

Dinamica

Liberamente ispirata alla Parte I degli Elementi di Meccanica razionale
di Dario Graffi
e al Cap. I dei Metodi matematici della meccanica classica
di V.I.Arnold
a cura di Sandro Graffi
(ad uso degli studenti del corso di Fisica matematica II)

Chapter 1

Dinamica del punto

1.1 Forze, momenti, lavoro, potenziale

1.1.1 Forze. Quietè dei punti

La nozione di forza è intuitiva: si tratta di qualcosa di analogo agli sforzi muscolari che producono effetti meccanici, quali fare passare un corpo dalla quiete al moto, alterarne la velocità se già si muove, deformarlo se si tratta di un corpo deformabile; anche il peso può essere immaginato come qualcosa di analogo ad uno sforzo muscolare che tende a trascinare il corpo verso il basso. Si tratta di formalizzare matematicamente questa intuizione. Se esercitiamo uno sforzo muscolare, possiamo graduarne l'intensità, scegliere la direzione lungo la quale esercitarlo, e decidere il verso (spingere o tirare); inoltre gli effetti meccanici potranno essere anche molto diversi a seconda del punto sul quale lo sforzo muscolare viene esercitato. Basti pensare ad una leva: la potenza è proporzionale alla lunghezza del braccio, che è la distanza del punto d'applicazione della forza dal fulcro. Tutto ciò porta ad ammettere la seguente:

Definizione 1.1 (*Forza come vettore applicato*)

1. Per vettore applicato si intende una coppia (A, \mathbf{u}) , dove A è un punto dello spazio affine tridimensionale S_3 e \mathbf{u} un vettore in \mathbb{R}^3 dove abbiamo fissato la consueta base orientata.
2. Una forza è univocamente determinata da un vettore applicato (A, \mathbf{F}) . Il punto A si dice punto di applicazione della forza; il modulo $\|\mathbf{F}\| := F > 0$ di \mathbf{F} si dice intensità della forza, la direzione di \mathbf{F} linea d'azione della forza, e l'orientamento di \mathbf{F} verso della forza.

Esempio 1 (Forza elastica)

Sia P un punto in S_3 . Una forza (P, \mathbf{F}) applicata in P , di intensità $F = k\|P - O\|$,

diretta secondo $P - O$, con verso da P a O si dice *forza elastica* di costante elastica (o costante di richiamo) $k > 0$. Possiamo abbreviare scrivendo: $(P, \mathbf{F}) := -k(P - O)$.

Dalla definizione precedente risulta immediatamente che la somma di due vettori applicati è definibile se e solo se i due punti di applicazione coincidono. In tal caso si pone:

$$(P, \mathbf{u}_1) + (P, \mathbf{u}_2) := (P, \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) \quad (1.1.1)$$

dove $\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$ è l'usuale somma vettoriale. Pertanto:

Due forze possono essere sommate se e solo se hanno lo stesso punto di applicazione. In tal caso vale la formula:

$$(P, \mathbf{F}_1) + (P, \mathbf{F}_2) = (P, \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2) := (P, \mathbf{F}) \quad (1.1.2)$$

dove \mathbf{F} è l'usuale somma vettoriale $\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = \mathbf{F}$ (ottenibile, ad esempio, con la regola del parallelogramma). Il vettore applicato (P, \mathbf{F}) si dice *forza risultante* di $(P, \mathbf{F}_1), (P, \mathbf{F}_2)$.

Procedendo allo stesso modo possiamo definire la forza risultante di n forze $(P, \mathbf{F}_1) \dots, (P, \mathbf{F}_n)$ applicate al medesimo punto P :

$$((P, \mathbf{F}_1) + \dots + (P, \mathbf{F}_n) = (P, \mathbf{R}), \quad \mathbf{R} = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i$$

Il vettore \mathbf{R} si dice anche *vettore risultante* del sistema di forze $(P, \mathbf{F}_1), \dots, (P, \mathbf{F}_n)$.

Ammettiamo ora come postulato alcune importanti proprietà delle forze. Il primo è implicitamente contenuto nella nozione stessa di forza. Il secondo è motivato dalle esperienze più comuni.

Postulati sulle forze

- I *Per alterare lo stato di quiete o di moto di un punto materiale è necessario e sufficiente applicargli o rimuovergli almeno una forza non nulla.*
- II *Le variazioni dello stato di quiete o di moto di un punto dovute all'azione di un numero arbitrario di forze ad esso applicate non cambiano sostituendo alle forze la loro risultante.*

Possiamo quindi dare la seguente definizione

Definizione 1.2 (*Sistema di forze in equilibrio*) *Un sistema di forze si dice in equilibrio su un punto materiale P se, una volta applicatolo o rimosso da P , non ne altera le condizioni di quiete o di moto, indipendentemente da qualunque altro sistema di forze agisca su P medesimo.*

Ne segue:

Proposizione 1.1 (*Equilibrio e quiete*)

1. *Un sistema di forze applicate ad un punto materiale P è in equilibrio se e solo se la loro forza risultante è nulla.*
2. *Se un punto materiale P è in quiete in un certo istante, lo rimane se e solo se la risultante (P, \mathbf{F}) delle forze ad esso applicate è nulla, $\mathbf{F} = 0$.*

Osservazione

Caso particolare: il sistema composto da due forze uguali ed opposte in P è sempre in equilibrio. È fondamentale, per l'equilibrio e la quiete, che il punto di applicazione sia il medesimo; due forze con vettori uguali ed opposti ma punti di applicazione differenti non sono affatto in equilibrio! Si prenda una sbarra rigida, e si applichino agli estremi due forze con vettori uguali ed opposti. Il vettore risultante \mathbf{R} è nullo, ma il sistema si muove eccome!

Dunque il moto è generato dall'applicazione delle forze. La seconda legge della dinamica, che enunceremo in seguito, rende quantitativa questa affermazione.

1.1.2 Momenti. Quietè dei sistemi

A. Momenti

Sia dato un vettore applicato (A, \mathbf{u}) , $A \in S_3$, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$, ed un punto $O \in S_3$.

Definizione 1.3 *Dicesi momento del vettore applicato (A, \mathbf{u}) rispetto al punto O (detto polo) il vettore:*

$$\boldsymbol{\Omega}(O) := \mathbf{u} \wedge (O - A) = (A - O) \wedge \mathbf{u} \quad (1.1.3)$$

Se il vettore applicato è una forza (P, \mathbf{F}) , il suo momento $\boldsymbol{\Omega} = (P - O) \wedge \mathbf{F}$ si dice momento della forza rispetto al polo O ; detto α l'angolo fra $P - O$ e \mathbf{F} , la quantità $d := (P - O)\sin\alpha$, cioè la distanza fra O e la linea d'azione di \mathbf{F} , si dice *braccio* della forza. Allora $\Omega = Fd$ (il valore assoluto del momento vale l'intensità della forza per il braccio).

Le seguenti proprietà del momento di una forza (o, più in generale, del momento di un qualsiasi vettore applicato) sono evidenti:

1. Il momento di una forza (non nulla) rispetto ad un punto è nullo se e solo se il punto appartiene alla sua linea d'azione. Intatti il prodotto vettore $(P - O) \wedge \mathbf{F}$ è nullo in quel caso e solo in quello.

2. L'operazione di *scorrimento* di una forza (cioè lo spostamento del suo punto di applicazione lungo la linea d'azione) lascia invariato il momento di una forza. Infatti detto P' il nuovo punto di applicazione si ha

$$\boldsymbol{\Omega}'(O) = (P' - O) \wedge \mathbf{F} = (P' - P + P - O) \wedge \mathbf{F} = (P - O) \wedge \mathbf{F}$$

perchè i vettori $P' - P$ e \mathbf{F} sono paralleli.

Data una n -pla di vettori applicati $(A_1, \mathbf{u}_1), \dots, (A_n, \mathbf{u}_n)$, il suo *momento risultante* rispetto al punto O è per definizione:

$$\boldsymbol{\Omega}(O) := \sum_{k=1}^n \boldsymbol{\Omega}_k(O) = \sum_{k=1}^n (A_k - O) \wedge \mathbf{u}_k \quad (1.1.4)$$

Se i vettori applicati sono un sistema di forze $(P_k, \mathbf{F}_k) : k = 1, \dots, n$, il loro *momento risultante* rispetto al punto O è:

$$\boldsymbol{\Omega}(O) := \sum_{k=1}^n (P_k - O) \wedge \mathbf{F}_k \quad (1.1.5)$$

Osservazione

Se cambiamo il polo da O a $O_1 \neq O$ i momenti risultanti $\boldsymbol{\Omega}(O)$ e $\boldsymbol{\Omega}(O_1)$ stanno nella relazione seguente:

$$\boldsymbol{\Omega}(O_1) = \boldsymbol{\Omega}(O) + \mathbf{R} \wedge (O_1 - O) \quad (1.1.6)$$

Infatti:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Omega}(O_1) &= \sum_{k=1}^n (A_k - O_1) \wedge \mathbf{u}_k = \sum_{k=1}^n (A_k - O_1 + O - O) \wedge \mathbf{u}_k = \\ &= \sum_{k=1}^n (A_k - O) \wedge \mathbf{u}_k + (O - O_1) \wedge \sum_{k=1}^n \mathbf{u}_k = \boldsymbol{\Omega}(O) + (O - O_1) \wedge \mathbf{R} \end{aligned}$$

Pertanto, per l'arbitrarietà del vettore $O - O_1$: *un sistema di forze ha momento risultante indipendente dal polo di riduzione se e solo se il suo vettore risultante \mathbf{R} è nullo.*

B. Sistemi di punti. Forze esterne ed interne

Consideriamo non più un solo punto materiale, ma un sistema di punti materiali, che a priori possono essere infiniti (si pensi ad un corpo rigido, o a un corpo continuo elastico, o fluido). Useremo spesso la parola corpo come sinonimo di sistema di punti materiali; il caso considereremo maggiormente sarà quello di n punti materiali. Ad esso si riconducono, come vedremo, i corpi rigidi. Per i sistemi di punti si ammette senz'altro l'affermazione seguente

Postulato (*Principio di azione e reazione di Newton*)

Se sul punto materiale P agisce una forza dovuta all'azione di un altro punto Q allora P esercita su Q una forza uguale e contraria, con linea d'azione coincidente con la retta PQ .

Esempio

Se P esercita una forza di attrazione su Q , allora Q ne esercita una uguale e contraria su P .

Sia dato ora un generico punto $P_k : k = 1, \dots, n$ di un sistema di n punti materiali. Sia (P_k, \mathbf{F}_k) la risultante delle forze ad esso applicate. (P_k, \mathbf{F}_k) sarà la risultante fra le *forze interne*, cioè quelle dovute all'azione di tutti gli altri punti del sistema, e le *forze esterne*,

Definizione 1.4 *Si dicono forze interne agenti su P_k le forze dovute all'azione degli altri punti del sistema; forze esterne, tutte le altre. In formule:*

$$(P_k, \mathbf{F}_k) = (P_k, \mathbf{F}_k^{(i)} + \mathbf{F}_k^{(e)})$$

Per il principio di azione e reazione le forze interne e i loro momenti si cancellano due a due. Pertanto:

Lemma 1.1 *Il vettore risultante $\mathbf{R}^{(i)} := \sum_{k=1}^n \mathbf{F}_k^{(i)}$ e il momento risultante (rispetto ad un punto O qualsiasi) $\Omega^{(i)}(O) := \sum_{k=1}^n (P_k - O) \wedge \mathbf{F}_k^{(i)}$ sono entrambi nulli.*

Come nel caso del punto materiale, si può su questo punto dimostrare:

Proposizione 1.2 *Condizione necessaria per la quiete di un sistema di n punti materiali è l'annullarsi del vettore risultante e del momento risultante delle forze esterne.*

In formule

$$\mathbf{R}^{(e)} = 0, \quad \Omega^{(e)}(O) = 0 \quad (1.1.7)$$

Osservazione

Se ripensiamo all'esempio della sbarra ai cui estremi agiscono due forze con vettori uguali ed opposti, l'annullarsi del momento dà la condizione aggiuntiva per assicurare la quiete.

1.1.3 Lavoro

Una forza $(P, \mathbf{F}(P, \dot{P}; t))$ si dice *costante* se cambiando il punto d'applicazione l'intensità non cambia:

$$\mathbf{F}(P, \dot{P}; t) = \mathbf{F}(Q, \dot{Q}; t), \quad \forall Q \neq P$$

Sappiamo dalla fisica elementare che il *lavoro* di una forza costante è il "prodotto scalare della forza per lo spostamento", cioè:

$$L = \mathbf{F} \cdot (Q - P)$$

Vediamo di generalizzare questo concetto a forze e spostamenti arbitrari.

A. Leggi di forza

Sia data una forza (P, \mathbf{F}) . Assumiamo che il punto di applicazione P si sposti percorrendo una traiettoria assegnata γ in \mathbb{R}^3 di equazioni parametriche $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$, cioè sia $P = P(t) := (x(t), y(t), z(t))$. Equivalentemente, $SP(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$. In generale l'intensità \mathbf{F} dipenderà non solo da $P(t)$ ma anche da \dot{P} , cioè dalla velocità col quale il punto di applicazione percorre la curva, e anche esplicitamente dal tempo.

Per *legge di forza generale* intenderemo quindi un'applicazione

$$(P, \dot{P}, t) \mapsto (P, \mathbf{F}(P, \dot{P}, t)) \quad (1.1.8)$$

dal prodotto cartesiano dell'insieme delle curve regolari in \mathbb{R}^3 col tempo a valori nei vettori applicati in \mathbb{R}^3 .

Per *legge di forza generale autonoma* intenderemo invece un'applicazione

$$(P, \dot{P}) \mapsto (P, \mathbf{F}(P, \dot{P})) \quad (1.1.9)$$

dall'insieme delle curve regolari in \mathbb{R}^3 col tempo a valori nei vettori applicati in \mathbb{R}^3 .

Per *legge di forza posizionale non autonoma* intenderemo l'applicazione

$$(P, t) \mapsto (P, \mathbf{F}(P, t)) \quad (1.1.10)$$

Quest'ultima applicazione si dice anche *campo vettoriale applicato non autonomo*: ad ogni punto P , che possiamo sempre identificare con un vettore, e ad ogni istante t , associa il vettore applicato (P, \mathbf{F}) .

La *legge di forza posizionale* sarà l'applicazione

$$(P) \mapsto (P, \mathbf{F}(P)) \quad (1.1.11)$$

Allo stesso modo questa applicazione si dice anche *campo vettoriale autonomo*, o semplicemente *campo vettoriale*.

Esempi

1. Un esempio di legge di forza generale autonoma è la legge di attrito lineare: un punto che si muove su una curva soggetto a una forza proporzionale alla sua velocità con segno opposto. In formule:

$$(P, \dot{P}) \mapsto (P, -\lambda \dot{P}), \quad \lambda > 0$$

2. Un esempio di campo vettoriale è la forza peso: un punto materiale che si muove è soggetto a una forza costante. In formule:

$$P \mapsto (P, -m\mathbf{g})$$

B. Lavoro come integrale curvilineo

Sia assegnata la legge di forza generale $(P, \dot{P}, t) \mapsto (P, \mathbf{F}(P, \dot{P}, t))$ e sia assegnata la traiettoria γ del punto di applicazione P . Siano cioè assegnate le componenti $x(t), y(t), z(t) : t_1 \leq t \leq t_2$ del vettore $P(t) - 0$.

Definizione 1.5 *Il lavoro L_γ compiuto dalla forza $(P, \mathbf{F}(P, \dot{P}, t))$ nello spostamento del punto di applicazione P lungo γ alla velocità \dot{P} vale:*

$$L_\gamma := \int_\gamma \mathbf{F}(P, \dot{P}, t) \cdot dP \quad (1.1.12)$$

Osservazioni

1. Scriviamo per esteso la (1.1.12). Usando le decomposizioni sulla base canonica $\mathbf{F}(\cdot) = F_x(\cdot)\mathbf{i} + F_y(\cdot)\mathbf{j} + F_z(\cdot)\mathbf{k}$, $dP = [\dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k}] dt$ si trova:

$$\begin{aligned} L_\gamma &:= \int_{t_1}^{t_2} [F_x(x(t), y(t), z(t); \dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t); t)\dot{x}(t) \\ &+ F_y(x(t), y(t), z(t); \dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t); t)\dot{y}(t) + \\ &+ F_z(x(t), y(t), z(t); \dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t); t)\dot{z}(t)] dt \end{aligned} \quad (1.1.13)$$

In questo integrale, ripetiamo, le $X(t), y(t), z(t)$ sono le equazioni parametriche della traiettoria γ del punto di applicazione P e vanno pertanto considerate note.

2. Consideriamo il caso di una forza posizionale. L'espressione:

$$dL := \mathbf{F} \cdot dP = F_x(x, y, z) dx + F_y(x, y, z) dy + F_z(x, y, z) dz \quad (1.1.14)$$

si dice *lavoro elementare* o *infinitesimo* compiuto dalla forza (P, \mathbf{F}) quando il punto di applicazione fa uno spostamento infinitesimo da P a $P + dP$. Matematicamente, il lavoro elementare è un esempio di 1-forma differenziale. Allora

per le (1.1.12,1.1.13) si ha

$$L_\gamma = \int_\gamma dL_\gamma = \int_{t_1}^{t_2} [F_x(x(t), y(t), z(t))\dot{x}(t) + F_y(x(t), y(t), z(t))\dot{y}(t) + F_z(x(t), y(t), z(t))\dot{z}(t)] dt$$

dove l'integrale ultimo scritto è il consueto integrale curvilineo di una 1-forma differenziale.

3. Se lo spostamento del punto d'applicazione si mantiene sempre ortogonale alla linea d'azione della forza quest'ultima compie lavoro nullo. Questo è vero per la forza peso se il punto di applicazione viene spostato orizzontalmente. Un esempio notevole nel caso generale, di forza che compie sempre lavoro nullo pur dipendendo anche dalla velocità è la *forza di Lorentz* (P, \mathbf{F}_L) , cioè la forza che un campo magnetico $P \mapsto (P, \mathbf{H})$ esercita su un corpuscolo elettrico di carica e . Si ha infatti

$$(P, \mathbf{F}_L) = (P, \dot{P} \wedge \mathbf{H}) = (P, dP \wedge \mathbf{H}dt)$$

Quindi si ha sempre $\mathbf{F}_L \perp dP$ e pertanto $L_\gamma = 0 \forall \gamma$.

1.1.4 Potenziale

Consideriamo una legge di forza posizionale autonoma $(P, \mathbf{F}(P))$ (campo di forze posizionali).

Definizione 1.6 *Se esiste una funzione differenziabile $V : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ tale che il lavoro elementare dL è l'opposto del differenziale di V , cioè se*

$$dL = -dV \iff F_x dx + F_y dy + F_z dz = -\frac{\partial V}{\partial x} dx - \frac{\partial V}{\partial y} dy - \frac{\partial V}{\partial z} dz \quad (1.1.15)$$

allora il campo di forze $(P, \mathbf{F}(P))$ si dice conservativo. La funzione V si dice potenziale del campo di forze.

Esempi

1. La forza peso: $(P, \mathbf{F}) = (P, -mg)$. Allora $V = mgz$. Poichè di solito si orienta l'asse verticale verso l'alto, la convenzione del segno $-$ sul potenziale corrisponde ad assegnare, per la forza peso, valori più elevati del potenziale a quote più elevate.
2. La forza elastica: $(P, \mathbf{F}) = (P, -\lambda(P - O))$, $\lambda > 0$. Allora

$$V = \frac{\lambda}{2} \|P - O\|^2 = \frac{\lambda}{2} (x^2 + y^2 + z^2) \quad (1.1.16)$$

Osservazione Introduciamo l'operatore differenziale detto *gradiente* che ad ogni funzione $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ associa le componenti del suo differenziale, calcolate in P :

$$f(P) \mapsto \nabla_P f(P) := \left(\frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{k} \right) \quad (1.1.17)$$

Allora condizione di potenzialità (1.1.15) del campo di forze posizionale $(P, \mathbf{F}(P))$ si riscrive così:

$$\mathbf{F} = -\nabla_P V(P) \quad (1.1.18)$$

C. Condizioni affinché un campo di forze sia conservativo.

Teorema 1.1 *Un campo di vettori applicati (P, \mathbf{F}) è conservativo se e solo se il suo lavoro su una curva qualsiasi γ di estremi $P_1 \in \mathbb{R}^3, P_2 \in \mathbb{R}^3$ dipende soltanto dagli estremi e non dalla curva, cioè se L_γ assume lo stesso valore se calcolato lungo ogni curva γ aventi gli estremi P_1 e P_2 .*

Dimostrazione.

Sia $P_0 - O := (x(t_0), y(t_0), z(t_0))$, $P - O := (x(t), y(t), z(t))$. Poniamo:

$$V := - \int_{P_0}^P \mathbf{F} \cdot dP = - \int_{t_0}^{t_1} [F_x(\cdot) \dot{x}(t) + F_y(\cdot) \dot{y}(t) + F_z(\cdot) \dot{z}(t)] dt$$

Il lavoro del campo (P, \mathbf{F}) è $\int_{P_0}^P \mathbf{F} \cdot dP$. Se non dipende dalla curva, l'integrale è funzione del solo estremo superiore e V è in effetti una funzione del solo punto P , $V = V(P)$. Verifichiamo ora che in effetti si ha

$$\mathbf{F} = -\nabla_P V(P)$$

cioè il campo è conservativo e V è la sua energia potenziale. (È del tutto evidente che l'energia potenziale è definita a meno dell'addizione di una costante additiva $V(P_0)$, che si può scegliere arbitrariamente). Siccome il punto P è arbitrario, scegliamolo dapprima sotto la forma $P - O = (x(t), y_0 = y(t_0), z_0 = z(t_0))$. Allora $\dot{y}(t) = \dot{z}(t) = 0$ e si trova:

$$V = - \int_{t_0}^t F_x(x(\tau), x_0, y_0) \dot{x}(\tau) d\tau$$

Eseguiamo la sostituzione $x(\tau) = y$, $\tau = x^{-1}(y)$. Si ha $dy = \dot{x}(\tau) d\tau$, $x(\tau_0) = y_0$, $x(t) =$ e pertanto:

$$V = - \int_{t_0}^t F_x(x(\tau), y_0, z_0) \dot{x}(\tau) d\tau = - \int_{y_0}^x F_x(y, y_0, z_0) dy$$

e quindi per il teorema fondamentale del calcolo integrale

$$F_x(x, y_0, z_0) = - \frac{\partial V(x, y_0, z_0)}{\partial x}.$$

Scegliendo poi successivamente P sotto la forma $P-O = (x_0 = x(t_0), y(t), z_0 = z(t_0))$, $P-O = (x_0 = x(t_0), y_0 = y(t_0), z(t))$ si trova

$$F_y(x_0, y, z_0) = -\frac{\partial V(x_0, y, z_0)}{\partial y}, \quad F_z(x_0, y_0, z) = -\frac{\partial V(x_0, y_0, z)}{\partial z}.$$

Data l'arbitrarietà di P_0 possiamo concludere che $\mathbf{F} = -\nabla_P V(P)$.

Inversamente, (P, \mathbf{F}) un campo di forze conservativo e sia V la sua energia potenziale.

Allora si ha

$$\int_{\gamma} dL = -\int_{P_0}^P dV = -V(P) + V(P_0)$$

cioè il lavoro non dipende dalla curva, e ciò conclude la dimostrazione del Teorema.

Osservazione.

Notiamo che se l'integrale scritto sopra non dipende dal cammino allora l'integrale fatto lungo un cammino chiuso è nullo. E' facile anche mostrare il viceversa. Dunque una condizione necessaria e sufficiente affinché il campo \mathbf{F} sia conservativo è anche che il lavoro lungo un qualsiasi cammino chiuso sia uguale a zero.

Esercizio.

Mostrare che il campo $(P, \mathbf{F}) = (F_x, F_y) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ con $F_x = y$, $F_y = -x$ non è conservativo.

Soluzione

Consideriamo due curve distinte γ_1 e γ_2 congiungenti i due punti $P_0 = (0, 0)$ e $P_1 = (0, 1)$ nel piano (x, y) come segue: γ_1 unisce P_0 a P_1 con un segmento verticale; $\gamma_2 = \gamma_2' \cup \gamma_2''$, dove γ_2' è il segmento che congiunge P_0 con il punto $(0, -1)$, mentre γ_2'' congiunge $(0, -1)$ con P_1 per mezzo della semicirconferenza di raggio unitario, centro $(0, 0)$, passante per $(-1, 0)$. Allora si ha

$$\int_{\gamma_1} \mathbf{F} \cdot dP = \int_{\gamma_1} [y dx - x dy] = -\int_{\gamma_1} x dy = -x y \Big|_{(0,0)}^{(0,1)} = 0$$

Analogamente si trova

$$\int_{\gamma_2'} \mathbf{F} \cdot dP = 0$$

Per calcolare il lavoro del campo lungo γ_2'' passiamo a coordinate polari: $x = \cos\varphi$, $y = \sin\varphi$. Quando P percorre la curva γ_2'' l'angolo φ varia fra $3\pi/2$ e $\pi/2$. D'altra parte, $dx = -\sin\varphi d\varphi$, $dy = \cos\varphi d\varphi$, da cui $y dx - x dy = -(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi) d\varphi$.

Otteniamo quindi:

$$\int_{\gamma_2''} \mathbf{F} \cdot dP = -\int_{3\pi/2}^{\pi/2} d\varphi = \pi.$$

Dunque il lavoro dipende dalla curva e ciò dimostra l'asserto.

Esercizio.

Stabilire se ammette potenziale il campo (P, \mathbf{F}) , definito sul piano \mathbb{R}^2 privato dell'origine $(0, 0)$, le cui componenti sono

$$F_x = \frac{y}{(x^2 + y^2)} \quad F_y = -\frac{x}{(x^2 + y^2)}$$

Dimostrare che una condizione necessaria e sufficiente affinché questo campo ammetta potenziale è che il suo lavoro su un cammino chiuso sia nullo.

Soluzione

Possiamo verificare facilmente che questo campo non è conservativo calcolando il suo lavoro lungo la circonferenza unitaria con centro l'origine, denotata sempre γ . Infatti, passando come sopra alle coordinate polari $x = \cos\varphi$, $y = \sin\varphi$ si trova

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma} \mathbf{F} \cdot dP &= \oint_{\gamma} \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} = \\ &= - \oint_{\gamma} \frac{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi}{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi} d\varphi = - \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi \neq 0 \end{aligned}$$

D'altra parte se restringiamo il dominio di definizione del campo di forze ad un qualsiasi dominio semplicemente connesso che esclude l'origine si può dimostrare che il lavoro lungo qualsiasi curva ivi compresa sarà nullo. Il campo di forze ammetterà dunque potenziale.

1.2 Le leggi della dinamica e le grandezze meccaniche fondamentali

Le tre leggi della dinamica, dette anche leggi di Newton¹ sono postulati basati sull'esperienza.

¹Isaac Newton, nato nella contea di Lincoln nel 1642, morto a Londra nel 1727. Fu Professore di Geometria all'Università di Cambridge, ed in seguito Direttore della Zecca a Londra. Le leggi sono enunciate nel trattato *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*, apparso nel 1687. L'altro suo contributo assolutamente fondamentale alla scienza è l'elaborazione del calcolo infinitesimale, che ottenne contemporaneamente a Gottfried Wilhelm Leibnitz (Lipsia 1646- Hannover 1716) (e in aspra concorrenza con lui). Elaborò anche la teoria corpuscolare della luce. Le impostazioni di Newton e di Leibnitz erano differenti. Il calcolo infinitesimale come è insegnato oggi deriva da quella di Leibnitz e dei suoi allievi e continuatori (principalmente Johann (Giovanni) Bernoulli (Basilea 1667-Basilea 1748) e Leonhard Euler (italianizzato in Leonardo Eulero: Basilea 1707-S.Pietroburgo 1783).

1.2.1 Le leggi

A. Enunciato

La prima legge è la legge d'inerzia, enunciata per la prima volta con chiarezza da Galileo² in una pagina famosa del *Dialogo dei massimi sistemi* (1632). Noi la enunceremo così (si noti che nell'enunciato delle tre leggi che seguono le nozioni di corpo e punto materiale sono identificate):

LEGGE I: (Legge d'inerzia)

Esistono degli osservatori, detti inerziali, rispetto ai quali un corpo P qualsiasi in assenza di forze ad esso applicate si muove di moto rettilineo uniforme.

Conseguenza di questa legge è che in un sistema inerziale un corpo può variare la propria velocità solo se sottoposto all'azione di una forza, come peraltro avevamo già postulato. La seconda legge fornisce l'espressione quantitativa di tale variazione.

LEGGE II: (Legge del moto)

In un osservatore inerziale la forza risultante (P, \mathbf{F}) che agisce su un corpo P di massa m gli imprime un'accelerazione ad essa proporzionale, e inversamente proporzionale alla massa. In formule:

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}}{m} \quad \text{ovvero} \quad \mathbf{F} = m\mathbf{a} \quad (1.2.19)$$

L'affermazione della proporzionalità fra forza e accelerazione segna il distacco definitivo dalla scienza del moto antica, dominata dalla concezione aristotelica della proporzionalità fra forza impressa al corpo e velocità da quest'ultimo acquisita.³

²Galileo Galilei (Pisa 1564-Firenze 1642). Studiò a Pisa, fu poi Professore di matematica all'Università di Padova dal 1593 al 1610. In seguito Matematico presso la corte Granducale a Firenze. Scopri i satelliti di Giove, gli anelli di Saturno, le fasi di Venere; le leggi della caduta dei gravi e dell'isocronia del pendolo. A lui si attribuisce anche la codificazione del metodo sperimentale. Convinto sostenitore della realtà fisica del sistema eliocentrico copernicano, fu ammonito nel 1616 dall'Inquisizione a non occuparsi mai più della questione. La Chiesa aveva infatti decretato contraria alle Sacre Scritture l'affermazione, *come fatto vero*, che la terra orbitasse attorno al Sole (mentre consentiva di ammetterla *ex suppositione*, cioè in via di mera ipotesi matematica). Nel 1632 pubblicò il *Dialogo dei massimi sistemi* ritenendo di non essere venuto meno all'ammonizione. Fu invece processato dall'Inquisizione, e condannato non solo all'abiura, che pronunciò il 22 giugno 1633, ma anche alla reclusione perpetua. Gli fu concesso di scontarla nella propria abitazione di Arcetri. Negli ultimi anni di vita redasse i *Discorsi e dimostrazioni matematiche sopra due nuove scienze*.

³Ci si può domandare come mai Aristotele, scienziato rigoroso che cercava di seguire il metodo sperimentale, sia arrivato alla conclusione sbagliata mentre Newton sia arrivato a quella giusta senza fare esperienze dirette. La risposta migliore, a mio parere, è contenuta in un brano della prolusione al primo corso di Matematica tenutosi all'École Normale Supérieure a Parigi, letta da J.L.Lagrange, con a fianco P.S.Laplace (si dirà in seguito di questi due grandi matematici) il 1 piovoso dell'anno III (20 gennaio 1795):

È negli spazi celesti che le leggi del moto si osservano con maggior precisione. Sono tante le circostanze che ne complicano i risultati sulla terra, che è difficile districarsene, e più difficile ancora sottometerle al calcolo. Ma i corpi del sistema solare sottoposti all'azione di una forza universale, di cui è facile calcolare gli effetti, sono perturbati, nei

LEGGE III (Principio di azione e reazione)

Si tratta del principio di azione e reazione già enunciato in precedenza, che si assume valido in condizioni sia di quiete che di moto.

Osservazioni

1. L'enunciato da noi scelto delle leggi del moto è quello classico, o *assoluto*. Esso riflette la concezione assoluta delle forze che agiscono su un corpo qualsiasi, cioè l'ipotesi che esse non dipendano dal sistema di riferimento e siano dovute sempre e comunque ad azioni dirette (per contatto), o a distanza, di altri corpi. Ne segue che le forze che agiscono su un corpo dovranno tendere a zero quando le distanze fra questo e tutti gli altri corpi tendono all'infinito. Un sistema inerziale sarà quindi quello in cui le distanze fra i corpi in esame e tutti gli altri si possono considerare infinite. Esempi sono i sistemi stellari e tutti quelli a loro equivalenti. Sistemi stellari sono quelli con origine in una stella fissa e con assi orientati verso altre stelle fisse.
2. La II legge dà una possibile definizione di massa di un corpo (punto materiale, in questa circostanza): è la costante di proporzionalità fra massa e accelerazione. Più grande la massa, più piccola l'accelerazione impressa al corpo dalla forza.

B: Seconda legge ed equazioni differenziali

Consideriamo un punto materiale P di massa m in moto sotto l'azione di legge di forza generale nel senso della (2.11). Riferiamo il moto ad un sistema inerziale. Sia $P(t) - O$ la posizione del punto. La seconda legge dà:

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}(P, \dot{P}, t)$$

da cui, per definizione di accelerazione:

$$m \frac{d^2 P}{dt^2} = \mathbf{F}(P, \dot{P}, t) \quad (1.2.20)$$

loro moti reciproci, solo da forze ben note, e sempre così piccole affinché l'analisi possa determinare le variazioni che il trascorrere del tempo ha prodotto e produrrà ancora in questo sistema.

Newton infatti trovò la sua legge cercando di dedurre la I legge di Keplero sulle orbite ellittiche dei pianeti (che ricaveremo in seguito) a partire dalla legge di attrazione universale secondo gli inversi dei quadrati delle distanze (nota fin dall'antichità, ed infatti egli stesso la attribuisce a Numa Pompilio. La leggenda della mela compare per la prima volta nelle *Lettere filosofiche* di Voltaire, il massimo divulgatore delle idee di Newton negli ambienti illuministici francesi). Aristotele invece eseguiva esperienze terrestri in cui doveva tenere conto dell'attrito e di tanti altri fattori che complicavano il fenomeno oggetto di studio.

Passando poi alle componenti cartesiane otteniamo:

$$\begin{cases} m\ddot{x}(t) = F_x(x(t), y(t), z(t); \dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t); t) \\ m\ddot{y}(t) = F_y(x(t), y(t), z(t); \dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t); t) \\ m\ddot{z}(t) = F_z(x(t), y(t), z(t); \dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t); t) \end{cases} \quad (1.2.21)$$

Si tratta di un *sistema di tre equazioni differenziali del secondo ordine*, (secondo perchè la derivata di ordine più elevato è la derivata seconda) scritto in forma normale, cioè risolto rispetto alle derivate di ordine più elevato. Le incognite sono le tre funzioni $x(t), y(t), z(t)$, cioè le componenti cartesiane di $P(t) - O$, come funzioni del tempo t . A questo proposito notiamo quanto segue:

Assumiamo che le funzioni F_x, F_y, F_z siano funzioni almeno Lipschitziane di tutti i loro argomenti (ciò sarà in particolare vero se queste funzioni sono sempre continue assieme alle loro derivate parziali prime)⁴. Sia $t_0 \in \mathbb{R}$ un istante di tempo fissato arbitrario, dal quale misuriamo il *futuro* ($t > t_0$) e il *passato* ($t < t_0$). t_0 si dice *istante iniziale*. Dal teorema di esistenza e unicità di Cauchy per le equazioni differenziali ordinarie, valido in queste condizioni, segue il risultato fondamentale seguente:

Teorema 1.2 (*Esistenza e unicità del moto*)

Siano i punti $P_0 := (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ e $\dot{P}_0 := (v_{0x}, v_{0y}, v_{0z}) \in \mathbb{R}^3$ arbitrari. Allora nelle ipotesi precedenti su \mathbf{F} esiste $\delta(P_0, \dot{P}_0, t_0) > 0$ tale che nell'intervallo aperto $I_\delta := (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ il sistema di equazioni differenziali (1.2.21) ammette una ed una sola soluzione $x(t), y(t), z(t)$ tale che

$$\begin{cases} x(t_0) = x_0 \\ y(t_0) = y_0 \\ z(t_0) = z_0 \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x}(t_0) = v_{0x} \\ \dot{y}(t_0) = v_{0y} \\ \dot{z}(t_0) = v_{0z} \end{cases} \quad (1.2.22)$$

Osservazioni

1. Le (1.2.22) si dicono *condizioni iniziali*. Dunque il teorema afferma che esiste una ed una sola soluzione del sistema che verifica ogni data scelta di condizioni iniziali.
2. Il teorema sopra enunciato è *locale* nel tempo, cioè assicura l'esistenza e l'unicità delle soluzione solo per un intervallo di tempo limitato. Sotto ipotesi più particolari sulle componenti di \mathbf{F} si può dimostrare che la soluzione è in effetti *globale* nel tempo, cioè esiste $\forall t \in \mathbb{R}$. Salvo avvertenza contraria, supporremo che questo sia sempre il caso. Vedremo però in seguito un esempio in cui manca

⁴Una funzione $f(x) : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è *Lipschitziana* in I se esiste una costante $C > 0$ tale che, $\forall (x, y) \in I$: $|f(x) - f(y)| < C|x - y|$, cioè se il rapporto incrementale è limitato. Una funzione Lipschitziana è continua, ma il viceversa non è vero. Se la derivata prima esiste in I , la funzione è certamente ivi Lipschitziana perchè ciò equivale all'esistenza del limite del rapporto incrementale.

l'esistenza globale, perchè la soluzione corrisponde ad un moto che raggiunge l'infinito in un tempo finito.

3. Fissare P_0 e \dot{P}_0 , cioè le condizioni iniziali, significa fissare posizione e velocità del punto mobile all'istante iniziale. Il teorema afferma quindi che il moto è univocamente determinato, nel futuro e nel passato, se e solo se oltre alla legge di forza sono note anche la posizione e la velocità iniziali. Posizione e velocità di un punto definiscono il suo *stato*, posizioni e velocità di ogni punto di un sistema definiscono lo *stato del sistema*. Quindi la seconda legge della dinamica afferma che, conosciuto lo stato del sistema in un istante arbitrario, sarà determinato lo stato in ogni altro istante successivo e precedente. Il cosiddetto *determinismo* della meccanica classica consiste esattamente in tale affermazione.⁵
4. Il passaggio dalla formulazione della II legge come proporzionalità fra forza e accelerazione e la formulazione in termini di equazioni differenziali con condizioni iniziali non è dovuto a Newton. Esso ha richiesto più di cinquant'anni dopo la pubblicazione dei *Principia*. La traduzione della II legge in termini delle equazioni differenziali (1.2.21) corredata dalle condizioni iniziali (1.2.22) è dovuta a Eulero (1740), nella sua soluzione del problema dei due corpi che presenteremo qui di seguito.

1.2.2 Esempi

1. *La caduta libera dei gravi*. In questo caso la legge di forza è (P, \mathbf{F}) ; $\mathbf{F} = -mg\mathbf{k}$. Pertanto le equazioni differenziali (1.2.21) generate dalla II legge diventano:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = 0 \\ m\ddot{y} = 0 \\ m\ddot{z} = -mg \end{cases} \quad (1.2.23)$$

Scegliamo le condizioni iniziali che descrivano la caduta lungo la verticale di un grave che parte da fermo. La verticale è collocata lungo l'asse z . Scegliamo l'istante iniziale nell'origine dei tempi: $t_0 = 0$. Esse saranno quindi

$$x_0 = y_0 = 0; z_0 = h; \quad \dot{x}(0) = \dot{y}(0) = \dot{z}(0) = 0$$

⁵Qui si sta ammettendo implicitamente che posizione e velocità di un punto qualsiasi possano essere conosciute con precisione arbitraria in ogni istante. La meccanica quantistica nega alla radice questa possibilità (principio di indeterminazione) ed è in questo senso indeterministica.

La risoluzione, o integrazione⁶, delle equazioni (1.2.23) è immediata:

$$\begin{cases} x(t) = a_x t + b_x \\ y(t) = a_y t + b_y \\ z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + a_z t + b_z \end{cases}$$

dove $a_x, b_x, a_y, b_y, a_z, b_z$ sono costanti. Queste soluzioni determinano tutti i possibili moti che il punto può fare; quello particolare che cerchiamo va determinato tramite le condizioni iniziali (in gergo: imponendo le condizioni iniziali). Se infatti si richiede che la soluzione soddisfi le condizioni iniziali si trova: $x(0) = 0 = b_x$; $\dot{x}(0) = 0 = a_x$; $y(0) = 0 = b_y$; $\dot{y}(0) = 0 = a_y$; $z(0) = h = b_z$; $\dot{z}(0) = 0 = a_z$. Riassumendo: $a_x = b_x = a_y = b_y = a_z = 0$; $b_z = h$. Quindi la soluzione unica, cioè il moto che cercavamo, sarà:

$$x(t) = y(t) = 0; \quad z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + h$$

che è la legge di Galileo sulla caduta dei gravi. La traiettoria è l'asse z .

Immaginiamo ora che all'istante iniziale il grave possieda una certa velocità, ad esempio diretta lungo l'asse delle x (si pensi ad una bomba gettata da un aereo).

In questo caso avremo $a_x \neq 0$ e il moto corrispondente sarà:

$$x(t) = a_x t; \quad y(t) = 0; \quad z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + h$$

Il moto si svolge dunque nel piano xz . Poichè $t = \frac{x}{a_x}$ la traiettoria sarà

$$z = -\frac{g}{2a_x^2}x^2 + h$$

Quando il grave tocca terra ($z = 0$) sarà $gx^2 = 2a_x^2h$ da cui, facendo $a_x > 0$,

$$x = a_x \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

2. Caduta dei gravi tendo conto della resistenza dell'aria. Nel problema precedente abbiamo trascurato la resistenza dell'aria. Si ammette che la resistenza dell'aria equivalga ad una forza che agisce sul grave che cade, proporzionale alla sua velocità ma con segno opposto (forza che si oppone al moto), e alla sua massa. Questa forza di resistenza si aggiunge alla gravità. La forza risultante che agisce sul grave sarà $(P, \mathbf{F}) = (P, -m\mathbf{f}g - \lambda m\dot{P})$, $\lambda > 0$ e quindi l'equazione del moto diventa:

$$m\ddot{z} = -mg - \lambda m\dot{z} \implies \ddot{z} + \lambda\dot{z} + g = 0.$$

⁶La locuzione *integrare un'equazione differenziale* è del tutto equivalente alla locuzione risolvere un'equazione differenziale.

Ad essa associamo le condizioni iniziali di caduta verticale $z(0) = z_0; \dot{z}(0) = v_0;$
 $y(0) = \dot{y}(0) = z(0) = \dot{z}(0) = 0.$

Questa è un'equazione differenziale del primo ordine nell'incognita \dot{z} . Per integrarla, riscriviamola così:

$$\frac{d\dot{z}}{dt} = -g - \lambda\dot{z}$$

Un'equazione *del primo ordine autonoma* come questa la si può integrare tramite il *metodo della separazione delle variabili*. Ciò significa portare tutta la dipendenza dalla variabile t in un membro e tutta la dipendenza della funzione \dot{z} nell'altro. Si ha dunque, moltiplicando per dt e dividendo per $g - \lambda\dot{z}$

$$\frac{d\dot{z}}{-g - \lambda\dot{z}} = dt$$

Integriamo ora ambo i membri rispetto alla loro variabile. Otterremo:

$$-\frac{1}{\lambda}\log(g + \lambda\dot{z}) = t + C \implies \log(g + \lambda\dot{z}) = -\lambda(t + C) \implies g + \lambda\dot{z} = e^{-\lambda(t+C)}$$

Imponendo la condizione iniziale $\dot{z}(0) = 0$ troviamo:

$$g + \lambda v_0 = e^{-\lambda C} \implies C = -\frac{1}{\lambda}\log(g + \lambda v_0)$$

da cui

$$\begin{aligned} \log \frac{g + \lambda\dot{z}}{g + \lambda v_0} = -\lambda t &\implies g + \lambda\dot{z} = (g + \lambda v_0)e^{-\lambda t} \implies \\ \dot{z} = -\frac{g}{\lambda} + \frac{g + \lambda v_0}{\lambda}e^{-\lambda t} &\implies z(t) = -\frac{g}{\lambda}t - \frac{g + \lambda v_0}{\lambda^2}e^{-\lambda t} + D \end{aligned}$$

Per determinare la costante D , imponiamo la condizione $z(0) = z_0$. Si trova:

$$D = z_0 + \frac{g + \lambda v_0}{\lambda^2} \implies z(t) = -\frac{g}{\lambda}t - \left(\frac{g + \lambda v_0}{\lambda^2} - 1\right)e^{-\lambda t}$$

Poichè $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-\lambda t} = 0$, se si aspetta abbastanza a lungo ($t \gg \lambda$) il secondo addendo sia in $z(t)$ che in $\dot{z}(t)$ diventa trascurabile e il moto diventa pressochè uniforme:

$$z(t) = -\frac{g}{\lambda}t, \quad \dot{z} = -\frac{g}{\lambda}$$

L'interpretazione meccanica è la seguente: alla lunga la resistenza dell'aria, che fa diminuire la velocità, e il peso, che la fa aumentare, si faranno equilibrio. Infatti, imponiamo l'equilibrio fra forza peso e resistenza dell'aria. Otteniamo:

$$-mg - \lambda\dot{z} = 0$$

da cui $\dot{z} = -\frac{g}{\lambda}$.

3. *Le oscillazioni lineari.* Consideriamo, per semplicità nel piano \mathbb{R}^2 , un punto di massa m mobile sotto l'azione di una forza di richiamo elastica proporzionale alla sua distanza dall'origine con verso opposto (in gergo, una *molla*). La legge di forza sarà:

$$(P, \mathbf{F}) := -k(P - O) = -k(x\mathbf{i} + y\mathbf{j}), \quad k > 0$$

La costante positiva k si dice *costante di richiamo*. Le equazioni (1.2.21) diventano qui:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -kx \\ m\ddot{y} = -ky \end{cases} \quad (1.2.24)$$

e le condizioni iniziali:

$$\begin{cases} x(t_0) = x_0 \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x}(t_0) = v_{0x} \\ \dot{y}(t_0) = v_{0y} \end{cases} \quad (1.2.25)$$

Per l'integrazione, possiamo limitarci a considerare la prima delle (1.2.24), perchè si tratta di due equazioni identiche. Essa è nota anche come l'equazione del *moto armonico*⁷.

Le (1.2.24) sono equazioni differenziali *lineari*. Ciò significa che se $x_1(t)$, $x_2(t)$ risolvono (ad esempio) la prima allora qualsiasi loro combinazione lineare a coefficienti costanti $\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)$, $\alpha \in \mathbb{C}$, $\beta \in \mathbb{C}$ è ancora una soluzione. Infatti:

$$\begin{aligned} m \frac{d^2}{dt^2}(\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)) &= \alpha m \ddot{x}_1(t) + \beta m \ddot{x}_2(t) = \\ &= -\alpha k x_1(t) - \beta k x_2(t) = -k(\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)). \end{aligned}$$

Cerchiamone delle soluzioni sotto la forma:

$$x(t) = e^{\lambda t}, \lambda \in \mathbb{C} \quad (1.2.26)$$

Sostituendo nell'equazione troviamo

$$(m\lambda^2 + k)e^{\lambda t} = 0$$

Pertanto la (1.2.26) soddisfa la (1.2.24) se e solo se λ soddisfa la corrispondente *equazione caratteristica*

$$m\lambda^2 + k = 0 \quad (1.2.27)$$

Questa è un'equazione algebrica di secondo grado le cui soluzioni sono

$$\lambda_{1,2} = \pm i\omega, \quad \omega := \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (1.2.28)$$

⁷Oscillatore armonico e oscillatore lineare sono sinonimi.

Pertanto le funzioni $x_1(t) := e^{i\omega t}$, $x_2 := e^{-i\omega t}$ sono soluzione, e per la linearità anche la funzione

$$x(t) := \alpha_1 e^{i\omega t} + \alpha_2 e^{-i\omega t}, \quad \forall \alpha_1 \in \mathbb{C}, \alpha_2 \in \mathbb{C} \quad (1.2.29)$$

è una soluzione. Si può dimostrare che in effetti la (1.2.29) è l'*integrale generale* dell'equazione, nel senso che ogni soluzione può essere scritta sotto questa forma. Per determinare il moto corrispondente alle assegnate condizioni iniziali (1.2.25) imponiamo che la soluzione generale (1.2.29) soddisfi le condizioni iniziali (1.2.25). Poiché $x(0) = \alpha_1 + \alpha_2$, $\dot{x}(0) = i\omega\alpha_1 - i\omega\alpha_2$ otteniamo il sistema lineare non omogeneo di due equazioni nelle incognite α_1, α_2 (abbreviamo v_{0x} con v_0):

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = x_0 \\ i\omega\alpha_1 - i\omega\alpha_2 = v_0 \end{cases}$$

Poiché $x_0 \in \mathbb{R}$, $v_0 \in \mathbb{R}$, $\omega \in \mathbb{R}$ le due equazioni precedenti implicano $\bar{\alpha}_2 = \alpha_1$. Pertanto, dalla prima e dalla seconda:

$$\Re\alpha_1 = \frac{x_0}{2}, \quad \Im\alpha_1 = -\frac{v_0}{2\omega}$$

e quindi:

$$x(t) = \left(\frac{x_0}{2} - i\frac{v_0}{2\omega}\right) e^{i\omega t} + \left(\frac{x_0}{2} + i\frac{v_0}{2\omega}\right) e^{-i\omega t} = x_0 \cos\omega t + \frac{v_0}{2\omega} \sin\omega t$$

dove l'ultimo passaggio segue dalle formule di Eulero. Si verifica subito che in effetti $x(0) = x_0$ e $\dot{x}(0) = v_0$. Ridefinendo le costanti iniziali nel modo seguente:

$$x_0 = A \cos\varphi, \quad v_0 = -2\omega A \sin\varphi \iff A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{2\omega^2}}, \quad \varphi = -\operatorname{arctg} \frac{v_0}{\omega x_0} \quad (1.2.30)$$

si ottiene

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi) \quad (1.2.31)$$

Questa è la rappresentazione più consueta delle soluzioni dell'equazione, dette anche *oscillazioni lineari* o *armoniche*, di *ampiezza* A , *pulsazione* ω , fase φ . L'oscillazione è un moto periodico, di *periodo* $T := \frac{2\pi}{\omega}$: infatti $x(t+T) = A \cos(\omega t + 2\pi + \varphi) = x(t)$; la *frequenza* ν dell'oscillazione vale l'inverso del periodo, e quindi $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$ ovvero $\omega = 2\pi\nu$. Si noti che *il periodo delle oscillazioni non dipende dalle condizioni iniziali*, ovvero tutti i modi oscillatori hanno lo stesso periodo. È questa la proprietà di *isocronia* delle oscillazioni lineari, o legge di Galileo.

Ritornando alle oscillazioni lineari nel piano, potremo scrivere le soluzioni delle equazioni (1.2.24) nel modo seguente:

$$\begin{cases} x(t) = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) \\ y(t) = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2) \end{cases} \quad (1.2.32)$$

dove le ampiezze A_1, A_2 e le fasi φ_1, φ_2 sono legate alle condizioni iniziali (1.2.25) dalla relazione (1.2.30). Queste sono le equazioni parametriche della traiettoria descritta da P . Dunque le proiezioni di P lungo gli assi coordinati descrivono oscillazioni armoniche della medesima pulsazione. Consideriamo alcuni casi particolari.

1. $\varphi_1 = \varphi_2 + \pi/2$. In tal caso le oscillazioni si dicono *in fase*.
2. $\varphi_1 = \varphi_2 + 3\pi/2$ In tal caso le oscillazioni si dicono in *opposizione di fase*.

In ambedue i casi la traiettoria è l'ellisse:

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} = 1$$

3. Ampiezze sono uguali, $A_1 = A_2$, oscillazioni sono in fase o in opposizione di fase: si ritrova il moto circolare uniforme, e si può concludere che *il moto circolare uniforme è la composizione di due moti armonici di uguale ampiezza, frequenza e in fase sui due assi ortogonali*.
4. Ampiezze uguali, $A_1 = A_2$, e fasi uguali. Allora $x(t) = y(t)$ e le oscillazioni sono le proiezioni sugli assi x e y di un moto oscillatorio della medesima frequenza sulla retta $y = x$.

Esercizio

Determinare la traiettoria nel caso generale.

Soluzione Dalle (1.2.32):

$$\begin{aligned} \frac{x}{A_1} &= \cos(\omega t + \varphi_1) \implies \omega t + \varphi_1 = \arccos\left(\frac{x}{A_1}\right) \\ y &= A_2 \cos(\omega t + \varphi_2 - \varphi_1 + \varphi_1) = A_2 \arccos\left(\frac{x}{A_1} + \varphi_2 - \varphi_1\right) \\ &= A_2 \left[\cos\left(\arccos\left(\frac{x}{A_1}\right)\right) \cos(\varphi_2 - \varphi_1) - \sin\left(\arccos\left(\frac{x}{A_1}\right)\right) \sin(\varphi_2 - \varphi_1) \right] \\ &= A_2 \left[\left(\frac{x}{A_1}\right) \cos(\varphi_2 - \varphi_1) - \frac{A_2}{A_1} \sqrt{A_1^2 - x^2} \sin(\varphi_2 - \varphi_1) \right] \end{aligned}$$

Poniamo ora:

$$\frac{A_2}{A_1} = p, \cos(\varphi_2 - \varphi_1) = q, \sin(\varphi_2 - \varphi_1) = \sqrt{1 - q^2}$$

Allora:

$$y = pqx - p\sqrt{(1 - q^2)(A_1^2 - x^2)} \implies (y - pqx)^2 = p^2(1 - q^2)(A_1^2 - x^2)$$

che è ancora l'equazione di un'ellisse.

4. *Le oscillazioni smorzate* Consideriamo, per semplicità sulla retta \mathbb{R} , il moto di un punto soggetto alla forza richiamo elastica di costante $k > 0$ e ad una forza di attrito proporzionale alla velocità che si oppone al moto. In altre parole la legge di forza sarà la seguente:

$$(P, \mathbf{F}) = (P, -k(P - O) - 2\lambda\dot{P}), \quad \lambda > 0$$

Poichè $P - O = x$, $\dot{P} = \dot{x}$ la seconda legge si traduce qui nella singola equazione differenziale $m\ddot{x} = F$, e si ha:

$$m\ddot{x} = -kx - 2\lambda\dot{x} \iff m\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + kx = 0 \quad (1.2.33)$$

alla quale assegnamo le condizioni iniziali $x(0) = x_0, \dot{x}(0) = v_0$. Procediamo anche qui alla soluzione ponendo $x(t) = e^{\mu t}$. Sostituendo nella (1.2.33) troviamo l'equazione caratteristica:

$$\mu^2 + 2\gamma\mu + \omega^2 = 0$$

dove ancora $\omega := \sqrt{\frac{k}{m}}$, e $\gamma := \frac{\lambda}{m}$. Dunque:

$$\mu_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}$$

Distinguiamo ora tre casi.

Primo caso: smorzamento supercritico. $\gamma > \omega$. In tal caso l'equazione caratteristica ha due radici reali e negative. Le funzioni $x_1(t) = e^{-\nu_1 t}$ e $x_2(t) = e^{-\nu_2 t}$, $\nu_{1,2} = -\mu_{1,2} > 0$, risolvono l'equazione, e come sopra l'integrale generale è

$$x(t) = \alpha_1 e^{-\nu_1 t} + \alpha_2 e^{-\nu_2 t}$$

Imponendo le condizioni iniziali per determinare α_1 e α_2 si ottiene il sistema

$$\begin{cases} x(0) = \alpha_1 + \alpha_2 = x_0 \\ \dot{x}(0) = -\nu_1\alpha_1 - \nu_2\alpha_2 = v_0 \end{cases} \implies \alpha_1 = \frac{\nu_1 v_0 - \nu_2 x_0}{\nu_1 - \nu_2}, \quad \alpha_2 = \frac{\nu_1 x_0 - \nu_2 v_0}{\nu_1 - \nu_2}$$

da cui

$$x(t) = \frac{1}{\nu_1 - \nu_2} [(\nu_1 v_0 - \nu_2 x_0)e^{-\nu_1 t} + (\nu_1 x_0 - \nu_2 v_0)e^{-\nu_2 t}]$$

Poichè $\nu_{1,2} > 0$, si ha $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0 \forall (x_0, v_0)$. Per di più, si vede facilmente che la soluzione non si annulla mai se $v_0 > 0$, oppure una volta sola se $v_0 < 0$. Il moto corrispondente si chiama *moto aperiodico smorzato*.

Secondo caso: smorzamento critico. $\gamma = \omega$. L'equazione caratteristica ha due soluzioni

reali negative coincidenti: $\mu_{1,2} := \mu = -\gamma$. Le funzioni $x_1(t) = e^{-\nu t}$ e $x_2(t) = te^{-\nu t}$ risolvono l'equazione, e si può dimostrare che l'integrale generale è:

$$x(t) = \alpha_1 e^{-\nu t} + \alpha_2 t e^{-\nu t}$$

da cui, imponendo come sopra le condizioni iniziali:

$$\begin{cases} x(0) = \alpha_1 = x_0 \\ \dot{x}(0) = -\nu\alpha_1 + \alpha_2 = v_0 \implies \alpha_2 = v_0 + \nu x_0 \end{cases}$$

Pertanto:

$$x(t) = e^{-\nu t} [x_0 + (v_0 + \nu x_0)t]$$

e anche qui la soluzione tende a 0 per $t \rightarrow +\infty$ dopo avere cambiato segno al più una volta: moto aperiodico con smorzamento critico.

Terzo caso: moto oscillatorio smorzato. Sia ora $\omega > \gamma$. Allora:

$$\mu_{1,2} := -\gamma \pm i\eta, \quad \eta := \sqrt{\omega^2 - \gamma^2} > 0.$$

L'integrale generale sarà:

$$x(t) = \alpha_1 e^{\mu_1 t} + \alpha_2 e^{\mu_2 t} = e^{-\gamma t} (\alpha_1 e^{i\eta t} + \alpha_2 e^{-i\eta t})$$

Imponiamo ancora le condizioni iniziali

$$\begin{cases} x(0) = \alpha_1 + \alpha_2 = x_0 \\ \dot{x}(0) = -(\gamma - i\eta)\alpha_1 - (\gamma + i\eta)\alpha_2 = v_0 \\ \implies \alpha_1 = \frac{(\gamma + i\eta)x_0 - v_0}{2i\eta}, \quad \alpha_2 = -\frac{v_0 + (\gamma - i\eta)x_0}{2i\eta} \end{cases}$$

Procedendo come nel caso delle oscillatori lineari si trova che $x(t)$ può essere scritto sotto la forma:

$$x(t) = e^{-\gamma t} A \cos(\eta t + \varphi)$$

Dove A e φ si esprimono in termini di x_0, v_0 . Si vede dunque che il moto è oscillatorio, di periodo $2\pi/\eta$, ma *smorzato*: dopo ogni periodo l'ampiezza viene infatti diminuita del fattore $e^{-2\pi/\eta\tau}$, e $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0 \forall (x_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$.

1.2.3 Le grandezze meccaniche fondamentali: quantità di moto, momento della quantità di moto, energia cinetica

A. la quantità di moto

Consideriamo la II legge $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ ovvero, in forma cartesiana:

$$m\ddot{x} = F_x, \quad m\ddot{y} = F_y, \quad m\ddot{z} = F_z \quad (1.2.34)$$

Se ad esempio $F_x = 0$, allora

$$\frac{d}{dt}m\dot{x} = 0 \implies \dot{x} = 0$$

Pertanto

Proposizione 1.3 *Se la componente della forza che agisce su un punto materiale P è nulla lungo una certa direzione, allora la proiezione di P lungo quella direzione si muove di moto rettilineo uniforme.*

Si definisce ora

Definizione 1.7 *Si dice quantità di moto del punto P di massa m il prodotto della sua massa per la sua velocità:*

$$\mathbf{Q} := m \frac{dP}{dt} = m\mathbf{v} \quad (1.2.35)$$

Applicando la seconda legge otteniamo

$$\frac{d\mathbf{Q}}{dt} = \mathbf{F} \quad (1.2.36)$$

e pertanto la seguente:

Proposizione 1.4 *La derivata della quantità di moto del punto P è uguale alla forza totale ad esso applicata.*

Corollario 1.1 *Se la forza che agisce su P è nulla la sua quantità di moto si conserva:*

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(0) = m\mathbf{v}_0$$

dove \mathbf{v}_0 è la velocità all'istante iniziale.

Osservazione

La formulazione (1.2.36) della seconda legge in termini della quantità di moto è più generale della formulazioni in termini del prodotto di massa per accelerazione. Essa rimane infatti valida nel caso in cui il punto abbia massa variabile col tempo.

B. Il momento della quantità di moto

Definizione 1.8 *Si definisce momento della quantità di moto di un punto mobile P di massa m relativo al punto $O \in \mathbb{R}^3$ il vettore:*

$$\mathbf{K}_t(O) := (P(t) - O) \wedge \mathbf{Q} = m(P(t) - O) \wedge \mathbf{v} \quad (1.2.37)$$

Scriviamo esplicitamente, perchè ci torneranno utili nel seguito, le componenti cartesiane del momento della quantità di moto (omettiamo per semplicità di indicare la dipendenza da t):

$$\begin{aligned}K_x(O) &= m(y\dot{z} - z\dot{y}) \\K_y(O) &= m(z\dot{x} - x\dot{z}) \\K_z(O) &= m(x\dot{y} - y\dot{x})\end{aligned}$$

Applicando ora la regola di Leibnitz si trova subito:

Lemma 1.2 *Siano \mathbf{a} e \mathbf{b} due vettori che variano come funzioni del tempo nello spazio euclideo orientato \mathbb{R}^3 . Allora*

$$\frac{d}{dt}\mathbf{a}(O) \wedge \mathbf{b}(O) = \dot{\mathbf{a}}(O) \wedge \mathbf{b}(O) + \mathbf{a}(O) \wedge \dot{\mathbf{b}}(O)$$

Pertanto, ricordando la definizione di momento di una forza:

Proposizione 1.5 *La derivata temporale del momento della quantità di moto di $P(t)$ rispetto a O è uguale al momento della forza risultante (P, \mathbf{F}) ad esso applicata rispetto al medesimo punto O :*

$$\frac{d\mathbf{K}_t(O)}{dt} = \boldsymbol{\Omega}_t(O), \quad \boldsymbol{\Omega}_t(O) := (P(t) - O) \wedge \mathbf{F} \quad (1.2.38)$$

Dimostrazione

Si ha, applicando il Lemma precedente, la definizione (1.8) e la seconda legge:

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{K}_t(O)}{dt} &= \frac{d}{dt}(P(t) - O) \wedge m\mathbf{v} = \mathbf{v} \wedge m\mathbf{v} + (P(t) - O) \wedge m\dot{\mathbf{a}} = \\ &= (P(t) - O) \wedge m\mathbf{a} = (P(t) - O) \wedge \mathbf{F} = \boldsymbol{\Omega}_t(O)\end{aligned}$$

il che prova l'asserto.

Pertanto:

Corollario 1.2 *Se il momento $\boldsymbol{\Omega}_t(O)$ della forza risultante (P, \mathbf{F}) risultante è nullo allora il momento della quantità di moto $\mathbf{K}_t(O)$ è costante nel tempo.*

Vedremo in seguito un esempio notevole di campi di forze che godono della proprietà precedente: i campi centrali.

C. L'energia

Dato il punto materiale P di massa m mobile in \mathbb{R}^3 , la sua *energia cinetica* è per definizione la quantità:

$$T(P(t)) := \frac{1}{2}m \left(\frac{dP}{dt} \right)^2 = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 \quad (1.2.39)$$

Sia ora $t \mapsto P(t) : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ un moto effettivo compiuto da P nell'intervallo di tempo $I := [t_1, t_2]$ sotto l'azione di una legge di forza generale (P, \mathbf{F}) . Si ha allora:

Teorema 1.3 (*Teorema della forze vive per il punto materiale libero*)⁸ *Il lavoro compiuto da $(P(t), \mathbf{F})$ lungo la traiettoria γ descritta dal moto $P(t) : t \in I$ vale la variazione dell'energia cinetica lungo il moto medesimo. In formule*

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot dP = T(P(t_2)) - TP((t_1)). \quad (1.2.40)$$

Dimostrazione

Sappiamo che $dL_{\gamma} = \mathbf{F} \cdot dP$. Quindi basta mostrare che, quale che sia la traiettoria γ descritta dal moto $P(t)$, si ha

$$dL_{\gamma} = dT \quad (1.2.41)$$

Questa equazione è l'espressione differenziale del teorema delle forze vive per il punto materiale libero. Si ha infatti, per la II legge:

$$dT = \frac{1}{2}md \left(\frac{dP}{dt} \right)^2 = m \frac{dP}{dt} \cdot \frac{dP^2}{dt^2} dt = \frac{dP}{dt} \cdot \mathbf{F} dt = \mathbf{F} \cdot dP = dL_{\gamma}$$

Integrando questa equazione si ottiene la (1.2.40) e ciò conclude la dimostrazione.

Corollario 1.3 *Supponiamo che il campo di forze $(P, \mathbf{F}(P))$ sia conservativo: $\mathbf{F}(P) = -\nabla V(P)$. Sia $t \mapsto P(t) : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ un moto qualsiasi. Allora:*

$$T(P(t_2)) - TP((t_1)) = V(P(t_1)) - V(P(t_2)) \quad (1.2.42)$$

Dimostrazione

Dal teorema precedente sappiamo che $dL_{\gamma} = dT$. D'altra parte il campo è conservativo; quindi dL_{γ} non dipende da γ , e $dL = -dV$. Integrando otteniamo la (1.2.42). Ciò dimostra l'asserto.

Consideriamo il moto di un punto materiale P sotto l'azione di un campo di forze conservativo di potenziale $V(P)$. Definiamo *energia totale meccanica*, o semplicemente *energia* del punto sul moto $P(t)$ la somma della sua energia cinetica e della sua energia potenziale:

$$E(t) = \frac{1}{2}m \left(\frac{dP}{dt} \right)^2 + V(P(t)) \quad (1.2.43)$$

Allora la (1.2.42) implica immediatamente, per l'arbitrarietà di t_1 e t_2 :

⁸Questo teorema fu trovato da Leibnitz nel 1695, correggendo un errore di Cartesio (René Descartes, La Haye di Tours 1596, Stoccolma 1650), il quale aveva affermato che il lavoro compiuto dalla forza valeva la variazione della quantità di moto. Leibnitz definiva *vis viva* o *vis motrix* il doppio dell'energia cinetica. Altra fondamentale scoperta di Leibnitz (la mente più possente di tutta la filosofia euro-occidentale, secondo Oswald Spengler) in matematica, oltre al calcolo infinitesimale, fu il sistema di numerazione binario.

Teorema 1.4 (*Teorema di conservazione dell'energia*)

L'energia di un punto materiale in moto in un campo di forze conservativo è costante nel tempo:

$$E(t_1) = E(t_2), \quad \forall t_1 \leq t_2$$

D. Integrali primi

Sia $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}) : \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = f(x, y, z; v : v_x, v_y, v_z)$ una funzione regolare. Sia poi $P(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$ il moto generato dalla legge di forza (P, \mathbf{F}) con condizioni iniziali $P(0) = x_0\mathbf{i} + y_0\mathbf{j} + z_0\mathbf{k}$, $\dot{P}_0 = \mathbf{v}_0 = v_{0x}\mathbf{i} + v_{0y}\mathbf{j} + v_{0z}\mathbf{k}$.

Allora le leggi di conservazioni espone in precedenza possono essere formulate in un linguaggio leggermente differente. Poniamo la seguente:

Definizione 1.9 La funzione $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = f(x, y, z; v : v_x, v_y, v_z)$ si dice integrale primo per i moti dell'equazione $m\ddot{P} = \mathbf{F}$ se:

$$f(x(t), y(t), z(t); \dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)) = f(x_0, y_0, z_0; v_{0x}, v_{0y}, v_{0z})$$

ovvero se f rimane costante sui moti.

Esempi

1. Gli integrali primi della quantità di moto: $Q_x := mv_x$ è un integrale primo se $F_x = 0$, $Q_y := mv_y$ è un integrale primo se $F_y = 0$, $Q_z := mv_z$ è un integrale primo se $F_z = 0$,
2. Gli integrali primi del momento della quantità di moto:

$$K_x(O) := m(yv_z - zv_y) \quad \text{costante se } \Omega_x(O) = 0$$

$$K_y(O) := m(zv_x - xv_z) \quad \text{costante se } \Omega_y(O) = 0$$

$$K_z(O) := m(xv_y - yv_x) \quad \text{costante se } \Omega_z(O) = 0$$

3. L'integrale primo dell'energia:

$$E := \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) + V(x, y, z) \quad \text{costante se } \mathbf{F} = -\nabla V$$

cioè se il campo di forze è conservativo.

Vedremo nel prossimo capitolo l'utilità degli integrali primi.

1.2.4 Dimensioni delle grandezze meccaniche

Assumiamo come unità di misura fondamentali quelle delle seguenti quantità fisiche:

Grandezze fondamentali

1. *Lunghezza*. Simbolo: $[\ell]$. Unità di misura: metro.
2. *Massa*. Simbolo: $[m]$. Unità di misura: chilogrammo.
3. *Tempo*. Simbolo: $[t]$. Unità di misura: secondo.

Queste unità di misura corrispondono al sistema *MKS*. Assumendo come unità di lunghezza il centimetro, come unità di massa il grammo, e come unità di tempo il secondo si ottiene il sistema *CGS*.

Grandezze derivate

1. *Superficie*. Simbolo: $[S]$. Dimensione: $[S] = [\ell^2]$.
2. *Volume*. Simbolo: $[V]$. Dimensione: $[V] = [\ell^3]$.
3. *Velocità*. Definizione: $v = \frac{ds}{dt}$. Simbolo: $[v]$. Dimensione: $[v] = [\ell]t^{-1}$.
4. *Accelerazione*. Definizione: $v = \frac{d^2s}{dt^2}$. Simbolo: $[a]$. Dimensione: $[v] = [\ell]t^{-2}$.
5. *Velocità angolare*. Definizione: $v = \frac{d\varphi}{dt}$. Simbolo: $[\omega]$. Dimensione: $[\omega] = [t^{-1}]$.
6. *Forza*. Definizione: $F = ma$. Simbolo: $[F]$. Dimensione: $[F] = [m\ell]t^{-2}$.
7. *Lavoro*. Definizione: $L = Fs = ma \cdot s$. Simbolo: $[L]$. Dimensione: $[L] = [m\ell^2]t^{-2}$.
8. *Energia*. Definizione: $E = mv^2/2 = Fs = ma \cdot s$. Simbolo: $[E]$. Dimensione: $[E] = [m\ell^2]t^{-2}$.
9. *Potenza*. Definizione: $W = L/t = F \cdot v$. Simbolo: $[W]$. Dimensione: $[W] = [m\ell^2]t^{-3}$.
10. *Azione*. Definizione: $A = E \cdot t = ma \cdot s \cdot t$. Simbolo: $[F]$. Dimensione: $[A] = [m\ell^2]t^{-1}$.
11. *Momento (di una forza)*. Definizione: $\Omega = F \cdot s = ma \cdot s$. Simbolo: $[\Omega]$. Dimensione: $[\Omega] = [m\ell^2]t^{-2}$.

12. *Quantità di moto*. Definizione: $Q = mv = m \frac{ds}{dt}$. Simbolo: $[Q]$. Dimensione: $[Q] = [m\ell t^{-1}]$.

13. *Momento della quantità di moto*. Definizione: $K = mv \cdot s = m s \frac{ds}{dt}$. Simbolo: $[K]$. Dimensione: $[K] = [m\ell^2 t^{-1}]$.

Un'equazione che collega fra di loro grandezze fisiche si dice *dimensionalmente omogenea* se tutti i termini che vi compaiono hanno le stesse dimensioni. È ovvio che equazioni che mettono in relazione grandezze dimensionali (come le grandezze fisiche) e che non siano dimensionalmente omogenee non possono essere corrette. Questa osservazione banale è però molto importante, e sta alla base del cosiddetto *controllo dimensionale*, che va sempre fatto al termine della soluzione di qualsiasi problema. L'omogeneità dimensionale è infatti *condizione necessaria* per la correttezza della soluzione.

Esempio

Controlliamo la correttezza dimensionale di alcune delle leggi che abbiamo ricavato sopra.

1. Teorema del momento della quantità di moto (1.2.38). Il primo membro ha dimensione $[K]/t = [m\ell^2 t^{-2}]$. Il secondo membro ha dimensione $\Omega \cdot s = [m\ell^2 t^{-2}]$.
2. Teorema delle forze vive: $dL = dT$. Il primo membro ha dimensione $[L] = [m\ell^2 t^{-2}]$. Il secondo membro ha dimensione $m \cdot v^2 = [m\ell^2 t^{-2}]$.

1.3 Due sistemi notevoli: i moti rettilinei sotto l'azione di una forza conservativa e il problema dei due corpi

1.3.1 Moti rettilinei sotto l'azione di una forza posizionale

A. Definizione.

Consideriamo un punto materiale P in moto sotto l'azione di una forza posizionale $(P, \mathbf{F}(P))$ diretta lungo l'asse x e che dipende dalla sola coordinata x : $\mathbf{F} = F(x)\mathbf{i}$. Supponiamo inoltre che valgano le seguenti condizioni iniziali:

$$y(0) = z(0) = 0; \quad v_{0y} = v_{0z} = 0$$

Allora il moto ha luogo lungo l'asse x . Possiamo quindi considerare come problema a sè stante quello di studiare il moto di un punto su una retta sotto l'azione di una forza posizionale. Si ha subito:

Proposizione 1.6 *Una forza posizionale $(x, F(x))$ definita sulla retta \mathbb{R} è sempre conservativa, purchè $x \mapsto F(x)$ sia una funzione decente (ad esempio, continua).*

Dimostrazione

Poniamo:

$$V(x) = - \int_{x_0}^x F(\xi) d\xi$$

Allora $-\nabla_x V = -V'(x) = F(x)$ per il teorema fondamentale del calcolo integrale.

Definizione 1.10 *Si dice moto rettilineo di un punto materiale sotto l'azione di una forza posizionale il sistema descritto dall'equazione differenziale*

$$m\ddot{x} = F(x) \tag{1.3.44}$$

dove $x \in \mathbb{R}$ e il campo di forze $x \mapsto F(x)$ è una funzione differenziabile su un certo intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$.

Al solito, ogni soluzione della (1.3.44) con assegnate condizioni iniziali (x_0, v_0) individua un moto ed uno solo. Nel seguito le nozioni di soluzione della (1.3.44) e di moto saranno senz'altro identificate.

L'energia cinetica è la forma quadratica

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

L'energia potenziale è la funzione

$$V(x) = - \int_{x_0}^x F(\xi) d\xi$$

L'energia potenziale V definisce la forza F . Dunque per specificare il sistema (1.3.44) è sufficiente assegnare la sua energia potenziale.

L'*energia totale* è la somma dell'energia cinetica e dell'energia potenziale:

$$E = T + V$$

ed è dunque una funzione $E(x, \dot{x})$ delle due variabili (x, \dot{x}) .

Dall'espressione dell'energia meccanica totale

$$E = \frac{1}{2} m \dot{x}(t)^2 + V(x) \quad (1.3.45)$$

si può dedurre una per la velocità risolvendo rispetto a $\dot{x}(t)$:

$$\dot{x}(t) = \pm \sqrt{\frac{2}{m} [E - V(x(t))]} \quad (1.3.46)$$

Questa espressione, come vedremo ampiamente in seguito, costituisce il punto di partenza della teoria qualitativa delle equazioni del moto (1.3.44), che analizzeremo nel seguito. Per 'teoria qualitativa' si intende l'analisi di quelle proprietà dei moti che sono valide indipendentemente dalla particolare forma di f , almeno per classi abbastanza vaste di funzioni F .

La forma dell'equazione (1.3.44) permette di caratterizzare subito le soluzioni di equilibrio, o di quiete, definite nel modo seguente:

Definizione 1.11 *Una soluzione $x = x_0$ indipendente dal tempo della (1.3.44) si dice soluzione di quiete, o di equilibrio, o posizione di equilibrio.*

Allora si ha la seguente caratterizzazioni:

Teorema 1.5 *Le soluzioni di quiete della (1.3.44) sono tutte e sole le soluzioni $t \mapsto x(t)$ di condizioni iniziali $x(0), \dot{x}(0)$ tali che*

$$V'(x(0)) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0 \quad (1.3.47)$$

Osservazione

In altre parole: se si colloca un punto all'istante iniziale con velocità nulla nell'ascissa di un punto critico del potenziale V esso vi rimane per sempre; viceversa, la soluzione costante uguale all'ascissa di un punto critico è una soluzione di quiete.

Dimostrazione

Sia $x_0 \in \mathbb{R}$ un punto critico del potenziale: $V'(x_0) = 0$. Sia $x(t) = x_0 \forall t$. Allora $m\ddot{x}(t) = F(x(t)) = F(x_0) = -V'(x_0) = 0$. Quindi $x(t) = x_0 + v_0 t$. D'altra parte $\dot{x}(0) = 0$ implica $x(t) = x_0 \forall t \in \mathbb{R}$.

Inversamente, se $x(t) = x_0$ è soluzione, allora ovviamente $\dot{x}(0) = 0$ e $0 = m\ddot{x} = F(x_0) = -V'(x_0)$, e quindi x_0 è un punto critico di V .

B. Esempi

Esempio 1

L'equazione delle oscillazioni lineari, detta anche *equazione fondamentale della teoria delle oscillazioni*:

$$\ddot{x} = -\omega^2 x, \quad \omega^2 = \frac{k}{m}$$

Si ha in questo caso (fig.9)

$$T = \frac{\dot{x}^2}{2}, \quad V = \frac{\omega^2 x^2}{2}, \quad E = \frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{\omega^2 x^2}{2}$$

Gli insiemi di livello di energia sono delle ellissi con centro all'origine delle coordinate. L'unico punto critico del potenziale è $x_0 = 0$, e quindi la $x(t) = 0 \forall t \in \mathbb{R}$ è la sola soluzione di quiete. Equivalentemente, $x_0 = 0$ è la sola configurazione di equilibrio.

Esempio 2

Supponiamo che l'energia potenziale sia data dal suo grafico (fig.10). Tracciamo le curve di livello dell'energia $\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + V(x) = E$.

figg.10 e 11

Le soluzioni di equilibrio sono tutti e soli i punti x tali che $V'(x) = 0$, cioè i punti di stazionarietà, o critici, del potenziale V .

Quando si studiano le curve di livello dell'energia, per comodità è utile immaginare una biglia che rotoli in una buca di potenziale V : in altri termini, una biglia che rotoli sul profilo del grafico di $V(x)$ nel piano verticale, immaginato come il profilo verticale di una catena di monti e valli. L'energia cinetica non è mai negativa. Dunque l'energia potenziale non può superare l'energia totale. La legge della conservazione dell'energia permette di determinare facilmente i moti. Infatti su moto l'energia totale è costante. La (1.3.45) mostra che più l'energia potenziale è piccola più il valore assoluto della velocità è elevato. Infatti in tal caso cresce la differenza fra E e V nel radicando. Nel linguaggio della biglia che rotola sul profilo, l'affermazione equivalente è "la biglia non

può uscire dalla buca raggiungendo un livello di energia superiore a quello iniziale. Rotolando nella buca, la biglia acquista velocità.”

Poichè l'energia potenziale non può essere più grande dell'energia totale, le linee di livello dell'energia hanno come proiezione sull'asse x , dove ha luogo il moto, l'insieme $\mathcal{M}(E)$ dei punti in cui il valore di V è non superiore di E , cioè

$$\mathcal{M}(E) = \{x : V(x) \leq E\}$$

L'insieme $\mathcal{M}(E)$ è l'insieme "accessibile", cioè composto da tutti e soli i punti nei quali i moti possono avere luogo. Abbiamo già osservato che quanto più l'energia potenziale è piccola tanto più è grande (in valore assoluto) la velocità in accordo con la (1.3.45) (scendendo nella buca la sferetta acquista velocità mentre la perde quando risale).

Definizione 1.12 *Fiassato un valore di E , dicesi punto di inversione qualsiasi punto $x \in \mathbb{R}$ tale che $V(x) = E$, con $V'(x) \neq 0$.*

Osservazione

Un punto d'inversione si chiama così perchè ivi la velocità è nulla, e quindi il moto inverte la sua direzione.

Ora si ha

FIGURA 3 (A2, p. 96)

Supponiamo ora che l'energia potenziale sia definita su tutto l'asse x . Sia E un valore non critico dell'energia.

curva potenziale, A2 p.101

Poiché la funzione V è continua l'insieme $\mathcal{M}(E)$ è costituito da un numero finito, o al più numerabile, di intervalli disgiunti (Fig. ?).

Negli estremi degli intervalli si ha $V(x) = E$; di conseguenza $V'(x) \neq 0$ perchè E è un valore non critico per ipotesi. Per questa ragione ogni punto dell'insieme $\partial\mathcal{M}(E) = \{x : V(x) = E\}$ è l'estremo di un solo intervallo aperto in $\mathcal{M}(E)$. Quindi tutto l'insieme $\overline{\mathcal{M}(E)} = \{x : V(x) \leq E\}$ è l'unione, al più numerabile, di segmenti a due a due disgiunti, con, eventualmente, uno o due estremi, tendenti all'infinito, oppure coincide con tutto l'asse x .

Consideriamo (Fig. ?) uno di tali segmenti, $-\infty < a(E) \leq x \leq b(E) < +\infty$, $V(a) = V(b) = E$, $V(x) < E$ per $a < x < b$. Si noti che se $-\infty < a(E)$ e/o $b(E) < +\infty$. $a(E)$ e $b(E)$ sono punti di inversione.

Proposizione 1.7 *Si consideri l'equazione*

$$m\ddot{x} + V'(x) = 0, \quad a(E) \leq x \leq b(E) \quad (1.3.48)$$

con qualsiasi dato iniziale x_0 tale che $a(E) \leq x_0 \leq b(E)$. Allora, quale che sia la velocità iniziale v_0 :

1. Se $-\infty < a(E) < b(E) < \infty$ il sistema (1.3.51) si muove periodicamente, con periodo

$$T(E) = 2 \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}} \quad (1.3.49)$$

Per la dimostrazione premettiamo il seguente

Lemma 1.3 *Sia $a < x_1 < x_2 < b$. Se all'istante t_1 il mobile passa per x_1 con velocità positiva, il tempo che impiega per arrivare a x_2 vale*

$$t_2 - t_1 = \int_{x_1}^{x_2} \frac{d\xi}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(\xi))}} \quad (1.3.50)$$

mentre se all'istante t_1 passa per x_2 con velocità negativa arriverà a x_1 nel medesimo tempo.

Dimostrazione

Come abbiamo visto, la legge di conservazione dell'energia permette di risolvere in modo esplicito l'equazione di Newton (1.3.44). Infatti, per un valore fissato dell'energia totale E , la grandezza (ma non il segno) della velocità risulta definita dall'espressione

$$\dot{x}(t) = \pm \sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}. \quad (1.3.51)$$

Questa equazione è una 'formula di quadratura', nel senso che riduce il problema della determinazione del moto $t \rightarrow x(t)$ a quello del calcolo dell'area di figure piane. Per essere più precisi, il procedimento di quadratura è il seguente: dalla (1.3.51) ricaviamo una soluzione $x(t)$ della (1.3.44) nella forma implicita (per valori di t vicini a t_0):

$$t - t_0 = \int_{x(t_0)}^x \frac{d\xi}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(\xi))}} \quad (1.3.52)$$

Quindi l'area che sottende il grafico della curva di equazione

$$\xi \rightarrow y(\xi) = \left(\frac{2}{m}(E - V(\xi)) \right)^{-1/2}$$

tra i punti $x(t_0)$ e $x(t)$ è uguale al tempo che il punto materiale impiega per raggiungere $x(t)$ partendo da $x(t_0)$ all'istante t_0 con velocità positiva ed energia E , finché la velocità rimane dello stesso segno. Ciò è chiaramente sufficiente a dimostrare il Lemma.

Dimostrazione della proposizione.

Cominciamo col provare che l'integrale generalizzato

$$T = 2 \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}} \quad (1.3.53)$$

è convergente, essendo $V'(a) \neq 0$, $V'(b) \neq 0$ (per la precisione si ha $V'(a) < 0$ e $V'(b) > 0$). Infatti per $b - x \geq 0$ sufficientemente piccolo⁹ possiamo approssimare la funzione integranda con il suo sviluppo di Taylor attorno a $x = b$ troncato al primo ordine (incluso):

$$E - V(x) = E - V(b) - V'(b)(x - b) + O((x - b)^2) = V'(b)(b - x) + O((x - b)^2)$$

Quindi l'integrando si comporta come $\frac{1}{\sqrt{b-x}}$ per $x \rightarrow b$ e ciò assicura la convergenza dell'integrale generalizzato all'estremo b . Il medesimo ragionamento assicura l'esistenza dell'integrale generalizzato all'estremo a . Dall'esistenza dell'integrale generalizzato (1.3.53) segue che la formula (1.3.52) definisce una funzione differenziabile $x \mapsto t(x) : [a, b] \rightarrow [t_1, t_2 = t_1 + T/2]$. Questa funzione è ovviamente invertibile perchè $\frac{dt}{dx} > 0$ per costruzione. La funzione $t \mapsto x(t)$ è definita e continua nell'intervallo $[t_1, t_2 = t_1 + T/2]$ e tale che $x(t_1) = a$, $x(t_2) = b$ (Fig.4)

FIGURA 4 (A2 p.102)

Facciamo ora vedere che questa funzione soddisfa l'equazione di Newton su tutto l'asse dei tempi. Prolunghiamola innanzitutto nel successivo intervallo di lunghezza $\frac{T}{2}$ per mezzo della simmetria: $x(t_2 + \tau) = x(t_2 - \tau)$, $0 \leq \tau \leq \frac{T}{2}$, che segue immediatamente dal fatto che l'energia è pari rispetto ad \dot{x} e dunque ogni linea di livello è simmetrica rispetto all'asse x . E' chiaro che, una volta raggiunto il punto $x = a$ al tempo $t_2 + \frac{T}{2}$, il moto si ripeterà identico a prima, cioè $x(t + T) = x(t)$, per ogni $t \geq 0$. La funzione $x(t)$, costruita adesso su tutta la retta, soddisfa ovunque l'equazione di Newton. Questa soluzione è periodica, con periodo T dato dalla (1.3.53). Ciò conclude la dimostrazione.

I casi in cui $a(E) = -\infty$ o $b(E) = +\infty$ richiedono una trattazione particolare.

Proposizione 1.8 *Sia $a(E) > -\infty$, $b(E) = +\infty$. Allora*

1. *Se esistono costanti $C > 0$, $D > 0$ tali che*

$$V(x) \geq -Cx^2 - D, \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (1.3.54)$$

allora:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = +\infty$$

⁹Cioè per x in un opportuno intorno di b , necessariamente sinistro perchè $x \leq b$

dopo al più un'inversione se $v_0 < 0$, e senza inversioni se $v_0 > 0$;

2. Se $\exists \alpha > 0$ tale che

$$V(x) \leq -Cx^{2+\alpha}, x \rightarrow +\infty$$

allora $\forall (x_0, v_0) \exists 0 < \bar{t}(x_0, v_0) < +\infty$ such that

$$\lim_{t \rightarrow \bar{t}} x(t) = +\infty$$

3. Affermazioni speculari valgono se $a(E) = -\infty, b(E) = < +\infty$. Combinando i due risultati si classifica anche il caso $a(E) = -\infty, b(E) = < +\infty$.

Osservazione

Il caso 2) rappresenta un esempio in cui l'equazione del moto non ammette una soluzione globale nel tempo. Infatti essa tende all'infinito, cioè diventa singolare, in un tempo *finito* perchè $\bar{t}(x_0, v_0) < +\infty$.

Dimostrazione

Riprendiamo la formula (1.3.52). Supponiamo $v_0 > 0$. Poichè $b(E) = +\infty$ la velocità non cambia mai segno e il moto procede verso $+\infty$. Proviamo ora che ci arriva ma che ci mette un tempo infinito ad arrivarci come affermato dalla proposizione. Sempre per la (1.3.52) abbiamo, data l'ipotesi su V

$$t - t_0 \geq \int_{x(0)}^x \frac{d\xi}{\sqrt{\frac{2}{m}(E + Cx^2 + D)}}$$

Questo integrale diverge per $x \rightarrow +\infty \forall E$ e quindi $\forall (x_0, v_0)$. Dunque $x \rightarrow \infty \implies t \rightarrow +\infty$, e passando alla funzione inversa si conclude che $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = +\infty$. Se poi $v < 0$, il moto si invertirà a $a(E)$; dopo l'inversione la velocità sarà positiva, e ricadiamo nel caso precedente.

Per dimostrare la seconda affermazione, sempre per la (1.3.52) e l'ipotesi sul potenziale otteniamo ora:

$$t - t_0 \leq \int_{x(0)}^x \frac{d\xi}{\sqrt{\frac{2}{m}(E + Cx^{2+\alpha} + D)}}$$

L'integrale ultimo scritto converge per $x \rightarrow +\infty$. Sia $\bar{t} - t_0$ il suo valore. Passando alla funzione inversa troviamo $\lim_{t \rightarrow \bar{t}} x(t) = +\infty$. Pertanto il moto raggiunge l'infinito in un tempo finito, e l'equazione differenziale non ha una soluzione globale nel tempo.

Consideriamo ora il caso in cui il livello di energia sia *critico*, cioè corrisponda ad un punto critico del potenziale. Si ha:

Proposizione 1.9 Sia $-\infty < \bar{x} < +\infty$ un punto critico del potenziale, $V'(\bar{x}) = 0$, e sia

$$\bar{E} := V(\bar{x})$$

il corrispondente livello critico di energia. Allora:

1. Sia \bar{x} un punto di minimo stretto. Allora $\mathcal{M}(\bar{E}) = \{\bar{x}\}$, e $x = \bar{x}$ è una soluzione di quiete.

Sia \bar{x} un punto di massimo stretto, e siano (x_0, v_0) condizioni iniziali con $x_0 \in \mathcal{M}(\bar{E})$. Allora:

2. Se $x_0 < \bar{x}$, e $v_0 > 0$, allora

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \bar{x}$$

3. Se $x_0 > \bar{x}$, e $v_0 < 0$, allora

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \bar{x}$$

Dimostrazione

1. Sappiamo già che $x(t) = \bar{x}$ è una soluzione di equilibrio. Il fatto che risulti $\mathcal{M}(\bar{E}) = \{\bar{x}\}$ è ovvio.
2. Consideriamo ancora la formula di quadratura (1.3.52) e dimostriamo che

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} \int_{x(0)}^x \frac{d\xi}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(\xi))}} = +\infty \quad (1.3.55)$$

Infatti, sviluppando in serie di Taylor $V(\xi)$ attorno a $\xi = \bar{x}$, troviamo:

$$E - V(\xi) = E - E - V'(\bar{x})(\bar{x} - \xi) - \frac{1}{2}V''(\bar{x})(\bar{x} - \xi)^2 + O(\bar{x} - \xi)^3 = -\frac{1}{2}V''(\bar{x})(\bar{x} - \xi)^2 + O(\bar{x} - \xi)^3$$

Dato che $V''(\bar{x})$, in un intorno sinistro di \bar{x} l'integrando si comporta come $\frac{1}{\bar{x} - \xi}$ e pertanto l'integrale diverge positivamente. Dunque ancora per la (1.3.52), e passando alla funzione inversa, possiamo concludere che

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \bar{x}$$

3. Si procede in maniera del tutto analoga.

Osservazione

Le considerazioni precedenti bastano ad esaurire i casi rimanenti nella situazione di livello di energia critico.

1. $a(E) = -\infty$, $\bar{x} = b(E)$.

Se $v_0 < 0$, allora non si ha mai inversione e $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = -\infty$. Se $v_0 > 0$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \bar{x}$.

2. $-\infty < a(E)$, $V'(a(E)) < 0$, $\bar{x} = b(E)$.

Se $v_0 < 0$, il moto $x(t)$ inverte la sua direzione in $a(E)$ e $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \bar{x}$. Se $v_0 > 0$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \bar{x}$ senza alcuna inversione.

3. $-\infty < a(E)$, $V'(a(E)) = 0$, $V''(a(E)) < 0$; $\bar{x} = b(E)$.

Se $v_0 < 0$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = a(E)$; se $v_0 > 0$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \bar{x}$.

4. Se $\bar{x} = a(E)$, la discussione è completamente analoga.

Si noti infine che se uno almeno dei punti per cui $V(x) = E$ è un massimo di V il moto sul livello di energia E non potrà mai essere periodico.

1.3.2 Il problema dei due corpi e le leggi di Keplero

A. Problema dei due corpi. Separazione del moto del baricentro

Siano dati due punti P_1 e P_2 di masse m_1 e m_2 che si muovono in \mathbb{R}^3 sotto l'azione di un campo di forze conservativo di potenziale $V(P_1 - O, P_2 - O)$. In altre parole, su P_1 agisce il campo di forze (P_1, \mathbf{F}_1) e su P_2 il campo di forze (P_2, \mathbf{F}_2) .

Qui abbiamo riferito il moto ad un sistema inerziale orientato di origine O , e assi $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$. Pertanto $P_1 - O = x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k}$, $P_2 - O = x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k}$. Allora $V(P_1 - O, P_2 - O) = V(x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2)$, e l'espressione esplicita dei due campi di forze come gradienti del potenziale è:

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_1 &:= -\nabla V_{P_1} = -\frac{\partial V}{\partial x_1}\mathbf{i} - \frac{\partial V}{\partial y_1}\mathbf{j} - \frac{\partial V}{\partial z_1}\mathbf{k}; \\ \mathbf{F}_2 &:= -\nabla V_{P_2} = -\frac{\partial V}{\partial x_2}\mathbf{i} - \frac{\partial V}{\partial y_2}\mathbf{j} - \frac{\partial V}{\partial z_2}\mathbf{k}.\end{aligned}$$

Ammettiamo ora che il potenziale V dipenda solo dalla distanza reciproca dei due punti:

$$\begin{aligned}V(P_1 - O, P_2 - O) &= V(\|P_1 - P_2\|) = \\ &= V(\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2})\end{aligned}\tag{1.3.56}$$

Le equazioni del moto sono allora:

$$m_1 \frac{d^2 P_1}{dt^2} = -\nabla V_{P_1}, \quad m_2 \frac{d^2 P_2}{dt^2} = -\nabla V_{P_2}.\tag{1.3.57}$$

Il problema meccanico definito da queste equazioni del moto si chiama *problema dei due corpi*.

Definizione 1.13 *Si definisce:*

1. Baricentro, o centro di massa dei punti P_1 e P_2 , il punto G di coordinate:

$$G - O := \frac{m_1(P_1 - O) + m_2(P_2 - O)}{m_1 + m_2} \quad (1.3.58)$$

2. massa ridotta *la massa*

$$m := \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

3. Coordinata relativa *il vettore* $P = P_2 - P_1$. Denotando:

$$x_1 - x_2 := x, \quad y_1 - y_2 := y, \quad z_1 - z_2 := z$$

si trova $P - O = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$.

Allora si ha:

Teorema 1.6 *Consideriamo il baricentro G , e il punto di massa ridotta m e coordinata relativa P . Allora:*

1. Il baricentro G si muove di moto rettilineo uniforme;
2. Il moto del punto di massa m e coordinata relativa P è generato dall'applicazione della forza di potenziale di $V(\|P - O\|)$, cioè:

$$m \frac{d^2 P}{dt^2} = -\nabla_P V(\|P - O\|) = -\nabla V(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) \quad (1.3.59)$$

Dimostrazione

1. Si ha, ponendo $M := m_1 + m_2$:

$$M \frac{d^2 G}{dt^2} = m_1 \frac{d^2 P_1}{dt^2} + m_2 \frac{d^2 P_2}{dt^2} = -\nabla V_{P_1} - \nabla V_{P_2} = 0$$

perchè, per la (1.3.56), $\nabla V_{P_1} = -\nabla V_{P_2}$. Dunque G ha accelerazione nulla e il suo moto è rettilineo uniforme.

2. Consideriamo ora il vettore $P = P_2 - P_1$. Moltiplicando la prima delle equazioni del moto (1.3.57) per m_2 , la seconda per m_1 e sottraendo si trova facilmente

$$m_1 m_2 \frac{d^2 P}{dt^2} = -(m_1 + m_2) \nabla_P V \quad (1.3.60)$$

e ciò conclude la dimostrazione.

Osservazione

Noti i moti $G(t)$ e $P(t)$, i moti $P_1(t)$ e $P_2(t)$ si ricavano subito. Si ha infatti, dalle definizioni precedenti:

$$\begin{cases} G - O = \frac{m}{m_2}(P_1 - O) + \frac{m}{m_1}(P_2 - O) \\ P = (P_2 - O) - (P_1 - O) \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} P_1(t) - O = (G(t) - O) - \frac{m_2}{m_1 + m_2}(P(t) - O) \\ P_2(t) - O = \frac{m_1}{m_1 + m_2}(P(t) - O) + (G(t) - O) \end{cases} \quad (1.3.61)$$

B. Conservazione del momento della quantità di moto. II Legge di Keplero.

Definizione 1.14 *Un campo di forze posizionale $(P, \mathbf{F}(P))$ si dice centrale con centro O se l'intensità $\|\mathbf{F}(P)\|$ dipende solo dalla distanza di P dall'origine, cioè da $\|P - O\|$, e la direzione è quella di $P - O$.*

Detto dunque $r := \|P - O\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, esisterà una funzione $r \mapsto \Phi(r) :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ tale che potremo scrivere

$$\mathbf{F} = \Phi(r)\mathbf{e}_r; \quad \mathbf{e}_r := \frac{P - O}{\|P - O\|} \quad (1.3.62)$$

In altri termini, \mathbf{e}_r è il versore radiale.

Esempio

Il campo di forze generato dal potenziale $V(\|P - O\|) = V(r)$ è centrale. Infatti:

$$\nabla_P V(r) = V'(r) \left(\frac{\partial r}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial r}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial r}{\partial z} \mathbf{k} \right) = V'(r) \left(\frac{x}{r} \mathbf{i} + \frac{y}{r} \mathbf{j} + \frac{z}{r} \mathbf{k} \right) = V'(r) \frac{P - O}{\|P - O\|}$$

Inversamente, si ha per verifica diretta:

Proposizione 1.10 *Ogni campo di forze centrale è conservativo. Il potenziale vale:*

$$V(r) = - \int_{r_0}^r \Phi(r) dr$$

Esercizio.

Calcolare l'energia potenziale del campo newtoniano.

Soluzione

Si ha

$$V(r) = - \int_{-\infty}^r -\frac{k}{r^2} dr = -\frac{k}{r}.$$

Consideriamo ora il momento della quantità di moto del punto P rispetto a O :

$$\mathbf{K}_t(O) = m(P(t) - O) \wedge \frac{dP}{dt}.$$

Proposizione 1.11 *In un campo di forze centrale il momento della quantità di moto $\mathbf{K}_t(O)$ si conserva lungo il moto:*

$$\frac{d\mathbf{K}_t(O)}{dt} = 0$$

Dimostrazione

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{K}_t(O)}{dt} &= m \frac{dP}{dt} \wedge \frac{dP}{dt} + m(P(t) - O) \wedge \frac{d^2P}{dt^2} \\ &= m(P(t) - O) \wedge \Phi(r(t))(P(t) - O) = 0 \end{aligned}$$

Dunque $\mathbf{K}_t(O)$ non dipende da t . Un campo di forze centrale ammette quindi l'integrale primo $\mathbf{K}_t(O) = \mathbf{K}(O)$ del momento della quantità di moto.

Corollario 1.4 *Il moto $t \mapsto P(t) - O$ di un punto sotto l'azione di un campo di forze centrale giace sempre in un piano.*

Dimostrazione

Sia $\mathbf{K}(O) > 0$. Possiamo scegliere il sistema di riferimento in modo tale da fare coincidere l'asse z con la direzione costante di $\mathbf{K}(O)$. Denotando K il valore assoluto di $\mathbf{K}(O)$, si avrà:

$$\mathbf{K}(O) = K_z(O)\mathbf{k} = G\mathbf{k} \quad (1.3.63)$$

Poichè $(P(t) - O) \wedge \frac{dP}{dt} = G\mathbf{k}$, e il piano sotteso dai vettori $P(t) - O$ e $\frac{dP}{dt}$ è perpendicolare a \mathbf{k} , posizione e velocità giacciono sullo stesso piano $\forall t$. Il moto di P è *piano*; più precisamente, contenuto nel piano xy . Sia ora $K = 0$. In tal caso $P(t) - O$ e $\frac{dP}{dt}$ sono paralleli; poichè $\frac{dP}{dt}$ è tangente a $P - O$ essi giacciono sulla stessa retta. Ciò conclude la dimostrazione.

D'ora in poi, considereremo solo i moti per i quali $G \neq 0$, escludendo così i moti rettilinei.

Riferiamo il moto piano ad un sistema di coordinate polari (Cinematica, §1.1.5), con polo O e raggio vettore $P - O = r\mathbf{e}_r$. Calcoliamo l'espressione di K . Si ha, essendo $P(t) - O = r(t)\mathbf{e}_r$, $\frac{dP}{dt} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi$:

$$\mathbf{K}(O) = m\mathbf{e}_r \wedge (\mathbf{e}_r + r\dot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi) = mr^2\dot{\varphi}\mathbf{k} \implies K = mr^2\dot{\varphi}$$

Definiamo ora *velocità areolare* la quantità

$$A := r^2\dot{\varphi} = \frac{K}{m} \quad (1.3.64)$$

Allora si può affermare:

Proposizione 1.12 *La velocità areolare di un punto in moto sotto l'azione di un campo di forze centrale è costante.*¹⁰

Questa proposizione è un modo di formulare la II legge di Keplero. Tuttavia la velocità areolare ha un'interpretazione geometrica semplice, che sta alla base della formulazione originale di Keplero che ora otterremo.

Osserviamo anzitutto che la dimensioni di A sono $\ell^2 t^{-1}$, cioè un'area nell'unità di tempo. In effetti, l'area dS descritta da P nel tempo dt vale (a meno di infinitesimi di ordine superiore) $2A$. L'area dS è pari, infatti, all'area del triangolo di base dP , lati $r(t), r(t + dt)$ e angolo $d\varphi$ in O , opposto alla base dP .

figura della velocità areolare

Algebricamente: $r(t + dt) = r(t) + O(dt)$; la base del triangolo vale $r(t)\sin d\varphi$, e l'altezza $r(t)$; quindi a meno di termini di ordine almeno $d\varphi dt$ si avrà:

$$dS = \frac{1}{2}r^2 d\varphi \implies \frac{dS}{dt} = \frac{A}{2}$$

Possiamo pertanto enunciare la II legge di Keplero in una formulazione assai più vicina a quella originale:¹¹

II legge di Keplero

Il raggio vettore $P(t) - O$ di un punto in moto in un campo di forze centrali spazza aree uguali in intervalli di tempo uguali.

C. Conservazione dell'energia. Riduzione alle quadrature.

Facciamo ora vedere che l'energia del moto del punto di massa ridotta può essere espressa in funzione della sola coordinata radiale del moto piano, della velocità radiale e della velocità areolare.

Proposizione 1.13 *L'energia totale di un punto di massa m mobile in un campo di*

¹⁰Detta anche *costante delle aree*.

¹¹Johannes Kepler (italianizzato in Giovanni Keplero), nato a Weil nel Württemberg nel 1571, morto a Regensburg (Ratisbona) nel 1630, astronomo alla corte dell'Imperatore Rodolfo II d'Absburgo a Praga. Enunciò le sue leggi nel trattato *Astronomia nova*, pubblicato a Praga nel 1609. Egli riferiva le orbite planetarie ellittiche della sua I legge non al sistema copernicano, come si fa oggi, ma al cosiddetto sistema ticonico, introdotto dal suo maestro Tycho Brahe (Skane, Danimarca, 1546-Praga 1601), suo predecessore nella carica di astronomo imperiale. Nel sistema ticonico i pianeti orbitano attorno al sole, che a sua volta orbita attorno alla terra considerata fissa. Le osservazioni che hanno condotto Keplero a enunciare le sue tre leggi, in gran parte eseguite da Tycho Brahe, riguardavano il movimento dei pianeti, in particolare di Marte. Egli enunciava la seconda legge così: le aree spazzate dal raggio che congiunge il pianeta al sole sono proporzionali ai tempi impiegati a percorrerle. Il moto dei pianeti è descritto dal potenziale newtoniano. A differenza della prima e della terza, però, la seconda legge è valida anche nel caso di un potenziale centrale arbitrario e pertanto oggi la si enuncia come sopra.

forze centrale vale

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + V_A(r), \quad V_A(r) := V(r) + \frac{mA^2}{2r^2} \quad (1.3.65)$$

Il potenziale $V_A(r)$ si dice anche potenziale efficace: il termine $\frac{mA^2}{2r^2}$ potenziale centrifugo.

Dimostrazione

Si ha:

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi)^2 = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + \frac{A^2}{r^2}\right)$$

Qui abbiamo usato l'integrale delle aree, $A = r^2\dot{\varphi}$, per eliminare $\dot{\varphi}$. Poichè il potenziale è $V(r)$, e $E = T + V$, la (1.3.65) è dimostrata.

L'energia totale sopra si conserva. Dunque si trova la dipendenza di r da t con una quadratura, come nei problemi unidimensionali del paragrafo precedente. Si ha infatti, dalla conservazione dell'energia E :

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{2}{m}(E - V_A(r))}$$

dove abbiamo scelto il segno positivo della radice in accordo con la discussione del paragrafo precedente. Pertanto:

Proposizione 1.14 *Ogni moto $t \mapsto r_{E,r_0}(t)$ ad energia E della coordinata radiale r con la condizione iniziale $r(0) = r_0$ è la funzione inversa di $t \mapsto t_{E,r_0}(r)$ definita da*

$$t_{E,r_0}(r) = \int_{r_0}^r \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V_A(r))}} \quad (1.3.66)$$

Osservazione

Se oltre al raggio iniziale assegnamo anche la velocità radiale iniziale v_{0r} l'energia del moto corrispondente rimane determinata:

$$E = E_0 = \frac{1}{2}mv_{0r}^2 + V_A(r_0)$$

Se invece assegnamo l'energia E_0 oltre a r_0 , la velocità iniziale è determinata (a meno del segno) dall'espressione precedente.

Noto il moto $t \mapsto r(t)$ (omettiamo d'ora in poi per semplicità la dipendenza dalle condizioni iniziali) della coordinata radiale l'integrale delle aree fornisce immediatamente il moto dell'anomalia. Infatti da $A = r^2\dot{\varphi}$ otteniamo subito:

Corollario 1.5 Ogni moto $t \mapsto \varphi(t)$ dell'anomalia con la condizione iniziale $\varphi(0) = \varphi_0$ è dato da:

$$\varphi(t) = A \int_0^t \frac{d\tau}{r^2(\tau)} d\tau + \varphi_0, \quad A = r_0^2 \dot{\varphi}_0 \quad (1.3.67)$$

L'equazione della traiettoria si dovrebbe ottenere eliminando t fra le equazioni $r = r(t)$ e $\varphi = \varphi(t)$. Tuttavia l'esistenza dei due integrali primi permette di evitare il calcolo esplicito di queste funzioni, che non si riesce a fare nemmeno nel caso newtoniano come vedremo. Si ha infatti:

Proposizione 1.15 L'equazione dell'orbita in coordinate polari è

$$\varphi = \int_{r_0}^r \frac{A/\rho^2 d\rho}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V_A(\rho))}} \quad (1.3.68)$$

Dimostrazione

Si ha (con il consueto abuso di notazione)

$$\varphi(r) = \varphi(t(r)) \implies \frac{d\varphi}{dr} = \frac{d\varphi}{dt} \cdot \frac{dt}{dr}$$

Pertanto, dato che $\dot{\varphi} = A/r^2$, troviamo

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{d\varphi}{dt} \frac{dt}{dr} = \frac{A/r^2}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V_A(r))}}$$

e integrando fra r_0 e r otteniamo l'equazione dell'orbita in coordinate polari (1.3.68).

D. Determinazione delle orbite del problema di Keplero.

Dicesi *problema di Keplero* il moto in un campo centrale con potenziale

$$V(r) = -\frac{km_1m_2}{r}$$

Calcoliamo anzitutto la dimensione della costante k . Poiché $[km_1m_2/r] = [E] = [m\ell^2t^{-2}]$, e $[r^{-1}] = [\ell^{-1}]$, risulta:

$$[k] = [m^{-1}\ell^3t^{-2}]$$

Osserviamo ora che se il potenziale ha questa forma, le equazioni (1.3.60) e (1.3.70) danno

$$\frac{d^2P}{dt^2} = -\frac{kM}{r^2}$$

Pertanto possiamo applicare tutte le formule precedenti facendo $m = 1$ e $V(r) = -\frac{kM}{r}$. Il potenziale effettivo V_A avrà ora l'espressione:

$$V_A(r) = -\frac{kM}{r} + \frac{A^2}{2r^2}.$$

Le traiettorie generate da questo potenziale si trovano esplicitamente.

Teorema 1.7 *Comunque si scelgano l'energia $E(r_0, v_{0,r})$ e la costante delle aree $A(r_0, \dot{\varphi}_0)$ l'equazione delle traiettoria è:*

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(\varphi - \varphi_0)} \quad (1.3.69)$$

dove:

$$p = \frac{A^2}{kM}, \quad e = \sqrt{1 + \frac{2EA^2}{k^2M^2}}$$

Dimostrazione

Dalla formula generale sopra dimostrata

$$\varphi = \int_{r_0}^r \frac{A d\rho}{\rho^2 \sqrt{2(E - V_A(\rho))}}$$

si ottiene tramite integrazione

$$\varphi = \arccos \frac{\frac{A}{r} - \frac{kM}{A}}{\sqrt{2E + \frac{k^2M^2}{A^2}}} + \text{costante}$$

In dettaglio: si operi la sostituzione $x = \frac{1}{\rho}$. Se $x = \rho^{-1}$ si ha $\rho = x^{-1}$, $d\rho = -x^{-2} dx$ e quindi

$$\begin{aligned} \varphi &= \int_{r_0}^r \frac{A d\rho}{\rho^2 \sqrt{2E + \frac{2kM}{\rho} - \frac{A^2}{\rho^2}}} = - \int_{\frac{1}{r_0}}^{\frac{1}{r}} \frac{A dx}{\sqrt{2E + 2kMx - A^2x^2}} \\ &= - \int_{\frac{1}{r_0}}^{\frac{1}{r}} \frac{A dx}{\sqrt{A^2[\frac{2E}{A^2} + \frac{k^2M^2}{A^4} - (x - \frac{kM}{A})^2]}} = - \int_{\frac{1}{r_0} - \frac{kM}{A^2}}^{\frac{1}{r} - \frac{kM}{A^2}} \frac{A du}{\sqrt{A^2[\frac{2E}{A^2} + \frac{k^2M^2}{A^4} - u^2]}} \end{aligned}$$

con l'ulteriore sostituzione $x - \frac{kM}{A^2} = u$. Ora:

$$\int_a^b \frac{du}{\sqrt{C^2 - u^2}} = \arccos(b/C) - \arccos(a/C)$$

Pertanto, con $C := \frac{2E}{A^2} + \frac{k^2M^2}{A^4}$:

$$\varphi = \arccos \frac{\frac{A}{r} - \frac{kM}{A}}{\sqrt{2E + \frac{k^2M^2}{A^2}}} - \arccos \frac{\frac{A}{r_0} - \frac{kM}{A}}{\sqrt{2E + \frac{k^2M^2}{A^2}}}$$

e quindi

$$\varphi = \arccos \frac{\frac{A}{r} - \frac{kM}{A}}{\sqrt{2E + \frac{k^2M^2}{A^2}}} - \arccos \frac{\frac{A}{r_0} - \frac{kM}{A}}{\sqrt{2E + \frac{k^2M^2}{A^2}}}$$

da cui

$$\varphi - \varphi_0 = \arccos \frac{\frac{A}{r} - \frac{kM}{A}}{\sqrt{2E + \frac{k^2 M^2}{A^2}}} : \quad \varphi_0 := -\arccos \frac{\frac{A}{r_0} - \frac{kM}{A}}{\sqrt{2E + \frac{k^2 M^2}{A^2}}}$$

FIGURA 26 e 27 (A1, figs. 34 e 35, p. 43)

Introduciamo le seguenti notazioni

$$p = \frac{A^2}{kM}, \quad e = \sqrt{1 + \frac{2EA^2}{k^2 M^2}} \quad (1.3.70)$$

Si ottiene così $\varphi - \varphi_0 = \arccos \left[\left(\frac{p}{r} - 1 \right) / e \right]$ ovvero

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(\varphi - \varphi_0)}$$

che è la (1.3.69). Ciò conclude la dimostrazione del teorema.

Corollario 1.6 *La traiettoria (1.3.69) è una sezione conica di parametro p ed eccentricità e . La conica ha un fuoco nell'origine ed è:*

1. *Un'ellisse, se $|e| < 1$; in particolare una circonferenza se $e = 0$.*
2. *Una parabola, se $|e| = 1$.*
3. *Un'iperbole, se $|e| > 1$.*

Dimostrazione

La (1.3.69) è la cosiddetta *equazione focale* di una sezione conica. Per vedere che in effetti definisce una conica, la trasformiamo in coordinate cartesiane: facendo $\cos(\varphi - \varphi_0) = \frac{x}{r}$ si trova $r = p - ex$ e quindi

$$(1 - e^2)x^2 + y^2 + 2epx = p^2$$

Questa è la nota equazione cartesiana di una conica con i fuochi lungo l'asse x . Essa è chiaramente un'ellisse per $|e| < 1$, una parabola per $|e| = 1$ e un'iperbole per $|e| > 1$. Ciò dimostra il Corollario.

Osservazioni

Sia $E < 0$. Allora:

1. La traiettoria è sempre un'ellisse perchè in tal caso $|e| < 1$ per la (1.3.70).
2. Nel caso della circonferenza si ha $r_{\text{cir}} = p$ mentre l'energia vale

$$E_{\text{cir}} = V_A(p) = -\frac{1}{2} \frac{k^2 M^2}{A^2}.$$

E. L'ellisse di Keplero. La I e la III legge

La traiettoria sarà dunque un'orbita nel caso in cui essa sia ellittica. Ammettendo che l'interazione fra sole e pianeta sia data dalla forza di attrazione newtoniana, e assumendo il sistema di riferimento eliocentrico, abbiamo così dimostrato la

I legge di Keplero

Le orbite descritte dai pianeti sono ellissi di cui il sole occupa uno dei fuochi.

La quantità p si chiama *parametro* della conica, mentre e si chiama *eccentricità*.

Osservazioni

1. Se si ammette che i pianeti siano in moto in un campo centrale di gravitazione ¹², si può dimostrare che la prima legge di Keplero implica la legge dell'attrazione universale di Newton $V = -kM/r$.
2. Un'ellisse con piccola eccentricità è molto simile a una circonferenza. In effetti, se c è un infinitesimo del primo ordine, la differenza tra i semiassi è del secondo ordine: $b = a\sqrt{1 - e^2} \simeq a(1 - e^2/2)$. Ora, le eccentricità delle orbite dei pianeti sono molto piccole. Per questo motivo la scoperta della I legge di Keplero fu molto faticosa.

Il parametro e l'eccentricità sono legati ai semiassi a e b dalle relazioni

$$2a = \frac{p}{(1 - e)} + \frac{p}{(1 + e)} = \frac{2p}{(1 - e^2)} \quad (1.3.71)$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \quad (1.3.72)$$

dove $c = ae$ è la distanza dal centro al fuoco (Fig.35). Infatti, le distanze radiali minime e massime dall'origine sono determinate dai punti di inversione del moto radiale, cioè dalle soluzioni dell'equazione $E - V_A(r) = 0$. Esplicitamente, poichè $V = -kM/r$:

$$E + \frac{kM}{r} - \frac{A^2}{2r^2} = 0$$

da cui:

$$\frac{1}{r_{\pm}} = \frac{1}{A^2} [kM \pm \sqrt{k^2 M^2 + 2EA^2}] = \frac{kM}{A^2} (1 \pm e) = \frac{1 \pm e}{p}$$

Qui abbiamo tenuto conto delle definizioni (1.3.70). Dunque la distanze radiali minima e massima sono

$$r_- = \frac{p}{1 - e}, \quad r_+ = \frac{p}{1 + e}.$$

¹²La cui intensità diminuisca con la distanza, il che permette di escludere la forza elastica di potenziale r^2 .

Esse prendono naturalmente il nome di *perielio* e *afelio*. Inoltre, ovviamente, la somma $r_+ + r_-$ vale la lunghezza dell'asse maggiore dell'ellisse, e questo prova la formula (1.3.71).

La seconda legge di Keplero: la velocità areolare è costante, è valida, come abbiamo visto, in qualsiasi campo centrale.

La terza legge di Keplero si enuncia come segue:

III legge di Keplero

I quadrati dei periodi di rivoluzione di due pianeti che si muovono su diverse orbite ellittiche stanno tra loro come i cubi dei corrispondenti assi maggiori.

Dimostrazione.

Indichiamo con T il periodo di rivoluzione. Si noti che, con le notazioni usate sopra, deve essere $T = T_r = T_\varphi$. Indichiamo poi con S l'area spazzata dal raggio vettore del pianeta nel tempo T . Si ha $2S = AT$, dato che $\frac{A}{2}$ è la velocità areolare. Ora S è uguale all'area dell'ellisse, che vale πab ; dunque $T = 2\pi \frac{ab}{A}$. E poiché

$$a = \frac{p}{1 - e^2} = \frac{A^2/kM}{2|E|A^2/k^2M^2} = \frac{kM}{2|E|}, \quad b = \frac{A^2}{kM} \frac{1}{\sqrt{2|E|A/kM}} = \frac{A}{\sqrt{2|E|}}$$

allora $T = \frac{2\pi kM}{(2|E|)^{3/2}}$; ora $2|E| = \frac{kM}{a}$. Dunque

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{kM}} a^{3/2}$$

e ciò conclude la dimostrazione.

Si osservi che l'energia totale E dipende unicamente dal semiasse a dell'orbita e che è la stessa per tutta la famiglia di orbite ellittiche (dal cerchio di raggio a al segmento di lunghezza $2a$).

F. Descrizione dei moti Kepleriani

Dicesi *Kepleriano* il moto di un punto che descrive la sezione conica di equazione polare $r = \frac{p}{1 + e \cos \varphi}$ sotto l'azione della forza di attrazione newtoniana di costante k .

Proposizione 1.16 *L'energia totale di un moto Kepleriano qualsiasi vale*

$$E = -\frac{kM}{2p}(1 - e^2)$$

Corollario 1.7 *L'energia è negativa, nulla o positiva a seconda che l'orbita sia un'ellisse ($|e| < 1$), una parabola ($|e| = 1$) o un'iperbole ($|e| > 1$).*

Dimostrazione

Abbiamo

$$V = -\frac{kM}{r} = -\frac{kM}{p}(1 + e\cos\varphi)$$

lungo il moto Kepleriano. Inoltre, per la seconda legge di Keplero

$$\begin{aligned}\dot{\varphi} &= \frac{A}{r^2} \\ \dot{r} &= \frac{dr}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = \frac{A}{r^2} \frac{dr}{d\varphi} = -A \frac{dr^{-1}}{d\varphi}\end{aligned}$$

Poichè $\frac{1}{r} = \frac{1 + e\cos\varphi}{p}$ l'energia cinetica del moto kepleriano sarà

$$T = \frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) = \frac{A^2}{2p^2}[e^2\sin^2\varphi + (1 + e\cos\varphi)^2]$$

Sommando con l'energia potenziale e ricordando che $p = \frac{A^2}{kM}$ si ottiene infine l'espressione dell'energia totale

$$E = T + V = \frac{kM}{2p}(e^2 + 1 - 2e\cos\varphi + 2e\cos\varphi - 2) = -\frac{kM}{2p}(1 - e^2)$$

e ciò prova la Proposizione.

Rimangono da ricavare le equazioni parametriche del moto, cioè le funzioni $r(t)$ e $\varphi(t)$ che esprimono la variazione temporale del raggio vettore e dell'anomalia. Ci limitiamo a considerare i moti ellittici, $0 \leq |e| < 1$. A questo proposito si ha:

Proposizione 1.17 *Le equazioni parametriche dei moti ellittici sono:*

$$\begin{cases} r(t) = a[1 - e\cos u(t)] \\ \varphi = 2\arctg\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\tan[u(t)/2] \end{cases} \quad (1.3.73)$$

Qui la funzione $t \mapsto u(t)$, detta anomalia eccentrica, è la funzione inversa della $u \mapsto t(u) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, dove

$$t(u) = \frac{1}{\sqrt{kM}}a^{\frac{3}{2}}(u - e\sin u).$$

Dimostrazione

La quadratura per il tempo vista al punto C) dà, considerata la forma presente del potenziale $V(r)$

$$t = \int_{r_{\min}}^r \frac{r d\rho}{\sqrt{2E\rho^2 + 2kM\rho - A^2}}$$

dove al solito assumiamo il mobile nel perielio all'istante iniziale con velocità positiva.

Teniamo ora conto che il moto si svolge sull'ellisse Kepleriana. Avremo quindi

$$E = -|E|, \quad \frac{kM}{2|E|} = \frac{p}{1 - e^2} = a, \quad \frac{A^2}{2|E|} = b^2 \implies \frac{k^2M^2}{4|E|^2} - \frac{A^2}{2|E|} = a^2e^2$$

e pertanto

$$\begin{aligned} 2Er^2 + 2kMr - A^2 &= 2|E| \left[- \left(r - \frac{kM}{2|E|} \right)^2 + \frac{k^2M^2}{4|E|^2} - \frac{A^2}{2|E|} \right] \\ &= 2|E| \left[a^2e^2 - (r - a)^2 \right] \end{aligned}$$

da cui

$$t = \frac{1}{\sqrt{2|E|}} \int_{r_{\min}}^r \frac{r \, dr}{\sqrt{a^2e^2 - (r - a)^2}}$$

Ora operiamo la sostituzione

$$r = a(1 - \operatorname{ecos}u) \quad (1.3.74)$$

che dà immediatamente (si noti che $r_{\min} = a(1 - e)$ corrisponde a $u = 0$)

$$t = \frac{1}{\sqrt{kM}} a^{\frac{3}{2}} (u - e \sin u) \quad (1.3.75)$$

Osserviamo che, nel caso ellittico $|e| < 1$, quest'ultima equazione può sempre essere invertita per ottenere u come funzione del tempo. Infatti $\frac{dt}{du} = \frac{1}{\sqrt{kM}} a^{\frac{3}{2}} (1 - e \cos u) > 0 \forall u$. Inserendo la funzione $u(t)$ nella (1.3.74) otteniamo la $r = r(t)$. La variabile ausiliaria u si dice *anomalia eccentrica* per la ragione che ora vedremo. Osserviamo intanto che, essendo $T = \frac{2\pi}{\sqrt{kM}} a^{\frac{3}{2}}$, se definiamo $\ell = \frac{2\pi t}{T}$, allora ℓ varia fra 0 e 2π ed è pertanto un angolo, e la (1.3.75) si riscrive così:

$$\ell = u - e \sin u \quad (1.3.76)$$

Questa è l'*equazione di Keplero*. Essa lega l'anomalia eccentrica u all'angolo ℓ , detto *anomalia media*, che varia linearmente col tempo: $\ell = \omega t$, dove $\omega = \frac{2\pi}{T}$ è la pulsazione del moto Kepleriano. Rimane ora da determinare la variazione temporale dell'anomalia φ delle coordinate polari, detta per ragioni evidenti *anomalia vera*. A tale scopo si può ricorrere alla costruzione geometrica originale di Keplero, che motiva il nome di anomalia eccentrica per l'angolo u

Figura dell'anomalia eccentrica

Per via puramente algebrica: l'equazione dell'orbita implica $r(1 + e \cos \varphi) = p = a(1 - e^2)$ e cioè $r \cos \varphi = a(\cos u - e)$. Sommando e sottraendo membro a membro con la $r = a(1 - e \cos u)$ ¹³ si ottiene subito

$$\sqrt{r} \cos \frac{\varphi}{2} = \sqrt{a(1 - e)} \cos \frac{u}{2}, \quad \sqrt{r} \sin \frac{\varphi}{2} = \sqrt{a(1 + e)} \sin \frac{u}{2}$$

¹³Tenendo presente che $\cos^2 \varphi = \cos^2 \frac{\varphi}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2}$, $\cos^2 \frac{\varphi}{2} + \sin^2 \frac{\varphi}{2} = 1$

da cui, dividendo membro a membro, otteniamo la formula che lega l'anomalia eccentrica all'anomalia vera

$$\operatorname{tang} \frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tang} \frac{u}{2} \quad (1.3.77)$$

e ciò conclude la dimostrazione.

Osservazioni

1. Per determinare le equazioni parametriche del moto $r(t)$ e $\varphi(t)$ occorre *in ogni caso* invertire l'equazione di Keplero, cosa che non si può fare esplicitamente, ma solo tramite sviluppi in serie a piccola eccentricità¹⁴.
2. L'anomalia media varia di 2π a ciascun ritorno del pianeta al perielio, e pertanto si dice anche *epoca del passaggio al perielio*.

Conclusione: determinazione completa dei moti kepleriani

Fissate le condizioni iniziali $r_0, \dot{r}_0, \dot{\varphi}_0$ rimane fissato un valore degli integrali primi E e A . Sia assumano $r_0, \dot{r}_0, \dot{\varphi}_0$ tali che $E < 0$, $A \neq 0$. Allora rimane fissata un'ellisse Kepleriana con un fuoco nell'origine. I suoi semiassi a e b e il suo parametro p sono dati dalle formule (1.3.71.1.3.72). Il moto lungo l'ellisse Kepleriana, cioè la variazione col tempo del raggio vettore e la variazione col tempo dell'anomalia vera, è descritto dalle equazioni parametriche (1.3.73).

Esercizio

Determinare la *seconda velocità cosmica* v_2 , cioè la velocità che un corpo deve possedere per sfuggire all'attrazione terrestre.

Soluzione.

Per sfuggire all'attrazione terrestre il corpo deve potere descrivere un moto del problema dei due corpi di energia totale positiva, e cioè la sua velocità iniziale deve essere tale da immerlo su una traiettoria iperbolica. La seconda velocità cosmica v_2 è pertanto la velocità iniziale di transizione fra moto ellittico e moto iperbolico: essa corrisponde quindi ad un moto parabolico, che richiede $|e| = 1$, dove e è l'eccentricità della conica di equazione polare $r = \frac{p}{1 + e \cos \varphi}$. Esprimiamo questa condizione in funzione del valore assoluto v della velocità iniziale. Conviene scegliere come dato iniziale uno dei due vertici della conica, perchè ivi la velocità è puramente trasversa¹⁵.

¹⁴Il metodo canonico di farlo è quello di scrivere lo sviluppo in serie di e per la funzione inversa $u = u(\ell; e)$ secondo il metodo di Lagrange, da lui introdotto nel 1774 proprio in questo contesto.

¹⁵Interpretando queste condizioni iniziali come quelle del lancio di un veicolo spaziale, il lancio avviene con velocità orizzontale ad una quota di qualche decina di chilometri sopra un punto qualsiasi della terra, raggiunta con una spinta verticale dei propulsori

La distanza del vertice dal fuoco è come sappiamo $r_0 = \frac{p}{1+e}$. Si tratterà del vertice più vicino o più lontano a seconda che sia $e > 0$ o $e < 0$. Pertanto avremo $A = \frac{pv}{1+e} = r_0v$. D'altra parte sappiamo anche che $p = \frac{A^2}{kM}$, da cui

$$e = \frac{p}{r_0} - 1 = \frac{r_0v^2}{kM} - 1 \quad (1.3.78)$$

L'equazione $e = 1$ dà la condizione che cercavamo sulla velocità iniziale

$$v \equiv v_2 = \sqrt{\frac{2kM}{r_0}} \quad (1.3.79)$$

(Si noti che saremmo arrivati allo stesso risultato scegliendo $r_0 = \frac{p}{1-e}$ e imponendo in tal caso $e = -1$). Ora nel caso presente possiamo senz'altro assumere $r_0 = 6.3 \times 10^6$ m (raggio della terra) e $kM = 9.8r_0^2$ (m^2/sec^2). Infatti qualche decina di chilometri è una distanza trascurabile rispetto al raggio della terra, e $kM = 9.8r_0^2$ è la consueta approssimazione della legge della gravitazione di Newton valida per corpi di massa trascurabile rispetto quella della terra e distanza del pari trascurabile rispetto al raggio della terra. Dunque

$$v_2 = \sqrt{2 \times 9.8 \times 6.3 \cdot 10^3} \text{ m/sec} \sim 11.2 \text{ km/sec}$$

F. Soluzione del problema dei due corpi con il potenziale newtoniano

Riprendiamo l'osservazione dopo il Teorema 1.6. Assumiamo che le condizioni iniziali del moto del baricentro siano $G(0) = G_0$, $\dot{G}_0 = 0$. Allora $G(t) - O = G_0 - O$. Assumiamo inoltre che la forza di interazione fra P_1 e P_2 sia generata dal potenziale newtoniano:

$$V(\|P_1 - P_2\|) := -\frac{km_1m_2}{\|P_1 - P_2\|}$$

Sappiamo inoltre che noti i moti $G(t)$ e $P(t)$ sono noti anche i moti $P_1(t)$ e $P_2(t)$. Riscriviamo infatti la (1.3.61):

$$\begin{cases} P_1(t) - O = \frac{m_1}{m_1 + m_2}(G(t) - O) - \frac{m_2}{m_1 + m_2}(P(t) - O) \\ P_2(t) - O = \frac{m_1}{m_1 + m_2}(P(t) - O) + \frac{m_2}{m_1 + m_2}(G(t) - O) \end{cases}$$

Ora per la trattazione precedente $P(t) - O = r\mathbf{e}_r = r(t)[\cos\varphi(t)\mathbf{i} + \sin\varphi(t)\mathbf{j}]$, dove le funzioni $t \mapsto r(t)$ e $t \mapsto \varphi(t)$ sono il raggio vettore e l'anomalia vera del punto P di massa ridotta. Pertanto i moti dei due punti saranno:

$$\begin{cases} P_1(t) - O = \frac{m_1}{m_1 + m_2}(G - O) - \frac{m_2}{m_1 + m_2}r(t)[\cos\varphi(t)\mathbf{i} + \sin\varphi(t)\mathbf{j}] \\ P_2(t) - O = \frac{m_1}{m_1 + m_2}r(t)[\cos\varphi(t)\mathbf{i} + \sin\varphi(t)\mathbf{j}] + \frac{m_2}{m_1 + m_2}(G - O) \end{cases} \quad (1.3.80)$$

Le traiettorie di ambedue i punti sono delle ellissi, iperbole o parabole, a seconda dell'energia iniziale.

Osservazione finale

Supponiamo ora che una delle due masse sia trascurabile rispetto all'altra, ad esempio m_1 rispetto a m_2 . Allora P_2 è il baricentro immobile e P_1 descrive una sezione conica. Nel caso generale, se m_1 non è trascurabile rispetto a m_2 , e ammettiamo che l'energia iniziale sia negativa, $P_1(t)$ e $P_2(t)$ descriveranno ellissi nel medesimo piano con un fuoco in comune nel baricentro. Se $m_1 \ll m_2$, l'ellisse descritta da P_2 sarà molto più piccola, e percorsa molto più lentamente, di quella descritta da P_1 . Se ora assumiamo che m_1 sia la massa di un pianeta, e m_2 quella del sole, questo è il moto del sistema sole-pianeta visto da un osservatore inerziale, ad esempio un osservatore legato alle stelle fisse.

Un osservatore inerziale posto a grande distanza dal sistema planetario vede dunque il corpo pesante muoversi molto lentamente su un'ellisse che si discosta poco dal baricentro, e quello leggero muoversi molto velocemente su un'altra ellisse con un fuoco in comune alla prima che si discosta molto di più dal baricentro medesimo .

Questa constatazione ha fatto pendere definitivamente la bilancia a favore del sistema copernicano eliocentrico¹⁶ nella scelta del sistema a cui riferire il moto di rivoluzione.

¹⁶Il sistema eliocentrico, di cui si trova menzione già nel *Fedone* di Platone, che attribuisce a Filolao di Tebe (vissuto nel VI secolo a.C.) la considerazione della mobilità della terra e dell'immobilità del sole, fu adottato dai due più grandi astronomi dell'antichità prima di Tolomeo: Aristarco di Samo (metà del IV secolo a.C.) e soprattutto Ipparco di Nicea (II secolo a.C.). L'origine di questa concezione è del tutto naturale se si considerano i moti degli altri pianeti del sistema solare visti dalla terra. Infatti essi appaiono talvolta retrogradi, cosa spiegabile ammettendo che possano orbitare tutti a velocità differenti attorno ad un centro comune. Fu ripresa in modo autorevole e sistematico da Nicolò Copernico nel trattato *De revolutionibus orbium*, pubblicato a Norimberga nel 1543, anno della sua morte. Nikolaj Kopernik, latinizzato in Nicolaus Copernicus e italianizzato in Nicolò Copernico, nacque a Toruń sulla Vistola, in Polonia, nel 1473. Morì a Frauenburg (Frombork) nel 1543. Studiò diritto a Bologna, Roma, Ferrara, dove si laureò in Diritto canonico (era destinato alla carriera ecclesiastica). Negli anni fra il 1497 e il 1499, studente a Bologna, eseguì molte osservazioni astronomiche sotto la guida di Domenico Maria Novara. Rientrato in Polonia, dopo molte altre osservazioni, specialmente sul moto di Marte, si convinse della necessità del sistema eliocentrico, e passò il resto della vita a redigere il suo trattato.

Il sistema geocentrico consiste nell'accettare come sistema a cui riferire il moto dei pianeti il sistema *tolemaico*, in cui la terra è immobile, mentre il sole e i pianeti descrivono orbite costruite come combinazioni di moti circolari uniformi, detti *epicicli*, a partire da un moto circolare uniforme fondamentale, detto *deferente*, il cui centro è la terra. Questo sistema si chiama così perchè dovuto, nella sua forma a noi pervenuta, a Claudio Tolomeo, astronomo di Alessandria vissuto a metà del II secolo d.C. Il trattato di Tolomeo, intitolato *Sintassi matematica*, è meglio noto col nome di *Almagesto*, corruzione araba dell'appellativo greco $\eta \mu\epsilon\gamma\iota\sigma\tau\eta$, l'opera più grande. L'*Almagesto* condivide con gli *Elementi* di Euclide il primato di opera scientifica più studiata nella storia dell'umanità. Gli epicicli servivano a descrivere il moto retrogrado apparente dei pianeti, che è talvolta retrogrado come, ripetiamo, chiunque di noi può osservare ad occhio nudo. È da notare che anche Copernico

Infatti il sole ha una massa molto più grande di quella di qualsiasi pianeta, ed è naturale prenderlo come origine del riferimento per descrivere le rivoluzioni di tutti i pianeti.¹⁷

ammetteva che i moti potessero essere esclusivamente circolari e uniformi, e pertanto continuava a servirsi degli epicicli.

¹⁷A conclusione, riporto un'osservazione sulla questione dell'eliocentrismo e del geocentrismo, dovuta a uno dei più grandi fisici del secolo scorso, che a me sembra particolarmente felice:

È giusto affermare con Copernico che i pianeti orbitano attorno al Sole, ma non è sbagliato affermare con Tolomeo che sono il Sole e i pianeti ad orbitare attorno alla Terra. (Arnold Sommerfeld)

1.4 La dinamica relativa

1.4.1 Equazioni del moto nel sistema relativo

La seconda legge della dinamica vale in un sistema inerziale, nel quale per definizione un punto non soggetto a forze si muove di moto rettilineo uniforme. Ricordiamo che noi abbiamo postulato la natura assoluta della forze che agiscono su un corpo qualsiasi, e cioè che esse siano dovute all'azione diretta, o a distanza, di altri corpi. È un dato di esperienza comune, tuttavia, che esistono dei sistemi di riferimento in cui ciò non è vero. Se l'autobus sul quale stiamo fermi in piedi frena, cioè subisce una decelerazione, noi subiamo una spinta in avanti che ci fa cadere se non opponiamo un'opportuna resistenza. In altre parole, noi acquistiamo un'accelerazione, e il nostro stato di quiete cambia, anche se su di noi non agisce alcuna forza. La II legge in un sistema non inerziale sarà quindi diversa da quella enunciata sopra, nel senso che dovranno comparire altre forze oltre a quella assoluta, dette *apparenti*. Cominciamo col definire queste forze.

Definizione 1.15 *Consideriamo il punto materiale P in moto rispetto a due riferimenti S_2 e S_1 . Sia S_2 inerziale, e (P, \mathbf{F}) la forza che agisce su P in S_2 . Definiamo:*

1. Moto relativo il moto osservato dal sistema S_1 , non necessariamente inerziale; moto assoluto il moto osservato dal sistema inerziale S_2 .
2. Forza di trascinamento che agisce su P la forza (P, \mathbf{F}_τ) , $\mathbf{F}_\tau := -m\mathbf{a}_\tau$. \mathbf{a}_τ è l'accelerazione di trascinamento di P .
3. Forza di Coriolis che agisce su P la forza (P, \mathbf{F}_c) , $\mathbf{F}_c := -2m\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}_r$. $2\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}_r$ è l'accelerazione di Coriolis di P , \mathbf{v}_r la sua velocità relativa.

Osservazione

Le forze di trascinamento e di Coriolis sono indipendenti dall'osservatore inerziale, cioè non variano al variare dell'osservatore inerziale. Ciò è conseguenza del fatto, già osservato in cinematica, che \mathbf{a}_τ e \mathbf{a}_c sono nulle nel cambiamento da un osservatore inerziale ad un altro. Nel seguito quindi potremo parlare senz'altro di forze di trascinamento e di forza di Coriolis senza menzionare la trasformazione da un particolare osservatore inerziale a quello non inerziale che stiamo considerando.

Denotando al solito \mathbf{a}_r l'accelerazione relativa, possiamo allora trovare la seconda legge della dinamica in un sistema di riferimento relativo:

Teorema 1.8 *L'equazione del moto di un punto materiale di massa m vista da un osservatore relativo è la seguente:*

$$m\mathbf{a}_r = \mathbf{F} + \mathbf{F}_\tau + \mathbf{F}_c \quad (1.4.81)$$

cioè l'equazione del moto che competerebbe al punto visto da un osservatore inerziale, purchè si facciano agire sul punto, oltre alla forza assoluta, anche le forze apparenti.

Osservazioni

1. Si tenga presente che la (1.4.81) va scritta nel sistema relativo S_1 ; in altre parole, la legge di forza assoluta $\mathbf{F}(P, \dot{P}, t)$ e le forze apparenti $\mathbf{F}_\tau, \mathbf{F}_c$ vanno riespresse in termini delle coordinate del sistema S_1 . Non bisogna confondere i sistemi S_1 e S_2 per non incorrere in errori grossolani.
2. Dalla (1.4.81) segue immediatamente la *condizione necessaria di equilibrio relativo*, cioè la condizione necessaria affinché P sia in quiete rispetto all'osservatore S_1

$$\mathbf{F} + \mathbf{F}_\tau + \mathbf{F}_c = 0. \quad (1.4.82)$$

Come sempre, la forza risultante applicata a P deve essere nulla se P deve essere in quiete. Se poi la velocità iniziale *relativa* è nulla, la condizione (1.4.82) è anche sufficiente per la quiete relativa.

3. Calcoliamo l'espressione delle forze apparenti. La forza di Coriolis vale

$$\mathbf{F}_c := -m\mathbf{a}_c = -2m\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}_r. \quad (1.4.83)$$

D'altra parte, tenendo conto dell'espressione (1.2.37) dell'accelerazione di trasciamento, che qui riscriviamo nel modo seguente

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_\tau &= \mathbf{a}_\tau^{tr} + \mathbf{a}_\tau^{rot}; & \mathbf{a}_\tau^{tr} &= \frac{d^2 O_1}{dt^2} \\ \mathbf{a}_\tau^{rot} &= \dot{\boldsymbol{\omega}} \wedge (P - O_1) + \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{\omega} \wedge (P - O_1) \end{aligned}$$

si ha

$$\mathbf{F}_\tau = \mathbf{F}_\tau^{tr} + \mathbf{F}_\tau^{rot} := -m\mathbf{a}_\tau^{tr} - m\mathbf{a}_\tau^{rot} \quad (1.4.84)$$

dove $\mathbf{F}_\tau^{tr} = -m\mathbf{a}_\tau^{tr}$ è la *forza di trasciamento di traslazione* e $\mathbf{F}_\tau^{rot} = -m\mathbf{a}_\tau^{rot}$ è la *forza di trasciamento di rotazione*.

4. La componente $-m\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{\omega} \wedge (P - O_1)$ di \mathbf{F}_τ^{rot} vale $m\omega^2(P - O_1)$ per quanto abbiamo visto in cinematica. Essa è diretta da O_1 verso P e pertanto si chiama *forza centrifuga*.

5. Si noti che se la velocità angolare è nulla sono sempre nulle tanto la forza di Coriolis quanto la forza di trascinamento di rotazione.

Esempio

Torniamo ai passeggeri in piedi sull'autobus che accelera da fermo. Supponiamo che il moto dell'autobus sia rettilineo. In tal caso $\mathbf{F}_c = 0$, e $\mathbf{F}_\tau = \mathbf{F}_\tau^{tr} = -m \frac{d^2 O_1}{dt^2}$, O_1 l'origine del sistema solidale all'autobus. I passeggeri subiscono quindi una forza nella direzione del moto ma nel verso opposto, e quindi cadranno all'indietro se questa forza di trascinamento non viene compensata da un appoggio, mentre cadranno in avanti se l'autobus frena.

Esercizio

Dimostrare che nell'emisfero boreale la forza di Coriolis devia verso est ogni corpo in caduta libera.

Soluzione

La verticale e l'asse terrestre individuano un piano (verticale). $\boldsymbol{\Omega}$ è diretta lungo l'asse terrestre, orientata verso nord, e \dot{P} è orientata in senso discendente. Il vettore $\boldsymbol{\Omega} \wedge \dot{P}$ giace nel piano tangente alla sfera terrestre in P (si assume che l'altezza dalla quale il corpo cade sia trascurabile rispetto al raggio della terra). Prendiamo l'origine in P e allineiamo gli assi y e x secondo il parallelo e il meridiano in P , rispettivamente. Se poi come di consueto orientiamo l'asse x con versore \mathbf{i} verso nord, e l'asse z con versore \mathbf{k} verso l'alto, il versore \mathbf{j} dell'asse y sarà orientato verso ovest (regola della mano destra). Ora $\boldsymbol{\Omega}$ ha componente nulla lungo l'asse y e pertanto:

$$\boldsymbol{\Omega} \wedge \dot{P} = (\Omega_x \mathbf{i} + \Omega_z \mathbf{k}) \wedge (-v \mathbf{k}) = \Omega_x v \mathbf{j}.$$

D'altra parte, per definizione:

$$\mathbf{F}_c = -2m \boldsymbol{\Omega} \wedge \dot{P} = -2\Omega_x v \mathbf{j}$$

La forza di Coriolis è così diretta verso est e pertanto il moto viene deviato in tale direzione.

1.4.2 Effetti della rotazione terrestre: la deviazione dei gravi in caduta e il pendolo di Foucault

A. Riduzione alla sola forza di Coriolis

Studiamo in maggior dettaglio l'influenza della rotazione della terra sulle esperienze di laboratorio. Poichè la terra ruota in modo praticamente uniforme, si può supporre

$\dot{\Omega} = 0$. Consideriamo ora la forza centrifuga. Fissiamo un sistema di riferimento terrestre (cioè solidale nella terra), collocando l'origine nel centro della terra, l'asse z lungo la verticale, e gli assi x, y ortogonali a z e quindi diretti come gli assi nel piano tangente alla superficie terrestre in P . Si ha allora:

Proposizione 1.18 *Il valore assoluto F_{centr} della forza centrifuga che agisce su un punto P di massa m che si trova sulla superficie terrestre alla latitudine λ_0 vale:*

$$F_{centr} = m\Omega^2 \rho \cos \lambda_0$$

dove ρ è il raggio della terra.

Dimostrazione

L'angolo fra $P - O_1$ e Ω è evidentemente $\pi/2 - \lambda_0$, mentre $\|P - O_1\| = \rho$. Per definizione di forza centrifuga si ha:

$$\|\mathbf{F}_{centr}\| = \|m\Omega \wedge \Omega \wedge (P - O_1)\| = m\Omega^2 \rho \sin(\pi/2 - \lambda_0) = m\Omega^2 \rho \cos \lambda_0$$

e ciò dimostra la proposizione.

Osservazioni

1. La forza centrifuga assume il suo valore più massimo all'equatore dove, $\lambda_0 = 0$. Calcoliamo la sua proporzione rispetto alla forza peso in simili condizioni. Poichè la massa è la stessa, questo rapporto è il quoziente fra accelerazione centrifuga e accelerazione di gravità, e quindi $\frac{\Omega^2 \rho}{g}$. D'altra parte:

$$\frac{\Omega^2 \rho}{g} = \frac{(7.3 \cdot 10^{-5})^2 \cdot 6.4 \cdot 10^5}{9.8} \sim \frac{3}{1000}.$$

Quindi la forza centrifuga non supera, in valore assoluto, i $\frac{3}{1000}$ del peso.

2. La forza centrifuga è nulla ai poli. Questo effetto rende conto dello schiacciamento del geoide ai poli, dato che la terra non è perfettamente rigida.
3. La forza centrifuga è diretta come $P - O_1$, anche se in verso opposto, e non supera i 3 millesimi del peso. Pertanto potremo scrivere il valore assoluto della risultante fra il peso e il valore massimo forza centrifuga, raggiunto all'equatore, come $mg[1 - \Omega^2 \rho \cos \lambda_0 / g]$, che con abuso di notazione indicheremo ancora con mg . Quindi si tiene conto anche della forza centrifuga semplicemente correggendo mg .

Inoltre la distanza dall'asse terrestre varia pochissimo nelle dimensioni di qualunque laboratorio; pertanto anche la forza centrifuga varia pochissimo. Per osservarne delle variazioni occorre viaggiare.

Dunque in laboratorio la rotazione terrestre si manifesta solo attraverso la forza di Coriolis: rispetto ad un sistema di coordinate solidale con la terra, in cui orientiamo come sopra l'asse z lungo la verticale, ma lo dirigiamo verso il basso, si ha dunque con grande precisione

$$m\ddot{P} = m\mathbf{g} + 2m\dot{P} \wedge \boldsymbol{\Omega}$$

e cioè

$$\ddot{P} = \mathbf{g} + 2\dot{P} \wedge \boldsymbol{\Omega}$$

Questa equazione si chiama talvolta *equazione fondamentale della dinamica terrestre*.

B. Deviazione di gravi in caduta

Esercizio

Si lascia cadere una pietra in un pozzo di profondità 50 metri alla latitudine di Stoccolma ($\lambda = 60^\circ$). Determinare la sua deviazione rispetto alla verticale quando colpisce il fondo.

Soluzione

Notiamo anzitutto che lasciare cadere una pietra significa assegnarle velocità iniziale nulla. Risolviamo l'equazione

$$\ddot{P} = \mathbf{g} + 2\dot{P} \wedge \boldsymbol{\Omega} \quad (1.4.85)$$

per approssimazioni successive tenendo conto del fatto che $|\boldsymbol{\Omega}|$ è trascurabile rispetto a 1.

Qui è stato fissato un sistema di riferimento con l'asse z_1 lungo il pozzo e asse y_1 diretto verso est. Facciamo così perchè già sappiamo che la deviazione avverrà verso est. Esso è solidale con la terra, e dunque per quanto precede dobbiamo risolvere l'equazione della dinamica relativa. Sappiamo che possiamo trascurare la forza di trascinamento, che in questo caso si riduce a quella centrifuga.

Poniamo (fig.109)

$$P(t) = z_1(t)\mathbf{k}_1 + y_1(t)\mathbf{j}_1, \quad \text{dove} \quad y_1(0) = \dot{y}_1(0) = 0, \quad \text{e} \quad z_1(t) = z_1(0) + \frac{gt^2}{2}$$

Per la coordinata $y_1(t)$ otterremo la soluzione:

$$\ddot{y}_1 = 2\mathbf{g}t \wedge \boldsymbol{\Omega} + O(\Omega^2), \quad y_1(t) = \frac{t^3}{3}\mathbf{g} \wedge \boldsymbol{\Omega} \approx \frac{2t}{3}\mathbf{h} \wedge \boldsymbol{\Omega}, \quad \mathbf{h} = \frac{\mathbf{g}t^2}{2}$$

Si vede dunque che il grave scarta verso l'est circa di

$$\frac{2t}{3}h\Omega\cos\lambda = \frac{2 \cdot 7}{3} \cdot 250 \cdot 7 \cdot 10^{-5} \cdot \frac{1}{2}m \sim 4\text{cm}$$

Ricaviamo ora la soluzione procedendo per approssimazioni successive, cercando cioè di costruire la soluzione tramite uno sviluppo in serie di potenze di Ω . In approssimazione zero trascuriamo per definizione il termine di Coriolis (fig.109) che è proporzionale a Ω . Otterremo allora

$$P(t) = z_1(t)\mathbf{k}_1, \quad z_1(t) = z_1(0) + \frac{gt^2}{2}$$

Ora la (1.4.85) proiettata sull'asse y_1 dà l'equazione per la componente $y(t)$; le condizioni iniziali sono ovviamente $y_1(0) = \dot{y}_1(0) = 0$. Secondo il procedimento delle approssimazioni successive, per ottenere un termine noto del primo ordine in Ω dobbiamo mettere al posto di \dot{P} la soluzione all'ordine 0. Avremo pertanto

$$\ddot{y}_1 = 2\dot{P} \wedge \boldsymbol{\Omega} + O(\Omega^2) = 2gt\mathbf{k}_1 \wedge \boldsymbol{\Omega} + O(\Omega^2)$$

perchè il prodotto vettoriale $\mathbf{k}_1 \wedge \boldsymbol{\Omega}$ è diretto lungo \mathbf{j}_1 . Inoltre $|\mathbf{k}_1 \wedge \boldsymbol{\Omega}| = \Omega\cos\lambda$ e quindi, integrando l'equazione differenziale ultima scritta otteniamo, a meno di termini quadratici in Ω :

$$y_1(t) = \frac{t^3}{3}g\Omega\cos\lambda = \frac{2t}{3}h\Omega\cos\lambda, \quad h = \frac{gt^2}{2} \quad (1.4.86)$$

La legge di Galileo del moto uniformemente accelerato $h = \frac{gt^2}{2} = 50m$ fissa il tempo t che la pietra impiega a raggiungere il fondo del pozzo. Risolvendo per t infatti si trova $t \sim 3.3\text{sec.}$ e quindi lo scartamento sarà

$$y_1 = \frac{2 \cdot 3.3}{3} \cdot 50 \cdot 7 \cdot 10^{-5} \cdot \frac{1}{2}m \sim 4\text{cm}$$

figg.109 e 110

Esercizio

Un obice sparato verticalmente a Stoccolma raggiunge un'altezza di un chilometro. Di quanto sarà deviato dall'asse dell'affusto dalla forza di Coriolis?

Soluzione

Basta usare la formula (1.4.86), stavolta con $h = 1000m$. Si ottiene $t \sim 14\text{sec}$ e quindi

$$y_1 = \frac{2 \cdot 14}{3} \cdot 1000 \cdot 7 \cdot 10^{-5} \cdot \frac{1}{2}m \sim 32\text{cm}$$

C. Il pendolo di Foucault

(fig. 110).

Consideriamo le piccole oscillazioni del pendolo matematico di frequenza propria ω tenendo conto della forza di Coriolis. Siano $\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1, \mathbf{k}_1$ i vettori unitari di un sistema di coordinate rigidamente collegato alla terra, e che pertanto partecipa del suo moto di rotazione. Sia \mathbf{k}_1 diretto verticalmente verso l'alto, e \mathbf{i}_1 e \mathbf{j}_1 situati in un piano orizzontale tangente alla superficie terrestre sul quale si muove l'estremo del pendolo P : $(P - O_1) = x_1\mathbf{i}_1 + y_1\mathbf{j}_1$. Nell'approssimazione delle piccole oscillazioni $\dot{z}_1 = 0$ (cioè z_1 è trascurabile rispetto a \dot{x}_1 e \dot{y}_1); dunque la componente della forza di Coriolis sul piano orizzontale sarà $2m\Omega_{z_1}(\dot{y}_1\mathbf{i}_1 - \dot{x}_1\mathbf{j}_1)$. Ora, come noto (e come ritroveremo nel prossimo Capitolo) le piccole oscillazioni del pendolo sono descritte dalla forza di richiamo lineare $\mathbf{F} = -m\omega^2(P - O_1)$. L'equazione del moto nel sistema S_1 è

$$m\ddot{\mathbf{P}} = -m\omega^2(P - O_1) + \mathbf{F}_c$$

Proiettando sugli assi x_1 e y_1 si deducono quindi le equazioni del moto

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = -\omega^2 x_1 - 2\dot{y}_1\Omega_{z_1} \\ \ddot{y}_1 = -\omega^2 y_1 + 2\dot{x}_1\Omega_{z_1} \end{cases} \quad (1.4.87)$$

Poichè, ricordiamo, $\boldsymbol{\Omega}$ è diretta lungo l'asse terrestre e orientata verso nord, si ha $\Omega_{z_1} = |\boldsymbol{\Omega}|\sin\lambda_0$, dove λ_0 è la latitudine.

Se si pone

$$w = x_1 + iy_1 \implies \dot{w} = \dot{x}_1 + i\dot{y}_1, \quad \ddot{w} = \ddot{x}_1 + i\ddot{y}_1$$

le due equazioni (1.4.87) si riconducono ad una singola equazione complessa, cioè a una equazione la incognita è la funzione $t : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} : w(t) = x_1(t) + iy_1(t)$ a valori complessi.

$$\ddot{w} - i2\Omega_{z_1}\dot{w} + \omega^2 w = 0 \quad (1.4.88)$$

Prendendo la parte reale e la parte immaginaria di quest'ultima si ottengono la prima e la seconda equazione del sistema (1.4.87), rispettivamente.

Quindi per ottenere la soluzione del sistema basterà prendere parte reale e parte immaginaria della soluzione $w(t)$ (1.4.88). Infatti:

$$\begin{cases} \Re(\ddot{w} - i2\Omega_{z_1}\dot{w} + \omega^2 w) = \ddot{x} + 2\dot{y}\Omega_{z_1} + \omega^2 x \\ \Im(\ddot{w} - i2\Omega_{z_1}\dot{w} + \omega^2 w) = \ddot{y} - 2\dot{x}\Omega_{z_1} + \omega^2 y \end{cases}$$

Risolviamo la (1.4.88). Poniamo al solito $w = e^{\lambda t}$ da cui l'equazione caratteristica

$$\lambda^2 - 2i\Omega_{z_1}\lambda + \omega^2 = 0 \implies \lambda_{\pm} = i\Omega_{z_1} \pm \sqrt{\Omega_{z_1}^2 + \omega^2}$$

Ora $\Omega_{z_1}^2 \ll \omega^2$. Quindi, sviluppando in serie di Taylor:

$$\sqrt{\Omega_{z_1}^2 + \omega^2} = \omega \sqrt{1 + \frac{\Omega_{z_1}^2}{\omega^2}} = \omega + O(\Omega_{z_1}^2)$$

da cui, trascurando $\Omega_{z_1}^2$ rispetto a ω^2 :

$$\lambda \approx -i\Omega_{z_1} \pm i\omega$$

o, entro la stessa precisione

$$w(t) = e^{i\Omega_{z_1}t}(c_1 e^{i\omega t} + c_2 e^{-i\omega t})$$

Questa formula, in cui c_1 e c_2 sono al solito costanti complesse tali che $\bar{c}_1 = c_2$, esprime l'integrale generale della (1.4.88).

Per $\Omega_{z_1} = 0$ si ottengono le oscillazioni armoniche abituali del pendolo piano (o pendolo sferico; vedremo questo punto in dettaglio nel prossimo Capitolo). Constatiamo quindi che l'influenza della forza di Coriolis si traduce in una rotazione della figura attorno all'asse \mathbf{k} di velocità angolare Ω_{z_1} , dove $|\Omega_{z_1}| = |\mathbf{\Omega}|\sin\lambda_0$.

Consideriamo il caso particolare delle condizioni iniziali $y(0) = \dot{y}(0) = 0$. In tal caso la coordinata y , come sappiamo, non si muove e il moto oscillatorio del pendolo avviene nel piano verticale xz . Allora questo piano verticale delle oscillazioni ruoterà alla velocità angolare Ω_{z_1} rispetto al sistema di coordinate rigidamente collegato alla terra (fig.111).

fig. 111

Al polo il piano delle oscillazioni fa un giro completo in 24 ore (questo piano è fisso rispetto a qualsiasi sistema di coordinate che non ruotano con la terra. In altre parole: l'asse di rotazione del piano è l'asse polare e quindi il piano ruota esattamente come la terra. Equivalentemente, $|\Omega_{z_1}| = |\mathbf{\Omega}|$ e quindi il periodo di rotazione del piano vale $\frac{2\pi}{|\mathbf{\Omega}|}$ che è il periodo di rotazione della terra, cioè 24 ore). Alla latitudine di Bologna ($\lambda_0 \sim 45^\circ$) il piano farà $\sin\pi/4 \sim 0.7$ giri completi in 24 ore, cioè girerà alla velocità di $\frac{0.7 \cdot 360}{24} \sim 10.5^\circ$ gradi all'ora.

Chapter 2

Dinamica dei sistemi vincolati

2.1 Moto vincolato

A. Esempio: moto su una curva nello spazio

Un esempio di sistema meccanico vincolato è costituito da un punto materiale P , soggetto a una forza (P, \mathbf{F}) , che si muove nello spazio euclideo \mathbb{R}^3 *costretto a percorrere una data curva regolare* $\gamma \subset \mathbb{R}^3$, detta *vincolo*.¹ (Si pensi ad un bob che scende lungo una pista, o più semplicemente all'estremo di un pendolo, che è vincolato a percorrere una circonferenza verticale). Si vede subito che le equazioni del moto *non possono essere* quelle Newtoniane

$$m\ddot{P}(t) = -\nabla_P V(P)$$

Se così fosse, infatti, nel caso $V = 0$ le traiettorie sarebbero rette e il punto non potrebbe rimanere sulla curva. Bisognerà dunque ammettere che il vincolo stesso produca una forza, detta *reazione vincolare*, e denotata Φ , che ha appunto l'effetto di fare rimanere il punto sulla curva, *e di ridurre così da tre a uno il numero dei gradi di libertà*.

Ammetteremo dunque che l'equazione del moto si scriva così:

$$m\ddot{P}(t) = \mathbf{F} + \Phi \tag{2.1.1}$$

Tuttavia questa equazione non potrà dare alcuna informazione sul moto senza ulteriori ipotesi sulla natura della reazione vincolare, che a priori è incognita.

Per precisare meglio le cose, proiettiamo l'equazione vettoriale (2.1.1) sulla terna intrinseca $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$ associata alla curva γ . Denotando F_t, F_n, F_b ; Φ_t, Φ_n, Φ_b le componenti della forza \mathbf{F} , detta *forza attiva* per distinguerla dalla forza di reazione, e della reazione Φ , rispettivamente, lungo $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$, la (2.1.1) equivale, per quanto abbiamo visto

¹O anche *costrizione*, o *legame*. (cfr. inglese *constraint*, francese *liaison*).

in Cinematica, al seguente sistema di tre equazioni differenziali del secondo ordine

$$\begin{cases} m\ddot{s} &= F_t + \Phi_t \\ m\dot{s}^2/\rho &= F_n + \Phi_n \\ 0 &= F_b + \Phi_b \end{cases} \quad (2.1.2)$$

dove $t \mapsto s(t)$ è l'ascissa curvilinea lungo γ .

Osservazione

Tanto la forza attiva \mathbf{F} quanto la reazione vincolare Φ dipendono solo da (s, \dot{s}, t) .

Infatti, a priori $\mathbf{F} = \mathbf{F}(P, \dot{P}, t)$; d'altra parte $P \in \gamma$, e quindi $P = P(s)$, $\dot{P} = \dot{s}\mathbf{t}(s)$.

Pertanto $\Phi = \Phi(s, \dot{s}, t)$ per le (2.1.2) stesse.

Notiamo però che queste equazioni *non possono* determinare il moto. Infatti la reazione Φ è a priori incognita, e quindi le tre equazioni (2.1.2) hanno 4 incognite: s e le tre componenti di Φ . Osserviamo ora che l'effetto della reazione deve essere quello di mantenere il mobile sulla curva; in assenza di forze attive, essa dovrà equilibrare la *forza centripeta* $\frac{\dot{s}^2}{\rho}$ che tende a farlo uscire. È dunque naturale ammettere la seguente

Ipotesi

La reazione vincolare $\Phi = \Phi(s, \dot{s}, t)$ si mantiene sempre ortogonale al vincolo durante il moto.

Allora le equazioni (2.1.2) sono equazioni *chiuse*, cioè hanno tante incognite quante sono le equazioni, e determinano una soluzione ed una sola. Infatti $\Phi_t = 0$ e la prima ridiventa un'equazione di Newton abituale, nella quale compare solo la forza attiva:

$$m\ddot{s} = F_t \quad (2.1.3)$$

Assegnate le condizioni iniziali essa determina $s(t)$ e quindi $\dot{s}(t)$. Pertanto la seconda e la terza equazione permettono il calcolo della reazione vincolare

$$\Phi_n(s, \dot{s}) = -F_n(s, \dot{s}) + \frac{m\dot{s}^2}{\rho}, \quad \Phi_b(s, \dot{s}) = -F_b(s, \dot{s})$$

Caso particolare: il pendolo matematico

Il punto materiale P sia vincolato a percorrere la circonferenza verticale di raggio l sotto l'azione del peso (pendolo di lunghezza l). Qui il moto è piano. Riferendolo alle coordinate polari (r, φ) , con l'origine degli archi nella posizione inferiore del pendolo, abbiamo $r = l$, $s = l\varphi$, $\mathbf{F} = -m\mathbf{g} = -mg(\sin\varphi\mathbf{t} + \cos\varphi\mathbf{n})$ e pertanto le (2.1.2) diventano:

$$\begin{cases} ml\ddot{\varphi} &= -mg\sin\varphi \\ ml^2\dot{\varphi}^2/l &= -mg\cos\varphi + \Phi_n \end{cases} \quad (2.1.4)$$

La prima equazione, corredata delle condizioni iniziali, dà il moto $t \mapsto \varphi(t)$; noto il moto, la seconda permette di ricavare la reazione vincolare:

$$\Phi_n = ml\dot{\varphi}(t)^2 + mg\cos\varphi(t)$$

L'approssimazione delle piccole oscillazioni consiste nell'approssimare $\sin\varphi$ con φ , il primo termine non nullo nel suo sviluppo di Taylor. Allora la prima delle (2.1.4) diventa

$$\ddot{\varphi} = -g\varphi \quad (2.1.5)$$

Come sappiamo bene, questa è l'equazione delle oscillazioni lineari; i moti sono tutti oscillazioni armoniche di pulsazione $\omega := \sqrt{\frac{g}{l}}$, indipendente dall'ampiezza (legge di Galileo).

Per integrare l'equazione $\ddot{\varphi} = -\frac{g}{l}\sin\varphi$ in generale, cioè per trovare le *grandi oscillazioni del pendolo*, si usa l'integrale primo dell'energia esposto nel capitolo precedente. Introducendo il potenziale $V(\varphi) := \frac{g}{l}(1 - \cos\varphi)$ la prima delle equazioni (2.1.4) si riscrive così.

$$\ddot{\varphi} = -V'(\varphi)$$

e questa equazione ammette l'integrale primo dell'energia:

$$E := \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 + V(\varphi) = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 + \frac{g}{l}(1 - \cos\varphi) \quad (2.1.6)$$

Usando l'integrale primo otteniamo, come si è ripetutamente visto:

$$t(\varphi) = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\varphi'}{2[E - \frac{g}{l}(1 - \cos\varphi)]}$$

e il moto $\varphi = \varphi(t)$ sarà la funzione inversa di quest'ultima. Applicando la discussione dei moti unidimensionali sotto l'azione di una forza conservativa si ottiene:

Proposizione 2.1 *Si consideri il pendolo matematico di lunghezza l . Allora*

1. *Le configurazioni $\varphi = 0$ e $\varphi = \pi$ sono configurazioni di equilibrio (inferiore e superiore, rispettivamente).*
2. *Sia $E > \frac{g}{l}$. Allora il moto è una rotazione, cioè il pendolo non si arresta mai e ruota indefinitamente nel verso definito dalla velocità iniziale.*
3. *Sia $E < \frac{g}{l}$. Allora il moto è una librazione di estremi*

$$\varphi_{\pm} = \arccos\left(\frac{l}{g}E - 1\right)$$

cioè un'oscillazione periodica di estremi φ_- e φ_+ .

4. *Se $E = \frac{g}{l}$ il moto raggiunge la configurazione superiore di equilibrio in un tempo infinito:*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = \pi.$$

Dimostrazione

L'esempio semplicissimo del moto vincolato lungo una curva mette bene in luce tre aspetti fondamentali nello studio dei moti vincolati, di natura tanto meccanica quanto geometrica:

1. L'imposizione di un vincolo di natura geometrica ai moti possibili (ad esempio, la percorrenza di una curva prestabilita) richiede l'introduzione di ipotesi di natura meccanica (l'esistenza della forza di reazione che deve essere aggiunta a quella attiva nella seconda legge della dinamica);
2. L'effettiva determinazione del moto a partire dalla equazione della dinamica così generalizzata è legata ad un'ulteriore ipotesi (l'ortogonalità fra vincolo e reazione) di natura, ancora, sia meccanica che geometrica;
3. Quest'ultima condizione può essere imposta solo a partire dalla determinazione della natura geometrica della condizione di vincolo.

Tutto ciò motiva la seguente

Definizione 2.1 *Un vincolo imposto a un sistema meccanico è una relazione che sussiste istante per istante fra i caratteri cinematici dei vari suoi punti (posizione, velocità, accelerazione,...) durante ogni suo possibile moto.*

Osservazione

Sono particolarmente notevoli quelle relazioni che vincolano esclusivamente le posizioni simultanee dei diversi punti. Tali vincoli si dicono *olonomi*² e sono dunque espressi da equazioni del tipo (2.1.2), nelle quali però in generale compare anche il tempo. In questa definizione i vincoli si assumono dunque non solo olonomi ma anche *scleronomi*.³

Per i vincoli di qualunque natura si ammette comunque il seguente

Postulato delle reazioni vincolari

Per un punto materiale comunque vincolato e sollecitato da forze, l'azione dei vincoli è sostituibile, senza alterarne le condizioni di quiete e di moto, con quella di una forza (fittizia) aggiuntiva che dicesi reazione o forza vincolare.

²Questa denominazione, derivante da *ολος* e *νομος* (legge) allude alla circostanza che il vincolo si traduce in relazioni in termini finiti fra le coordinate dei punti. Essa è dovuta a H. Hertz. Heinrich Hertz, nato ad Amburgo nel 1857, e morto a Bonn nel 1894, è famoso soprattutto per essere stato il primo a generare le onde elettromagnetiche previste dalla teoria di Maxwell. All'epoca esse venivano chiamate onde hertziane.

³Dal greco *σκληρος*, rigido, e *νομος* come sopra. Cfr. *Arteriosclerosis*.

La reazione vincolare è a priori ignota. Sono particolarmente importanti quei vincoli per i quali almeno la sua direzione è nota a priori.

Definizione 2.2 *Un vincolo si dice liscio se la corrispondente reazione vincolare è sempre ortogonale al vincolo stesso. Un vincolo non liscio si dice scabro.*

Osservazioni

1. Ad esempio, abbiamo ammesso che fosse liscio il vincolo di rimanere su una curva.
2. Chiariremo meglio in seguito la nozione di ortogonalità fra la reazione e il vincolo.

Dal postulato delle reazioni vincolari e dalla seconda legge della dinamica si ha subito

Proposizione 2.2 *L'equazione del moto di un punto materiale vincolato P soggetto alla forza attiva risultante $(P.\mathbf{F})$ e a vincoli arbitrari è*

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F} + \Phi \quad (2.1.7)$$

dove Φ è la risultante delle reazioni vincolari che agiscono su P .

In altre parole: un punto materiale vincolato si muove un punto libero al quale viene applicata la risultante fra la forza attiva e la reazione vincolare. Pertanto:

Corollario 2.1 *Condizione necessaria e sufficiente affinché un punto materiale comunque vincolato, in quiete in una certa configurazione all'istante iniziale, lo rimanga per sempre (brevemente: condizione necessaria e sufficiente per la quiete) è che la risultante delle forze attive ad esso applicate e la risultante delle reazioni vincolari si facciano equilibrio:*

$$\mathbf{F} + \Phi = 0. \quad (2.1.8)$$

Osservazione

Le equazioni (2.1.7) e (2.1.8) sono equazioni vettoriali, equivalenti a tre equazioni scalari. Ciascuna di esse però presenta sei incognite (le tre componenti della reazione vincolari e le tre componenti del moto, o della configurazione di quiete), e quindi non possono essere risolte in assenza di ipotesi supplementari sulle reazioni vincolari. In gergo, non si tratta di equazioni *chiuse*.

2.2 Le equazioni cardinali della meccanica ed i teoremi generali

Vediamo ora di scrivere le equazioni del moto di un sistema meccanico qualsiasi composto da N punti materiali in presenza di vincoli e di trarne alcune conseguenze.

Riprendiamo la Proposizione 2.2:

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F} + \mathbf{\Phi}$$

Essa rappresenta la II legge della dinamica per un punto materiale comunque vincolato; l'azione del vincolo è stata sostituita dalla reazione vincolare $\mathbf{\Phi}$ per il postulato delle reazioni vincolari.

2.2.1 Le equazioni cardinali

Consideriamo ora un sistema composto da N punti materiali P_1, \dots, P_N , su cui agisce un qualunque sistema di forze e vincoli. Sia \mathbf{F}_k la forza attiva che agisce sul punto P_k , e $\mathbf{\Phi}_k$ la reazione vincolare che sostituisce l'eventuale vincolo su P_k . Allora il postulato delle reazioni vincolari insieme alla seconda legge della dinamica espressa dalla (2.1.7) ha come conseguenza immediata la formulazione delle equazioni del moto del sistema:

Proposizione 2.3 *Le equazioni del moto di un sistema di N punti materiali P_1, \dots, P_N , sollecitati dalle forze attive $\mathbf{F}_1, \dots, \mathbf{F}_N$, sui quali agiscono k vincoli di reazioni vincolari $\mathbf{\Phi}_1, \dots, \mathbf{\Phi}_k$ sono le seguenti*

$$m_i \mathbf{a}_i = \mathbf{F}_i + \mathbf{\Phi}_i \quad (2.2.9)$$

Definizione 2.3 *Diremo che un sistema meccanico qualsiasi è in quiete se ciascuno dei suoi punti lo è.*

Come nel caso del punto materiale, si ha subito

Corollario 2.2 *Condizione necessaria e sufficiente per la quiete di un sistema meccanico soggetto ad arbitrarie forze e vincoli e che la risultante delle forze attive e delle reazioni vincolari applicate in ogni suo punto sia nulla:*

$$\mathbf{F}_i + \mathbf{\Phi}_i = 0, \quad i = 1, \dots, N \quad (2.2.10)$$

Così come per le forze attive, possiamo distinguere fra reazioni vincolari esterne ed interne:

Definizione 2.4 Si dicono reazioni vincolari interne agenti sul generico punto P_k le reazioni vincolari dovute all'azione dei vincoli interni, cioè generati da altri punti del sistema; reazioni vincolari esterne, tutte le altre. In formule:

$$(P_k, \Phi_k) = (P_k, \Phi_k^{(i)} + \Phi_k^{(e)})$$

Il principio di reazione e reazione vale anche per le reazioni vincolari. Le reazioni vincolari interne e i loro momenti si cancellano dunque due a due. Pertanto, esattamente con nel Lemma 1.1:

Lemma 2.1 Il vettore risultante $\Phi^{(i)} := \sum_{k=1}^n \Phi_k^{(i)}$ e il momento risultante (rispetto ad un punto O qualsiasi) $\Psi^{(i)}(O) := \sum_{k=1}^n (P_k - O) \wedge \Phi_k^{(i)}$ sono entrambi nulli.

Definiamo ora formalmente alcune grandezze fisiche ben note.

Definizione 2.5 Sia dato un sistema di N punti P_1, \dots, P_N di masse m_1, \dots, m_N in \mathbb{R}^3 . Definiamo:

1. Baricentro o centro di massa è il punto $G \in \mathbb{R}^3$ di coordinate:

$$G - O = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^N m_k (P_k - O) \quad (2.2.11)$$

dove $M := m_1 + \dots + m_N$ è la massa totale del sistema.

2. Momento d'inerzia del sistema rispetto ad un asse a è la quantità

$$J(a) := \sum_{k=1}^N m_k d_k(a)^2 \quad (2.2.12)$$

dove $d_k(a)$ denota la distanza fra P_k e l'asse a .

3. Quantità di moto totale del sistema è il vettore:

$$\mathbf{Q} := m_1 \mathbf{v}_1 + \dots + m_N \mathbf{v}_N, \quad \mathbf{v}_k := \frac{dP_k}{dt} \quad (2.2.13)$$

4. Momento della quantità di moto totale del sistema relativo al punto O il vettore:

$$\mathbf{K}(O) := \sum_{k=1}^N m_k (P_k - O) \wedge \mathbf{v}_k \quad (2.2.14)$$

5. Energia cinetica totale del sistema la somma delle energie cinetiche dei singoli punti:

$$T := \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N m_k \mathbf{v}_k^2 \quad (2.2.15)$$

6. Lavoro elementare totale *delle forze attive e delle reazioni vincolari, rispettivamente, del sistema la somma dei lavori elementari delle singole forze attive e delle singole reazioni:*

$$dL := \sum_{k=1}^N dL_k = \sum_{k=1}^N \mathbf{F}_k \cdot dP_k; \quad dW := \sum_{k=1}^N dW_k = \sum_{k=1}^N \mathbf{\Phi}_k \cdot dP_k \quad (2.2.16)$$

7. *Se tutte le forze attive siano conservative, potenziale della sollecitazione attiva, o semplicemente potenziale, la somma dei potenziali delle singole forze:*

$$V(P_1, \dots, P_N) := \sum_{k=1}^N V_k(P_1, \dots, P_N); \quad \mathbf{F}_k = -\nabla_{P_k} V_k(P_1, \dots, P_N) \quad (2.2.17)$$

La definizione di baricentro si estende naturalmente anche ai corpi continui. Qui ci limitiamo a riportare, senza dimostrazione, la seguente proposizione molto intuitiva.

Proposizione 2.4 *Per un sistema materiale omogeneo qualsiasi il baricentro si trova sempre nell'intersezione degli eventuali assi di simmetria. In particolare se il sistema ammette un centro geometrico esso coincide con il baricentro.*

Esempi

1. Il baricentro di un'asta rigida omogenea di lunghezza $2l$ è il suo punto medio. Equivalentemente, il baricentro del sistema formato da due masse uguali poste a distanza invariabile $2l$ è il punto medio del segmento che li congiunge.
2. Il baricentro di ogni figura piana o solida omogenea coincide con l'eventuale centro geometrico.
3. Il baricentro di N masse uguali collocate ai vertici di un poligono regolare a N lati coincide col centro del poligono.

Possiamo allora enunciare e dimostrare i teoremi generali validi per il moto di un sistema meccanico di N punti materiali sotto l'azione di arbitrarie forze e arbitrari vincoli.

Teorema 2.1 (Teorema del moto del baricentro, e della quantità di moto)

Il baricentro di un sistema meccanico qualsiasi si muove come un punto di massa pari alla massa totale del sistema al quale siano applicate tutte le forze e le reazioni vincolari che agiscono sul sistema medesimo. In formule:

$$M \frac{d^2 G}{dt^2} = \mathbf{R}^{(e)} + \mathbf{\Phi}^{(e)} \quad (2.2.18)$$

o, equivalentemente:

$$\frac{d\mathbf{Q}}{dt} = \mathbf{\Phi}^{(e)} + \mathbf{\Phi}^{(e)} \quad (2.2.19)$$

Qui $\mathbf{R}^{(e)}$ e $\mathbf{\Phi}^{(e)}$ sono i vettori risultanti delle forze esterne e delle reazioni vincolari esterne, rispettivamente.

Dimostrazione

Sommiamo le (2.2.9) da 1 a N tenendo conto che $\mathbf{a}_i = \frac{d\mathbf{v}_i}{dt}$ e dell'annullarsi a due a due di forze e reazioni vincolari interne. Otterremo

$$\mathbf{F}^{(e)} + \mathbf{\Phi}^{(e)} = \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^N m_k \mathbf{v}_k = \frac{d\mathbf{Q}}{dt} = M \frac{d^2 G}{dt^2}$$

e ciò prova l'asserto.

Corollario 2.3 *Se un sistema meccanico è isolato, cioè se non è soggetto a forze esterne e i soli vincoli a cui è soggetto sono interni, allora la quantità di moto totale si conserva (è cioè un integrale primo del moto) e il baricentro del sistema si muove di moto rettilineo uniforme.*

Dimostrazione

In tal caso si ha $\mathbf{F}^{(e)} + \mathbf{\Phi}^{(e)} = 0$. Quindi, per il Teorema, $\frac{d^2 G}{dt^2} = 0$ e G si muove di moto rettilineo uniforme.

Teorema 2.2 (Teorema del momento della quantità di moto)

Sia $\mathbf{K}(O)$ il momento della quantità di moto totale di un sistema meccanico qualsiasi, dove O è un punto fisso, oppure il baricentro, oppure un punto con velocità parallela a quella del baricentro. Allora:

$$\frac{d\mathbf{K}(O)}{dt} = \mathbf{\Omega}^{(e)}(O) + \mathbf{\Psi}^{(e)}(O) \quad (2.2.20)$$

In parole: la variazione temporale del momento della quantità di moto totale di un sistema meccanico qualsiasi vale il momento totale delle forze esterne ad esso applicate sommato al momento totale delle reazioni vincolari su di esso esercitate.

Dimostrazione

Deriviamo la (2.2.14), tenendo presente che $\frac{dP_k}{dt} \wedge \mathbf{v}_k = \mathbf{v}_k \wedge \mathbf{v}_k = 0$:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{K}(O)}{dt} &= \sum_{k=1}^N (P_k - O) \wedge m_k \frac{d\mathbf{v}_k}{dt} = \\ &= \sum_{k=1}^N (P_k - O) \wedge (\mathbf{F}_k^{(e)} + \mathbf{\Phi}_k^{(e)}) = \mathbf{\Omega}^{(e)}(O) + \mathbf{\Psi}^{(e)}(O) \end{aligned}$$

Qui O è un punto fisso. Lasciamo come esercizio la verifica che il primo membro dell'equazione ultima scritta non cambia se al posto di O si mette il baricentro G o qualsiasi altro punto con velocità parallela a quella di G . Ciò prova l'asserto.

Come sopra, si ottiene subito

Corollario 2.4 *Se un sistema meccanico è isolato il suo momento della quantità di moto totale si conserva, ed è pertanto un integrale primo.*

Osservazione

Il teorema della quantità di moto e del momento della quantità di moto si dicono anche *equazioni cardinali della meccanica dei sistemi*. Essi non forniscono quello che in gergo si chiamano *equazioni chiuse*, nel senso che possono essere risolte perchè uno dei membri è noto mentre l'altro è incognito. Infatti le reazioni vincolari sono a priori incognite. Tuttavia esiste un caso molto importante in cui le reazioni vincolari si eliminano e il teorema del momento della quantità di moto diventa un'equazione chiusa. Si tratta del seguente ovvio corollario del teorema del momento della quantità di moto totale:

Corollario 2.5 *Se il sistema ammette come solo vincolo esterno quello di avere un punto fisso O allora il teorema del momento della quantità di moto diventa:*

$$\frac{d\mathbf{K}(O)}{dt} = \boldsymbol{\Omega}^{(e)}(O) \quad (2.2.21)$$

Consideriamo ora il caso ulteriormente particolare in cui l'unico vincolo esterno sia un asse fisso. Senza ridurre la generalità supporremo che tale asse passi per O e coincida con l'asse z del riferimento. Allora, proiettando la (2.2.21) sull'asse z otteniamo

$$\frac{dK_z}{dt} = \Omega_z^{(e)} \quad (2.2.22)$$

In parole: *in un sistema il cui solo vincolo esterno è un'asse fisso la derivata del momento della quantità di moto rispetto a quell'asse vale il momento delle forze attive rispetto all'asse stesso.*

2.2.2 Forze vive ed energia cinetica

Teorema 2.3 (Teorema delle forze vive) *Se i vincoli che agiscono sul sistema sono lisci si ha*

$$dL = dT \quad (2.2.23)$$

e se la sollecitazione attiva è conservativa si ha inoltre

$$dT = -dV \quad (2.2.24)$$

Dimostrazione

Si ha:

$$\begin{aligned} dT &= \sum_{k=1}^N m_k \mathbf{v}_k \cdot d\mathbf{v}_k = dT = \sum_{k=1}^N \mathbf{v}_k \cdot m_k \mathbf{a}_k dt = \sum_{k=1}^N \mathbf{v}_k dt \cdot (\mathbf{F}_k + \mathbf{\Phi}_k) \\ &= \sum_{k=1}^N dP_k \cdot (\mathbf{F}_k + \mathbf{\Phi}_k) = \sum_{k=1}^N dP_k \cdot \mathbf{F}_k = \sum_{k=1}^N dL_k = dL \end{aligned}$$

Qui si è usata l'ipotesi del vincolo liscio: essa implica $dP_k \cdot \mathbf{\Phi}_k = 0$ per l'ortogonalità fra vincolo e reazione. Ciò prova l'asserto.

Poichè per quanto precede $d(T + V) = 0$, si ottiene immediatamente:

Corollario 2.6 (Conservazione dell'energia)

In un sistema a sollecitazione attiva conservativa a a vincoli lisci l'energia totale meccanica $E := T + V$ si conserva.

Definizione 2.6 (Moto rispetto al baricentro) *Dato un sistema meccanico qualsiasi, si chiama:*

1. Moto di un punto rispetto al baricentro *il moto di un punto P_k rispetto al sistema baricentrico, cioè un sistema di riferimento con origine nel baricentro ed assi paralleli a quelli fissi;*
2. velocità di un punto rispetto al baricentro *la velocità relativa di P_k rispetto al sistema baricentrico, cioè la differenza fra la velocità di quel punto e quella del baricentro:*

$$\mathbf{v}_k^G := \mathbf{v}_k - \mathbf{v}_G$$

3. energia cinetica del baricentro T_G *l'energia cinetica che competerebbe al baricentro qualora vi fosse concentrata tutta la massa M del sistema:*

$$T_G := \frac{1}{2} M \mathbf{v}_G^2$$

4. energia cinetica rispetto al baricentro *l'energia cinetica del sistema nel moto rispetto al baricentro:*

$$T'_G := \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N m_k (\mathbf{v}_k^G)^2$$

Allora si ha:

Teorema 2.4 (Teorema dell'energia cinetica, o di König)

L'energia cinetica di un sistema meccanico qualsiasi vale l'energia cinetica del baricentro sommata all'energia cinetica del moto attorno al baricentro:

$$T = T_G + T'_G := \frac{1}{2}M\mathbf{v}_G^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^N m_k(\mathbf{v}_k^G)^2 \quad (2.2.25)$$

Dimostrazione

Si ha:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^N m_k\mathbf{v}_k^2 = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^N m_k[\mathbf{v}_G + \mathbf{v}_k^G]^2 = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^N m_k\mathbf{v}_G^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^N m_k[\mathbf{v}_k^G]^2 + \\ &+ \sum_{k=1}^N m_k[\mathbf{v}_G \cdot \mathbf{v}_k^G] = \frac{1}{2}M\mathbf{v}_G^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^N m_k[\mathbf{v}_k^G]^2 = T_G + T'_G \end{aligned}$$

Infatti:

$$\sum_{k=1}^N m_k[\mathbf{v}_G \cdot \mathbf{v}_k^G] = \mathbf{v}_G \cdot \sum_{k=1}^N m_k\mathbf{v}_k^G = \mathbf{v}_G \cdot \sum_{k=1}^N m_k(\mathbf{v}_k - \mathbf{v}_G) = \mathbf{v}_G \cdot (M\mathbf{v}_G - M\mathbf{v}_G) = 0.$$

Ciò conclude la dimostrazione.

2.2.3 Applicazione ai corpi rigidi

In cinematica abbiamo definito la nozione di corpo rigido: è tale un sistema di punti le cui distanze reciproche non variano lungo qualsiasi moto. I vincoli di rigidità fra i punti di un sistema sono esempi di vincoli *interni*. Un esempio di vincolo esterno che si può imporre ad un corpo rigido è quello di tenere un punto fisso, oppure un asse fisso. Si parla allora di *corpo rigido con un punto fisso* e di *corpo rigido con un asse fisso*, rispettivamente. Abbiamo allora:

Proposizione 2.5 (*Energia cinetica dei corpi rigidi*)

1. L'energia cinetica di un corpo rigido in moto ha l'espressione

$$T = \frac{1}{2}Mv_G^2 + \frac{1}{2}J_G\omega^2 \quad (2.2.26)$$

Qui M è la massa del corpo, \mathbf{v}_G la velocità del baricentro, J_G il momento d'inerzia del corpo rispetto all'asse istantaneo di rotazione passante per il baricentro, e ω la velocità angolare.

2. L'energia cinetica di un corpo rigido in moto con un asse fisso a ha l'espressione

$$T = \frac{1}{2}J_a\omega^2 \quad (2.2.27)$$

dove J_a è il momento d'inerzia del corpo rispetto all'asse a .

Dimostrazione

Dimostriamo anzitutto la seconda affermazione. Per la formula fondamentale dei moti rigidi, abbiamo

$$\mathbf{v}_k = \omega \wedge (P_k - O_1) = \omega \mathbf{k}_1 \wedge (P_k - O_1)$$

Qui O_1 è un punto dell'asse, e quindi $\frac{dO_1}{dt} = 0$, e si sceglie il sistema solidale S_1 in modo che l'asse z_1 coincide con l'asse fisso \mathbf{a} . Abbiamo visto in cinematica che il moto del corpo rigido in tal caso è semplicemente una rotazione di velocità angolare ω attorno all'asse fisso $\mathbf{a} = \mathbf{k}_1$. Ora, se O_k denota il piede della perpendicolare da P_k all'asse fisso, si ha:

$$\omega \wedge (P_k - O_1) = \omega \mathbf{k}_1 \wedge [(P_k - O_k) + (O_k - O_1)] = \omega \mathbf{k}_1 \wedge (P_k - O_k) = \omega d_k(a) \mathbf{k}_1$$

perchè \mathbf{k}_1 e $O_k - O_1$ sono paralleli. Qui $d_k(a) = \|P_k - O_k\|$ è la distanza fra P_k e l'asse. Quindi:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \mathbf{v}_k^2 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N d_k(a)^2 \omega^2 = J_a \omega^2$$

per definizione di momento d'inerzia.

Quanto alla prima affermazione, per il teorema di König, possiamo limitarci a dimostrare che $T_G = \frac{1}{2} J_G v_G^2$. Sempre per la formula fondamentale della cinematica rigida si ha:

$$\mathbf{v}_k = \mathbf{v}_G + \omega \wedge (P_k - G)$$

dove abbiamo fissato l'origine del sistema solidale nel baricentro. Allora $\mathbf{v}_k^G = \omega \wedge (P_k - G)$ e quindi, come sopra, $(v_k^G)^2 = d_k(g)^2 \omega^2$ dove $d_k(g)$ è la distanza fra P_k e l'asse istantaneo di rotazione attorno al baricentro G . Sommando su k si conclude la dimostrazione.

Osservazione

Abbiamo già osservato che occorrono sei parametri per descrivere il moto di un corpo rigido libero nello spazio: tre per un punto O_1 del corpo, e altri tre per determinare l'orientamento degli di un sistema di riferimento solidale S_1 con origine in O_1 . Se imponiamo al corpo il vincolo di tenere un punto fisso, possiamo prendere questo punto come origine del sistema solidale e i parametri diventano 3. Se poi imponiamo l'ulteriore vincolo di tenere un asse fisso (il che equivale a tenere due punti fissi), abbiamo che il moto di ogni punto è un moto circolare attorno all'asse fisso e quindi i parametri si riducono ad uno solo, l'angolo di rotazione. Denotando θ tale angolo, e \mathbf{k} il versore dell'asse fisso, la velocità angolare sarà $\omega = \dot{\theta} \mathbf{k}$.

Ricordando che l'equazione cardinale del teorema del momento della quantità di moto è un'equazione chiusa nel caso del corpo rigido con un punto fisso, e quindi in particolare con un asse fisso, possiamo dimostrare la seguente

Proposizione 2.6 *L'equazione del moto di un corpo rigido con un asse fisso è:*

$$J_a \ddot{\theta} = \Omega_a \quad (2.2.28)$$

Qui J_a è il momento d'inerzia del corpo rispetto all'asse \mathbf{a} , e Ω_a la componente del momento risultante delle forze attive esterne rispetto al medesimo asse.

Dimostrazione

Per il Corollario 2.5 e la formula (2.2.22) basterà dimostrare che $K_z(O_1) = J_a \dot{\theta}$, dove O_1 è un punto qualsiasi dell'asse fisso. Ora si ha, ancora per la formula fondamentale della cinematica rigida, in cui il sistema solidale è quello considerato sopra, e O ancora il piede della perpendicolare da P_k all'asse di rotazione:

$$\mathbf{K}(O_1) = \sum_{k=1}^N m_k (P_k - O_1) \wedge \omega \wedge (P_k - O_1) = \sum_{k=1}^N m_k (P_k - O_1) \wedge \omega d_k(a) \mathbf{k}_1 = \sum_{k=1}^N m_k d_k(a)^2 \omega = J_a \dot{\theta} \mathbf{a}$$

e ciò conclude la dimostrazione.

Corollario 2.7 *Condizione necessaria per la quiete di un corpo rigido con un asse fisso è l'annullarsi della componente rispetto all'asse del momento risultante delle forze attive esterne.*

Esempio La leva e la legge di Archimede.

Consideriamo una leva nel caso più semplice, quello in cui le forze applicate agli estremi, la potenza \mathbf{P} e la resistenza \mathbf{R} , siano ortogonali alla leva stessa, in versi opposti. Poichè il fulcro F rimane per definizione fermo, possiamo considerare la leva come un'asta rigida che si muove nel piano xy con l'asse fisso z passante per il fulcro F , che viene assunto come origine delle coordinate. Detti A e B gli estremi della leva, siano a e b le rispettive distanze dal fulcro. Supponiamo che la potenza sia applicata in B e la resistenza in A . Allora si ha subito, data l'ortogonalità fra le forze e la leva:

$$\Omega_z = Pb - Ra$$

e si avrà equilibrio quando

$$P : R = a : b$$

che è la legge di Archimede: la leva è in equilibrio quando *potenza e resistenza stanno in ragione inversa ai loro bracci*. Poichè $P = R \frac{a}{b}$, quanto più b è maggiore di a

tanta minore potenza sarà richiesta per superare la resistenza R . Equivalentemente, a parità di potenza sarà possibile vincere una resistenza arbitrariamente grande facendo arbitrariamente grande il braccio delle leva.⁴

2.3 Definizione di un sistema che ammette dei vincoli olonomi

Consideriamo un sistema \mathcal{S} composto da N punti materiali $P_i \in \mathbb{R}^3$, $P_i - O = x_i \mathbf{i} + y_i \mathbf{j} + z_i \mathbf{k}$, masse m_i , forze (attive) (P_i, \mathbf{F}_i) , $i = 1, \dots, N$.

Definizione 2.7 Diremo che:

1. Il sistema \mathcal{S} è soggetto ai k vincoli olonomi e scleronomi $f_1(\cdot) = 0, \dots, f_k(\cdot) = 0$ se lungo ogni possibile moto del sistema sussistono le k relazioni funzionalmente indipendenti

$$f_1(P_1, \dots, P_N) = 0, \dots, f_k(P_1, \dots, P_N) = 0 \quad (2.3.29)$$

2. $n := 3N - k$ è il numero di gradi di libertà del sistema vincolato \mathcal{S} .
3. Il sottoinsieme \mathcal{Q} di \mathbb{R}^{3N} definito da

$$\mathcal{Q} := \{(P_1, \dots, P_N) \in \mathbb{R}^{3N} \mid f_l(P_1, \dots, P_N) = 0, l = 1, \dots, k\} \quad (2.3.30)$$

è lo spazio delle configurazioni del sistema.

Osservazioni

1. Le k funzioni $f_i : \mathbb{R}^{3N} \rightarrow \mathbb{R}$ si assumono regolari. Le k equazioni $f_1(\cdot) = 0, \dots, f_k(\cdot) = 0$ si dicono *funzionalmente indipendenti* se la matrice Jacobiana $k \times 3N$

$$J := \begin{pmatrix} \partial_{x_1} f_1 & \partial_{y_1} f_1 & \partial_{z_1} f_1 & \partial_{x_2} f_1 & \dots & \partial_{z_{3N}} f_1 \\ \partial_{x_1} f_2 & \partial_{y_1} f_2 & \partial_{z_1} f_2 & \partial_{x_2} f_2 & \dots & \partial_{z_{3N}} f_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \partial_{x_1} f_k & \partial_{y_1} f_k & \partial_{z_1} f_k & \partial_{x_2} f_k & \dots & \partial_{z_{3N}} f_k \end{pmatrix} \quad (2.3.31)$$

ha rango massimo (k) su tutti i punti P_1, \dots, P_N che soddisfano le (2.3.29).

⁴Da qui la frase, attribuitagli da Plutarco "Datemi un punto d'appoggio e un braccio abbastanza lungo e solleverò il mondo". Archimede, nato attorno al 280 a.C. a Siracusa, ed ivi ucciso dai soldati romani dopo la presa della città nel 212 a.C., è unanimemente considerato il più grande scienziato dell'antichità. Polibio, che scriveva una settantina di anni dopo gli eventi, narra che Siracusa aveva resistito più di un anno all'assedio solo grazie al genio di Archimede. Egli rovesciava le navi romane sollevandole con delle gru il cui braccio sporgeva dalle mura. I romani non riuscirono mai a superare la resistenza delle macchine di Archimede, ma finirono col penetrare in Siracusa per mezzo del tradimento.

2. Poichè la matrice J ha rango massimo, lo spazio delle configurazioni \mathcal{Q} del sistema vincolato \mathcal{S} è *per definizione* una superficie regolare di dimensione $n = 3N - k$ e codimensione k immersa in \mathbb{R}^{3N} .
3. Il fatto che la matrice jacobiana abbia ovunque rango massimo assicura che esiste almeno una scelta di n coordinate fra le $3N$ coordinate $(x_1, y_1, \dots, z_{3N})$ tale che tutte le restanti possono riespresse (localmente) in funzione delle prime; equivalentemente, esistono n parametri $(q_1, \dots, q_n) := q \in \Omega$, dove $\Omega \in \mathbb{R}^n$ è aperto, detti *parametri* o *coordinate locali* della superficie \mathcal{Q} tali che, localmente, si possono esprimere le coordinate di tutti i P_1, \dots, P_N come funzioni di (q_1, \dots, q_n) :

$$P_1 = P_1(q_1, \dots, q_n), \dots, P_N = P_N(q_1, \dots, q_n) \quad (2.3.32)$$

ovvero, per esteso:

$$x_1 = x_1(q_1, \dots, q_n), x_2 = x_2(q_1, \dots, q_n), \dots, z_N = z_N(q_1, \dots, q_n) \quad (2.3.33)$$

4. Un vincolo olonomo espresso da relazioni che possono anche dipendere dal tempo si dice *reonomo*. Per semplicità non considereremo mai questo tipo di vincoli. Quindi nel seguito quando si parlerà di vincoli olonomi si ammetterà sempre, senza ripeterlo esplicitamente, la loro scleronomia.

Definizione 2.8 *Dato un sistema vincolato \mathcal{S} :*

1. *Ogni sistema di coordinate locali su \mathcal{Q} si dice sistema di parametri lagrangiani⁵ del sistema vincolato.*
2. *Diremo che è nota la configurazione del sistema quando sono note tutte le funzioni $P_i = P_i(q_1, \dots, q_n) : i = 1, \dots$, cioè la posizione di ciascun punto in funzione dei parametri lagrangiani.*

⁵Da J.L.Lagrange, il creatore della meccanica come è insegnata oggi. Joseph Louis Lagrange, nato Giuseppe Luigi Lagrange a Torino nel 1736, morì a Parigi nel 1813. Studiò e cominciò la sua attività scientifica a Torino; nel 1766 si trasferì all'Accademia delle Scienze di Berlino, succedendo ad Eulero che a sua volta si era trasferito a S.Pietroburgo, e nel 1787 accettò una nomina all'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Francia a Parigi, dove rimase fino alla morte. Universalmente considerato come il più illustre matematico dei suoi tempi, raccolse i suoi contributi alla meccanica nel trattato *Mécanique Analytique*, pubblicato a Parigi nel 1788 (seconda edizione nel 1813; terza edizione, con note di J.Bertrand e G.Darboux, uscita postuma nel 1860), uno dei libri di maggior influenza in assoluto nella storia della scienza, assieme al suo *Traité sur les fonctions analytiques*.

2.3.1 Esempi

Esempio 1: pendolo matematico piano

Punto P di massa m mobile in \mathbb{R}^2 , $P - O = x\mathbf{j} + y\mathbf{k}$, sotto l'azione della gravità e il vincolo di rimanere sempre a distanza l dall'origine. Equazione del vincolo:

$$f(x, y) := x^2 + z^2 - l^2 = 0$$

Spazio delle configurazioni \mathcal{Q} : circonferenza di centro l'origine e raggio l . Qui: $J = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial z}) = (2x, 2z) \neq (0, 0)$ se $(x, z) \in \mathcal{Q}$. Quindi $3N = 2$, $k = 1$, e $n = 1$. Il sistema ha un grado di libertà, e ci sarà un solo parametro lagrangiano. Scelta naturale del parametro lagrangiano: la coordinata angolare θ : $q = \theta$. Configurazione del sistema: $P(\theta) = (l\cos\theta, l\sin\theta)$.

Esempio 2: pendolo matematico sferico

Punto P di massa m mobile in \mathbb{R}^3 , $P - O = x\mathbf{j} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, sotto l'azione della gravità e il vincolo di rimanere sempre a distanza l dall'origine. Equazione del vincolo:

$$f(x, y) := x^2 + y^2 + z^2 - l^2 = 0$$

\mathcal{Q} =sfera di centro l'origine e raggio l . Qui: $J = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}) = (2x, 2y, 2z) \neq (0, 0, 0)$ se $(x, y, z) \in \mathcal{Q}$. Quindi $3N = 3$, $k = 1$, e $n = 2$. Il sistema ha due gradi di libertà, e ci saranno due parametri lagrangiani. Scelta naturale dei parametri lagrangiani: le coordinate angolari (θ, ϕ) delle coordinate polari sferiche: $q_1 = \theta, q_2 = \phi$. Configurazione del sistema: $P(\theta, \phi) = (l\sin\theta\cos\phi, l\sin\theta\sin\phi, l\cos\theta)$.

Esempio 3: pendolo doppio piano

Si vincolano due punti P_1, P_2 nel piano (per convenzione con l'asse verticale y orientato verso il basso) a muoversi nel modo seguente: P_1 deve descrivere una circonferenza attorno all'origine di raggio l_1 , e P_2 una circonferenza di centro il primo. Questo è la descrizione del bipendolo piano: l'estremità di un pendolo di lunghezza l_1 sospeso all'origine è a sua volta punto di sospensione di un secondo pendolo di lunghezza l_2 . Trattiamo in dettaglio questo esempio particolarmente istruttivo.

1. Anzitutto applichiamo alla lettera la Definizione 2.7. Qui abbiamo due punti di masse m_1, m_2 e coordinate $P_1 - O = x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j}$; $P_2 - P_1 = x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j}$ in \mathbb{R}^2 . Primo vincolo: circonferenza di centro l'origine. Secondo vincolo: circonferenza di centro P_1 . Equazioni:

$$\begin{cases} f_1(x_1, y_1, x_2, y_2) := x_1^2 + y_1^2 - l_1^2 = 0 \\ f_2(x_1, y_1, x_2, y_2) := (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - l_2^2 = 0 \end{cases}$$

Omettiamo la facile verifica dell'indipendenza funzionale di f_1 e f_2 . Queste equazioni sono del tipo (2.3.29). Qui $2N = 4$ e quindi lo spazio delle configurazioni \mathcal{Q} è una superficie di dimensione $2N - 2 = 2$ in \mathbb{R}^4 . I parametri lagrangiani sono 2. Per sceglierli, ed esprimere tramite di essi le coordinate di P_1 e P_2 , basta scrivere in forma parametrica le circonferenze che esprimono le due condizioni di vincolo:

$$\begin{cases} x_1 = l_1 \cos \theta_1 \\ y_1 = -l_1 \sin \theta_1 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 - l_1 \cos \theta_1 = l_2 \cos \theta_2 \\ y_2 - l_1 \sin \theta_1 = -l_2 \sin \theta_2 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos \theta_2 \\ y_2 = -l_1 \sin \theta_1 - l_2 \sin \theta_2 \end{cases} \quad (2.3.34)$$

I parametri lagrangiani sono dunque i due angoli $(\theta_1, \theta_2) \in [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$, cioè le coordinate parametriche della superficie. Le equazioni (2.3.34) definiscono parametricamente la superficie come un toro in \mathbb{R}^4 (vedremo meglio in seguito questo punto): equivalentemente, esprimono le coordinate cartesiane dei punti del sistema in termini delle coordinate della superficie come richiesto dalla Definizione 2.7.

2. Questo esempio illumina anche un punto che per quanto ovvio è sempre bene sottolineare: *lo spazio delle configurazioni, cioè lo spazio dei parametri lagrangiani, non coincide in generale con lo spazio fisico in cui avvengono i moti reali dei punti del sistema vincolato*. In altre parole, dire che lo spazio delle configurazioni di un sistema vincolato è un toro non significa in generale che il sistema stesso si muove su un toro!
3. Il toro \mathbb{T}^2 è per definizione il prodotto cartesiano di due circonferenze, $\mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1$. Inoltre, dato che $S^1 = \mathbb{R} \bmod \mathbb{Z}$, il toro \mathbb{T}^2 , e più in generale il toro $\mathbb{T}^n = S^1 \times \dots \times S^1$ possono essere definiti algebricamente

$$\mathbb{T}^n = \mathbb{R}(\bmod)\mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{R}(\bmod)\mathbb{Z} = \mathbb{R}^n(\bmod)\mathbb{Z}^n$$

e quindi, così come l'angolo $0 \leq \phi \leq 2\pi$ è un parametro globale per la circonferenza S^1 , la collezione di n angoli $(\phi_1, \dots, \phi_n) \in [0, 2\pi]^n$ definisce una parametrizzazione globale del toro \mathbb{T}^n .

4. Il punto cruciale, abbiamo visto, è la derivazione delle equazioni (2.3.34) che contengono tutta l'informazione utile sul sistema vincolato. In pratica per ottenerle si procede più rapidamente, esprimendo direttamente tramite considerazioni trigonometriche elementari le coordinate di P_1 e P_2 in funzione dei due parametri naturali, gli angoli θ_1, θ_2 . Così si fa nelle situazioni concrete che si presentano negli esercizi: si esamina se le configurazioni dei punti in un generico

istante sono individuabili mediante un numero finito di parametri indipendenti, che verranno poi interpretati come i parametri lagrangiani.

Esercizio

Determinare il numero di gradi di libertà del sistema e un insieme di parametri lagrangiani (equivalentemente: trovare la varietà delle configurazioni e munirla di coordinate), per i sistemi seguenti:

1. Un'asta rigida mobile nel piano.
2. Una figura rigida mobile in un piano.
3. Due aste rigide incernierate nel piano.
4. Una sbarra nello spazio.
5. Un corpo rigido nello spazio.
6. Un corpo rigido nello spazio con un punto fisso.
7. Un corpo rigido nello spazio con un asse fisso.
8. Un corpo rigido nello spazio con un gancio scorrevole lungo un anello.
9. Un corpo rigido nello spazio che debba sempre toccare (in un sol punto) un altro corpo rigido.
10. Una bicicletta.

Soluzione.

1. I gradi di libertà sono 3: due per il moto di un punto della figura, ad esempio il baricentro, e uno per la rotazione attorno ad un asse ortogonale al piano e passante per il punto. Dunque la varietà delle configurazioni è $\mathbb{R}^2 \times S^1$, e le coordinate, o parametri lagrangiani, possono essere scelte come $(q_1 = x, q_2 = y; q_3 = \theta)$ dove (x, y) sono le coordinate cartesiane del punto sulla figura e θ è l'angolo della rotazione. Equivalentemente, possiamo senz'altro identificare il segmento rigido con due punti $P_1 = (x_1, y_1), P_2 = (x_2, y_2)$ che si muovono nel piano sotto il vincolo di tenere fissa la loro distanza reciproca, denotata l . Dunque la condizione di vincolo

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = l^2$$

riduce i gradi di libertà da 4 a 3. Essa definisce chiaramente una circonferenza, la cui origine può essere scelta tanto in P_1 quanto in P_2 . Scegliendola in P_1 possiamo scrivere, usando le consuete equazioni parametriche della circonferenza

$$x_2 = x_1 + l\cos\theta, \quad y_2 = y_1 + l\sin\theta$$

e ritroviamo i tre parametri lagrangiani precedenti.

2. I gradi di libertà sono 3 (come nell'esempio dell'asta): due per il moto di un punto della figura, ad esempio il baricentro, e uno per la rotazione attorno ad un asse ortogonale al piano e passante per il punto. Dunque la varietà delle configurazioni è $\mathbb{R}^2 \times S^1$, e le coordinate, o parametri lagrangiani, possono essere scelte come $(q_1 = x, q_2 = y; q_3 = \theta)$ dove (x, y) sono le coordinate cartesiane del punto sulla figura e θ è l'angolo della rotazione.

3. I gradi di libertà sono 4. Due per fissare la posizione della cerniera, e altri 2 per fissare le orientazioni delle due aste. Dunque la varietà delle configurazioni è $\mathbb{R}^2 \times S^2$, e le coordinate, o parametri lagrangiani, possono essere scelte come $(q_1 = x, q_2 = y; q_3 = \theta_1, q_4 = \theta_2)$ dove (x, y) sono le coordinate cartesiane della cerniera, e θ_1, θ_2 sono gli angoli delle orientazioni o, equivalentemente, delle due rotazioni indipendenti delle aste.

4. I gradi di libertà sono 5. Tre per fissare la posizione di un punto della sbarra nello spazio, e altri 2 per fissare l'orientazione della sbarra. Equivalentemente, si tratta di due punti mobili nello spazio soggetti al vincolo di mantenere fissa la distanza reciproca; questa relazione riduce da sei a cinque il numero dei gradi di libertà. Dunque la varietà delle configurazioni è $\mathbb{R}^3 \times S^2$, e le coordinate, o parametri lagrangiani, possono essere scelte come $(q_1 = x, q_2 = y; q_3 = z; q_4 = \theta, q_5 = \phi)$ dove (x, y, z) sono le coordinate cartesiane ad esempio del baricentro, e θ, ϕ sono gli angoli di un sistema di coordinate polari avente origine in (x, y, z) .

5. I gradi di libertà sono 6, tanti quanti occorrono per fissare la posizione di una terna ortogonale nello spazio solidale con la figura, rispetto alla quale tutti i punti del corpo sono fermi. Tre ne occorrono per fissare l'origine, e altri tre per determinare l'orientazione degli assi, per esempio gli angoli di Eulero rispetto a un sistema con origine comune alla terna solidale ed assi costantemente paralleli a quelli fissi. Dunque la varietà delle configurazioni è $\mathbb{R}^3 \times \text{SO}(3)$, e le coordinate, o parametri lagrangiani, possono essere scelte come $(q_1 = x, q_2 = y; q_3 = z; q_4 = \theta, q_5 = \varphi, q_6 = \psi)$ dove (x, y, z) sono le coordinate cartesiane dell'origine del sistema mobile (di solito il baricentro del corpo rigido), e θ, φ, ψ sono gli angoli di Eulero.

6. Se il sistema ha un punto fisso, i gradi di libertà si riducono a tre, e la varietà delle configurazioni è $\text{SO}(3)$, parametrizzata dagli angoli di Eulero.

7. I gradi di libertà si riducono a 1, perchè il solo moto possibile è la rotazione attorno all'asse. Dunque la varietà delle configurazioni è S^1 , e la coordinata, o parametro lagrangiano, sarà l'angolo di rotazione θ .

8. I gradi di libertà sono 4. Uno per fissare la posizione del gancio, e altri 3 per fissare l'orientazione del solido attorno ad esso. Dunque la varietà delle configurazioni è $\mathbb{R} \times \text{SO}(3)$, e le coordinate, o parametri lagrangiani, possono essere scelte come $(q_1 = s, q_2 = \theta, q_3 = \varphi, q_4 = \psi)$ dove s è l'ascissa curvilinea del gancio, e θ, φ, ψ sono gli angoli di Eulero.

9. I gradi di libertà sono 5. Due per fissare il punto di contatto sulla superficie del corpo C e altri due per fissarlo sulla superficie di C_1 . D'altra parte, escluso il caso eccezionale in cui il punto di contatto sia singolare per l'una o per l'altra superficie, basta un ulteriore parametro per fissare la posizione relativa delle superficie attorno alla normale comune. Dunque la varietà delle configurazioni è $\mathbb{S}^1 \times S_1 \times S_2$, e le coordinate, o parametri lagrangiani, possono essere scelte come $(q_1 = \theta, q_2 = u_1; q_3 = v_1, q_4 = u_2, q_5 = v_2)$ dove θ è l'angolo di rotazione attorno alla normale comune e $(u_1, v_1); (u_2, v_2)$ sono le coordinate locali delle superficie S_1 e S_2 rispettivamente.

10. I gradi di libertà sono 9 se la bicicletta è a scatto fisso, 10 se è a scatto libero. Occorrono due parametri per determinare un punto della sua traccia sul piano della strada, uno per determinare l'angolo che la traccia forma con una retta fissa del piano della strada, uno per l'inclinazione del telaio rispetto alla verticale, uno per l'inclinazione del manubrio rispetto al telaio, due per determinare la posizione delle ruote, due per determinare la posizione dei pedali rispetto al loro asse, e fanno nove se lo scatto è fisso. Se lo scatto è libero, occorre un altro parametro per determinare la posizione della moltiplica.

Osservazione conclusiva⁶

Il numero dei gradi di libertà di un sistema olonomo è il numero delle rispettive coordinate lagrangiane (essenziali). In pratica, quando si fissa l'attenzione su un sistema di data struttura materiale, si riconosce direttamente se esso sia olonomo, esaminando se le sue configurazioni in un generico istante sono individuabili mediante un numero finito di parametri indipendenti; e in caso affermativo, codesto numero fornisce senz'altro il numero dei gradi di libertà.

⁶Tratta da T.LEVI-CIVITA e U.AMALDI, *Lezioni di Meccanica razionale, op.cit.*

2.4 Il principio dei lavori virtuali

A. Spostamenti virtuali

Riprendiamo l'esempio del punto in moto sulla curva $\gamma \subset \mathbb{R}^3$. Qui il parametro lagrangiano è ovviamente l'ascissa curvilinea s : $P = P(s)$. Consideriamo il differenziale dell'applicazione $s \mapsto P(s)$ in un punto s_0 : $dP(s_0) = \mathbf{t}(s_0) ds$. Il differenziale associa così in modo lineare all'incremento ds del parametro lagrangiano uno spostamento $dP(s_0)$, tangente a γ , del punto P a partire dalla posizione $P(s_0)$. $dP(s_0)$ è un esempio di *spostamento virtuale* del punto P di punto iniziale $P(s_0)$. Lo spostamento viene detto virtuale perchè si tratta di una nozione *puramente geometrica*, e a priori non legata al moto. La nozione meccanica è lo *spostamento effettivo* $dP(t_0) = \mathbf{t}(s(t_0)) \dot{s}(t_0) dt$ del punto t a seguito di un moto $P(t) = (P \circ s)(t)$ a partire dall'istante t_0 per cui $s(t_0) = s_0$. In altre parole, fra tutti gli *infiniti* spostamenti virtuali geometricamente possibili, che sono tutti i vettori sulla retta tangente a $P(s)$ in $P(s_0)$, il punto P ne eseguirà uno solo una volta assegnate le forze e le condizioni iniziali.

Consideriamo come secondo esempio il pendolo sferico. Qui i parametri lagrangiani sono le coordinate sferiche (θ, ϕ) (zenith e azimuth): $P = P(\theta, \phi)$ ovvero, per esteso:

$$P_0 = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = l\sin\theta\cos\phi\mathbf{i} + l\sin\theta\sin\phi\mathbf{j} + l\cos\theta\mathbf{k}$$

Consideriamo il differenziale dell'applicazione $(\theta, \phi) \mapsto P(\theta, \phi)$:

$$\begin{aligned} dP &:= \frac{\partial P}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial P}{\partial \phi} d\phi = \frac{\partial x}{\partial \theta} \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial \theta} \mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial \theta} \mathbf{k} + \frac{\partial x}{\partial \phi} \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial \phi} \mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial \phi} \mathbf{k} = \\ &(l\cos\theta\cos\phi\mathbf{i} + l\cos\theta\sin\phi\mathbf{j} - l\sin\theta\mathbf{k})d\theta + (-l\sin\theta\cos\phi\mathbf{i} + l\sin\theta\sin\phi\mathbf{j})d\phi \end{aligned}$$

Si vede subito che $dP \cdot (P - O) = 0 \forall (\theta, \phi)$. Dunque se definiamo ancora spostamento virtuale a partire dal punto $P_0 = P(\theta_0, \phi_0)$ un qualsiasi vettore $dP(\theta_0, \phi_0)$ otterremo ancora un vettore tangente a \mathcal{Q} , lo spazio delle configurazioni. La totalità degli spostamenti virtuali a partire da P_0 coincide chiaramente con i vettori del piano tangente alla sfera \mathcal{Q} in P_0 . Fra tutti questi spostamenti geometricamente possibili, cioè compatibile col vincolo, il moto effettivo ne sceglierà uno solo.

Questi esempi motivano la seguente

Definizione 2.9 *Si consideri un sistema vincolato \mathcal{S} a n gradi di libertà, con spazio delle configurazioni \mathcal{Q} , nel senso della Definizione 2.7, e siano (q_1, \dots, q_n) un insieme di parametri lagrangiani secondo la Definizione 2.8. Diremo *spostamento virtuale* del punto P_i a partire dalla configurazione $P_i(q_0)$ il vettore infinitesimo di \mathbb{R}^3 definito nel*

modo seguente:

$$\delta P_i := \sum_{k=1}^n \frac{\partial P_i}{\partial q_k} dq_k = \mathbf{i} \sum_{k=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial q_k} dq_k + \mathbf{j} \sum_{k=1}^n \frac{\partial y_i}{\partial q_k} dq_k + \mathbf{k} \sum_{k=1}^n \frac{\partial z_i}{\partial q_k} dq_k, \quad i = 1, \dots, N \quad (2.4.35)$$

dove le derivate vanno valutate in $q = q_0$.

Osservazioni

1. Per tradizione si usa il simbolo δP per indicare lo spostamento virtuale, per distinguerlo da quelli reali. Gli spostamenti virtuali sono quelli geometricamente accessibili al sistema, cioè quelli consentiti dai vincoli.
2. I vincoli olonomi che stiamo considerando, essendo definiti da equazioni, sono un esempio di vincoli *bilaterali*. Infatti se δP_i è uno spostamento virtuale anche il suo opposto $-\delta P_i$ lo è. I vincoli *unilaterali* sono definiti da disequazioni. Ad esempio, una biglia su un biliardo può sollevarsi ma non passare sotto il panno verde. La superficie del biliardo è un vincolo unilaterale. Se con un qualche meccanismo si riesce ad impedire che la biglia si stacchi dal panno verde, allora la superficie del biliardo diventa un vincolo bilaterale.
3. Anche in questo caso generale sussiste un'interpretazione geometrica in termini di spazio tangente. Definiamo $P := (P_1, \dots, P_N) \in \mathbb{R}^{3N}$ *configurazione del sistema vincolato* \mathcal{S} , e consideriamo la funzione

$$q \mapsto P(q) : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{3N}$$

Al variare di $q \in \Omega$, $P(q)$ descrive la superficie di configurazione \mathcal{Q} . Si può dimostrare (ometteremo la dimostrazione) che il differenziale dP di questa applicazione definisce lo spazio tangente a \mathcal{Q} . Possiamo quindi identificare gli spostamenti virtuali della configurazione $P(q)$ a partire da un determinato punto $P_0 = P(q_0)$ con i vettori dello spazio tangente a \mathcal{Q} in q_0 .

4. Per definizione un vincolo è liscio quando la corrispondente reazione è normale al vincolo stesso. Da quanto precede segue che la reazione di un vincolo liscio che agisce su un punto è normale a qualsiasi suo spostamento virtuale.

Esempi

1. Consideriamo ancora il pendolo sferico. Calcolando il differenziale di P otteniamo subito l'espressione degli spostamenti virtuali:

$$\delta P = l(\cos\theta\cos\phi\delta\theta - \sin\theta\cos\phi\delta\phi)\mathbf{i} + l(\cos\theta\sin\phi\delta\theta + \sin\theta\cos\phi\delta\phi)\mathbf{j} - l\sin\theta\delta\theta\mathbf{k}$$

2. Consideriamo ora il pendolo doppio. Anche qui, calcolando i differenziali delle (2.3.34), si ha:

$$\begin{aligned}\delta P_1 &= -l_1(\sin\theta_1\delta\theta_1\mathbf{i} + \cos\theta_2\delta\theta_2\mathbf{j}) \\ \delta P_2 &= -(l_1\sin\theta_1\delta\theta_1 + l_2\sin\theta_2\delta\theta_2)\mathbf{i} - (l_1\cos\theta_1\delta\theta_1 + l_2\cos\theta_2\delta\theta_2)\mathbf{j}\end{aligned}$$

B. Il principio dei lavori virtuali.

Definizione 2.10 *Dicesi lavoro virtuale compiuto da una forza (P, \mathbf{F}_k) che agisce su un punto P_k di un sistema meccanico a vincoli olonomi lungo uno spostamento virtuale δP_k la quantità*

$$\delta L_k := \mathbf{F}_k \cdot \delta P_k \quad (2.4.36)$$

Dicesi lavoro virtuale della sollecitazione attiva del sistema la somma dei lavori virtuali compiuti da tutte le forze attive:

$$\delta L := \sum_{k=1}^N \delta L_k = \sum_{k=1}^N \mathbf{F}_k \cdot \delta P_k \quad (2.4.37)$$

Osservazioni

1. La nozione di lavoro virtuale può essere introdotta in ambiti molto più generali di quello qui considerato. Si può definire, con un certo grado di imprecisione, lo spostamento virtuale δP_k di un punto P_k di un sistema vincolato come qualsiasi spostamento geometricamente possibile, cioè consentito dai vincoli, da una posizione ad un'altra infinitamente vicina. Con questa nozione di spostamento virtuale la definizione precedente di lavoro virtuale rimane invariata.
2. Le reazioni vincolari sono forze come le altre, e quindi anche per loro si definisce il lavoro virtuale.

Consideriamo ora un sistema meccanico arbitrario soggetto a forze attive qualsiasi e a vincoli olonomi. Per questi sistemi il principio dei lavori virtuali si può enunciare così:

Principio dei lavori virtuali

Condizione necessaria e sufficiente affinché un siffatto sistema meccanico, inizialmente in quiete in una data configurazione dei suoi punti, lo rimanga per sempre è che il lavoro virtuale della sollecitazione attiva sia nullo per qualsiasi spostamento virtuale a partire dalla medesima configurazione.

Osservazioni

1. Si noti che il principio dei lavori virtuali fornisce una condizione necessaria e sufficiente per l'equilibrio che *non fa intervenire le reazioni vincolari*, che a priori sono incognite.
2. Vedremo in seguito con un esempio come il principio dei lavori virtuali, assieme al postulato delle reazioni vincolari, permette di calcolare le reazioni vincolari *in condizioni di equilibrio*.
3. Per quanto visto sopra sull'interpretazione geometrica degli spostamenti virtuali, l'interpretazione geometrica è la seguente: un sistema meccanico è in quiete in una particolare configurazione $P(q_0)$ se e solo se la sollecitazione attiva $\mathbf{F} = (\mathbf{F}_1, \dots, \mathbf{F}_N)$ è ortogonale alla superficie di configurazione \mathcal{Q} nel punto q_0 . Infatti la condizione

$$\delta L = \sum_{k=1}^N \mathbf{F}_k \cdot \delta P_k = 0$$

esprime l'ortogonalità fra i vettori $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{3N}$ e $\delta P = (\delta P_1, \dots, \delta P_N) \in \mathbb{R}^{3N}$. Ora δP è tangente a \mathcal{Q} in $P(q_0)$. Siccome l'ortogonalità vale per *tutti* i possibili spostamenti virtuali δP a partire da $P(q_0)$, cioè per tutti i vettori tangenti a \mathcal{Q} in q_0 , \mathbf{F} è diretto lungo la normale alla superficie stessa.

4. Per il Corollario 2.2, si ha quiete se e solo se $\mathbf{F}_k = -\Phi_k : k = 1, \dots, N$. Dunque a rigore il principio dei lavori virtuali non può valere per vincoli scabri. In realtà, essendo anche il principio dei lavori virtuali una condizione necessaria e sufficiente per la quiete, si può assumere la sua validità come definizione di vincolo liscio.
5. La condizione necessaria e sufficiente per la quiete espressa dal principio dei lavori virtuali

$$\delta L = 0$$

è nota anche sotto il nome di *equazione simbolica della statica*.

C. Applicazioni ed esempi

Cominciamo con l'osservare che il principio dei lavori virtuali costituisce una condizione necessaria e sufficiente per la quiete. In meccanica, le forze sono un dato del problema. Le incognite sono i moti. Nell'applicazione del principio dei lavori virtuali, le incognite sono i particolari moti definiti dalle configurazioni di quiete; più generalmente, il problema è costituito dalla ricerca delle condizioni da imporre sulle forze per assicurare la quiete del sistema in certe configurazioni da determinare.

Esprimiamo anzitutto il lavoro virtuale in funzione dei parametri lagrangiani. Si ha:

Definizione 2.11 *Assumiamo che le forze $(P_k, \mathbf{F}_k) : k = 1, \dots, N$ siano posizionali: $\mathbf{F}_k = \mathbf{F}_k(P_1, \dots, P_N)$. Si ponga:*

$$Q_l(q_1, \dots, q_n) := \sum_{k=1}^N \mathbf{F}_k \cdot \frac{\partial P_k}{\partial q_l}, \quad l = 1, \dots, n \quad (2.4.38)$$

Le Q_l si dicono forze generalizzate di Lagrange. Qui al solito $P_k = P_k(q_1, \dots, q_n)$, e, con abuso di notazione:

$$\mathbf{F}_k(q_1, \dots, q_n) := \mathbf{F}_k(P_1(q_1, \dots, q_n), \dots, P_N(q_1, \dots, q_n)), \quad k = 1, \dots, n$$

Allora si ha

Proposizione 2.7 *Il lavoro virtuale δL della sollecitazione attiva ha la seguente espressione in funzione dei parametri lagrangiani*

$$\delta L = \sum_{k=1}^n Q_k dq_k \quad (2.4.39)$$

Corollario 2.8 *Se la sollecitazione attiva è posizionale le configurazioni di quiete del sistema sono tutte e sole quelle definite dai parametri lagrangiani soluzioni delle n equazioni:*

$$Q_1(q_1, \dots, q_n) = 0, \dots, Q_n(q_1, \dots, q_n) = 0 \quad (2.4.40)$$

Esempio

Si consideri il bipendolo dell'Esempio 5, nella variante in cui i pendoli sono aste rigide omogenee di masse m_1 e m_2 e lunghezze $2l_1, 2l_2$, rispettivamente. Supponiamo inoltre che sul sistema agisca la forza attiva costante $\mathbf{F} = F\mathbf{i}$ applicata all'estremo $P = (x_2, y_2)$ del secondo pendolo.

Sappiamo già che questo sistema ha due gradi di libertà. I parametri lagrangiani sono $q_1 = \theta_1, q_2 = \theta_2$, gli ancoli di rotazione delle due aste. Le forze peso si immaginano applicate ai baricentri G_1 e G_2 delle due aste. I baricentri sono i rispettivi punti medi. Dette $(x_{1G}, y_{1G}), (x_{2G}, y_{2G})$ le loro e coordinate (cartesiane) si ha

$$\begin{aligned} G_1 &= (l_1 \cos \theta_1, -l_1 \sin \theta_1) \\ G_2 &= (2l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos \theta_2, -2l_1 \sin \theta_1 - l_2 \sin \theta_2) \end{aligned}$$

Poichè $P = (2l_1 \cos \theta_1 + 2l_2 \cos \theta_2, -2l_1 \sin \theta_1 - 2l_2 \sin \theta_2)$, lo spostamento virtuale δP del punto di applicazione P della forza attiva \mathbf{F} si scrive così:

$$\delta P = (-2l_1 \sin \theta_1 \delta \theta_1 - 2l_2 \sin \theta_2 \delta \theta_2) \mathbf{i} - (2l_1 \cos \theta_1 \delta \theta_1 + 2l_2 \cos \theta_2 \delta \theta_2) \mathbf{j}$$

Allo stesso modo si calcolano gli spostamenti virtuali dei baricentri G_1 e G_2 delle due aste. Si ottiene

$$\begin{aligned}\delta G_1 &= -(l_1 \sin \theta_1 \delta \theta_1) \mathbf{i} - (l_1 \cos \theta_1 \delta \theta_1) \mathbf{j} \\ \delta G_2 &= -(2l_1 \sin \theta_1 \delta \theta_1 + l_2 \sin \theta_2 \delta \theta_2) \mathbf{i} - (2l_1 \cos \theta_1 \delta \theta_1 + l_2 \sin \theta_2 \delta \theta_2) \mathbf{j}\end{aligned}$$

Dunque il lavoro virtuale compiuto dalle forze attive lungo il generico spostamento virtuale $\delta P, \delta G_1, \delta G_2$ dei loro punti di applicazione vale

$$\begin{aligned}\delta L &= F \mathbf{i} \cdot \delta P - m_1 g \mathbf{j} \cdot \delta G_1 - m_2 g \mathbf{j} \cdot \delta G_2 = Q_1(\theta_1, \theta_2) d\theta_1 + Q_2(\theta_1, \theta_2) d\theta_2 \\ Q_1(\theta_1, \theta_2) &:= -2Fl_1 \sin \theta_1 + m_1 g l_1 \cos \theta_1 + 2l_1 m_2 g \cos \theta_1 \\ Q_2(\theta_1, \theta_2) &:= -2Fl_2 \sin \theta_2 + l_2 m_2 g \cos \theta_2\end{aligned}$$

e quindi, per l'arbitrarietà di $\delta \theta_1$ e $\delta \theta_2$, la condizione $\delta L = 0 \forall (\delta \theta_1, \delta \theta_2)$ equivale a

$$\begin{aligned}-2Fl_1 \sin \theta_1 + m_1 g l_1 \cos \theta_1 + 2l_1 m_2 g \cos \theta_1 &= 0 \\ -2Fl_2 \sin \theta_2 + l_2 m_2 g \cos \theta_2 &= 0\end{aligned}$$

ovvero

$$\tan \theta_2 = \frac{m_2 g}{2F}, \quad \tan \theta_1 = \frac{(m_1 + 2m_2)g}{2F},$$

Veniamo ora al calcolo delle reazioni vincolari, cominciando da quella (denotata Φ_O) nell'origine, punto in cui è vincolato il primo estremo del primo pendolo. Notiamo che questo problema si presenta in modo particolarmente semplice, perchè le forze attive sono dirette lungo gli assi x e y , rispettivamente. Per il postulato delle reazioni vincolari, se rimuoviamo il vincolo in O sostituendolo con la sua reazione vincolare, che quindi diventa forza attiva, le condizioni di quiete o moto del sistema rimangono inalterate. Possiamo quindi applicare ancora il principio dei lavori virtuali per trovare le condizioni di equilibrio. Poichè O non è più un punto fisso del sistema, possiamo considerare uno spostamento virtuale $(dx, 0)$ di tutti i punti di applicazione lungo l'asse x che, ripetiamo, è consentito dai vincoli ora che è stato rimosso quello in O . Si ricava subito che, quale che sia la configurazione di equilibrio, si deve avere $\Phi_{Ox} = -F$ perchè in tal caso $\delta L = (\Phi_{Ox} + F)dx$; d'altra parte, scegliendo lo spostamento virtuale $(dy, 0)$ di tutti i punti di applicazione lungo l'asse y , parimenti consentito dai vincoli, si trova subito $\Phi_{Oy} = -m_1 g - m_2 g$, risultati questi chiaramente da attendersi a priori. Omettiamo per semplicità il calcolo delle reazioni nella cerniera fra i due pendoli.

D. Il metodo dei moltiplicatori di Lagrange

Se i vincoli sono lisci il problema di trovare le configurazioni di equilibrio del sistema sottoposto all'azione di k vincoli olonomi può essere impostato direttamente nelle coordinate cartesiane (x_1, \dots, z_{3N}) senza introdurre i parametri lagrangiani. È questo il metodo dei *moltiplicatori di Lagrange*, che ora esporremo brevemente data la sua profonda importanza concettuale.

Si osservi che se la sollecitazione attiva è conservativa, cioè se esiste $V(P_1, \dots, P_N)$ tale che

$$\mathbf{F}_l = -\nabla_{P_l} V(P_1, \dots, P_N), \quad l = 1, \dots, k$$

allora il sistema precedente si riduce a

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial V}{\partial x_1} = \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \dots + \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial x_1} \\ \frac{\partial V}{\partial y_1} = \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y_1} + \dots + \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial y_1} \\ \frac{\partial V}{\partial z_1} = \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z_1} + \dots + \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial z_1} \\ \dots \\ \frac{\partial V}{\partial x_N} = \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_N} + \dots + \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial x_N} \\ \frac{\partial V}{\partial y_N} = \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y_N} + \dots + \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial y_N} \\ \frac{\partial V}{\partial z_N} = \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z_N} + \dots + \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial z_N} \end{array} \right.$$

Questo è notoriamente il sistema che si ottiene imponendo la stazionarietà della funzione $V(P_1, \dots, P_N) = V(x_1, y_1, z_1, \dots, x_N, y_N, z_N) : \mathbb{R}^{3N} \rightarrow \mathbb{R}$ (vincolo) dalle k condizioni $f_l(x_1, y_1, z_1, \dots, x_N, y_N, z_N) = 0$, $l = 1, \dots, k$. Ciò spiega l'origine del metodo dei moltiplicatori di Lagrange nel risolvere i problemi di estremo vincolato delle funzioni di più variabili.

2.5 Principio di d'Alembert ed equazioni di Lagrange

2.5.1 Principio di d'Alembert

Le equazioni del moto dei sistemi vincolati contengono le reazioni vincolari, che a differenza delle forze attive sono a priori incognite. Pertanto esse non permettono, a priori, di determinare il moto. Abbiamo visto che il principio dei lavori virtuali, in cui compaiono solo le forze attive e non le reazioni vincolari, permette di determinare le condizioni e configurazione di quiete. Il principio di d'Alembert permette di fare la stessa cosa in dinamica, cioè permette di scrivere le equazioni del moto del sistema in modo da farvi comparire solo le forze attive. Queste equazioni saranno le equazioni di Lagrange.

Il problema della determinazione del moto di un dato sistema vincolato può essere ricondotto alla determinazione dell'equilibrio del medesimo sistema sotto l'azione dei medesimi vincoli ma di altre forze. Storicamente è stata proprio questa la strada seguita da Lagrange per ricavare le sue equazioni.

Cominciamo col porre alcune definizioni. Consideriamo ancora il nostro sistema di N punti materiali, e le loro equazioni fondamentali

$$\mathbf{F}_i + \Phi_i = m_i \frac{d^2 P_i}{dt^2}, \quad i = 1, \dots, n \quad (2.5.42)$$

Osserviamo anzitutto che il vettore $m_i \frac{d^2 P_i}{dt^2}$ ha le dimensioni di una forza.

Definizione 2.12 *Consideriamo un sistema materiale, comunque sollecitato e vincolato. Si definisce:*

1. Forza d'inerzia agente sul punto P_i del sistema la forza $(P_i, -m_i \frac{d^2 P_i}{dt^2})$;
2. Forza perduta agente sul punto P_i del sistema la forza $(P_i, \mathbf{F}_i - m_i \frac{d^2 P_i}{dt^2})$.

Osservazioni

1. Le (2.5.42) si possono riscrivere così:

$$\mathbf{F}_i - m_i \frac{d^2 P_i}{dt^2} + \Phi_i = 0, \quad i = 1, \dots, n \quad (2.5.43)$$

Se, analogamente a quanto si è visto nella dinamica relativa, si interpreta ciascuno dei vettori $-m_i \frac{d^2 P_i}{dt^2}$ (aventi le dimensioni di una forza) come una forza (fittizia) che diremo *forza d'inerzia* concernente l' i -esimo punto P_i , si rileva dalle (2.5.43), in quanto si riferiscono a n punti da riguardarsi come liberi (perchè abbiamo sostituito il vincolo con la reazione vincolare), che:

Durante il moto di un sistema materiale, comunque vincolato e sollecitato, si fanno, istante per istante, equilibrio le forze attive, le forze d'inerzia e le reazioni.

Tenendo conto che le reazioni sostituiscono nel loro complesso l'azione dei vincoli, possiamo anche dire che *durante il moto di un sistema materiale, comunque vincolato e sollecitato, si fanno istante per istante equilibrio, in virtù dei vincoli, le forze attive e quelle di inerzia.*

2. La nozione di forza perduta permette di dare un terzo enunciato equivalente, ricorrendo alla seguente osservazione. In base alla identità:

$$\mathbf{F}_i = m_i \frac{d^2 P_i}{dt^2} + \left(\mathbf{F}_i - m_i \frac{d^2 P_i}{dt^2} \right)$$

la generica forza attiva \mathbf{F}_i risulta scissa in due componenti, di cui il primo, cioè $m_i \frac{d^2 P_i}{dt^2}$, rappresenta quella forza che, qualora il punto P_i fosse libero, sarebbe

atta ad imprimergli da sola quello stesso moto, che esso acquista sotto l'azione combinata dell'intera forza \mathbf{F}_i e dei vincoli. Perciò l'altro componente $\mathbf{F}_i - m_i \frac{d^2 P_i}{dt^2}$ rappresenta quella parte di \mathbf{F}_i che va, per così dire, perduta per effetto dei vincoli. Resta così giustificato il nome di *forze perdute* che si suol dare alle $\mathbf{F}_i - m_i \frac{d^2 P_i}{dt^2}$; con che il precedente risultato generale si può enunciare sotto la forma più concisa: *Durante il moto di un sistema materiale, comunque vincolato e sollecitato, si fanno istante per istante equilibrio, in virtù dei vincoli, le forze perdute. Equivalentemente: In se al posto delle forze attive si mettessero le forze perdute, lasciando inalterati i vincoli, il sistema sarebbe istante per istante in equilibrio perchè le forze attive e le forze perdute si fanno equilibrio.*

Se un sistema materiale a vincoli olonomi e lisci è in equilibrio, per il principio dei lavori virtuali deve essere nullo il lavoro virtuale delle forze attive. Possiamo pertanto enunciare il

Principio di d'Alembert⁷

In un sistema materiale a vincoli olonomi lisci il lavoro virtuale delle forze perdute è nullo:

$$\sum_{k=1}^N (\mathbf{F}_k - m_k \frac{d^2 P_k}{dt^2}) \cdot \delta P_k = 0 \quad (2.5.44)$$

Equivalentemente: il lavoro virtuale delle reazioni vincolari è nullo:

$$\sum_{k=1}^N \Phi_k \cdot \delta P_k = 0 \quad (2.5.45)$$

L'equazione (2.5.45) si dice anche equazione simbolica della dinamica.

Osservazioni

1. L'essenza del principio sta nel fatto che le due condizioni equivalenti (2.5.44) o (2.5.45) valgono tanto in quiete quanto in moto, mentre l'annullarsi del lavoro virtuale della sollecitazione attiva vale solo in condizioni di quiete.

⁷Jean-Bapstiste le Rond d'Alembert nacque a Parigi nel 1717. Fu battezzato così perchè abbandonato in fasce davanti alla cappella di St.Jean-Baptiste le Rond a Notre Dame come frutto di una relazione illegittima fra una marchesa e il cavaliere Destouches. Morì a Parigi nel 1783. Diventò non solo un grande matematico (a lui si devono l'equazione delle onde, il teorema fondamentale dell'algebra, la prima determinazione della precessione degli equinozi), ma una delle figure più influenti dell'intero illuminismo, come Presidente dell'Accademia delle Scienze di Berlino ed in seguito di quella di Parigi. Assieme a Denis Diderot diresse il progetto dell'*Encyclopédie*.

Nel rivendicare per sè la paternità di questo principio Lagrange usò parole così piene di tatto verso d'Alembert che da allora in poi il principio è noto come principio di d'Alembert. (C.Truesdell)

2. Abbiamo visto che la condizione $\delta L = 0$ del principio dei lavori virtuali ammette l'interpretazione di ortogonalità fra sollecitazione attiva e vincolo se si vuole assicurare la quiete. Analogamente, l'equazione simbolica della dinamica assicura l'ortogonalità fra reazione vincolare e vincolo, in condizioni di moto qualunque. È questa condizione geometrica che permette di ricavare le equazioni del moto.
3. Ricordiamo che l'olonomia e la natura liscia di questo o quel vincolo fisico (con maggiore o minore precisione) sono fatti sperimentali. Dal punto di vista matematico l'olonomia dei vincoli e la loro natura liscia sono postulati di origine fisica; si può adottarlo sotto differenti forme equivalenti, per esempio sotto forma del principio dei lavori virtuali o del principio di d'Alembert, ma quando si definiscono i vincoli si tratta sempre di fatti sperimentali non contenuti nelle equazioni di Newton. Questa è un'affermazione di un certo significato fisico, specialmente alla luce di quanto si può assai spesso leggere nei testi di Fisica I, e cioè che tutta la meccanica è contenuta nelle equazioni di Newton. Per quanto precede, quest'ultima affermazione è vera solo se si considerano sistemi meccanici privi di vincoli.

2.5.2 Equazioni di Lagrange

L'energia cinetica

Consideriamo un sistema materiale di N punti in \mathbb{R}^3 comunque sollecitato e sotto l'azione di k vincoli olonomi lisci. Sia $q := (q_1, \dots, q_n) : n = 3N - k$ un insieme di parametri lagrangiani. Ricaviamo l'espressione dell'energia cinetica in funzione dei parametri lagrangiani e delle loro derivate $\dot{q} := (\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n)$, dette *velocità generalizzate di Lagrange*. Si ha

Proposizione 2.8 *L'energia cinetica del sistema materiale è una forma quadratica definita non negativa nelle velocità generalizzate di Lagrange \dot{q} con coefficienti che dipendono solo da q :*

$$T(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \sum_{l,k=1}^n T_{lk}(q) \dot{q}_l \dot{q}_k \quad \text{dove} \quad (2.5.46)$$

$$T_{lk}(q) := \sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial P_i}{\partial \dot{q}_l} \cdot \frac{\partial P_i}{\partial \dot{q}_k} \quad (2.5.47)$$

Dimostrazione

Derivando l'espressione $P_k = P_k(q_1, \dots, q_n)$ otteniamo

$$\mathbf{v}_i = \frac{dP_i}{dt} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial P_i}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k \quad (2.5.48)$$

Pertanto:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \sum_{k=1}^N \frac{\partial P_i}{\partial q_k} \dot{q}_k = \sum_{l=1}^N \frac{\partial P_i}{\partial q_l} \dot{q}_l =$$

$$\frac{1}{2} \sum_{l,k=1}^n T_{lk}(q) \dot{q}_l \dot{q}_k, \quad T_{lk}(q) := \sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial P_i}{\partial q_l} \cdot \frac{\partial P_i}{\partial q_k}$$

e ciò prova la che T è una forma quadratica nelle $(\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n)$ con coefficienti che dipendono solo dalle $q = (q_1, \dots, q_n)$ dato che $P_l = P_l(q_1, \dots, q_n), l = 1, \dots, N$. Inoltre, è chiaro che l'energia cinetica, espressa nelle coordinate cartesiane, è una forma quadratica definita positiva: infatti $T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i^2 = 0$ se e solo se $\mathbf{v}_i = 0, i = 1, \dots, N$. Questo implica che $T(q, \dot{q}) \geq 0$ sempre e ciò conclude la dimostrazione.

Osservazione

L'energia cinetica $T(q, \dot{q})$ si può annullare anche se $\dot{q} \neq 0$. Infatti la trasformazione dalle coordinate cartesiane ai parametri lagrangiani può introdurre delle singolarità che generano tale fenomeno. Consideriamo ad esempio il moto piano di un punto libero, e scegliamo come parametri lagrangiani le coordinate polari (r, φ) . Si ha

$$T = \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 = \frac{1}{2} m (\dot{r} \mathbf{e}_e + \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi)^2 = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2)$$

Si vede subito che $T = 0$ per $r = \dot{r} = 0 \forall \dot{\varphi}$.

Dall'espressione dell'energia cinetica possiamo ricavare le equazioni di Lagrange:

Teorema 2.5 (Equazioni di Lagrange)

Consideriamo un sistema olonomo a vincoli lisci con n gradi di libertà. Sia $Q = (q_1, \dots, q_n)$ un insieme di parametri lagrangiani. Allora il moto $t \mapsto q(t)$ dei parametri lagrangiani è soluzione del seguente sistema di equazioni differenziali

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (2.5.49)$$

dette equazioni di Lagrange.

Corollario 2.9 (Funzione di Lagrange) Nelle ipotesi del teorema precedente, supponiamo inoltre che la sollecitazione attiva sia conservativa, cioè che esista una funzione $V(q_1, \dots, q_n)$ tale che

$$Q_i = - \frac{\partial V}{\partial q_i}$$

Si definisca la funzione di Lagrange, o Lagrangiana, nel modo seguente:

$$L(q, \dot{q}) := T - V \quad (2.5.50)$$

Allora le equazioni di Lagrange (2.5.49) prendono la forma

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n \quad (2.5.51)$$

Osservazioni

1. Le equazioni di Lagrange, in ambedue le forme (2.5.49, 2.5.51), sono un sistema di equazioni differenziali ordinarie del secondo ordine perchè V non dipende dalle \dot{q} . Calcoliamo per sincerarcene $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$. In questo calcolo le q vanno considerate costanti, e va considerato costante anche t . Allora:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \sum_{l,k=1}^n T_{lk}(q) \dot{q}_l \dot{q}_k = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left[\sum_{s=1}^N T_{ss}(q) \dot{q}_s^2 + 2 \sum_{i < k=1}^N T_{ik}(q) \right] \\ &= \sum_{k=1}^N T_{ik}(q) \dot{q}_k := p_i(q, \dot{q}) \end{aligned}$$

Ora $p_i(q, \dot{q})$ è lineare in \dot{q} . Pertanto la derivata rispetto al tempo di tale espressione può contenere al più le derivate seconde rispetto al tempo. Infatti:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \frac{d}{dt} p_i = \sum_{k=1}^N T_{ik}(q) \ddot{q}_k + \sum_{l,k=1}^n \frac{\partial T_{lk}(q)}{\partial q_i} \dot{q}_l \dot{q}_k$$

Le incognite $q_k(t)$ sono funzioni della sola variabile t ; le equazioni di Lagrange sono pertanto equazioni differenziali *ordinarie*.

2. Le condizioni iniziali sono rappresentate dall'assegnazione degli n valori che le coordinate lagrangiane $q_1(t), \dots, q_n(t)$ assumono all'istante iniziale $t = t_0$ e dagli n valori assunti dalle velocità generalizzate $\dot{q}_1(t), \dots, \dot{q}_n(t)$ sempre a $t = t_0$. Sotto ipotesi molto generali le equazioni di Lagrange, assegnate le $2n$ condizioni iniziali, ammettono una soluzione ed una sola, e determinano così univocamente l'evoluzione delle coordinate lagrangiane. La conoscenza delle funzioni $q_1(t), \dots, q_n(t)$ determina l'evoluzione di ogni punto del sistema: infatti

$$P_k = P_k(q_1(t), \dots, q_n(t))$$

dove le funzioni $q \mapsto P_k(q)$, $k = 1, \dots, N$ sono funzioni note.

3. Le equazioni di Lagrange sono un sistema di equazioni differenziali in *forma implicita*. È possibile tuttavia scriverle in *forma normale*, cioè in forma risolta nelle \ddot{q}_k , le derivate di ordine più elevato. Si può infatti dimostrare che le equazioni di Lagrange si possono riscrivere nella forma seguente:

$$\ddot{q}_k = Q^k - \sum_{r,s=1}^n \left\{ \begin{matrix} k \\ rs \end{matrix} \right\} \dot{q}_r \dot{q}_s \quad (2.5.52)$$

dove:

$$Q^k := \sum_{i=1}^n T^{ki} Q_i, \quad \left\{ \begin{matrix} k \\ rs \end{matrix} \right\} = \sum_{i=1}^n T^{ki} \{rs, i\}$$

$$\{rs, i\} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial T_{lr}(q)}{\partial q_i} + \frac{\partial T_{lk}(q)}{\partial q_r} - \frac{\partial T_{sr}(q)}{\partial q_i} \right)$$

e T^{ki} è il complemento algebrico dell'elemento T_{ik} .

4. Sappiamo che i parametri lagrangiani in generale non sono unici. Si può dimostrare che se si opera la trasformazione che fa passare da un sistema di parametri lagrangiani ad un altro la forma delle equazioni di Lagrange non varia. Come caso particolare, nel caso dei sistemi privi di vincoli le equazioni di Lagrange non cambiano al cambiare dei sistemi di coordinate.

Dimostrazione

Si ponga:

$$\tau_i := \sum_{k=1}^N m_k \frac{d^2 P_k}{dt^2} \cdot \frac{\partial P_k}{\partial q_i} \quad (2.5.53)$$

e dimostriamo che $Q_i = \tau_i : i = 1, \dots, n$. Le Q_i , ricordiamo, sono le forze generalizzate di Lagrange. Si ha

$$\sum_{k=1}^N m_k \frac{d^2 P_k}{dt^2} \cdot \delta P_k = \sum_{k=1}^N \tau_k \delta q_k \quad (2.5.54)$$

Infatti:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N m_k \frac{d^2 P_k}{dt^2} \cdot \delta P_k &= \sum_{k=1}^N m_k \frac{d^2 P_k}{dt^2} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{\partial P_k}{\partial q_i} \delta q_i \\ &= \sum_{i=1}^n \delta q_i \sum_{k=1}^N m_k \frac{d^2 P_k}{dt^2} \cdot \frac{\partial P_k}{\partial q_i} = \sum_{i=1}^n \tau_i \delta q_i \end{aligned}$$

Ricordiamo poi che

$$\sum_{k=1}^N \mathbf{F}_k \cdot \delta P_k = \sum_{k=1}^n Q_k \delta q_k$$

Sostituendo quest'ultima espressione e la (2.5.53) nella (2.5.44) troviamo:

$$\sum_{k=1}^n (Q_k - \tau_k) \delta q_k = 0 \quad (2.5.55)$$

da cui, per l'arbitrarietà degli spostamenti virtuali δq_k :

$$Q_k = \tau_k, \quad k = 1, \dots, n \quad (2.5.56)$$

Per concludere la dimostrazione basta far vedere che

$$\tau_k = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} \quad (2.5.57)$$

A questo scopo, cominciamo con l'osservare che:

$$\frac{d^2 P_k}{dt^2} \cdot \frac{\partial P_k}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \frac{dP_k}{dt} \cdot \frac{\partial P_k}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dP_k}{dt} \cdot \frac{\partial P_k}{\partial q_i} \right) - \frac{dP_k}{dt} \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial P_k}{\partial q_i} \quad (2.5.58)$$

D'altra parte, se deriviamo la (2.5.48) rispetto a \dot{q}_i troviamo (si osservi che le P_k non dipendono dalle \dot{q})

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \frac{dP_k}{dt} = \frac{\partial P_k}{\partial q_i};$$

pertanto, assumendo di potere invertire l'ordine delle derivazioni:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial P_k}{\partial q_i} = \frac{\partial}{\partial q_i} \frac{dP_k}{dt} \quad (2.5.59)$$

Sostituendo quest'ultima formula nella (2.5.58) si trova

$$\begin{aligned} \frac{d^2 P_k}{dt^2} \cdot \frac{\partial P_k}{\partial q_i} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{dP_k}{dt} \cdot \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \frac{dP_k}{dt} \right) - \frac{dP_k}{dt} \cdot \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \frac{dP_k}{dt} = \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left(\frac{dP_k}{dt} \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{dP_k}{dt} \right)^2 \end{aligned}$$

e quindi, sommando su tutti i punti:

$$\begin{aligned} \tau_i &= \sum_{k=1}^N \frac{d^2 P_k}{dt^2} \cdot \frac{\partial P_k}{\partial q_i} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N m_k \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \frac{dP_k}{dt} \right)^2 - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N m_k \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{dP_k}{dt} \right)^2 = \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \sum_{k=1}^N m_k \left(\frac{dP_k}{dt} \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q_i} \sum_{k=1}^N m_k \left(\frac{dP_k}{dt} \right)^2 = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} \end{aligned}$$

e ciò conclude la dimostrazione.

Enunciamo e dimostriamo un importante conseguenza della formulazione lagrangiana delle equazioni del moto.

Definizione 2.13 *Supponiamo che le forze siano conservative. Se la lagrangiana L non dipende da una delle coordinate lagrangiane, ad esempio q_s , tale coordinata viene detta ignorabile.*

Corollario 2.10 *Supponiamo che la coordinata q_s sia ignorabile. Allora il sistema ammette il seguente integrale primo:*

$$I_s := \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} \quad (2.5.60)$$

Dimostrazione

Se q_s è ignorabile, si ha:

$$\frac{\partial L}{\partial q_s} = 0 \implies \frac{\partial T}{\partial q_s} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial q_s} = 0$$

Allora l'equazione di Lagrange per questa coordinata diventa:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} = \frac{d}{dt} I_s = 0$$

e ciò dimostra il Corollario.

2.5.3 Regola per impostare i problemi di moto vincolato ed esempi

Regola: (valida per un sistema di N punti in \mathbb{R}^3 soggetti a vincoli olonomi lisci).

1. Determinare il numero di gradi di libertà tramite l'imposizione dei vincoli ed individuare un sistema di parametri lagrangiani q_1, \dots, q_n
2. Esprimere le coordinate cartesiane di ogni punto del sistema in funzione dei parametri lagrangiani, cioè costruire le funzioni

$$P_i - O = P_i(q_1, \dots, q_n) : i = 1, \dots, N; \quad (2.5.61)$$

3. Esprimere l'energia cinetica $T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \dot{P}_i^2$ per mezzo di una forma quadratica nelle velocità generalizzate $\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n$

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n T_{i,j}(\mathbf{q}) \dot{q}_i \dot{q}_j$$

Suggerimento: usare il teorema di König ogni volta che si può.

4. Calcolare le forze generalizzate di Lagrange $Q_i(q_1, \dots, q_n)$ esprimendo la legge di forza in funzione dei parametri lagrangiani per il tramite delle (2.5.61); se il sistema è conservativo, calcolarne il potenziale $V(P_1, \dots, P_n)$ ed esprimerlo in funzione dei parametri (q_1, \dots, q_n) sempre tramite le (2.5.61).
5. Scrivere le equazioni di Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i, \quad i = 1, \dots, n$$

oppure, se il sistema è conservativo, e $L = T - V$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n$$

6. Integrare le equazioni.

Esempio 1

Ritroviamo anzitutto tramite il metodo generale di Lagrange le equazioni del moto che già conosciamo nei casi che abbiamo trattato in precedenza.

1. Punto materiale libero in \mathbb{R}^3 sottoposto all'azione di forze arbitrarie.

Non ci sono vincoli da imporre. I gradi di libertà sono 3. I parametri lagrangiani coincidono con le coordinate cartesiane. La funzione P è l'identità. L'energia

cinetica è $T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$. Le forze generalizzate di Lagrange sono le componenti cartesiane della forza (P, \mathbf{F}) che agisce sul punto. Si ha poi:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = \frac{d}{dt}(m\dot{x}) = m\ddot{x}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = \frac{d}{dt}(m\dot{y}) = m\ddot{y}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{z}} = \frac{d}{dt}(m\dot{z}) = m\ddot{z}$$

Le equazioni di Lagrange sono quindi

$$m\ddot{x} = F_x, \quad m\ddot{y} = F_y, \quad m\ddot{z} = F_z$$

che sono le equazioni di Newton.

Se poi le forze sono conservative, poichè $L = T - V$ otteniamo:

$$m\ddot{x} = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad m\ddot{y} = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad m\ddot{z} = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

che è la forma assunta dalle equazioni di Newton quando le forze sono conservative.

2. Punto materiale in \mathbb{R}^2 riferito a coordinate polari.

Non ci sono vincoli da imporre. I gradi di libertà sono due. I parametri lagrangiani sono le coordinate polari (r, φ) . Sappiamo che la velocità vale $\mathbf{v} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi$; pertanto $T = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2)$. Supponiamo che su P agisca un campo di forze centrali, $V = V(r)$. Allora:

$$L = T - V = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - V(r)$$

e le equazioni di Lagrange sono

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} = 0; \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$$

cioè

$$m\ddot{r} + mr\dot{\varphi}^2 + V'(r) = 0, \quad \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\varphi}) = 0$$

La seconda equazione implica $r^2\dot{\varphi} = A$, dove A è una costante. Sostituendo $\dot{\varphi} = \frac{A}{r^2}$ nella prima troviamo

$$m\ddot{r} + mA^2r^{-3} + V'(r) = 0$$

Se ora introduciamo, come nel Paragrafo 1.3.2 C, il potenziale effettivo $V_A := V(r) + \frac{mA^2}{2r^2}$, l'equazione ultima scritta diventa

$$m\ddot{r} + V'_A(r) = 0$$

L'integrale primo dell'energia si scrive:

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + V_A(r) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + V(r) + \frac{mA^2}{2r^2}$$

Ritroviamo così la discussione e la soluzione del problema dei due corpi del § 1.3.2.

3. Punto materiale in \mathbb{R}^3 riferito a coordinate polari.

Nemmeno qui ci sono vincoli da imporre. I gradi di libertà sono 3. I parametri lagrangiani sono le coordinate polari r, θ, φ , legate a quelle cartesiane dalle relazioni

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta$$

Qui la coordinata zenitale θ varia fra $-\pi/2$ e $\pi/2$, e quella azimutale φ fra 0 e 2π . Considerando le coordinate polari come funzioni del tempo si ha

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{r} \sin \theta \cos \varphi + r \cos \theta \cos \varphi \dot{\theta} - r \sin \theta \sin \varphi \dot{\varphi} \\ \dot{y} &= \dot{r} \sin \theta \sin \varphi + r \cos \theta \sin \varphi \dot{\theta} + r \sin \theta \cos \varphi \dot{\varphi} \\ \dot{z} &= \dot{r} \cos \theta - r \sin \theta \dot{\theta} \end{aligned}$$

Pertanto:

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2)$$

Se le forze sono centrali, ci sono due integrali primi. Uno di questi è determinabile immediatamente. Se $V = V(r)$ la coordinata φ è ignorabile. Infatti:

$$\begin{aligned} L &= T - V = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2) - V(r) \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = 0 \implies \frac{d}{dt} [mr^2\sin^2\theta\dot{\varphi}] = 0 \end{aligned}$$

L'integrale primo corrispondente è dunque $K_z = mr^2\sin^2\theta\dot{\varphi}$ (proiezione del momento angolare lungo l'asse z).

4. Punto materiale vincolato a percorrere una curva in \mathbb{R}^3 .

Qui bisogna imporre il vincolo che il punto si muova su una curva prefissata. Imporre il vincolo significa imporre che le coordinate (x, y, z) appartengano alla curva, cioè che il punto (x, y, z) soddisfi le assegnate equazioni parametriche $x = x(u)$, $y = y(u)$, $z = z(u)$. Quindi il parametro lagrangiano è uno solo, il parametro u della curva. Passando alla descrizione intrinseca (vedi Ciematica), possiamo scegliere come parametro lagrangiano l'ascissa curvilinea $s(u)$. Allora, dato che $\dot{P} = \mathbf{v} = \dot{\mathbf{s}}(s)$, si ha la formula dell'energia cinetica

$$T = \frac{1}{2}m\dot{s}^2.$$

Denotata $\mathbf{F}(P, \dot{P}, t) = \mathbf{F}(P(s), \dot{\mathbf{s}}(s); t)$ la legge di forza attiva che agisce sul punto, calcoliamo ora la forza generalizzata di Lagrange $Q(s, \dot{s}; t)$. Il lavoro

virtuale vale $\delta L = \mathbf{F} \cdot \delta P(s)$, mentre lo spostamento virtuale vale $\delta P(s) = \frac{dP(s)}{ds} \delta s = \mathbf{t}(s) ds$. Quindi $\delta L = \mathbf{F} \cdot \mathbf{t} ds$ da cui

$$Q(s, \dot{s}; t) = \mathbf{F}(P(s), \dot{\mathbf{t}}(s); t) \cdot \mathbf{t}(s) := F_t(s, \dot{s}; t)$$

L'equazione di Lagrange è

$$m\ddot{s} = F_t(s, \dot{s}; t)$$

e si ritrova così l'equazione del moto (2.1.3) dell'esempio all'inizio di questo capitolo.

Poichè il calcolo esplicito dell'ascissa curvilinea $s(u)$ e della sua funzione inversa $u = u(s)$ non è quasi mai possibile, conviene scrivere l'equazione di Lagrange direttamente nel parametro u della curva preassegnata, assunto come parametro lagrangiano. Si ha allora

$$\dot{x} = \frac{dx}{du} \dot{u}, \quad \dot{y} = \frac{dy}{du} \dot{u}, \quad \dot{z} = \frac{dz}{du} \dot{u} \implies T = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{dx}{du} \right)^2 + \left(\frac{dy}{du} \right)^2 + \left(\frac{dz}{du} \right)^2 \right] \dot{u}^2$$

Supponiamo per semplicità che la forza agente su P sia conservativa: $\mathbf{F} = -\nabla V$. Allora, esprimendo il potenziale V in funzione del parametro lagrangiano u , la lagrangiana sarà:

$$L(u, \dot{u}) = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{dx}{du} \right)^2 + \left(\frac{dy}{du} \right)^2 + \left(\frac{dz}{du} \right)^2 \right] \dot{u}^2 - V(x(u), y(u), z(u))$$

Sviluppiamo i calcoli nel caso particolare di un punto pesante vincolato a muoversi su un'ellisse di centro l'origine e semiassi $a > b$ nel piano verticale xy . Le equazioni parametriche dell'ellisse sono

$$\begin{cases} x = a \cos u \\ y = b \sin u \end{cases} \implies \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Qui il parametro u è l'angolo al centro, misurato a partire dall'asse delle x : $0 \leq u \leq 2\pi$. Quindi

$$\begin{cases} \frac{dx}{du} = -a \sin u \\ \frac{dy}{du} = b \cos u \end{cases} \implies T = \frac{1}{2} m [a^2 \sin^2 u + b^2 \cos^2 u] \dot{u}^2.$$

D'altra parte $V = mgy = mgbsinu$ e pertanto:

$$L(u, \dot{u}) = \frac{1}{2} m [a^2 \sin^2 u + b^2 \cos^2 u] \dot{u}^2 - mgbsinu.$$

Se poi $a = b = l$ l'ellisse diventa un cerchio e la lagrangiana si riduce a

$$L(u, \dot{u}) = \frac{1}{2} ml^2 \dot{u}^2 - mgl \sin u.$$

Di solito si conviene di misurare gli angoli a partire dalla verticale discendente. Pertanto si pone $\theta = u + \pi/2$, il che dà:

$$L(\theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl\cos\theta$$

cosicchè con l'equazione di Lagrange ritroviamo l'equazione del pendolo

$$l\ddot{\theta} = -g\sin\theta.$$

5. Corpo rigido con un asse fisso.

Il vincolo è già stato imposto nel paragrafo 2.2.4, dove si è trovato che il sistema può essere descritto da un solo parametro lagrangiano, l'angolo di rotazione θ attorno all'asse fisso. Si è inoltre ivi calcolata l'energia cinetica del sistema, che vale

$$T = \frac{1}{2}I_a\dot{\theta}^2$$

dove I_a è il momento d'inerzia del corpo rispetto all'asse fisso. Calcoliamo ora la forza generalizzata di Lagrange. Se \mathbf{F}_k è la forza applicata al punto P_k del corpo rigido si ha, calcolando ancora il lavoro virtuale:

$$\delta L = \sum_{k=1}^N \mathbf{F}_k \cdot \delta P_k = \sum_{k=1}^N \mathbf{F}_k \cdot \delta \mathbf{a} \wedge (P_k - O)\delta\theta = \Omega_a \delta\theta$$

dove \mathbf{a} è il versore dell'asse di rotazione. Qui abbiamo applicato la formula per gli spostamenti virtuali di un corpo rigido con un asse fisso già vista nel paragrafo citato, e la definizione di momento di una forza rispetto ad un asse. Dunque $Q = \Omega_a$ e l'equazione di Lagrange diventa

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial(I_a\dot{\theta}^2)}{\partial\dot{\theta}} = Q \implies I_a\ddot{\theta} = \Omega_a$$

che coincide con l'equazione ricavata nel 2.2.5.

Esempio 2. Segmento rigido omogeneo mobile nel piano.

Questo sistema equivale al moto piano di due punti $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$ di masse m_1, m_2 sotto il vincolo di tenere fissa al valore l la distanza reciproca.

1. Gradi di libertà : sappiamo già che è $\mathbb{R}^2 \times S^1$. Come coordinate possiamo scegliere quelle, denotate (x_1, y_1) del punto P_1 e e l'angolo di rotazione θ attorno ad un asse ortogonale al piano ed uscente da P_1 .

2. Energia cinetica: occorre anzitutto esprimere le coordinate di P_2 in funzione delle coordinate della varietà, cioè dei parametri lagrangiani, $(x_1, y_1; \theta)$. Si ha come sopra

$$x_2 = x_1 + l\cos\theta \quad y_2 = y_1 + l\sin\theta$$

Considerando al solito i parametri lagrangiani funzioni del tempo t otteniamo, dopo i consueti calcoli che stavolta ometteremo

$$T = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + 2lm_2\dot{\theta}(l\sin\theta\dot{x}_1 - l\cos\theta\dot{y}_1)$$

che è l'espressione precedente.

Si noti che queste coordinate non sono quelle in cui l'espressione dell'energia cinetica è la più semplice. A tale scopo conviene prendere quelle, denotate (x, y) del punto medio fra P_1 e P_2 , e l'angolo di rotazione θ attorno ad un asse ortogonale al piano passante per il punto medio, che coincide con l'angolo θ precedente. Si ha manifestamente:

$$\begin{cases} x_1 = x - \frac{l}{2}\cos\theta \\ y_1 = y - \frac{l}{2}\sin\theta \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = x + \frac{l}{2}\cos\theta \\ y_2 = y + \frac{l}{2}\sin\theta \end{cases}$$

Dopo i consueti calcoli che stavolta ometteremo si ottiene

$$T = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)[(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + l^2\dot{\theta}^2]$$

3. Detto $U(x_1, y_1; x_2, y_2)$ il potenziale della sollecitazione attiva (supposta conservativa), e denotata⁸ $U(x, y; \theta)$ la funzione $U(x + l\cos\theta, y + l\sin\theta; x - l\cos\theta, y - l\sin\theta)$ la lagrangiana è

$$L = m[(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + l^2\dot{\theta}^2] + U(x, y; \theta)$$

da cui si deducono le tre equazioni di Lagrange del sistema

Esempio 3: Il bipendolo

Gradi di libertà: 2.

Parametri lagrangiani; i due angoli $\theta_1; \theta_2$.

Coordinate cartesiane dei punti P_1 e P_2 in funzione dei parametri lagrangiani: la formula (2.3.34) che qui riportiamo per comodità:

$$\begin{cases} x_1 = l_1\cos\theta_1 \\ y_1 = -l_1\sin\theta_1 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = l_1\cos\theta_1 + l_2\cos\theta_2 \\ y_2 = -l_1\sin\theta_1 - l_2\sin\theta_2 \end{cases}$$

⁸per il consueto abuso di notazione

Energia cinetica:

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{1}{2}m_1(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2}m_2(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) = \frac{1}{2}m_1[(-l_1\sin\theta_1\dot{\theta}_1)^2 + (-l_1\cos\theta_1\dot{\theta}_1)^2] + \\
 &= \frac{1}{2}m_2[(-l_1\sin\theta_1\dot{\theta}_1 - l_2\sin\theta_2\dot{\theta}_2)^2 + (-l_1\cos\theta_1\dot{\theta}_1 - l_2\cos\theta_2\dot{\theta}_2)^2] = \\
 &= \frac{1}{2}(m_1 + m_2)l_1^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2l_2^2\dot{\theta}_2^2 + m_2l_1l_2\cos(\theta_1 - \theta_2)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2
 \end{aligned}$$

Potenziale delle forze peso:

$$V_G = m_1gy_1 + m_2gy_2 = m_1gl_1\sin\theta_1 + m_2g(l_1\sin\theta_1 + l_2\sin\theta_2)$$

Potenziale della forza $\mathbf{F} = F\mathbf{i}$ applicata a P_2 :

$$V_F = -Fx_2 = -F(l_1\cos\theta_1 + l_2\cos\theta_2)$$

Lagrangiana:

$$\begin{aligned}
 L &= T - V = T - V_G - V_F \\
 &= \frac{1}{2}(m_1 + m_2)l_1^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2l_2^2\dot{\theta}_2^2 + m_2l_1l_2\cos(\theta_1 - \theta_2)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \\
 &\quad - m_1gl_1\sin\theta_1 + m_2g(l_1\sin\theta_1 + l_2\sin\theta_2) + F(l_1\cos\theta_1 + l_2\cos\theta_2)
 \end{aligned}$$