1) &= (P - O_1) \cdot (Q - O_1) \implies R(t)^T R(t) = I. \end{aligned}$$

$R(t)$ è dunque una matrice ortogonale, che descrive una rotazione attorno all'origine. Poichè l'orientamento è conservato la rotazione è propria. Se $O_1 \neq O_2$ basta il vettore $R(t)(P - O_1)$ vettore del vettore $O_1(t) - O_2$. Abbiamo visto che questa traslazione lascia invariate lunghezze e angoli, e il teorema è dimostrato.

Osservazioni

1. Nella (1.2.21) il vettore $O_1(t) - O_2$ e la matrice di rotazione propria $R(t)$ si considerano quantità note, così come il vettore $P - O_1$. Il moto di S_1 rispetto a S_2 è determinato dall'assegnazione di $O_1(t) - O_2$ e di $R(t)$.

2. Poniamo:

$$\mathbf{i}_1(t) := R(t)\mathbf{i}_1; \quad \mathbf{j}_1(t) := R(t)\mathbf{j}_1; \quad \mathbf{k}_1(t) := R(t)\mathbf{k}_1.$$

Poichè $P - O_1 = x_1 \mathbf{i}_1 + y_1 \mathbf{j}_1 + z_1 \mathbf{k}_1$, la (1.2.21) può essere riscritta nel modo seguente, che useremo in seguito:

$$(P - O_2)(t) = (O_1(t) - O_2) + x_1 \mathbf{i}_1(t) + y_1 \mathbf{j}_1(t) + z_1 \mathbf{k}_1(t) \quad (1.2.22)$$

3. Denotiamo $\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t)$ le componenti del versore $\mathbf{i}_1(t)$ sulla base $(\mathbf{i}_2, \mathbf{j}_2, \mathbf{k}_2)$, $\beta_1(t), \beta_2(t), \beta_3(t)$ le componenti del versore $\mathbf{j}_1(t)$, $\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t)$ le componenti del versore $\mathbf{k}_1(t)$. Si ha

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \mathbf{i}_1(t) \cdot \mathbf{i}_2, & \alpha_2 &= \mathbf{i}_1(t) \cdot \mathbf{j}_2, & \alpha_3 &= \mathbf{i}_1(t) \cdot \mathbf{k}_2 \\ \beta_1 &= \mathbf{j}_1(t) \cdot \mathbf{i}_2, & \beta_2 &= \mathbf{j}_1(t) \cdot \mathbf{j}_2, & \beta_3 &= \mathbf{j}_1(t) \cdot \mathbf{k}_2 \\ \gamma_1 &= \mathbf{k}_1(t) \cdot \mathbf{i}_2, & \gamma_2 &= \mathbf{k}_1(t) \cdot \mathbf{j}_2, & \gamma_3 &= \mathbf{k}_1(t) \cdot \mathbf{k}_2 \end{aligned}$$

e trattandosi di prodotti scalari fra versori i risultati sono sempre dei coseni. Più precisamente, le tre componenti $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ sono i *coseni direttori* della direzione $\mathbf{i}_1(t)$ rispetto alla base $(\mathbf{i}_2, \mathbf{j}_2, \mathbf{k}_2)$; le tre componenti $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ sono i *coseni direttori* della direzione $\mathbf{j}_1(t)$ e le tre componenti $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ sono i *coseni direttori* della direzione $\mathbf{k}_1(t)$.

Denotiamo poi $(a(t), b(t), c(t))$ le componenti del vettore $O_1(t) - O_2$ sulla base $(\mathbf{i}_2, \mathbf{j}_2, \mathbf{k}_2)$. Allora la (1.2.22) si riscrive per esteso nel modo seguente (si noti che omettiamo per semplicità la dipendenza da t):

$$\begin{cases} x_2 = a + \alpha_1 x_1 + \beta_1 y_1 + \gamma_1 z_1 \\ y_2 = b + \alpha_2 x_1 + \beta_2 y_1 + \gamma_2 z_1 \\ z_2 = c + \alpha_3 x_1 + \beta_3 y_1 + \gamma_3 z_1 \end{cases} \quad (1.2.23)$$

4. Scrivendo per mezzo delle loro componenti le condizioni di unitarietà dei versori $\mathbf{j}_1(t), \mathbf{j}_1(t), \mathbf{k}_1(t)$ e la loro mutua ortogonalità si ottengono le seguenti sei relazioni:

$$\begin{cases} \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1 \\ \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 = 1 \\ \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \alpha_3 \beta_3 = 0 \\ \alpha_1 \gamma_1 + \alpha_2 \gamma_2 + \alpha_3 \gamma_3 = 0 \\ \beta_1 \gamma_1 + \beta_2 \gamma_2 + \beta_3 \gamma_3 = 0 \end{cases} \quad (1.2.24)$$

D'altra parte, essendo $\mathbf{j}_1(t) = R(t)\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_1(t) = R(t)\mathbf{j}_1, \mathbf{k}_1(t) = R(t)\mathbf{k}_1$, si trova subito l'espressione della matrice $R(t)$ sulla base $\mathbf{i}_2, \mathbf{j}_2, \mathbf{k}_2$:

$$R(t) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix} \quad (1.2.25)$$

Dunque le formule (1.2.25) esprimono le ben note condizioni che sussistono fra le colonne di una matrice ortogonale. Si noti poi che, in virtù di queste 6 relazioni, solo tre degli elementii di $R(t)$ sono indipendenti. Quindi occorrono

e bastano tre parametri per determinare $R(t)$, o, equivalentemente, i versori mobili $\mathbf{j}_1(t) = R(t)\mathbf{j}_1$, $\mathbf{j}_1(t) = R(t)\mathbf{j}_1$, $\mathbf{k}_1(t) = R(t)\mathbf{k}_1$. Poichè occorrono e bastano tre parametri per determinare $O_1(t) - O_2$, concludiamo che *per determinare il moto dell'osservatore S_1 rispetto a S_2 occorre e basta determinare il moto di sei parametri, le coordinate dell'origine e i tre parametri per i coseni direttori*.

Vediamo alcuni casi particolari importanti delle formule precedenti.

1. *La traslazione pura*

Sia $R(t) = I$, cioè $\alpha_1 = \beta_2 = \gamma_3 = 1$, $\alpha_2 = \alpha_3 = \beta_1 = \beta_3 = \gamma_1 = \gamma_2 = 0$. Allora gli assi x_1, y_1, z_1 si mantengono sempre paralleli agli assi x_2, y_2, z_2 , cioè $\mathbf{i}_1 = \mathbf{i}_2, \mathbf{j}_1 = \mathbf{j}_2, \mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_2$. Le formule (1.2.23) si riducono così alle seguenti:

$$\begin{cases} x_2 = a + x_1 \\ y_2 = b + y_1 \\ z_2 = c + z_1 \end{cases} \quad (1.2.26)$$

Il riferimento S_2 differisce da S_1 solo per una traslazione, dipendente a priori dal tempo, dell'origine delle coordinate. Se le funzioni $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ dipendono linearmente dal tempo la traslazione si dice *uniforme*.

2. *La rotazione pura*

Sia $a = b = c = 0$. Allora S_1 e S_2 hanno l'origine in comune e la relazione fra S_1 e S_2 è una pura rotazione, propria perchè l'orientamento si conserva.

Esempio 4

Consideriamo il caso ulteriormente particolare in cui risulti: $\alpha_1 = \cos\omega t$, $\alpha_2 = -\sin\omega t$, $\alpha_3 = 0$, $\beta_2 = \cos\omega t$, $\beta_3 = 0$, $\gamma_3 = 1$ e quindi

$$R(t) = \begin{pmatrix} \cos\omega t & -\sin\omega t & 0 \\ \sin\omega t & \cos\omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pertanto, dalle (1.2.23):

$$\begin{cases} x_2 = x_1 \cos\omega t - y_1 \sin\omega t \\ y_2 = x_1 \sin\omega t + y_1 \cos\omega t \\ z_2 = z_1 \end{cases}$$

Il cambiamento di sistema di riferimento è quindi in questo caso particolare una rotazione di velocità angolare ω attorno all'asse z . Assumendo che S_2 sia il riferimento canonico in $\mathbb{R}^3$ orientato, e quindi $\mathbf{i}_2, \mathbf{j}_2, \mathbf{k}_2$ i versori della base canonica, calcoliamo i loro trasformati, cioè i versori di S_1 :

$$\mathbf{i}_1(t) = R(t)\mathbf{i}_2 = \begin{pmatrix} \cos\omega t & -\sin\omega t & 0 \\ \sin\omega t & \cos\omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\omega t \\ \sin\omega t \\ 0 \end{pmatrix} = \cos\omega t \mathbf{i}_2 + \sin\omega t \mathbf{j}_2$$

$$\begin{aligned}\mathbf{j}_1(t) &= R(t)\mathbf{j}_2 = \begin{pmatrix} \cos\omega t & -\sin\omega t & 0 \\ \sin\omega t & \cos\omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\omega t \\ \cos\omega t \\ 0 \end{pmatrix} = -\sin\omega t \mathbf{i}_2 + \cos\omega t \mathbf{j}_2 \\ \mathbf{k}_1(t) &= R(t)\mathbf{k}_2 = \begin{pmatrix} \cos\omega t & -\sin\omega t & 0 \\ \sin\omega t & \cos\omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{k}_2\end{aligned}$$

Dunque i versori del sistema mobile ruotano alla velocità angolare ω attorno all'asse z del sistema fisso.

1.2.2 Formula di composizione delle velocità. Velocità dei punti di un corpo rigido

Conveniamo ancora di considerare *fisso*, o *assoluto*, l'osservatore S_2 , e *mobile*, o *relativo*, l'osservatore S_1 . Allora O_2 va considerato fisso. Corrispondentemente, i vettori

$$\mathbf{v}_a := \frac{dP}{dt}, \quad \mathbf{v}_r := \frac{d(P - O_1)}{dt} = \dot{x}_1(t)\mathbf{i}_1(t) + \dot{y}_1(t)\mathbf{j}_1(t) + \dot{z}_1(t)\mathbf{k}_1(t) \quad (1.2.27)$$

si dicono *velocità assoluta* e *velocità relativa*, rispettivamente. Dimostriamo anzitutto il seguente

Lemma 1.5 (*Formule di Poisson*)

Esiste una funzione a valori vettoriali $t \mapsto \omega(t)$ tale che, $\forall t \in \mathbb{R}$:

$$\frac{d\mathbf{i}_1(t)}{dt} = \omega \wedge \mathbf{i}_1, \quad \frac{d\mathbf{j}_1(t)}{dt} = \omega \wedge \mathbf{j}_1, \quad \frac{d\mathbf{k}_1(t)}{dt} = \omega \wedge \mathbf{k}_1. \quad (1.2.28)$$

Dimostrazione (cenno)

Applichiamo il Lemma 1.2. Esisteranno allora tre funzioni a valori vettoriali $\omega_i : i = 1, 2, 3$ tali che

$$\frac{d\mathbf{i}_1(t)}{dt} = \omega_1 \wedge \mathbf{i}_1, \quad \frac{d\mathbf{j}_1(t)}{dt} = \omega_2 \wedge \mathbf{j}_1, \quad \frac{d\mathbf{k}_1(t)}{dt} = \omega_3 \wedge \mathbf{k}_1.$$

Ora i vettori $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ devono soddisfare la condizione di ortogonalità a $\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1, \mathbf{k}_1$, ma per il resto sono arbitrari. Usando questa arbitrarietà si può vedere che è possibile scegliere le loro componenti in modo tale che risulti:

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 := \omega$$

e ciò conclude il cenno di dimostrazione.

Il vettore:

$$\mathbf{v}_\tau := \frac{dO_1(t)}{dt} + \omega \wedge (P - O_1) = \quad (1.2.29)$$

$$\frac{dO_1(t)}{dt} + \omega \wedge (x_1\mathbf{i}_1(t) + y_1\mathbf{j}_1(t) + z_1\mathbf{k}_1(t)) \quad (1.2.30)$$

si dice velocità di trascinamento di P . Vale allora l'affermazione seguente.

Teorema 1.3 (*Composizione delle velocità*)

La velocità assoluta vale la somma della velocità relativa e della velocità di trascinamento:

$$\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_r + \mathbf{v}_\tau \quad (1.2.31)$$

Dimostrazione

Deriviamo la relazione $P - O_2 = P - O_1 + O_1 - O_2$. Si ha:

$$\frac{dP}{dt} = \frac{d(P - O_1)}{dt} + \frac{dO_1}{dt}$$

D'altra parte, applicando la regola di derivazione del prodotto e le formule di Poisson

$$\begin{aligned} \frac{d(P - O_1)}{dt} &= \frac{d(x_1 \mathbf{i}_1(t) + y_1 \mathbf{j}_1(t) + z_1 \mathbf{k}_1(t))}{dt} = \frac{d(x_1 \mathbf{i}_1(t))}{dt} + \frac{d(y_1 \mathbf{j}_1(t))}{dt} + \frac{d(z_1 \mathbf{k}_1(t))}{dt} = \\ &= \dot{x}_1 \mathbf{i}_1(t) + \dot{y}_1 \mathbf{j}_1(t) + \dot{z}_1 \mathbf{k}_1(t) + x_1 \frac{d\mathbf{i}_1(t)}{dt} + y_1 \frac{d\mathbf{j}_1(t)}{dt} + z_1 \frac{d\mathbf{k}_1(t)}{dt} = \\ &= \dot{x}_1 \mathbf{i}_1(t) + \dot{y}_1 \mathbf{j}_1(t) + \dot{z}_1 \mathbf{k}_1(t) + \omega \wedge (x_1 \mathbf{i}_1(t) + y_1 \mathbf{j}_1(t) + z_1 \mathbf{k}_1(t)) \end{aligned}$$

Il primo termine dell'ultima somma è per definizione la velocità relativa $\mathbf{v}_r$. Pertanto:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_a &= \frac{dP}{dt} = \mathbf{v}_r + \frac{dO_1}{dt} + \omega \wedge (x_1 \mathbf{i}_1(t) + y_1 \mathbf{j}_1(t) + z_1 \mathbf{k}_1(t)) \\ &= \mathbf{v}_r + \mathbf{v}_\tau \end{aligned}$$

per definizione di velocità di trascinamento $\mathbf{v}_\tau$, formula (1.2.29). Ciò conclude la dimostrazione.

Osservazione

Supponiamo che il punto P sia in quiete rispetto al sistema mobile S_1 , cioè che la velocità relativa sia nulla: $\dot{x}_1(t) = \dot{y}_1(t) = \dot{z}_1(t) = 0$ ovvero $\mathbf{v}_r = 0$. Allora la velocità assoluta $\mathbf{v}_a$ coincide con la velocità di trascinamento $\mathbf{v}_\tau$. La velocità assoluta di P è dunque quella che P avrebbe se fosse in quiete rispetto a S_1 ; P è dunque *trascinato* dal moto dell'osservatore S_1 rispetto a S_2 ed è per questo che $\mathbf{v}_\tau$ viene detta velocità di trascinamento.

Esempio 4 (Continuazione)

Calcoliamo la velocità di trascinamento di un punto che si muove rispetto a S_1 . In questo caso si ha $\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_2$ ed è chiaro che $\omega = \omega \mathbf{k}_2 = \omega \mathbf{k}_1$. Sappiamo poi che $\mathbf{i}_1(t) = \cos \omega t \mathbf{i}_2 + \sin \omega t \mathbf{j}_2$, $\mathbf{j}_1(t) = -\sin \omega t \mathbf{i}_2 + \cos \omega t \mathbf{j}_2$ e quindi

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_\tau &= x_1 \frac{d\mathbf{i}_1(t)}{dt} + y_1 \frac{d\mathbf{j}_1(t)}{dt} = \omega [x_1 \mathbf{j}_1(t) - y_1 \mathbf{i}_1(t)] = \\ &= \omega [(y_1 \cos \omega t - x_1 \sin \omega t) \mathbf{i}_2 + (x_1 \cos \omega t + y_1 \sin \omega t) \mathbf{j}_2] \end{aligned}$$

Equivalentemente:

$$\mathbf{v}_\tau = \omega \mathbf{k}_1 \wedge (x_1 \mathbf{i}_1(t) + y_1 \mathbf{j}_1(t) + z_1 \mathbf{k}_1) = \omega [x_1 \mathbf{j}_1(t) - y_1 \mathbf{i}_1(t)]$$

Ricordando la (1.1.15) e la (1.1.18) del moto piano in coordinate polari, con le relative osservazioni, si constata che la velocità di trascinamento altro non è che la velocità del punto che si muove di moto circolare con velocità angolare ω sulla circonferenza di raggio $r = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$.

La formula (1.2.29) per la velocità di trascinamento ammette un'interpretazione fisica molto importante. Dire che un punto è fermo rispetto al sistema mobile è come dire che esso è rigidamente collegato al sistema stesso. Si pone infatti la seguente

Definizione 1.4 (*Corpo rigido*)

1. *Un sistema (o corpo) rigido è un sistema tale che le distanze reciproche fra i punti che lo compongono rimangono costanti lungo il moto.*
2. *Il moto del sistema (o corpo) rigido è noto quando è noto il moto di ciascuno dei punti che lo compongono.*

Vediamo di trarre alcune conseguenze immediate di queste definizioni.

1. Il moto di ogni punto di un sistema rigido sarà noto non appena noto il moto di un osservatore ad esso solidale. Infatti i punti del sistema rigido non si muovono rispetto a questo osservatore. Denotando S_1 l'osservatore solidale, il suo moto rispetto all'osservatore (convenzionalmente) fisso S_2 sarà noto se è noto il moto della sua origine O_1 , cioè il vettore $O_1(t) - O_2$, nonchè la matrice di rotazione $R(t)$. Occorrono e bastano quindi 6 parametri per determinare la posizione di ogni punto di un sistema rigido in moto.
2. Poichè i punti P del sistema rigido sono fermi rispetto all'osservatore mobile S_1 , la loro velocità coinciderà con la velocità di trascinamento $\mathbf{v}_\tau$ precedentemente definita dalla formula (1.2.29). In altre parole, se P è un punto del sistema rigido la sua velocità vale

$$\mathbf{v}(P) = \frac{dO_1(t)}{dt} + \omega \wedge (P - O_1). \quad (1.2.32)$$

Questa è la cosiddetta *formula fondamentale della cinematica rigida*. Si noti che la velocità di trascinamento ammette l'interpretazione seguente: essa è la velocità che il punto P avrebbe se fosse rigidamente collegato all'osservatore mobile.

3. Si noti infine che a priori non si può parlare di velocità del sistema rigido, perchè ogni suo punto ha per la (1.2.32) velocità diversa. Il solo caso in cui tutti i punti P hanno la stessa velocità, che può quindi essere chiamata velocità del corpo rigido, è quello in cui $\omega = 0$, cioè il caso in cui il moto di S_1 rispetto a S_2 è una pura traslazione.

4. La formula (1.2.32), considerata *istante per istante*, esprime la velocità dei punti di un corpo rigido come somma di due termini: una velocità di *traslazione*, data dal primo addendo, che è la stessa per ogni punto P , ed una velocità di *pura rotazione*, rappresentata dal secondo addendo, che corrisponde ad un moto di pura rotazione attorno all'asse istantaneo determinato dal vettore velocità angolare ω .
5. Consideriamo il caso particolare in cui il corpo rigido si muova tenendo un asse fisso. Senza ridurre la generalità potremo supporre che questo asse sia l'asse z_2 . Allora l'asse z_1 del sistema solidale S_1 coinciderà con l'asse z , il moto di S_1 rispetto a S_2 sarà una rotazione attorno a $\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_2$ di velocità angolare ω . Vome nell'Esempio 4, il moto di ogni punto del corpo rigido un moto circolare di velocità angolare ω sulla circonferenza di raggio $r := \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$.

1.2.3 Formula di composizione delle accelerazioni. Il teorema di Coriolis

Consideriamo sempre *fisso*, o *assoluto*, l'osservatore S_2 , e *mobile*, o *relativo*, l'osservatore S_1 . Come sopra, i vettori

$$\mathbf{a}_a := \frac{d^2(P)}{dt^2}, \quad \mathbf{a}_r := \frac{d^2(P - O_1)}{dt^2} = \frac{d^2(x_1\mathbf{i}_1(t) + y_1\mathbf{j}_1(t) + z_1\mathbf{k}_1(t))}{dt^2} \quad (1.2.33)$$

si dicono *accelerazione assoluta* e *accelerazione relativa*, rispettivamente, e il vettore

$$\mathbf{a}_\tau = \frac{d^2O_1(t)}{dt^2} + x_1 \frac{d^2\mathbf{i}_1(t)}{dt^2} + y_1 \frac{d^2\mathbf{j}_1(t)}{dt^2} + z_1 \frac{d^2\mathbf{k}_1(t)}{dt^2} \quad (1.2.34)$$

si dice *accelerazione di trascinamento*. Definiamo ora *accelerazione complementare*, o *accelerazione di Coriolis*, il vettore

$$\mathbf{a}_c := 2\omega \wedge \mathbf{v}_r \quad (1.2.35)$$

Notiamo subito che $\mathbf{a}_c \neq 0$ solo se $\omega \neq 0$, cioè se c'è la componente di rotazione del moto di S_1 . Dimostriamo anzitutto il seguente

Teorema 1.4 (*Formula di composizione dell'accelerazione, o teorema di Coriolis*)

L'accelerazione assoluta vale la somma dell'accelerazione relativa, dell'accelerazione di trascinamento e dell'accelerazione complementare. In formule:

$$\mathbf{a}_a = \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_\tau + \mathbf{a}_c \quad (1.2.36)$$

Dimostrazione

Si ha, applicando la formula di composizione delle velocità e la definizione di $\mathbf{v}_r$, $\mathbf{v}_\tau$:

$$\mathbf{a}_a = \frac{d\mathbf{v}_a}{dt} = \frac{d}{dt} \left[\frac{dO_1(t)}{dt} + \dot{x}_1\mathbf{i}_1(t) + \dot{y}_1\mathbf{j}_1(t) + \dot{z}_1\mathbf{k}_1(t) + x_1 \frac{d\mathbf{i}_1}{dt} + y_1 \frac{d\mathbf{j}_1}{dt} + z_1 \frac{d\mathbf{k}_1}{dt} \right]$$

$$= \frac{d^2(O_1(t))}{dt^2} + \ddot{x}_1 \mathbf{i}_1(t) + \ddot{y}_1 \mathbf{j}_1(t) + \ddot{z}_1 \mathbf{k}_1(t) + 2 \left(\dot{x}_1 \frac{d\mathbf{i}_1}{dt} + \dot{y}_1 \frac{d\mathbf{j}_1}{dt} + \dot{z}_1 \frac{d\mathbf{k}_1}{dt} \right) + \\ x_1 \frac{d^2 \mathbf{i}_1}{dt^2} + y_1 \frac{d^2 \mathbf{j}_1}{dt^2} + z_1 \frac{d^2 \mathbf{k}_1}{dt^2}$$

Pertanto, per le definizioni (1.2.33, 1.2.34), possiamo identificare il secondo termine nell'ultima somma come $\mathbf{a}_r$, e la somma fra il primo e l'ultimo come $\mathbf{a}_\tau$. Pertanto:

$$\mathbf{a}_a = \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_\tau + 2 \left(\dot{x}_1 \frac{d\mathbf{i}_1}{dt} + \dot{y}_1 \frac{d\mathbf{j}_1}{dt} + \dot{z}_1 \frac{d\mathbf{k}_1}{dt} \right)$$

Ora applichiamo le formule di Poisson (1.2.28). Si trova:

$$\mathbf{a}_a = \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_\tau + 2\omega \wedge (\dot{x}_1 \mathbf{i}_1(t) + \dot{y}_1 \mathbf{j}_1(t) + \dot{z}_1 \mathbf{k}_1(t)) = \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_\tau + 2\omega \wedge \mathbf{v}_r = \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_\tau + \mathbf{a}_c$$

e ciò conclude la dimostrazione.

Osservazioni

1. L'accelerazione di trascinamento può essere equivalentemente riscritta nel modo seguente, applicando le (1.2.28):

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_\tau &= \frac{d^2 O_1(t)}{dt^2} + x_1 \frac{d^2 \mathbf{i}_1(t)}{dt^2} + y_1 \frac{d^2 \mathbf{j}_1(t)}{dt^2} + z_1 \frac{d^2 \mathbf{k}_1(t)}{dt^2} = \\ &= \frac{d^2 O_1(t)}{dt^2} + x_1 \frac{d}{dt} \omega \wedge \mathbf{i}_1(t) + y_1 \frac{d}{dt} \omega \wedge \mathbf{j}_1(t) + z_1 \frac{d}{dt} \omega \wedge \mathbf{k}_1(t) = \\ &= \frac{d^2 O_1(t)}{dt^2} + \frac{d}{dt} [\omega \wedge (P - O_1)] = \frac{d^2 O_1(t)}{dt^2} + \dot{\omega} \wedge (P - O_1) + \\ &+ \omega \wedge \frac{d}{dt} (P - O_1) = \frac{d^2 O_1(t)}{dt^2} + \dot{\omega} \wedge (P - O_1) + \omega \wedge \omega \wedge (P - O_1) \end{aligned}$$

dove l'ultima formula segue applicando ancora la (1.2.28), e ricordando che le (x_1, y_1, z_1) vanno considerate costanti agli effetti del calcolo dell'accelerazione di trascinamento. Concludendo:

$$\mathbf{a}_\tau = \frac{d^2 O_1(t)}{dt^2} + \dot{\omega} \wedge (P - O_1) + \omega \wedge \omega \wedge (P - O_1) \quad (1.2.37)$$

2. L'accelerazione di Coriolis è nulla quando $\omega = 0$, come già detto, ma anche se $\mathbf{v}_r$ e ω sono paralleli.
3. Consideriamo il terzo addendo nell'accelerazione di trascinamento. Poichè $\omega \wedge (P - O_1) \perp \omega$, si ottiene:

$$\omega \wedge \omega \wedge (P - O_1) = -\omega^2 (P - O_1)$$

e pertanto questo termine si dice *componente centripeta* dell'accelerazione di trascinamento. Se ω è costante, e O_1 è fermo, l'accelerazione di trascinamento è tutta centripeta.

4. Due osservatori si dicono *equivalenti* se un punto in moto rispetto ad entrambi ha la medesima accelerazione. In altri termini, se l'accelerazione assoluta coincide con l'accelerazione relativa. Per quanto precede, ciò sarà possibile se e solo $\omega = 0$ e $\frac{d^2 O_1(t)}{dt^2}$. Ciò significa che S_1 trasla uniformemente (cioè a velocità costante) rispetto a S_2 . Dunque due osservatori sono equivalenti se e solo se il loro moto relativo è una traslazione uniforme.

Esempio 4 (Continuazione)

Calcoliamo la accelerazione di trascinamento e l'accelerazione di Coriolis di un punto che si muove rispetto a S_1 . Per l'accelerazione di Coriolis abbiamo:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_\tau &= 2\omega \wedge \mathbf{v}_r = 2\omega \mathbf{k}_2 \wedge (\dot{x}_1 \mathbf{i}_1(t) + \dot{y}_1 \mathbf{j}_1(t)) = \\ &= 2\omega \mathbf{k}_2 \wedge [\dot{x}_1(\cos\omega t \mathbf{i}_2 + \sin\omega t \mathbf{j}_2) + \dot{y}_1(-\sin\omega t \mathbf{i}_2 + \cos\omega t \mathbf{j}_2)] = \\ &= 2\omega [-(\dot{x}_1 \sin\omega t + \dot{y}_1 \cos\omega t) \mathbf{i}_2 + (\dot{x}_1 \cos\omega t - \dot{y}_1 \sin\omega t) \mathbf{j}_2] \end{aligned}$$

mentre per quella di trascinamento applichiamo la (1.2.37). Dato che $\dot{\omega} = 0$ (la rotazione è uniforme) si trova:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_\tau &= \omega^2 \mathbf{k}_2 \wedge \mathbf{k}_2 \wedge (P - O_1) = \omega^2 \mathbf{k}_2 \wedge \mathbf{k}_2 \wedge (x_1 \mathbf{i}_1(t) + y_1 \mathbf{j}_1(t)) = \\ &= \omega^2 \mathbf{k}_2 \wedge \mathbf{k}_2 \wedge [x_1(\cos\omega t \mathbf{i}_2 + \sin\omega t \mathbf{j}_2) + y_1(-\sin\omega t \mathbf{i}_2 + \cos\omega t \mathbf{j}_2)] = \\ &= \omega^2 \mathbf{k}_2 \wedge [-(x_1 \sin\omega t + y_1 \cos\omega t) \mathbf{i}_2 + (x_1 \cos\omega t - y_1 \sin\omega t) \mathbf{j}_2] = \\ &= \omega^2 [(-x_1 \cos\omega t + y_1 \sin\omega t) \mathbf{i}_2 - (x_1 \sin\omega t + y_1 \cos\omega t) \mathbf{j}_2] \end{aligned}$$

1.3 Cinematica relativistica

1.3.1 Invarianza della velocità della luce e degli intervalli spazio-temporali

Riconsideriamo le formule di trasformazione delle coordinate fra due sistemi di riferimento in moto l'uno rispetto all'altro. denotati S_1 e S_2 . Ammettiamo che S_2 sia animato da un moto di traslazione uniforme con velocità v diretta lungo l'asse delle x di S_1 , considerato fisso. Ammettiamo inoltre che la traslazione sia tale da mantenere inalterata anche la direzione degli assi x e z . Scrivendo al solito $P-O = (P-O_1) + (O_1-O)$, si ha subito $O_1-O = vt\mathbf{i}$, e poichè $P-O_1 = x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k}$ le formule di trasformazione delle coordinate diventano in questo caso particolare:

$$\begin{cases} x = x_1 + vt \\ y = y_1 \\ z = z_1 \end{cases} \quad (1.3.1)$$

che possiamo riesprimere in forma di applicazione fra S_1 e S_2 :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + vt \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \quad (1.3.2)$$

Dobbiamo aggiungere una quarta, per rendere esplicita l'ipotesi tacitamente ammessa che il tempo trascorra allo stesso modo in tutti i sistemi di riferimento in moto rettilineo uniforme l'uno rispetto all'altro. Le equazioni (1.3.1) diventano così:

$$\begin{cases} x = x_1 + vt \\ y = y_1 \\ z = z_1 \\ t = t_1 \end{cases} \quad (1.3.3)$$

Dunque in meccanica classica lo spazio è relativo, nel senso che i punti mobili hanno coordinate differenti se misurate da sistemi di riferimento in moto l'uno rispetto all'altro, mentre il tempo è assoluto: il tempo trascorre allo stesso modo quale che sia la velocità v . Sappiamo inoltre che le trasformazioni (1.3.3), dette di Galileo² conservano le distanze euclidee: si ha subito infatti, con ovvio significato dei simboli:

$$(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 = (x_1 - x'_1)^2 + (y_1 - y'_1)^2 + (z_1 - z'_1)^2 \quad (1.3.4)$$

²Galileo Galilei, Pisa 1564-Firenze 1642. Professore all'Università di Padova dal 1593 al 1612; poi Matematico del Granduca di Toscana a Firenze. Scopritore dei satelliti di Giove, degli anelli di Saturno e delle fasi di Venere (1609). Sostenitore della teoria eliocentrica copernicana, esposta soprattutto nel *Dialogo dei massimi sistemi*, apparso nel 1632. Nel 1633 condannato all'abiura e alla reclusione perpetua nella sua abitazione dall'Inquisizione. L'osservazione che le leggi della meccanica devono essere indipendenti dal moto dell'osservatore purchè rettilineo e uniforme sta in una pagina famosa del *Dialogo dei massimi sistemi*.

Seguendo Einstein³ facciamo ora il postulato seguente:

Postulato

La velocità della luce nel vuoto, denotata c , è la velocità massima raggiungibile in natura ed è la stessa in tutti i sistemi di riferimento in moto rettilineo uniforme l'uno rispetto all'altro.

Osservazione

Questo postulato contraddice esplicitamente la formula di composizione delle velocità che abbiamo dimostrato in precedenza. Una possibilità di risoluzione di questa contraddizione è del tutto evidente: se una velocità non cambia al cambiare del sistema di riferimento, deve cambiare il trascorrere del tempo dato che lo spazio cambia. Il fatto che il tempo trascorra in modo diverso al variare del sistema di riferimento costituisce l'essenza della relatività speciale, o ristretta.⁴ Le considerazioni che seguono ne illustrano le conseguenze quantitative.

D'ora in poi, S e S' denoteranno sistemi di riferimento in traslazione uniforme l'uno rispetto all'altro, per comodità lungo l'asse delle x .

Definizione 1.1 *La specificazione di tre coordinate spaziali (x, y, z) (il luogo) e di una coordinata temporale t (il tempo) costituisce un evento.*

Dunque un evento è rappresentato da un punto in $\mathbb{R}^4$. Un punto materiale che si muove descriverà una curva in $\mathbb{R}^4$, detta *curva d'universo*, i cui punti, detti *punti d'universo*, sono le sue coordinate spazio-temporali in ciascun istante. Se il moto è rettilineo ed uniforme la curva d'universo è una retta.

Definizione 1.2 *Nel sistema di riferimento S , la quantità:*

$$s_{12} := c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2 \quad (1.3.5)$$

dicesi intervallo spazio-temporale, o più semplicemente intervallo, fra gli eventi (x_2, y_2, z_2, t_2) e (x_1, y_1, z_1, t_1) .

Nel sistema di riferimento S' l'intervallo corrispondente sarà:

$$s'_{12} := c^2(t'_2 - t'_1)^2 - (x'_2 - x'_1)^2 - (y'_2 - y'_1)^2 - (z'_2 - z'_1)^2$$

³Albert Einstein (nato a Ulm in Germania nel 1879, morto a Princeton, New Jersey, Stati Uniti, nel 1955), studiò al Politecnico Federale di Zurigo, fu Professore all'Università di Praga, poi al Kaiser Wilhelm Institut di Berlino e, dal 1933, all'Institute of Advanced Study di Princeton. Formulò la teoria della relatività ristretta o speciale nel 1905, la teoria della relatività generale nel 1916. L'esposizione che facciamo qui della cinematica relativistica speciale è essenzialmente quella del classico trattato di L.D.Landau e E.M.Lifshitz *Teoria classica dei campi*.

⁴Speciale o ristretta perchè ci si limita a considerare sistemi di riferimento in moto rettilineo uniforme l'uno rispetto all'altro. I sistemi di riferimento in moto arbitrario l'uno rispetto all'altro sono l'oggetto della teoria della relatività generale, elaborata da Einstein a partire dal 1915.

dove stavolta (x'_1, y'_1, z'_1, t'_1) e (x'_2, y'_2, z'_2, t'_2) sono le coordinate dei due eventi nel sistema S' . Abbiamo

Lemma 1.1 *Se l'intervallo fra due eventi è nullo in un sistema di riferimento lo è anche in un qualsiasi altro. In formule*

$$s_{12} = 0 \iff s'_{12} = 0, \quad \forall (S, S')$$

Dimostrazione

Possiamo sempre assumere che il primo evento sia l'emissione di un segnale, che si propaga alla velocità della luce, al punto (x_1, y_1, z_1) e all'istante t_1 in S , e che il secondo evento sia l'arrivo del medesimo segnale al punto (x_2, y_2, z_2) e all'istante $t_2 > t_1$ in S . La distanza percorsa è $d_{12} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$. D'altra parte, il segnale viaggia alla velocità c e pertanto la distanza percorsa nell'intervallo di tempo $t_2 - t_1$ sarà $c(t_2 - t_1)$. Pertanto, per la definizione (1.3.5), $s_{12} = 0$ perchè ovviamente $d_{12} = c(t_2 - t_1)$. Ripetendo il ragionamento nel sistema S' si trova $s'_{12} = 0$ perchè la velocità della luce è la stessa in entrambi i sistemi. Ciò prova il Lemma.

Questo Lemma ci permette di provare l'invarianza degli intervalli spazio-temporali. Anzitutto osserviamo che facendo $x_2 = x_1 + dx_1, y_2 = y_1 + dy_1, \dots$ nel ragionamento del Lemma precedente si trova subito che se $ds^2 = 0$ in un sistema di riferimento allora $ds^2 = 0$ in qualsiasi altro. Qui ds^2 è l'intervallo spazio-temporale *infinitesimo*, definito nel modo seguente:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \quad (1.3.6)$$

Diremo ora che lo spazio e il tempo sono *omogenei* se tutti i punti dello spazio e tutti gli istanti di tempo sono equivalenti. Diremo che lo spazio è *isotropo* se tutte le direzioni uscenti da un punto qualsiasi sono equivalenti. Allora si ha:

Teorema 1.1 *Si ammetta che tanto lo spazio quanto il tempo siano omogenei, e che lo spazio sia isotropo. Allora l'intervallo spazio temporale non dipende dal sistema di riferimento. In formule:*

$$s^2 = s'^2 \quad \forall (S, S') \quad (1.3.7)$$

Osservazione

L'intervallo spazio-temporale è pertanto una quantità *assoluta*. In generale, si dicono assolute le quantità che non dipendono dalla scelta del sistema di riferimento, e *relative* quelle che vi dipendono.

Dimostrazione

Sappiamo che $ds^2 = 0 \iff ds'^2 = 0 \quad \forall (S, S')$. Poichè ds^2 e ds'^2 sono infinitesimi del

medesimo ordine, devono essere necessariamente proporzionali. In altre parole, esiste una costante $a \in \mathbb{R}$ tale che

$$ds^2 = a ds'^2 \quad \forall (S, S')$$

Dimostriamo ora che a può dipendere solo dal valore assoluto della velocità relativa fra S e S' . Infatti a non può dipendere, per l'omogeneità dello spazio e del tempo, nè dalle coordinate spaziali nè dal tempo. a non può dipendere nemmeno dalla direzione della velocità relativa, perchè ciò sarebbe in contraddizione con l'isotropia dello spazio. Dunque a dipende solo dal valore assoluto della velocità relativa. Per dimostrare che in realtà non dipende nemmeno da quest'ultima variabile, consideriamo tre sistemi di riferimento S, S_1, S_2 (sempre ovviamente in traslazione uniforme l'uno rispetto all'altro). Siano $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ le velocità di S_1 e S_2 rispetto a S . Si ha allora, per quanto precede:

$$ds^2 = a(v_1)ds_1^2 \quad ds^2 = a(v_2)ds_2^2, \quad ds_1^2 = a(v_{12})ds_2^2$$

dove $\mathbf{v}_{12}$ è la velocità relativa fra S_1 e S_2 . Dividendo membro a membro si trova:

$$\frac{a(v_2)}{a(v_1)} = a(v_{12}) \quad (1.3.8)$$

Ora v_{12} dipende dall'angolo θ fra $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$. Infatti:

$$v_{12} = \|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 - 2v_1v_2\cos\theta}$$

Però l'angolo θ non compare nel primo membro di (1.3.8). Ne segue che la (1.3.8) medesima può valere solo se la funzione a è costante. Questa costante poi deve valere 1 ancora per la (1.3.8). Ne concludiamo

$$ds^2 = ds'^2 \quad \forall (S, S')$$

e integrando questa relazione il teorema è dimostrato.

1.3.2 Tempo proprio

Cerchiamo ora di precisare meglio la nozione del tempo che trascorre diversamente a seconda del sistema di riferimento.

Consideriamo un orologio rigidamente collegato ad un sistema di riferimento S' in moto di traslazione uniforme rispetto a noi. Nel tempo dt misurato nel sistema di riferimento S nel quale siamo fermi noi, l'orologio mobile percorre la distanza $= \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$. Nel sistema di riferimento S' l'orologio sta fermo; quindi avremo $dx' = dy' = dz' = 0$. Quale sarà il tempo dt' misurato dall'orologio nel sistema S' ?

Applichiamo la proprietà di invarianza degli intervalli spazio-temporali, $ds^2 = ds'^2$.

Si avrà:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = c^2 dt'^2 = ds'^2$$

da cui

$$dt' = \sqrt{1 - \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2}} dt.$$

Ora notiamo che la velocità v dell'orologio mobile altro non è che la velocità di traslazione di S' rispetto a S ; quindi possiamo scrivere:

$$\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = v^2$$

e pertanto:

$$dt' = \frac{ds'}{c} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt. \quad (1.3.9)$$

Sia $t_2 - t_1$ l'intervallo di tempo misurato nel sistema fisso S . Allora la (1.3.9) fornisce, per integrazione, l'intervallo di tempo misurato dall'orologio mobile:

$$t'_2 - t'_1 = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt = t_2 - t_1 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (1.3.10)$$

Definizione 1.3 *Sia dato un corpo in moto rettilineo uniforme. Sia S' un sistema di riferimento rigidamente collegato al corpo. Allora il tempo misurato da un orologio rigidamente collegato a S' si dice tempo proprio del corpo in moto.*

Osservazioni

1. Se il corpo si muove alla velocità v , il suo tempo proprio è dato dalla formula (1.3.10), che esprime appunto il tempo proprio in funzione del tempo relativo al sistema nel quale il moto è riferito.
2. Poichè $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} < 1$ se $v \neq 0$, si ha $t'_2 - t'_1 < t_2 - t_1$. Dunque il tempo proprio trascorre più lentamente del tempo relativo al sistema di riferimento fisso. In altri termini, l'orologio mobile ritarda rispetto all'orologio fisso.
3. Il moto di un sistema di riferimento rispetto a un altro è un concetto relativo. Nell'esempio precedente, potremmo considerare S' fisso e S mobile, a velocità $-v$ rispetto a S' . Allora il tempo proprio in S dovrebbe trascorrere più lentamente del tempo proprio in S' . Si può dimostrare che questa contraddizione è solo apparente.
4. Il trascorrere più lento del tempo proprio è alla base del noto paradosso dei gemelli.

5. Se v è trascurabile rispetto a c l'integrando nella (1.3.10) vale 1 e quindi $t'_2 - t'_1 = t_2 - t_1$. In altre parole, la differenza fra tempo assoluto e tempo relativo diventa significativa solo per velocità non trascurabili rispetto a quella della luce. Ad esempio, consideriamo la seconda velocità cosmica v_1 , cioè la velocità che un razzo deve raggiungere per sfuggire all'attrazione terrestre. Si ha, come vedremo nel prossimo capitolo: $v_1 \approx 11.2 \text{ km/sec}$. Poichè $c \approx 3 \times 10^5 \text{ km/sec}$, si ha $v_1/c = (11.2/3) \times 10^{-5} < 4 \times 10^{-5}$. Ora:

$$\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}} = 1 - \frac{1}{2} \frac{v_1^2}{c^2} + O(v_1^4/c^4) < 1 - 8 \times 10^{-10}$$

Dunque in questo caso, in cui la velocità del corpo rigidamente connesso al sistema mobile è sicuramente molto ragguardevole (circa 40.000 km/ora!), si ha

$$\frac{t'_2 - t'_1}{t_2 - t_1} < 10^{-9}.$$

cioè la differenza fra il tempo proprio e il tempo misurato dal sistema fisso si mantiene sempre minore di un miliardesimo. Bisogna quindi aspettare circa un millennio per apprezzare la differenza di 1 secondo! È tipicamente nei moti delle particelle subatomiche, ad esempio elettroni o protoni negli acceleratori di particelle, dove si raggiungono velocità confrontabili con quella della luce, che la differenza fra tempo proprio e tempo del sistema fisso (detto del laboratorio) diventa molto significativa.

1.3.3 Coincidenza e simultaneità

Dato che il tempo trascorre in modo diverso nei diversi sistemi di riferimento (brevemente, il tempo è relativo, come lo spazio) dobbiamo chiederci cosa si intende per simultaneità di due eventi, e allo stesso modo chiederci cosa intendiamo per coincidenza.

Definizione 1.4 *Un intervallo spazio-temporale s_{12} si dice:*

1. di genere tempo se $s_{12} > 0$;
2. di genere spazio se $s_{12} < 0$.

Siano ora (x_1, y_1, z_1, t_1) , (x_2, y_2, z_2, t_2) le coordinate spazio temporali degli eventi 1 e 2 nel sistema di riferimento S . Si denoti ancora s_{12} il corrispondente intervallo spazio-temporale. Si ha:

Proposizione 1.1 *Consideriamo i due eventi (1) e (2). Allora:*

(1) *Esiste un sistema di riferimento S' nel quale i due eventi coincidono spazialmente se e solo se l'intervallo s_{12} è di genere tempo.*

(2) Esiste un sistema di riferimento S' nel quale i due eventi sono simultanei se e solo se l'intervallo s_{12} è di genere spazio.

Dimostrazione Limitiamoci a dimostrare la necessità.

(1) Poniamo:

$$t_2 - t_1 := t_{12}, \quad \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} := l_{12}.$$

da cui $s_{12} = c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2$. Pertanto, data l'invarianza dell'intervallo spazio-temporale:

$$c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2 = c^2 t_{12}'^2 - l_{12}'^2 \quad (1.3.11)$$

Imponiamo ora la condizione che i due eventi avvengano nel medesimo luogo in S' , cioè imponiamo la condizione $l_{12}' = 0$. Si trova:

$$s_{12}^2 = c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2 = c^2 t_{12}'^2 > 0 \quad (1.3.12)$$

Pertanto i due eventi possono coincidere spazialmente in S' se e solo se $s_{12}^2 > 0$, cioè se il loro intervallo è di genere tempo. Si noti che i due eventi avvengono nel medesimo punto in S' , ma in istanti differenti: il tempo che trascorre fra il primo e il secondo vale:

$$t_{12}' = \frac{1}{c} \sqrt{c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2} = \frac{s_{12}}{c}$$

(2) Si potrà scegliere S' in modo che i due eventi siano simultanei se e solo se $t_{12}' = 0$. Per la (1.3.11) sarà allora

$$s_{12}^2 = -l_{12}'^2 < 0$$

Osservazioni

1. Quando i due eventi si riferiscono al moto del medesimo corpo, il loro intervallo è sempre di genere tempo. Infatti, la distanza percorsa dal corpo fra i due eventi non può superare ct_{12} , perchè la sua velocità non può mai superare c . Dunque si avrà sempre $l_{12} < ct_{12}$ da cui $s_{12} > 0$.
2. A causa dell'invarianza degli intervalli, la loro classificazione in genere spazio o genere tempo è una nozione assoluta.

1.3.4 Il cono della luce. Passato e futuro. Causa ed effetto.

Se il tempo è relativo, anche le nozioni di "prima" e "dopo", e le nozioni derivate di causa ed effetto, sono a priori relative, cioè dipendono dal sistema di riferimento. È naturale però cercare di capire in quali condizioni esse diventino nozioni assolute.

Prendiamo in un sistema S un evento O come origine delle coordinate spazio-temporali. Consideriamo l'intervallo che lo separa da un evento di coordinate (x, y, z, t) : $s_{12} = c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2$. Poniamo la seguente

Definizione 1.5 *Dicesi cono della luce di origine O il luogo dei punti in $\mathbb{R}^4$ tali che $s_{12} = 0$. Denotando CL questo luogo, si ha:*

$$CL := \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0\} \quad (1.3.13)$$

Osservazioni

1. CL è ovviamente un cono in $\mathbb{R}^4$, di vertice l'origine. Per l'invarianza degli intervalli spazio temporali, si tratta di una nozione assoluta. Il cono si dice della luce perchè eventi distinti che vi appartengono possono essere collegati solo tramite segnali che si muovono alla velocità della luce.
2. Sia $l := \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Conveniamo di chiamare *interno* ed *esterno* del cono della luce le due regioni

$$CL_+ := \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid c|t| > l\} \quad (1.3.14)$$

$$CL_- := \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid c|t| < l\} \quad (1.3.15)$$

Si noti che CL_+ contiene tutti e soli gli intervalli di genere tempo, e CL_- tutti e soli gli intervalli di genere spazio.

Si ha allora:

Teorema 1.2 *Le regioni:*

$$CL_{++} := \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid c|t| > l \mid t > 0\} \subset CL_+ \quad (1.3.16)$$

$$CL_{+-} := \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid c|t| < l, \mid t < 0\} \subset CL_- \quad (1.3.17)$$

sono rispettivamente il futuro assoluto e il passato assoluto dell'evento O , nel senso seguente: ogni evento in CL_{++} è posteriore a O in qualsiasi sistema di riferimento e ogni evento in CL_{+-} è anteriore a O in qualsiasi sistema di riferimento.

Dimostrazione

Consideriamo per cominciare CL_{++} . Qui abbiamo sempre $s_{12} > 0$ e $t > 0$. Questo significa che tutti gli eventi hanno luogo "dopo" l'evento O . Togliamo ora le virgolette da "dopo". Poichè gli eventi in CL_{++} sono separati da intervalli di genere tempo, sappiamo che non esiste alcun sistema di riferimento in cui essi sono simultanei. Ne segue che sarà impossibile trovare un sistema di riferimento nel quale un evento qualsiasi di CL_{++} avvenga "prima" di O , perchè in tal caso si avrebbe $t < 0$. Ne risulta che per qualsiasi sistema di riferimento gli eventi di CL_{++} sono posteriori a O ; quindi tali eventi formano il futuro assoluto. Con un ragionamento analogo si dimostra che gli eventi di CL_{+-} formano il passato assoluto dell'evento O . Osserviamo infine che per gli eventi in CL_- si può definire la nozione di distanza assoluta, ma che i concetti di prima e dopo sono relativi al sistema di riferimento.

Osservazioni

1. Dunque due eventi qualsiasi possono essere ordinati temporalmente, cioè è possibile distinguere quale dei due preceda l'altro, se e solo se entrambi appartengono all'interno del cono della luce. Questa è una conseguenza immediata del fatto che nessuna interazione può propagarsi a velocità superiore a quella della luce. Solo per questi eventi possiamo dunque stabilire una relazione di causa ed effetto.
2. Le regioni CL_+ e CL_- , interno ed esterno del cono della luce, non possono mai comunicare, nel senso che non può esistere alcun intervallo spazio-temporale che congiunga un evento in CL_+ con un evento in CL_- . Infatti un intervallo simile potrebbe esistere solo se fossero possibili velocità superiori a quella della luce.

1.3.5 Trasformazioni di Lorentz

Nel caso dello spazio ordinario della cinematica non relativistica, la distanza euclidea $ds^2 := x^2 + y^2 + z^2$ è invariante rispetto alle traslazioni uniformi delle coordinate:

$$x \mapsto x + v_x t, \quad y \mapsto y + v_y t, \quad z \mapsto z + v_z t. \quad t \in \mathbb{R}.$$

In relatività ristretta sappiamo che il tempo non è più assoluto, ma dipende dalle velocità relative dei sistemi di riferimento in traslazione uniforme l'uno rispetto all'altro. Ci si domanda allora come cambieranno le formule di trasformazione delle coordinate per tenere conto della relatività del tempo. Poichè sappiamo che l'intervallo spazio temporale $s^2 = c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2$ deve rimandere invariante, la domanda equivale a trovare tutte le trasformazioni di $\mathbb{R}^4$ in sè, generate da traslazioni uniformi dei sistemi di riferimento con velocità relativa v , che lasciano invariati gli intervalli spazio-temporali.

Consideriamo la solito solo il caso particolare dei sistemi in traslazione uniforme (cioè, ripetiamo, in moto rettilineo uniforme l'uno rispetto all'altro con velocità v) lungo l'asse delle x .

Consideriamo un sistema di riferimento spazio-temporale S' , di coordinate denotate (x', y', z', t') , animato di un moto rettilineo uniforme di velocità v diretta lungo l'asse delle x rispetto al sistema fisso S di coordinate (x, y, z, t) .

Teorema 1.3 *Nelle ipotesi precedenti le formule relativistiche di trasformazione delle coordinate spazio-temporali sono le seguenti:*

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \frac{t' + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (1.3.18)$$

Osservazioni

1. Le formule (1.3.18) sono le trasformazioni di Lorentz⁵

⁵Hendrik Antoon Lorentz (Arnhem, 1853- Haarlem 1928), grande fisico teorico olandese.

2. Al limite per $c \rightarrow \infty$ le (1.3.18) diventano

$$x = x' + vt, \quad y = y', \quad z = z', \quad t = t'$$

che sono le trasformazioni di Galileo.

Dimostrazione

Nelle nostre ipotesi le trasformazioni nelle direzioni y e z sono semplicemente l'identità. Quindi è sufficiente considerare in piano (x, t) . Le trasformazioni devono lasciare invariato l'intervallo spazio-temporale $s^2 = c^2 t^2 - x^2$. Poniamo:

$$x = x' \cosh \theta + ct' \sinh \theta, \quad ct = x' \sinh \theta + ct' \cosh \theta \quad (1.3.19)$$

Questa trasformazione è una *rotazione iperbolica* di angolo θ . Si vede subito, quadrando e sommando, che $c^2 t^2 - x^2 = c^2 t'^2 - x'^2$. Si può dimostrare che tutte le trasformazioni da R^2 in sé che lasciano fissa l'origine e conservano l'intervallo $c^2 t^2 - x^2$ sono rotazioni iperboliche. Dobbiamo ora esprimere queste formule in funzione della velocità relativa v fra i due sistemi di riferimento. Se facciamo $x' = 0$ nelle (1.3.19) troviamo:

$$x = ct' \sinh \theta, \quad ct = ct' \cosh \theta$$

da cui:

$$\frac{x}{ct} = \tanh \theta$$

Ora $x/t = v$. Pertanto $\tanh \theta = v/c$, e quindi:

$$\sinh \theta = \frac{\frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad \cosh \theta = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Sostituendo nella (1.3.19) si ottengono le trasformazioni di Lorentz (1.3.18) e ciò conclude la dimostrazione.

1.3.6 Contrazione delle lunghezze

Consideriamo un righello a riposo nel sistema S , collocato lungo l'asse delle x , di estremi $x_2 > x_1$, e quindi di lunghezza $l = x_2 - x_1$. Calcoliamone ora la lunghezza nel sistema S' . Per le (1.3.18) si ha:

$$x_1 = \frac{x'_1 + vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad x_2 = \frac{x'_2 + vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Denotando $l' := x'_2 - x'_1$ la lunghezza del righello nel sistema S' , si ha immediatamente:

$$l = \frac{l'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

In analogia al tempo proprio, si chiama *lunghezza propria* del righello la sua lunghezza nel sistema di riferimento in cui esso è a riposo. Denotiamola sempre l . Dunque la sua lunghezza l' in un altro sistema S' vale:

$$l = l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Dunque muovendosi alla velocità v il righello si contrae del fattore $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$. Questo fenomeno prende il nome di *contrazione di Lorentz*. Ovviamente occorreranno velocità non trascurabili rispetto a c affinché questo fenomeno sia a sua volta non trascurabile. Poichè le trasformazioni di Lorentz si riducono all'identità nelle direzioni x, z ortogonali alla traslazione, il volume V di qualsiasi parallelepipedo, e quindi di qualsiasi corpo, si contrae del medesimo fattore:

$$V = V_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Ritroviamo ora la formula del tempo proprio tramite le trasformazioni di Lorentz. Consideriamo un orologio a riposo in S' , e due eventi che avvengono in un medesimo punto di S' , separati da un intervallo di tempo $t'_2 - t'_1$. Per le formule di trasformazione (1.3.18) l'intervallo di tempo corrispondente in S sarà:

$$t_2 - t_1 = \frac{t'_2 + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \frac{t'_1 + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{t'_2 - t'_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

che è la (1.10).

1.3.7 Formule di composizione delle velocità

Stabiliamo in questo paragrafo la generalizzazione della formula di composizione delle velocità che abbiamo visto in precedenza, limitandoci al solito a considerare il caso in cui il sistema mobile S' trasli rispetto al sistema fisso, per semplicità a velocità u lungo l'asse delle x . Sia al solito $v_x = \dot{x} = \frac{dx}{dt}$, componente della velocità lungo l'asse x del sistema fisso S , e $v'_x = \dot{x}' = \frac{dx'}{dt}$ la componente della velocità lungo l'asse x' del sistema mobile S' .

Proposizione 1.2 *Nelle ipotesi precedenti le formule di composizione delle velocità sono:*

$$v_x = \frac{v'_x + u}{1 + \frac{uv'_x}{c^2}}, \quad v_y = \frac{v'_y \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}{1 + \frac{uv'_x}{c^2}}, \quad v_z = \frac{v'_z \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}{1 + \frac{uv'_x}{c^2}}. \quad (1.3.20)$$

Dimostrazione

Per le trasformazioni di Lorentz (1.3) possiamo scrivere:

$$dx = \frac{dx' + v dt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad dy = dy', \quad dz = dz', \quad dt = \frac{dt' + \frac{v}{c^2} dx'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Dividendo le prime tre uguaglianze per la quarta, e ponendo al solito

$$\mathbf{v} = \frac{dP}{dt} = (v_x, v_y, v_z); \quad \mathbf{v}' = \frac{d(P - 0_1)}{dt} = (v'_x, v'_y, v'_z)$$

si trova, dividendo numeratore e denominatore per dt' :

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{dx}{dt} = \frac{dx' + udt'}{dt' + \frac{u}{c^2}dx'} = \\ &= \frac{v'_x + u}{1 + \frac{uv'_x}{c^2}} \end{aligned}$$

che è la prima delle (1.3.20). Le altre due seguono dal medesimo ragionamento. Ciò conclude la dimostrazione.

Osservazioni

1. Al limite per $c \rightarrow \infty$ le (1.3.20) diventano:

$$v_x = v'_x + u, \quad v_y = v'_y, \quad v_z = v'_z$$

che sono le consuete formule della cinematica non relativistica ($\mathbf{v}'$ velocità relativa, $\mathbf{u} = u\mathbf{i}$ velocità di trascinamento).

2. Un caso particolare delle formule precedente è quello in cui $v'_x = c, v'_y = v'_z = 0, u = c$. Si trova, come deve essere, $v_x = c$. In altri termini, se la velocità di un raggio di luce viene misurata da un sistema che viaggia anch'esso alla velocità della luce, la velocità assoluta della luce rispetto a un sistema a riposo è ancora c , e non $2c$. Equivalentemente: se due raggi di luce vengono inviati l'uno contro l'altro, la loro velocità relativa è ancora c , e non $2c$. Questo è l'aspetto meno intuitivo della teoria della relatività ristretta. D'altra parte la nostra intuizione è basata sulle nostre percezioni sensoriali, condotte a velocità del tutto trascurabili rispetto a quella della luce.