

COMPLEMENTI DI ISTITUZIONI DI FISICA MATEMATICA

Appunti tratti dalle lezioni
del prof. RENATO NARDINI



Cooperativa Libreria Universitaria Editrice
Bologna

I N D I C E

	<i>pag.</i>
§ 1. Piccole vibrazioni trasversali di un filo	7
×1) Equazione indefinita del moto.	7
×2) Piccole vibrazioni trasversali di un filo. Equazione di d'Alembert	9
×3) Piccole vibrazioni trasversali di un filo omogeneo illimitato.	11
4) Piccole vibrazioni di una corda con un estremo fisso. Onde sinusoidali stazionarie	15
5) Richiami sullo sviluppo in serie di Fourier	17
6) Vibrazioni di una corda con due estremi fissi	18
7) Integrazione dell'equazione di d'Alembert col metodo di separazione delle variabili	21
§ 2. Seconda equazione di Maxwell e onde elettromagnetiche	27
×§ 3. Cenni di calcolo tensoriale	37
×1) Richiami sui vettori	37
×2) Tensori del secondo ordine	38
×3) Tensori simmetrici	41
×§ 4. Cinematica dei mezzi continui	43
×1) Introduzione	43
×2) Cinematica delle piccole deformazioni	44
×3) Tensore delle deformazioni	46
×4) Teorema di Helmholtz	48
×5) Esempio di passaggio da assi qualunque ad assi principali	49
×6) Dilatazione cubica	50
×§ 5. Statica dei mezzi continui	53
×1) Forze applicate e sforzi interni	53
×2) Condizioni di equilibrio per mezzi continui	54
×3) Formule di Cauchy e tensore degli sforzi interni	55

> 4)	Equazioni differenziali dell'equilibrio	58
> 5)	Caso dei fluidi	61
> 6)	Relazioni fra sforzi interni e deformazioni	63
> 7)	Equazioni differenziali definitive dell'equilibrio elastico	69
§ 6.	Piccole oscillazioni elastiche	71
1)	Equazioni dei piccoli moti elastici	71
> 2)	Onde di compressione	72
> 3)	Onde di distorsione	77
4)	Teorema di Clebsch	79
5)	Oscillazioni di tipo qualsiasi	80
> § 7.	Meccanica dei fluidi	81
1)	Accelerazione lagrangiana e accelerazione euleriana	81
2)	Linee di flusso e linee di corrente	83
3)	Equazioni del moto di un fluido non viscoso	84
4)	Piccoli moti e vibrazioni acustiche	87
5)	Teoremi di Bernoulli	91
6)	Vortici	95
7)	Vortici nei fluidi perfetti soggetti a forze conservative	96
§ 8.	Cenni di magnetofluidodinamica e onde di Alfvén.	99
§ 9.	Teoria di diffusione del calore	107
1)	Legge di Fourier	107
2)	Equazione della diffusione del calore	109
3)	Caso unidimensionale	112

§ 1. PICCOLE VIBRAZIONI TRASVERSALI DI UN FILO.

1) Equazione indefinita del moto.

L'unico esempio di sistema a infiniti gradi di libertà che si è incontrato nel corso di Meccanica Razionale è quello di un filo flessibile (che cioè può assumere qualunque configurazione possibile) e inestendibile (tale cioè che rimanga costante la lunghezza di un suo arco limitato da due punti). Introdotta un sistema di coordinate curvilinee s con origine O (Fig. 1), per cui un ge-

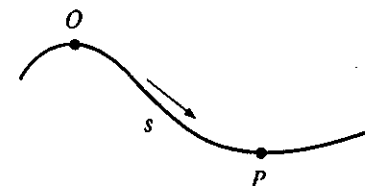


Fig. 1

nerico punto P del filo è $P = P(s)$, è stata ricavata l'equazione indefinita dell'equilibrio nella forma

$$(1) \quad \vec{f} + \frac{d\vec{\tau}}{ds} = 0 \quad \vec{\tau} = \tau \vec{t}$$

dove $\vec{f}$ è la forza distribuita ($\vec{f} ds$ è la forza agente su un elemento ds di filo) e $\vec{\tau}$ è la tensione (cioè la forza che va applicata a un punto generico P qualora si asporti il filo al di là di un punto interno M del filo senza cambiare lo stato di quiete o di moto del filo stesso).

Se ora si pensa il filo in movimento, un generico punto P non si esprimerà solo in funzione della coordinata curvilinea s ma sarà anche funzione del tempo t . Scriveremo perciò

$$P = P(s, t) \text{ oppure } \begin{cases} x = x(s, t) \\ y = y(s, t) \\ z = z(s, t) \end{cases}$$

che forniscono le coordinate cartesiane di P in funzione di s e di t e le equazioni della curva rappresentata dal filo. Queste tre funzioni (di due variabili) saranno incognite mentre saranno note le forze distribuite che risulteranno funzioni, in genere, del punto, della velocità e del tempo. Poichè il filo è inestendibile, ad ogni valore di s corrisponde uno ed un sol punto del filo, che è il medesimo nelle varie configurazioni assunte dal filo: ciò si esprime con $\frac{ds}{dt} = 0$.

Per ricavare l'equazione indefinita del moto (valida cioè in ogni punto interno al filo), possiamo applicare il principio di d'Alembert, secondo il quale ogni punto del sistema è mantenuto in equilibrio dalla forza perduta in quel punto. Tale forza si calcola, com'è noto, aggiungendo alla forza attiva applicata al punto il prodotto cambiato di segno della sua massa dm per l'accelerazione. Essendo $dm = \rho ds$ (ρ densità lineare) la massa del punto P (che schematizza l'elemento ds del filo), la forza perduta in P sarà quindi

$$(2) \quad \vec{f} ds - \rho \vec{a} ds;$$

durante il moto tale forza, divisa per ds , deve quindi soddisfare la (1) quando sia sostituita al posto di $\vec{f}$. Si ha così l'equazione del moto nella forma

$$(3) \quad \vec{f} - \rho \vec{a} + \frac{\partial \vec{\tau}}{\partial s} = 0 \quad \vec{\tau} = \tau \vec{t};$$

si noti che si è usato il simbolo di derivata parziale perchè la tensione $\vec{\tau}$, oltre che dipendere da s , può dipendere da t .

Nella (3) ρ sarà assegnata in funzione di s , $\vec{f}$ in funzione di

P, t e della velocità $\frac{\partial P}{\partial t}$, mentre τ sarà funzione incognita di s e di t . L'accelerazione si scriverà $\frac{\partial^2 P}{\partial t^2}$ e quindi l'equazione stessa diventerà (è $\vec{t} = \frac{\partial P}{\partial s}$)

$$(4) \quad \rho \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = \vec{f} + \frac{\partial}{\partial s} \left(\tau \frac{\partial P}{\partial s} \right).$$

Occorrerà aggiungere la nota relazione che esprime il fatto che $\frac{\partial P}{\partial s}$ è un versore

$$(5) \quad \left(\frac{\partial P}{\partial s} \right)^2 = 1$$

e quindi le (4) e le (5) equivalgono a un sistema di quattro equazioni scalari alle derivate parziali nelle quattro funzioni (di s e di t) incognite x, y, z e τ :

$$(6) \quad \begin{cases} \rho \ddot{x} = f_x + \frac{\partial}{\partial s} \left(\tau \frac{\partial x}{\partial s} \right) \\ \rho \ddot{y} = f_y + \frac{\partial}{\partial s} \left(\tau \frac{\partial y}{\partial s} \right) \\ \rho \ddot{z} = f_z + \frac{\partial}{\partial s} \left(\tau \frac{\partial z}{\partial s} \right) \\ \left(\frac{\partial x}{\partial s} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial s} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial s} \right)^2 = 1. \end{cases}$$

Questo sistema, assieme alle condizioni iniziali (posizione e velocità iniziale per ogni P) e alle condizioni agli estremi del filo (condizioni al contorno), determinano il moto del filo.

2) Piccole vibrazioni trasversali di un filo. Equazione di d'Alembert.

Per poter risolvere il problema precedente consideriamo un caso particolarmente semplice.

Supponiamo che la forza distribuita $\vec{f}$ sia ovunque trascurabile. In condizioni di equilibrio il filo sia disposto secondo una retta che assumiamo come asse x , mentre in condizioni di moto i punti del filo si scostino pochissimo dall'asse x e normalmente ad esso: tale moto prende il nome di *piccole vibrazioni trasversali*.

La piccolezza e la trasversalità del movimento si precisano dicendo che in ogni punto del filo è $\frac{\partial x}{\partial t} = 0$ e l'angolo α formato dal versore $\vec{t}$ con l'asse x è dovunque molto piccolo in modo da potersi sostituire $\cos \alpha$ con 1; è cioè

$$(7) \quad \cos \alpha = \frac{dx}{ds} \sim 1,$$

per cui è $dx = ds$ e, ponendo l'origine della coordinata curvilinea s nell'origine delle coordinate cartesiane, è $x = s$ per ogni punto del filo. Le (6) allora diventano

$$(8) \quad \begin{cases} \frac{\partial \tau}{\partial x} = 0 \\ \rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\tau \frac{\partial y}{\partial x} \right) \\ \rho \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\tau \frac{\partial z}{\partial x} \right) \end{cases}$$

dove le incognite sono soltanto y, z , e τ . L'ultima delle (6) si riduce a un'identità, dato che è $\frac{dx}{ds} \simeq 1$, mentre i numeri $\frac{\partial y}{\partial s} \simeq \frac{\partial y}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial s} \simeq \frac{\partial z}{\partial x}$, che danno la tangente trigonometrica dell'angolo che le tangenti geometriche delle proiezioni della linea funicolare sui piani xy e xz formano con l'asse x , sono numeri molto piccoli i cui quadrati sono trascurabili.

Dalla prima delle (8) si deduce che il modulo τ della tensione è costante lungo il filo. Supposto noto τ , le rimanenti equazioni diventano

$$(9) \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\tau}{\rho} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{\tau}{\rho} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}.$$

Esse definiscono il moto della proiezione del filo sui piani (x, y) e (x, z) e hanno la stessa forma: è l'equazione di d'Alembert o l'equazione delle corde vibranti:

Limitiamo il nostro studio ad una sola di esse, p. es. la prima, il che corrisponde a studiare il caso in cui la corda vibra nel piano (x, y) . Integrando la detta equazione e tenendo conto delle condizioni iniziali e delle condizioni al contorno, si calcola il moto del filo.

3) Piccole vibrazioni trasversali di un filo omogeneo illimitato.

Supponendo τ costante rispetto al tempo e ρ costante rispetto ad x , possiamo porre

$$(10) \quad \frac{\tau}{\rho} = v^2.$$

Per trovare la soluzione generale dell'equazione

$$(11) \quad \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2}$$

possiamo eseguire il seguente cambiamento di variabili:

$$(12) \quad x + vt = \xi \quad x - vt = \eta$$

e pensando che dopo tale cambiamento si ha

$$y(x, t) = y[\xi(x, t), \eta(x, t)]$$

si ottiene

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial y}{\partial \eta}, \quad v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} + 2v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} + v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2}$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial y}{\partial \xi} v + \frac{\partial y}{\partial \eta} (-v), \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} - 2v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} + v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2};$$

uguagliando i secondi membri delle ultime due equazioni si ricava

$$(13) \quad 4v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} = 0.$$

Se ne deduce $\frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} = 0$; ciò significa che $\frac{\partial y}{\partial \eta}$ è indipendente da ξ , cioè è $\frac{\partial y}{\partial \eta} = f(\eta)$, dove f è il simbolo di una funzione arbitraria. Integrando ulteriormente e indicando con $F(\eta)$ una primitiva della f si ha

$$y(\xi, \eta) = F(\eta) + G(\xi)$$

dove G è una funzione arbitraria della ξ . Ritornando alle variabili di partenza si ha

$$(14) \quad y(x, t) = F(x - vt) + G(x + vt),$$

che è l'integrale detto di d'Alembert e in cui F e G sono funzioni a priori arbitrarie dei loro argomenti.

Le piccole vibrazioni trasversali del filo sono quindi composte di due termini. Supposto il filo illimitato dalle due parti possiamo esaminare il caso $G \equiv 0$; si può subito vedere che l'argomento $x - vt$ della F non cambia se, dando a t un incremento Δt , si incrementa la x di $v\Delta t$. E' infatti

$$x + v\Delta t - v(t + \Delta t) = x - vt;$$

ciò significa che lo spostamento y di ogni punto x della corda all'istante t si verifica all'istante $t + \Delta t$ nel punto $x + v\Delta t$ (Fig. 2), ossia la configurazione della corda all'istante t trasla di $v\Delta t$ nel verso positivo dell'asse x nell'intervallo di tempo Δt ; la velocità di traslazione si ottiene dividendo lo spazio per il tempo ossia $\frac{v\Delta t}{\Delta t} = v$. In altre parole la configurazione del filo rimane fissa

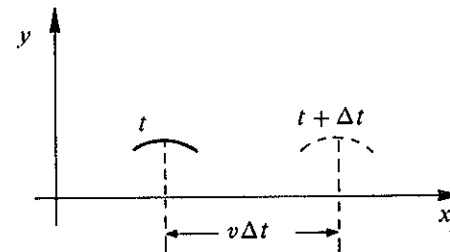


Fig. 2

per un osservatore che si muova con velocità v nel verso positivo dell'asse x . $F(x - vt)$ corrisponde quindi a una *propagazione* nel detto verso: diremo che essa corrisponde ad *onde progressive*.

Il termine $G(x + vt)$ corrisponde invece a una *propagazione di onde regressive* nel verso negativo dell'asse x : la soluzione generale è data dalla sovrapposizione dei due sistemi di onde.

Per determinare le due funzioni F e G , basta ricorrere alle condizioni iniziali che consistono, come abitualmente in meccanica, nell'assegnare posizione e velocità iniziale di ogni punto della corda. In formule, risulteranno assegnate le due funzioni $y_0(x)$ e $v_0(x)$ per ogni x in modo che sia

$$(15) \quad y(0, x) = y_0(x), \quad \frac{\partial y(0, x)}{\partial t} = v_0(x).$$

Introducendo tali condizioni nella soluzione generale (14) si ha

$$\begin{cases} F(x) + G(x) = y_0(x) \\ -vF'(x) + vG'(x) = v_0(x) \end{cases} \quad -\infty < x < +\infty,$$

dove l'apice sta a indicare la derivata della corrispondente funzione rispetto al suo argomento. Integrando la seconda equazione tra il valore arbitrario fisso a e il valore generico x si ottiene (dividendo anche per $-v$)

$$\begin{cases} F(x) + G(x) = y_0(x) \\ F(x) - G(x) = -\frac{1}{v} \int_a^x v_0(\xi) d\xi + C, \end{cases}$$

da cui si ricava

$$F(x) = \frac{1}{2} \left[y_0(x) - \frac{1}{v} \int_a^x v_0(\xi) d\xi + C \right]$$

$$G(x) = \frac{1}{2} \left[y_0(x) + \frac{1}{v} \int_a^x v_0(\xi) d\xi - C \right]$$

e quindi, sostituendo ad x l'argomento $x-vt$ in F e $x+vt$ in G si ha

$$(16) \quad y(x, t) = \frac{1}{2} \left[y_0(x-vt) + y_0(x+vt) + \frac{1}{v} \int_{x-vt}^{x+vt} v_0(\xi) d\xi \right];$$

in questa espressione non c'è alcun elemento arbitrario.

Fra le soluzioni della forma (14) sono importanti quelle per cui F è funzione sinusoidale del suo argomento ed è $G \equiv 0$. Si ottiene così il movimento vibratorio per cui è

$$(17) \quad y = C \sin \left[\frac{2\pi}{\lambda} (x-vt) - \gamma \right]$$

dove λ , C e γ sono costanti. Si hanno in tal modo le cosiddette *onde sinusoidali*, nelle quali ogni punto del filo si muove di moto armonico di pulsazione $\omega = \frac{2\pi}{\lambda} v$, di periodo $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{\lambda}{v}$

e di frequenza $\nu = \frac{1}{T} = \frac{v}{\lambda}$. La costante λ è la *lunghezza d'onda* in quanto è la distanza fra due massimi successivi della sinusoide, mentre C è l'*ampiezza* delle vibrazioni e γ è la *costante di fase*.

4) Piccole vibrazioni di una corda con un estremo fisso. Onde sinusoidali stazionarie

Supponiamo che la corda abbia un estremo fisso che potremo assumere come origine delle coordinate cartesiane ($x=0$) e sia illimitata solo da una parte, per esempio per $x > 0$.

Alla soluzione (14) va quindi imposta la *condizione al contorno* che l'estremo della corda abbia sempre coordinata y nulla per qualunque valore del tempo t : posto $vt=u$, ciò dà luogo alla condizione funzionale

$$0 = F(-u) + G(u) \quad \forall u$$

ossia

$$G(u) = -F(-u) \quad \forall u$$

Segue che la soluzione del problema non dipende da due funzioni arbitrarie, ma da una sola, p. es. la F , essendo la G dipendente da F .

La soluzione generale è quindi

$$(18) \quad y(x, t) = F(x-vt) - F(-x-vt).$$

Se in particolare scegliamo per F l'espressione (17), la soluzione sarà

$$(19) \quad y(x, t) = C \sin \left[\frac{2\pi}{\lambda} (x-vt) - \gamma \right] + C \sin \left[\frac{2\pi}{\lambda} (x+vt) + \gamma \right];$$

è evidente che nel caso di una corda con un estremo fisso non si possono avere onde sinusoidali solo progressive (o solo regressive): la presenza delle une è indissolubilmente legata a quella delle altre, con uguali lunghezza d'onda e ampiezza e con costanti di fase opposte. Fisicamente ciò si spiega col fatto che le onde che arrivano all'estremo fisso si riflettono e percorrono la corda in senso inverso. Tale riflessione è facilmente visibile se le onde costituiscono un *treno* di lunghezza limitata.

Applicando alla (19) una nota formula (di prostaferesi) si

ottiene

$$(20) \quad y(x, t) = 2C \sin \frac{2\pi}{\lambda} x \cos \left(\frac{2\pi v}{\lambda} t + \gamma \right).$$

Se ora fissiamo un punto x della corda, si vede che esso si muove di moto armonico di periodo $\frac{\lambda}{v}$ e avente ampiezza

$$(21) \quad 2C \sin \frac{2\pi}{\lambda} x;$$

questa ampiezza varia da punto a punto e, in particolare, è nulla nei punti in cui x vale

$$0, \frac{\lambda}{2}, 2 \frac{\lambda}{2}, \dots, n \frac{\lambda}{2}, \dots$$

i quali perciò rimangono fermi. Questi punti si dicono *nodi*. La ampiezza invece è massima quando il seno vale uno e ciò accade nei punti di mezzo fra due nodi successivi. Tali punti sono detti *ventri*.

Se nella (20) fissiamo invece un istante t (e ciò equivale a fotografare la corda in quell'istante), si vede che la corda ha la forma di una sinusoide di ampiezza

$$(22) \quad 2C \cos \left(\frac{2\pi v}{\lambda} t + \gamma \right)$$

variabile col tempo e che passa dal valore massimo $2C$ (raggiunto nell'istante in cui il coseno vale uno) al valore assoluto minimo che è lo zero. La sovrapposizione di onde sinusoidali progressive e regressive dà quindi luogo a vibrazioni in cui la forma della corda è una sinusoide che non si sposta lungo la corda ma varia in ampiezza al variare del tempo (Fig. 3): le onde in esame si chiamano *onde stazionarie*.

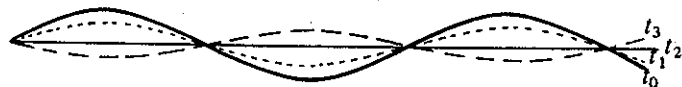


Fig. 3

5) Richiami sullo sviluppo in serie di Fourier.

Richiamiamo qualche nozione sullo sviluppo in serie di Fourier e anzitutto richiamiamo le seguenti formule:

$$\int_{-l}^l \cos \frac{m\pi}{l} \xi \sin \frac{n\pi}{l} \xi d\xi = 0 \quad \int_{-l}^l \left(\cos \frac{m\pi}{l} \xi \right) \left(\sin \frac{n\pi}{l} \xi \right) d\xi = 0$$

$$(23) \quad \text{per } m \neq n \quad m, n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\int_{-l}^l \cos^2 \frac{m\pi}{l} \xi d\xi = \int_{-l}^l \sin^2 \frac{m\pi}{l} \xi d\xi = l \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

Si può dimostrare che, definita una funzione $f(\xi)$ nell'intervallo $[-l, l]$, se l'intervallo stesso è divisibile in un numero finito di sottointervalli in cui la $f(\xi)$ è continua e monotona (sono quindi escluse le funzioni con infiniti punti di discontinuità o con infinite oscillazioni), la $f(\xi)$ può essere rappresentata nell'intervallo $[-l, l]$ dalla serie (integrabile termine a termine)

$$(24) \quad f(\xi) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi}{l} \xi + b_n \sin \frac{n\pi}{l} \xi \right).$$

Per calcolare i coefficienti a e b basta moltiplicare ambo i membri della serie per $\cos \frac{n\pi}{l} \xi$ o $\sin \frac{n\pi}{l} \xi$ e integrare fra $-l$ ed l ottenendo (ricordando le (23))

$$\int_{-l}^l f(\xi) d\xi = \int_{-l}^l a_0 d\xi, \text{ da cui } a_0 = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(\xi) d\xi,$$

$$\int_{-l}^l f(\xi) \sin \frac{n\pi}{l} \xi d\xi = \int_{-l}^l b_n \sin^2 \frac{n\pi}{l} \xi d\xi = l b_n, \text{ da cui}$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(\xi) \sin \frac{n\pi}{l} \xi d\xi,$$

$$\int_{-l}^l f(\xi) \cos \frac{n\pi}{l} \xi d\xi = \int_{-l}^l a_n \cos^2 \frac{n\pi}{l} \xi d\xi = l a_n, \text{ da cui}$$

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(\xi) \cos \frac{n\pi}{l} \xi d\xi.$$

Per valori esterni all'intervallo $[-l, l]$ la serie ripete periodicamente i valori di questo intervallo, per cui se la $f(\xi)$ è periodica di periodo $2l$, la serie rappresenta la $f(\xi)$ per ogni valore reale della variabile indipendente ξ .

6) Vibrazioni di una corda con due estremi fissi.

Supponiamo che la corda, di lunghezza l , abbia i due estremi fissi, uno coincidente col punto $x = 0$ e l'altro di ascissa $x = l$. Per il fatto che è fisso il punto di ascissa nulla sarà valida la (18). Imponendo anche la condizione $y(l, t) = 0, \forall t$, si ricava

$$F(l-vt) - F(-l-vt) = 0 \quad F(l-vt) = F(l-vt-2l) \quad \forall t,$$

ossia, scrivendo u per $l-vt$,

$$(25) \quad F(u) = F(u-2l) \quad \forall u.$$

Questa relazione, dovendo valere per ogni valore di u , esprime che F è una funzione periodica di periodo $2l$.

La soluzione più generale del problema della corda con due estremi fissi si scrive dunque nella forma

$$(26) \quad y(x, t) = F(x-vt) - F(-x-vt)$$

dove F è una funzione periodica di periodo $2l$, per il resto arbitraria.

Sviluppiamo la funzione $y(x, t)$ rappresentata dalla (26) in serie di Fourier; al primo addendo a secondo membro della (26)

applichiamo la (24) con ξ sostituito da $x-vt$, mentre al secondo addendo applichiamo la (24) con ξ sostituito da $-(x+vt)$. Si ha allora ¹

$$\begin{aligned} y(x, t) &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos \frac{n\pi}{l} (x-vt) + b_n \sin \frac{n\pi}{l} (x-vt)] - a_0 \\ &- \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos \frac{n\pi}{l} (x+vt) - b_n \sin \frac{n\pi}{l} (x+vt)] = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n [\cos \frac{n\pi}{l} (x-vt) - \cos \frac{n\pi}{l} (x+vt)] + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} b_n [\sin \frac{n\pi}{l} (x-vt) + \sin \frac{n\pi}{l} (x+vt)] = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} [2 a_n \sin \frac{n\pi}{l} x \sin \frac{n\pi v}{l} t + 2 b_n \sin \frac{n\pi}{l} x \cos \frac{n\pi v}{l} t] = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi}{l} x [2 a_n \sin \frac{n\pi v}{l} t + 2 b_n \cos \frac{n\pi v}{l} t]. \end{aligned}$$

Posto $2 a_n = -c_n \sin \gamma_n, 2 b_n = c_n \cos \gamma_n$

(si può infatti ricavare

$$c_n^2 = 4 a_n^2 + 4 b_n^2, \quad \text{tg } \gamma_n = -\frac{a_n}{b_n}, \quad \sin \gamma_n = -\frac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}},$$

si ha infine

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \frac{n\pi}{l} x \cos \left(\frac{n\pi v}{l} t + \gamma_n \right).$$

Si conclude che la più generale piccola vibrazione trasversale di una corda con due estremi fissi si può considerare come la sovrapposizione di vibrazioni (dette *semplici*) del tipo

(1) Si sono applicate le formule

$$\begin{aligned} \cos p - \cos q &= 2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{q-p}{2} \\ \sin p + \sin q &= 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}. \end{aligned}$$

$$y_n(x, t) = c_n \sin \frac{2n\pi}{2l} x \cos \left(\frac{2n\pi v}{2l} t + \gamma_n \right)$$

$$= c_n \sin \frac{2\pi}{\lambda_n} x \cos (\omega_n t + \gamma_n),$$

che, come si è visto al n. 4, rappresentano onde stazionarie di lunghezza d'onda $\lambda_n = \frac{2l}{n}$, di pulsazione $\omega_n = \frac{2\pi n v}{2l}$, di periodo $T_n = \frac{2\pi}{\omega_n} = \frac{2l}{n v}$ e di frequenza $\nu_n = \frac{1}{T_n} = \frac{n v}{2l}$.

La lunghezza l della corda è quindi legata alla λ_n dalla relazione $l = n \frac{\lambda_n}{2}$, cioè la corda contiene un numero intero di mezzelunghezze d'onda, il che diviene intuitivo se si osserva che gli estremi della corda, essendo fissi, devono coincidere con due nodi. Le frequenze delle vibrazioni sinusoidali sono multiple intere della frequenza, detta *fondamentale*

$$(27) \quad \nu_1 = \frac{v}{2l} = \frac{1}{2l} \sqrt{\frac{\pi}{\rho}},$$

la quale corrisponde al caso in cui la corda vibra senza nodi intermedi (Fig. 4)

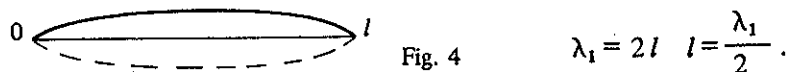


Fig. 4

$$\lambda_1 = 2l \quad l = \frac{\lambda_1}{2}.$$

In tale caso la corda produce una nota di frequenza ν_1 che si dice *nota fondamentale*.

Per $n = 2$ (Fig. 5) abbiamo la vibrazione semplice corrispon-

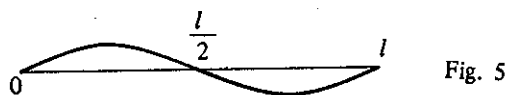


Fig. 5

dente alla frequenza $\nu_2 = 2\nu_1$, detta *primo armonico* o *ottava* e alla lunghezza d'onda $\lambda_2 = l$; essa presenta tre nodi nei punti $x =$

$= 0, \frac{l}{2}, l$ e due ventri.

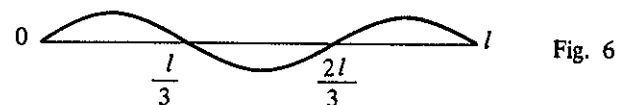


Fig. 6

Per $n = 3$ (Fig. 6) abbiamo la vibrazione corrispondente a $l = 3 \frac{\lambda_3}{2}$ e alla frequenza $\nu_3 = 3\nu_1$, detta *secondo armonico* e così via.

Ogni vibrazione semplice della corda, trasmessa all'aria, provoca entro l'orecchio (entro certi limiti di frequenza) una particolare sensazione sonora e l'impasto dei vari suoni determina quello che si dice il *timbro* del suono complessivo.

7) Integrazione dell'equazione di d'Alembert col metodo di separazione delle variabili.

Il metodo precedentemente seguito per risolvere l'equazione delle corde vibranti è un metodo particolare valido solo per quell'equazione. Possiamo però affrontare la detta equazione con un metodo meno particolare detto della *separazione delle variabili*, che può essere applicato con successo a svariati altri problemi dipendenti da equazioni lineari ed omogenee alle derivate parziali. Esso consiste nel limitarsi a vedere se è possibile trovare soluzioni della (11) che siano della forma particolare

$$(28) \quad y(x, t) = X(x) T(t).$$

All'equazione (11), valida per $t > 0$ e per $0 < x < l$, aggiungiamo le condizioni al contorno relative ad estremi fissi, che si concretano nell'imporre

$$(29) \quad X(0) = X(l) = 0$$

e le condizioni iniziali che sono

$$(30) \quad \begin{aligned} y(x, 0) &= y_0(x) \\ \frac{\partial y(x, 0)}{\partial t} &= v_0(x) \end{aligned} \quad \text{per } t=0 \text{ e per } 0 \leq x \leq l.$$

Per non essere in contrasto con le condizioni al contorno le funzioni y_0 e v_0 devono soddisfare alle condizioni

$$y_0(0) = y_0(l) = 0, \quad v_0(0) = v_0(l) = 0.$$

Sostituiamo l'espressione (28) nell'equazione (11): otteniamo

$$\ddot{T}X = v^2 TX''.$$

Essendo TX non identicamente nulla, possiamo dividere l'equazione per il detto prodotto ottenendo

$$(31) \quad \frac{\ddot{T}}{v^2 T} = \frac{X''}{X};$$

con ciò le variabili sono separate in quanto il primo membro è funzione della sola variabile t , mentre il secondo membro è funzione della sola variabile x ; se, per esempio, diamo alla x un valore fisso (mentre la t , che è indipendente dalla x , può variare in modo qualunque) il secondo membro diventa una costante. Si soddisferà allora alla (31) ponendo

$$(32) \quad \frac{\ddot{T}}{v^2 T} = -\omega^2, \quad \frac{X''}{X} = -\omega^2,$$

dove ω è una costante a priori arbitraria, reale o immaginaria. Siamo allora ricondotti a due equazioni differenziali ordinarie

$$(33) \quad \ddot{T} + \omega^2 v^2 T = 0, \quad X'' + \omega^2 X = 0,$$

i cui integrali generali sono

$$T = \alpha \cos \omega v t + \beta \sin \omega v t, \quad X = a \cos \omega x + b \sin \omega x$$

dove α, β, a e b sono costanti di integrazione.

Imponendo alla funzione $X(x)$ le condizioni al contorno (29)

si ricava

$$a = 0 \quad b \sin \omega l = 0.$$

Non potendo essere $b = 0$ in quanto ciò corrisponderebbe ad $y \equiv 0$ in contrasto con le (30), deve essere zero $\sin \omega l$ cioè deve essere

$$\omega l = n\pi \quad \text{ossia} \quad \omega_n = n \frac{\pi}{l} \quad (n \text{ intero}).$$

La costante ω deve essere quindi reale e assumere solo i valori suddetti: questi valori (infiniti ma discreti) si chiamano gli *autovalori del problema* (detto al *contorno*) espresso dall'equazione (33₂) e dalle condizioni al contorno (29). E' abbastanza frequente che un problema al contorno ammetta soluzione solo quando un parametro che compare nel problema assume i valori detti autovalori del problema, mentre in caso contrario la soluzione non esiste.

La soluzione che corrisponde a ciascun autovalore si chiama *autofunzione*.

Nel nostro caso in corrispondenza ad ogni intero n avremo una soluzione del problema che ha la forma seguente

$$y_n(x, t) = \sin \frac{n\pi}{l} x \left(A_n \cos \frac{n\pi v}{l} t + B_n \sin \frac{n\pi v}{l} t \right) \quad n = 1, 2, \dots$$

Data la linearità dell'equazione di d'Alembert e delle condizioni al contorno, se formiamo la serie delle autofunzioni

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi}{l} x \left(A_n \cos \frac{n\pi v}{l} t + B_n \sin \frac{n\pi v}{l} t \right)$$

essa sarà soluzione del problema, purchè le costanti A_n e B_n permettano di soddisfare note condizioni di convergenza. Se confrontiamo questa soluzione con quella ottenuta nel n. 6, vediamo che le due espressioni coincidono: possiamo allora concludere che il metodo di separazione delle variabili dà in questo caso la soluzione generale del problema attraverso la serie delle autofunzioni.

Restano ancora da specificare le costanti A_n e B_n servendosi delle condizioni iniziali (30). Si ha

$$y(x, 0) = y_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi}{l} x$$

$$\frac{\partial y(x, 0)}{\partial t} = v_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{n\pi v}{l} \sin \frac{n\pi}{l} x. \quad 0 \leq x \leq l;$$

se ne deduce che A_n e $B_n \frac{n\pi v}{l}$ sono i coefficienti degli sviluppi in serie di Fourier delle due funzioni $y_0(x)$ e $v_0(x)$. Basta infatti prolungare le due funzioni assegnate in $[0, l]$ nell'intervallo $[-l, 0]$ secondo lo schema

$$y_0(-x) = -y_0(x) \quad v_0(-x) = -v_0(x);$$

con ciò le due funzioni sono dispari e quindi è immediato vedere che i coefficienti della serie di Fourier relativi ai coseni

$$\int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi}{l} x dx$$

sono tutti nulli essendo la funzione integranda dispari.

In base alle formule viste nel n. 5 si ha

$$A_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l y_0(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx = \frac{2}{l} \int_0^l y_0(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx$$

$$B_n \frac{n\pi v}{l} = \frac{2}{l} \int_0^l v_0(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx.$$

Dato che le costanti A_n e B_n possono essere sostituite nel modo seguente

$$A_n = C_n \cos \gamma_n \quad B_n = -C_n \sin \gamma_n$$

se ne deduce che è

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi}{l} x \cos \left(\frac{n\pi v}{l} t + \gamma_n \right);$$

segue che le condizioni iniziali caratterizzano l'ampiezza C_n delle vibrazioni semplici che compongono il suono emesso dalla corda, nonché le fasi iniziali γ_n . Dipendono quindi dalle condizioni iniziali l'intensità complessiva e il suo timbro.

§ 2. II EQUAZIONE DI MAXWELL E ONDE ELETTROMAGNETICHE.

Ricordiamo che in elettricità dopo aver introdotto il campo elettrico $\vec{E}$, abbiamo, con un postulato dovuto a Maxwell, introdotto il vettore spostamento $\vec{D} = \vec{D}(\vec{E})$.

Per completare l'impostazione matematica del magnetismo postuliamo l'esistenza di un vettore $\vec{B}$, detto induzione magnetica, tale che sia $\vec{B} = \vec{B}(\vec{H})$ e che per ogni superficie chiusa σ sia

$$(1) \quad \oint_{\sigma} \vec{B} \cdot \vec{n} d\sigma = 0$$

ossia, se $\vec{B}$ è continuo con derivate prime continue, sia

$$(2) \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0$$

Come si vede fra elettricità e magnetismo c'è qualche analogia ($\vec{B}$ è analogo a $\vec{D}$), ma anche qualche differenza, dovuta al fatto che non esistono cariche magnetiche, o meglio, che, se si vuol parlare di cariche magnetiche, queste si presentano sempre come dipoli, cioè unione di due cariche magnetiche uguali e di segno opposto: si può pensare infatti che un ago magnetico abbia una carica magnetica Nord a un'estremità e una carica magnetica Sud all'altra (uguale in modulo alla prima).

In elettricità spesso cariche elettriche uguali e di segno opposto si presentano associate, ma è anche possibile separare le une dalle altre.

Invece del magnetismo non è possibile la separazione delle due cariche magnetiche di un magnete (es. della calamita spezzata).

Queste considerazioni giustificano le (1) e (2).

Quanto alla relazione $\vec{B} = \vec{B}(\vec{H})$ ci limiteremo a considerare mezzi isotropi e assenza di fenomeni di isteresi: escluderemo anche sostanze ferromagnetiche (ferro, nichel, cobalto e loro leghe); allora la relazione fra $\vec{B}$ e $\vec{H}$ è di proporzionalità

$$(3) \quad \vec{B} = \mu \vec{H}$$

dove μ dipende solo dal mezzo in questione ed è detta *permeabilità magnetica* del mezzo (ed è costante se il mezzo è omogeneo, mentre è funzione del posto per i mezzi eterogenei). Indicheremo con μ_0 la permeabilità magnetica del vuoto. In ogni caso è $\mu > 0$.

I mezzi per cui $\mu > \mu_0$ si dicono *paramagnetici*
 " " " " $\mu < \mu_0$ " " *diamagnetici*.

Nei corpi ferromagnetici invece si ha $\mu = \mu(\vec{H})$ e, in genere, occorre tener presenti anche i fenomeni di isteresi.

Resta ancora un'ultima grandezza da introdurre.

Consideriamo una curva semplice chiusa γ che chiameremo brevemente *circuito*.

Chiameremo *forza elettromotrice* in γ la circuitazione lungo la γ del campo elettrico $\vec{E}$

$$(4) \quad e_m = \oint_{\gamma} \vec{E} \cdot d\vec{P}$$

Consideriamo anche il flusso Φ del vettore $\vec{B}$ attraverso una qualunque superficie σ che abbia come orlo la γ (dato che $\vec{B}$ è solenoidale, tale flusso sarà sempre lo stesso qualunque sia la σ scelta); introduciamo un ultimo postulato che coincide con quella che in fisica si chiama *legge di Felici - Neumann*: questa legge afferma che se Φ è variabile col tempo, nel circuito γ si produce una forza elettromotrice e_m , detta *forza elettromotrice indotta* (che si aggiunge alle altre eventualmente presenti nel circuito γ) e il valore di e_m è uguale alla derivata di Φ rispetto al tempo col segno cambiato. In formule quindi il postulato si esprime

(5)

$$e_m = - \frac{d\Phi}{dt}$$

Il segno meno rispetta quella che in Fisica si chiama *legge di Lenz*, la quale afferma in generale che qualunque fenomeno indotto si oppone alla causa che lo genera. Esplicitando la (5) si ha

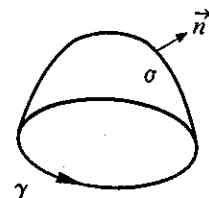


Fig. 7

$$\oint_{\gamma} \vec{E} \cdot d\vec{P} = - \frac{d}{dt} \int_{\sigma} \vec{B} \cdot \vec{n} d\sigma \quad (6)$$

dove $\vec{n}$ è la normale alla σ con verso tale da vedere l'orientamento assunto su γ come antiorario (Fig. 7).

La (6), valida per ogni linea chiusa γ e per ogni superficie σ con orlo γ (con il detto orientamento per la normale $\vec{n}$), si chiama *II equazione di Maxwell sotto forma integrale*.

Supporremo fermo il mezzo in cui si considerano i fenomeni: γ e σ saranno allora fisse (in un mezzo in moto γ e σ , considerate come insiemi di punti materiali sono variabili col tempo); supporremo anche di poter scambiare a secondo membro di (6) la derivata con l'integrale e di poter applicare a primo membro il teorema di Stokes ($\vec{E}$ continuo con derivate parziali prime continue). Avremo allora

$$\int_{\sigma} \text{rot } \vec{E} \cdot \vec{n} d\sigma = - \int_{\sigma} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{n} d\sigma$$

(si è usato il simbolo di derivata parziale in quanto $\vec{B}$ può essere funzione anche del posto). Riconducendosi ad un unico integrale, si ha che per ogni superficie σ il vettore

$$\text{rot } \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

ha flusso nullo, ossia è

$$\int_{\sigma} (\text{rot } \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}) \cdot \vec{n} d\sigma = 0 \quad \forall \sigma;$$

ciò implica che il vettore deve essere nullo. Se ne deduce la II equazione di Maxwell sotto forma differenziale per i mezzi in quiete

$$(7) \quad \text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

Al solito la (6) è più generale ed ha carattere globale mentre la (7) vale solo sotto le ipotesi che abbiamo elencato ed ha carattere locale.

Possiamo allora fare un quadro completo delle equazioni dell'elettromagnetismo. Anzitutto riscriviamo le equazioni di Maxwell

$$(8) \quad \begin{cases} \text{rot } \vec{H} = \vec{u} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{cases}$$

che si presentano come due equazioni vettoriali alle derivate parziali del I° ordine, lineari, nelle cinque funzioni incognite $\vec{H}$, $\vec{E}$, $\vec{u}$, $\vec{D}$, $\vec{B}$.

Alle equazioni di Maxwell per mezzi omogenei, isotropi e privi di isteresi possiamo affiancare le cosiddette equazioni materiali, in quanto in esse compaiono le grandezze γ , ϵ e μ che dipendono dal mezzo e che sono costanti per un mezzo omogeneo

$$(9) \quad \vec{u} = \gamma \vec{E}, \quad \vec{D} = \epsilon \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu \vec{H},$$

le quali permettono di ridurre le incognite ai soli campo elettrico $\vec{E}$ e campo magnetico $\vec{H}$.

Ricordiamo anche che è

$$(10) \quad \text{div } \vec{D} = \rho$$

questa nuova equazione scalare serve a introdurre la grandezza ρ , densità spaziale di carica elettrica.

Se si fa la divergenza della prima equazione di Maxwell, si ricorda che la divergenza di un rotazionale è uguale a zero e si tiene presente la (10), si ricava

$$0 = \text{div} \left(\vec{u} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) = \text{div } \vec{u} + \frac{\partial \rho}{\partial t};$$

si conclude che l'equazione di continuità della corrente è diretta conseguenza della prima equazione di Maxwell e quindi non va calcolata nel bilancio fra equazioni e incognite.

Se infine si fa la divergenza della II equazione di Maxwell si ricava

$$0 = - \text{div } \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{ossia} \quad \frac{\partial}{\partial t} \text{div } \vec{B} = 0;$$

ciò significa che se la $\text{div } \vec{B} = 0$ per un dato istante iniziale, essa si mantiene tale anche in seguito, quindi, dal punto di vista del bilancio fra incognite ed equazioni, la $\text{div } \vec{B} = 0$ esprime una condizione iniziale.

Con queste considerazioni ci siamo ricondotti quindi a due sole equazioni vettoriali in due incognite

$$\begin{cases} \text{rot } \vec{H} = \gamma \vec{E} + \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ \text{rot } \vec{E} = - \mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \end{cases} \quad (\text{div } \vec{H} = 0).$$

Di queste equazioni cercheremo una soluzione che riguardi un mezzo isolante ($\gamma = 0$) e privo di cariche elettriche spaziali per cui è

$$\text{div } \vec{D} = 0 \quad \text{ossia} \quad \text{div } \vec{E} = 0.$$

Ci limiteremo inoltre a considerare una particolare soluzione che dipenda solo dal tempo e dalla sola coordinata cartesiana z .

Ci ricaviamo anzitutto l'espressione cartesiana del rot $\vec{H}$:

$$\text{rot } \vec{H} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} = -\frac{\partial H_y}{\partial z} \vec{i} + \frac{\partial H_x}{\partial z} \vec{j}.$$

Proiettiamo allora le equazioni di Maxwell sugli assi x e y ; precisamente otteniamo ($\gamma = 0$)

$$\begin{aligned} I_x & \begin{cases} -\frac{\partial H_y}{\partial z} = \epsilon \frac{\partial E_x}{\partial t} \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} = -\mu \frac{\partial H_y}{\partial t} \end{cases} & I_y & \begin{cases} \frac{\partial H_x}{\partial z} = \epsilon \frac{\partial E_y}{\partial t} \\ -\frac{\partial E_y}{\partial z} = -\mu \frac{\partial H_x}{\partial t} \end{cases} \\ II_y & & II_x & \end{aligned}$$

otteniamo così due sistemi indipendenti, il primo nelle sole incognite H_y ed E_x , il secondo nelle sole incognite H_x ed E_y .

La $\text{div } \vec{E} = 0$ diventa in questo caso

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial E_z}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial E_z}{\partial t} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ mentre la } I_z, \text{ essendo } (\text{rot } \vec{H})_z = 0 \text{ e } \gamma = 0, \text{ dà}$$

ne segue che $E_z = \text{cost.}$

Analogamente la $\text{div } \vec{H} = 0$ ci dà $\frac{\partial H_z}{\partial z} = 0$ mentre la II_z

ci dà $0 = \frac{\partial H_z}{\partial t}$ e quindi anche $H_z = \text{cost.}$

Per risolvere il primo sistema I_x e II_y possiamo ridurci a una sola equazione in una sola incognita; basta derivare la I_x rispetto al tempo e moltiplicarla per μ otterremo

$$-\mu \frac{\partial^2 H_y}{\partial t \partial z} = \mu \epsilon \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2};$$

deriviamo poi la II_y rispetto a z e scambiamo fra loro i due membri; si ottiene

$$-\mu \frac{\partial^2 H_y}{\partial z \partial t} = \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2}.$$

Confrontando queste due equazioni si ricava che esse hanno uguali i primi membri e quindi uguagliamo fra loro i secondi membri ponendo

$$\frac{1}{\mu \epsilon} = c^2$$

si ha

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2},$$

quindi la componente E_x soddisfa all'equazione di d'Alembert e l'incognita E_x può essere espressa nella forma

$$E_x = F(z-ct) + G(z+ct),$$

dando così luogo a una propagazione ondosa nella direzione dell'asse z , di tipo trasversale in quanto E_x è normale alla direzione di propagazione.

Supponiamo $G = 0$: si può facilmente ricavare H_y . Si ha infatti

$$dH_y = \frac{\partial H_y}{\partial z} dz + \frac{\partial H_y}{\partial t} dt,$$

ossia, ricavando $\frac{\partial H_y}{\partial z}$ e $\frac{\partial H_y}{\partial t}$ dalle I_x e II_y ,

$$dH_y = -\epsilon \frac{\partial E_x}{\partial t} dz - \frac{1}{\mu} \frac{\partial E_x}{\partial z} dt$$

$$dH_y = -\epsilon(-c) F'(z-ct) dz - \frac{1}{\mu} F'(z-ct) dt \left(c = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \right)$$

dove l'apice sta ad indicare la derivazione della F rispetto all'argomento.

Dato che è $\epsilon c = \frac{\epsilon}{\sqrt{\mu\epsilon}} = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}$, si ha

$$\begin{aligned} dH_y &= \left(\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} dz - \frac{1}{\mu} dt \right) F'(z-ct) = \\ &= \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \left(dz - \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{1}{\mu} dt \right) F'(z-ct), \quad \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{1}{\mu} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} = c \\ &= \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} (dz - c dt) F'(z-ct) \\ &= \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} F'(z-ct) d(z-ct) = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} dF(z-ct), \end{aligned}$$

perciò, a meno di un campo costante che non ha importanza fisica, si ricava

$$H_y = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} F(z-ct),$$

quindi anche H_y dà luogo ad un'onda trasversale che si propaga nella direzione dell'asse z .

Allo stesso modo si può risolvere il sistema costituito dalle I_y e II_x , che si può ricavare dal sistema I_x e II_y con le seguenti modifiche

$$\begin{aligned} -H_y &\rightarrow H_x \\ -E_x &\rightarrow E_y, \end{aligned}$$

perciò se si considera la soluzione $E_y = \Phi(z-ct)$, si ha

$$H_x = -\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \Phi(z-ct),$$

sempre a meno di campi costanti.

Se si calcola $\vec{E} \cdot \vec{H} = E_x H_x + E_y H_y$, si ottiene

$$\vec{E} \cdot \vec{H} = F(z-ct) \left(-\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \right) \Phi(z-ct) + \Phi(z-ct) \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} F(z-ct) = 0$$

ossia $\vec{E}$ ed $\vec{H}$ sono fra loro perpendicolari.

§ 3. CENNI DI CALCOLO TENSORIALE.

1) Richiami sui vettori.

In meccanica razionale, nell'inizio del corso, è stato introdotto il concetto di vettore, necessario per rappresentare numerose grandezze fisiche caratterizzate da un numero positivo, da una direzione e da un verso. Tale vettore è un ente intrinseco, ma spesso, specialmente nei problemi concreti, viene individuato dalle sue tre componenti secondo un sistema di assi cartesiani ortogonali. Queste componenti (elementi non intrinseci) variano evidentemente al variare del sistema scelto. Per ricavare la legge secondo cui avviene tale variazione, consideriamo due sistemi cartesiani ortogonali $Oxyz$ e $O'x'y'z'$ (Fig. 8) e riportiamo nella seguente tabella i coseni degli angoli fra tali assi:

	$\vec{i}'$	$\vec{j}'$	$\vec{k}'$
(1) $\vec{i}$	α_{11}	α_{12}	α_{13}
$\vec{j}$	α_{21}	α_{22}	α_{23}
$\vec{k}$	α_{31}	α_{32}	α_{33}

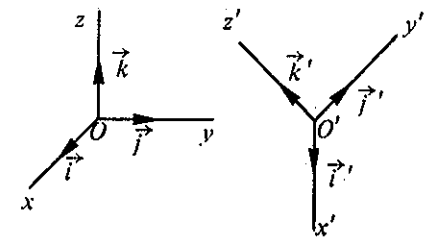


Fig. 8

Un vettore $\vec{u}$ può essere rappresentato cartesianamente secondo le due distinte formule

$$(2) \quad \vec{u} = u_1 \vec{i} + u_2 \vec{j} + u_3 \vec{k}$$

$$(3) \quad \vec{u} = u'_1 \vec{i}' + u'_2 \vec{j}' + u'_3 \vec{k}'.$$

Da qui si ricava (sviluppando i prodotti scalari in forma cartesiana)

$$(4) \quad \begin{cases} u_1 = \vec{u} \cdot \vec{i} = \alpha_{11} u'_1 + \alpha_{12} u'_2 + \alpha_{13} u'_3 \\ u_2 = \vec{u} \cdot \vec{j} = \alpha_{21} u'_1 + \alpha_{22} u'_2 + \alpha_{23} u'_3 \\ u_3 = \vec{u} \cdot \vec{k} = \alpha_{31} u'_1 + \alpha_{32} u'_2 + \alpha_{33} u'_3. \end{cases}$$

Sinteticamente, intendendo che gli indici assumano i valori 1, 2, 3, si ha

$$(5) \quad u_k = \sum_l \alpha_{kl} u'_l.$$

Analogamente si ottiene

$$(6) \quad \begin{cases} u'_1 = \vec{u} \cdot \vec{i}' = \alpha_{11} u_1 + \alpha_{21} u_2 + \alpha_{31} u_3 \\ u'_2 = \vec{u} \cdot \vec{j}' = \alpha_{12} u_1 + \alpha_{22} u_2 + \alpha_{32} u_3 \\ u'_3 = \vec{u} \cdot \vec{k}' = \alpha_{13} u_1 + \alpha_{23} u_2 + \alpha_{33} u_3 \end{cases}$$

ossia

$$(7) \quad u'_j = \sum_i \alpha_{ij} u_i.$$

Ricavate tali formule, possiamo dire che il vettore è un ente intrinseco che può essere individuato (oltrechè mediante direzione, verso e modulo) dalle sue tre componenti u_1, u_2, u_3 rispetto ad un certo sistema cartesiano ortogonale, associate alla legge (7) che precisa in che modo variano tali componenti quando si passa ad un altro sistema cartesiano ortogonale, il cui orientamento rispetto al sistema precedente è individuato dai coseni α_{ij} .

In altre parole i tre numeri u_1, u_2, u_3 , variabili col sistema di riferimento secondo il comportamento fissato dalle (7), individuano un ente intrinseco che è il vettore $\vec{u}$.

2) Tensori del secondo ordine.

Giungeremo al concetto di tensore estendendo in modo spontaneo la precedente maniera di introdurre il concetto di vettore.

Consideriamo a tale scopo una particolare relazione fra due vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$, consistente nel fatto che le componenti cartesiane v_1, v_2, v_3 di $\vec{v}$ sono funzioni lineari omogenee delle componenti di $\vec{u}$ attraverso nove coefficienti p_{ik} in base alle formule

$$(8) \quad v_i = \sum_k p_{ik} u_k.$$

L'operazione che fa passare dal vettore $\vec{u}$ al vettore $\vec{v}$ si chiama *omografia vettoriale* ed è una trasformazione (lineare) T (o operatore lineare) che applicata al vettore $\vec{u}$ fornisce il vettore $\vec{v}$, ossia

$$(9) \quad \vec{v} = T \vec{u}.$$

Detta trasformazione, poichè, applicata ad un ente intrinseco, fornisce un ente intrinseco, deve avere carattere intrinseco; essa però è individuata dai nove numeri p_{ik} che compaiono nelle (8) e che operano sulle componenti cartesiane. Vediamo come essi variano nel passaggio dal riferimento (0) al riferimento (0'): in base alle (7) si ha, introducendo successivamente le (8) e le (5),

$$(10) \quad \begin{aligned} v'_j &= \sum_i \alpha_{ij} v_i = \sum_{ik} \alpha_{ij} p_{ik} u_k = \sum_{ikl} \alpha_{ij} \alpha_{kl} p_{ik} u'_l \\ &= \sum_l (\sum_{ik} \alpha_{ij} \alpha_{kl} p_{ik}) u'_l; \end{aligned}$$

ponendo

$$(11) \quad p'_{jl} = \sum_{ik} \alpha_{ij} \alpha_{kl} p_{ik}$$

si ottengono infine le formule

$$(12) \quad v'_j = \sum_l p'_{jl} u'_l$$

che rappresentano l'operazione (9) mediante le componenti dei vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$ rispetto al riferimento (0'); corrispondentemente l'omografia è individuata dai nove numeri p'_{jl} , che sono legati ai p_{ik} attraverso le (11). Si noti che le (11) rappresentano una generalizzazione delle (7).

Rifacendosi a quanto si è detto alla fine del n. 1, possiamo allora dire che l'operazione intrinseca (9) può essere rappresentata dai nove p_{ik} (che la individuano rispetto al riferimento (0)) associati alla legge (11), che precisa in che modo essi variano al cambiare della terna di riferimento.

L'ente intrinseco completamente definito assegnando, rispetto ad una terna prefissata, i nove scalari p_{ik} e la legge (11) si dice *tensore del 2° ordine* (o *doppio*).

Un vettore può essere chiamato *tensore del 1° ordine* (tre sole componenti cartesiane, un solo indice, un solo fattore α negli addendi delle formule di trasformazione).

Le componenti p_{ik} di un tensore si rappresentano comunemente mediante la matrice

$$(13) \quad \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{vmatrix}.$$

Si può dimostrare che la somma dei termini della diagonale principale è invariante rispetto a un cambiamento di assi; si ha infatti dalle (11)

$$(14) \quad \sum_j p'_{jj} = \sum_{jik} \alpha_{ij} \alpha_{kj} p_{ik} = \sum_{ik} (\sum_j \alpha_{ij} \alpha_{kj}) p_{ik};$$

ma, in base a note proprietà dei coseni α_{ij} è

$$(15) \quad \sum_j \alpha_{ij} \alpha_{kj} \begin{cases} = 0 & \text{per } i \neq k \\ = 1 & \text{per } i = k \end{cases}$$

e quindi

$$(16) \quad \sum_j p'_{jj} = \sum_i p_{ii} = p;$$

p si chiama *l'invariante lineare* del tensore considerato.

3) Tensori simmetrici.

Dimostriamo ora che se in un particolare sistema di riferimento è

$$(17) \quad p_{ik} = p_{ki} \quad (i \neq k),$$

tale proprietà vale in qualunque altro sistema, cosicchè essa è una proprietà intrinseca del tensore, che in tale caso si dice *simmetrico*.

Dalle (11) infatti, scambiando l'indice j con l'indice l e, successivamente i con k si ricava, tenendo conto delle (17),

$$p'_{lj} = \sum_{ik} \alpha_{il} \alpha_{kj} p_{ik} = \sum_{ki} \alpha_{kl} \alpha_{ij} p_{ik} = p'_{jl}.$$

Un tensore simmetrico è caratterizzato evidentemente da sei componenti (e non da nove).

A ogni tensore simmetrico si può associare una quadrica detta *quadrica caratteristica* del tensore; basta considerare il vettore $(P-0)$ di componenti cartesiane $u_i = x_i$ e il suo trasformato $\vec{v}$ attraverso il tensore di componenti p_{ik} espresso dalle (8) nella forma

$$(18) \quad v_i = \sum_k p_{ik} x_k \quad (\vec{v} = T\vec{u}).$$

Consideriamo ora il luogo dei punti P per i quali è $\vec{v} \cdot (P-0) = 1$, ossia, in forma cartesiana, $\sum_i v_i x_i = 1$, cioè per le (18)

$$(19) \quad \sum_{ik} p_{ik} x_i x_k = 1;$$

se scriviamo la (19) in forma esplicita, si ha, ricordando le (17),

$$(20) \quad p_{11} x_1^2 + p_{22} x_2^2 + p_{33} x_3^2 + 2p_{12} x_1 x_2 + 2p_{13} x_1 x_3 + 2p_{23} x_2 x_3 = 1$$

e si conclude che detto luogo è una quadrica di centro l'origine 0. Tale quadrica è un ente intrinseco (come lo è il prodotto scalare fra due vettori) e, se cambiamo riferimento, i suoi coefficienti, che sono le componenti del tensore p_{ik} , cambiano in ba-

se alle (11). Essa dicesi la *quadrica caratteristica del tensore*.

E' noto dalla geometria analitica che, se si assumono come assi cartesiani gli assi della quadrica, l'equazione della quadrica assume la forma canonica; detti ξ_1, ξ_2, ξ_3 gli assi della quadrica e indicati con l'indice zero in alto i coefficienti dell'equazione relativi a tali assi, la quadrica (20) è rappresentata dall'equazione

$$(21) \quad p_{11}^0 \xi_1^2 + p_{22}^0 \xi_2^2 + p_{33}^0 \xi_3^2 = 1;$$

se ne deduce che rispetto ai detti assi il tensore p_{ik} è rappresentato dalle sole tre componenti p_{ii}^0 della diagonale principale della matrice corrispondente al tensore, mentre è $p_{12}^0 = p_{13}^0 = p_{23}^0 = 0$.

Gli assi della quadrica caratteristica di un tensore simmetrico si chiamano anche *assi principali del tensore*. Se la quadrica è rotonda, essa, e per conseguenza il tensore, ammette infinite terne di assi principali.

Il tensore è completamente individuato quando sono noti una terna (o la terna) di assi principali e le tre componenti ad essa relative: le componenti del tensore relative ad un'altra terna si ottengono dalle (11) che qui diventano (sostituendo le p con le p^0)

$$(22) \quad p'_{jl} = \sum_i \alpha_{ij} \alpha_{il} p_{ii}^0.$$

Si è visto che se, in un certo dominio, un vettore è funzione del posto, in quel dominio è definito un campo vettoriale; analogamente un tensore può, in un certo dominio, essere funzione del posto, nel senso che lo sono le sue componenti: si dirà allora che in quel dominio è definito un *campo tensoriale*.

In particolare se un tensore simmetrico è funzione del posto, esso sarà caratterizzato in ogni punto da una diversa quadrica.

§ 4. CINEMATICA DEI MEZZI CONTINUI.

1) Introduzione.

Nel corso di Meccanica Razionale si è parlato prevalentemente di *corpi rigidi* e si è detto che lo schema ideale di corpo rigido si adatta con ottima approssimazione allo studio di quei problemi riguardanti i corpi solidi per i quali le variazioni di distanza fra una generica coppia di punti del corpo o non sussistono oppure non hanno effetti sensibili nel fenomeno considerato.

In molti problemi però tali variazioni, che danno luogo alle cosiddette *deformazioni*, appaiono come elemento determinante dei fenomeni stessi e, oltrechè i solidi, possono ovviamente riguardare anche i fluidi; parleremo perciò in generale di *deformazioni di un mezzo continuo*.

Lo studio di tali deformazioni, anche in relazione alle forze che le producono, se affrontato con metodo matematico, dà luogo alla *Teoria matematica dei mezzi continui*.

Qui ci limiteremo a una trattazione molto ridotta: anzitutto considereremo deformazioni *elastiche* (tali cioè da scomparire al cessare delle forze che le producono) e *assai piccole*, nel senso che sarà precisato più avanti.

2) Cinematica delle piccole deformazioni.

Cominciamo col considerare le deformazioni di un mezzo continuo indipendentemente dalle forze che le producono.

A tale scopo ci riferiamo a un sistema cartesiano $O x_1 x_2 x_3$ e sia $P(x_1 x_2 x_3)$ un punto generico del mezzo, considerato in una configurazione di riferimento che generalmente coinciderà col cosiddetto *stato naturale* (ossia generalmente in assenza di deformazioni); sia P^* la posizione di P in una configurazione generica (ossia generalmente dopo la deformazione); lo *spostamento* del punto P sarà il vettore (funzione del punto P , ossia delle sue coordinate x_1, x_2, x_3)

$$(1) \quad P^* - P = \vec{s}(P)$$

ed s_1, s_2, s_3 saranno le sue componenti cartesiane. Supporremo che gli spostamenti e le loro derivate parziali prime siano abbastanza piccoli da poter trascurare i quadrati degli spostamenti rispetto alle dimensioni del corpo e i quadrati delle derivate rispetto ad 1.

Per studiare la distribuzione degli spostamenti in un intorno del primo ordine di P , introduciamo un sistema di assi cartesiani $\xi_1 \xi_2 \xi_3$ aventi origine in P e paralleli rispettivamente agli assi $x_1 x_2 x_3$ (Fig. 9). Sia Q un punto del detto intorno e siano $\xi_1 \xi_2 \xi_3$ le sue coordinate rispetto al sistema (P) .

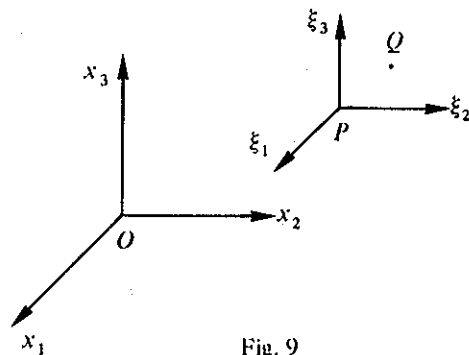


Fig. 9

Sia $\vec{s}(Q)$ lo spostamento di Q : esso sarà funzione delle coordinate di Q rispetto al sistema (0) e cioè delle $x_i + \xi_i$. Se $s_i(Q)$ sono le componenti cartesiane di $\vec{s}(Q)$, potremo svilupparle con la formula di Taylor, arrestata ai termini di primo grado nelle ξ_i .

Si avrà così

$$(2) \quad s_i(Q) = s_i(x_i + \xi_i) = s_i(P) + \left(\frac{\partial s_i}{\partial x_1}\right)_P \xi_1 + \left(\frac{\partial s_i}{\partial x_2}\right)_P \xi_2 + \left(\frac{\partial s_i}{\partial x_3}\right)_P \xi_3 \quad (i = 1, 2, 3),$$

dove le derivate parziali si intendono calcolate nel punto P . Per ottenere una notevole interpretazione fisica di tali formule poniamo

$$(3) \quad \left(\frac{\partial s_i}{\partial x_k}\right)_P = a_{ik} = \frac{a_{ik} + a_{ki}}{2} + \frac{a_{ik} - a_{ki}}{2};$$

Con facili passaggi si può ottenere

$$(4) \quad \begin{cases} s_1(Q) = s_1(P) + a_{11} \xi_1 + \frac{a_{12} + a_{21}}{2} \xi_2 + \frac{a_{13} + a_{31}}{2} \xi_3 + \\ \quad + 0 \cdot \xi_1 + \frac{a_{12} - a_{21}}{2} \xi_2 + \frac{a_{13} - a_{31}}{2} \xi_3 \\ s_2(Q) = s_2(P) + \frac{a_{12} + a_{21}}{2} \xi_1 + a_{22} \xi_2 + \frac{a_{23} + a_{32}}{2} \xi_3 + \\ \quad + \frac{a_{21} - a_{12}}{2} \xi_1 + 0 \cdot \xi_2 + \frac{a_{23} - a_{32}}{2} \xi_3 \\ s_3(Q) = s_3(P) + \frac{a_{31} + a_{13}}{2} \xi_1 + \frac{a_{23} + a_{32}}{2} \xi_2 + a_{33} \xi_3 + \\ \quad + \frac{a_{31} - a_{13}}{2} \xi_1 + \frac{a_{32} - a_{23}}{2} \xi_2 + 0 \cdot \xi_3. \end{cases}$$

Sinteticamente le (4) possono essere scritte

$$(5) \quad \vec{s}(Q) = \vec{s}(P) + \vec{d} + \vec{r},$$

dove $\vec{s}(P)$ è lo spostamento definito dalla (1), mentre le componenti di $\vec{d}$ sono espresse da

$$(6) \quad d_i = \sum_k \gamma_{ik} \xi_k \quad \text{con} \quad \gamma_{ik} = \frac{a_{ik} + a_{ki}}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial s_i}{\partial x_k} + \frac{\partial s_k}{\partial x_i} \right)$$

e, infine, il vettore $\vec{r}$ può essere scritto sotto la forma

$$(7) \quad \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \end{vmatrix} = \vec{\omega} \times (Q - P)$$

essendo $\vec{\omega}$ il vettore di componenti cartesiane

$$(8) \quad \omega_1 = \frac{a_{32} - a_{23}}{2}, \quad \omega_2 = \frac{a_{13} - a_{31}}{2}, \quad \omega_3 = \frac{a_{21} - a_{12}}{2}.$$

Osserviamo ora che dei tre addendi in cui, in base alla (5), è stato scomposto $\vec{s}(Q)$, il primo, $\vec{s}(P)$, rappresenta una traslazione infinitesima (essendo comune a tutti i punti Q dell'intorno considerato), il terzo, $\vec{r}$, in base alla (7), rappresenta una rotazione infinitesima individuata dal vettore applicato infinitesimo ($\vec{\omega}$, P); perciò $\vec{s} + \vec{r}$ individua uno spostamento rigido di tutto l'intorno. La (5) mostra che lo spostamento complessivo del punto Q è composto di uno spostamento rigido e di uno spostamento $\vec{d}$, nel quale soltanto interviene la deformazione. Dalla (6) appare che $\vec{d}$ si ottiene mediante un'omografia applicata al vettore $(Q - P)$ è quindi $\vec{d}$ è caratterizzato da un tensore doppio simmetrico, funzione in genere del punto P , di componenti $\gamma_{ik} = \gamma_{ki}$; tale tensore è detto *tensore delle deformazioni* o *strain*.

3) Tensore delle deformazioni.

Le singole γ_{ik} hanno un notevole significato fisico. Per vederlo supponiamo nullo lo spostamento rigido dell'intorno di P :

per lo spostamento di un punto generico Q del detto intorno si avrà allora, scrivendo per esteso,

$$(9) \quad \begin{cases} s_1(Q) = \gamma_{11} \xi_1 + \gamma_{12} \xi_2 + \gamma_{13} \xi_3 \\ s_2(Q) = \gamma_{21} \xi_1 + \gamma_{22} \xi_2 + \gamma_{23} \xi_3 \\ s_3(Q) = \gamma_{31} \xi_1 + \gamma_{32} \xi_2 + \gamma_{33} \xi_3 \end{cases}$$

Consideriamo ora qualche deformazione particolare e, anzitutto, la deformazione caratterizzata da tutte le γ_{ik} nulle, eccetto γ_{11} . Il corrispondente spostamento di Q avrà le seguenti componenti

$$(10) \quad s_1(Q) = \gamma_{11} \xi_1, \quad s_2(Q) = s_3(Q) = 0$$

e perciò il punto Q , che prima dello spostamento aveva coordinate ξ_1, ξ_2, ξ_3 si sposterà nel punto Q^* di coordinate

$$(11) \quad \xi_1^* = \xi_1 (1 + \gamma_{11}), \quad \xi_2^* = \xi_2, \quad \xi_3^* = \xi_3,$$

ossia si sposterà parallelamente all'asse ξ_1 (e quindi all'asse x_1) della quantità $\gamma_{11} \xi_1$. Ciò significa che tutti i segmenti paralleli all'asse x_1 si alterano nel rapporto $1 : (1 + \gamma_{11})$, mentre quelli ad esso ortogonali rimangono invariati. La corrispondente deformazione è allora una *pura dilatazione* parallela all'asse x_1 e γ_{11} ne è il *coefficiente di dilatazione (lineare)* nel punto P . Analogamente si può vedere che γ_{22} e γ_{33} rappresentano i coefficienti di dilatazione nelle direzioni degli assi x_2 e x_3 nel punto P .

Consideriamo ora, invece, una deformazione caratterizzata da tutte le γ_{ik} nulle eccetto γ_{23} . Gli spostamenti corrispondenti saranno per le (9),

$$(12) \quad s_1(Q) = 0, \quad s_2(Q) = \gamma_{23} \xi_3, \quad s_3(Q) = \gamma_{23} \xi_2.$$

Da qui si vede che Q si sposta in un piano perpendicolare all'asse ξ_1 (o x_1) e che il suo spostamento non dipende da ξ_1 : potremo quindi limitarci a studiare il fenomeno nel piano (ξ_2, ξ_3) . In questo piano i punti Q dell'asse ξ_2 ($\xi_3 = 0$) appartenenti all'in-

torno di P si portano sulla retta PQ^* (Fig. 10), di equazione $\xi_3^* = \gamma_{23} \xi_2$, quindi inclinata sull'asse ξ_2 di un angolo

$$(13) \quad \delta\varphi = \arctg \gamma_{23} \approx \gamma_{23}$$

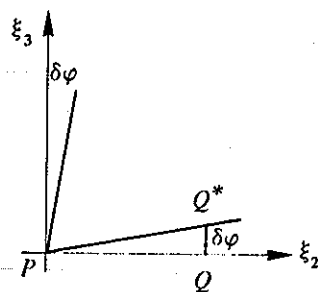


Fig. 10

e similmente i punti dell'asse ξ_3 si portano su una retta inclinata nel verso opposto sull'asse ξ_3 di un angolo eguale. Si può allora dire che $2\gamma_{23}$ rappresenta la variazione che subisce, per effetto della deformazione, l'angolo degli assi $\xi_2 \xi_3$ uscente da P . Una deformazione di questo tipo si chiama *scorrimento parallelo al piano $\xi_2 \xi_3$* . Le componenti γ_{12} e γ_{13} rappresentano analogamente scorrimenti paralleli ai piani $\xi_1 \xi_2$ e $\xi_1 \xi_3$: perciò le γ_{ik} con indici disuguali si chiamano *coefficienti di scorrimento*.

Data la linearità delle relazioni (9), la deformazione più generale espressa da esse si può considerare ottenuta sovrapponendo le sei deformazioni particolari corrispondenti alle singole γ_{ik} e determinata quindi dalla sovrapposizione di tre dilatazioni parallele agli assi coordinati e da tre scorrimenti paralleli ai piani coordinati.

4) Teorema di Helmholtz.

Dato che il tensore delle deformazioni è simmetrico, esiste sempre in ogni punto P una terna di assi principali $\xi_1^0 \xi_2^0 \xi_3^0$ (variabili in generale al variare di P) rispetto ai quali sono nulle le γ con indici disuguali: la deformazione più generale è quindi determinata dalle sole dilatazioni parallele agli assi principali del tensore. Ricordando anche i risultati precedenti si conclude quin-

di con il seguente teorema di Helmholtz:

La più generale variazione di configurazione di un mezzo continuo per una porzione sufficientemente piccola di esso si può rappresentare come sovrapposizione di uno spostamento rigido e di una dilatazione (o compressione) secondo tre direzioni triretangolo.

5) Esempio di passaggio da assi qualunque ad assi principali.

Mostriamo come la particolare deformazione corrispondente a $\gamma_{23} \neq 0$ e, più precisamente $\gamma_{23} > 0$, mentre le rimanenti γ sono tutte nulle, ammette come assi principali ξ_2^0 e ξ_3^0 le bisettrici dell'angolo $\xi_2 \xi_3$. Tale deformazione, che rispetto agli assi $\xi_1 \xi_2 \xi_3$ appare come uno scorrimento puro, si può considerare come la sovrapposizione di due dilatazioni, di segno opposto, parallele agli assi ξ_2^0 e ξ_3^0 .

Il risultato appare intuitivo dalla Fig. 11 la quale mostra come si deforma una lamina quadrata coi lati paralleli agli assi ξ_2 e ξ_3 , che, rispetto agli assi ξ_2^0 e ξ_3^0 , appare dilatata nel rapporto $1:(1+\gamma_{23})$ parallelamente all'asse ξ_2^0 e contratta nel rapporto $1:(1-\gamma_{23})$ parallelamente all'asse ξ_3^0 .

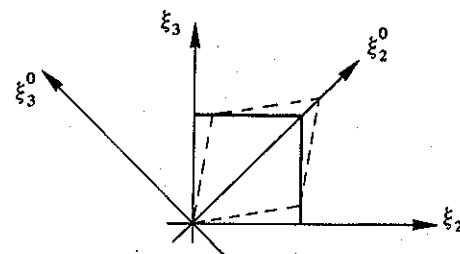


Fig. 11

Per dimostrarlo attraverso il calcolo, occorre anzitutto costruire la tabella dei coseni (n. 1 di § 3) fra i due sistemi di assi

	ξ_1^0	ξ_2^0	ξ_3^0
ξ_1	1	0	0
ξ_2	0	$1/\sqrt{2}$	$-1/\sqrt{2}$
ξ_3	0	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$

Ricordando le formule di trasformazione delle componenti di un tensore al cambiare del sistema di riferimento (formula (11) di § 3) e tenendo conto che l'unica componente diversa da zero è γ_{23} , tali formule si riducono a

$$(14) \quad \gamma'_{il} = \alpha_{2j} \alpha_{3l} \gamma_{23} + \alpha_{3j} \alpha_{2l} \gamma_{32} = (\alpha_{2j} \alpha_{3l} + \alpha_{3j} \alpha_{2l}) \gamma_{23}.$$

Da qui si ricava per $j = l = 2$ e successivamente per $j = l = 3$.

$$\gamma'_{22} = 2 \alpha_{22} \alpha_{32} \gamma_{23} = \gamma_{23}, \quad \gamma'_{33} = 2 \alpha_{22} \alpha_{33} \gamma_{23} = -\gamma_{23}.$$

Poi per $j = 2, l = 3$ si ha

$$\gamma'_{23} = (\alpha_{22} \alpha_{33} + \alpha_{32} \alpha_{23}) \gamma_{23} = 0.$$

Le altre γ , contenendo almeno un indice 1, risultano tutte nulle.

6) Dilatazione cubica.

Ricaviamo anche il significato fisico dell'invariante lineare del tensore delle deformazioni

$$(15) \quad \gamma = \gamma_{11} + \gamma_{22} + \gamma_{33} = \frac{\partial s_1}{\partial x_1} + \frac{\partial s_2}{\partial x_2} + \frac{\partial s_3}{\partial x_3} = \text{div } \vec{s},$$

detto *invariante lineare di deformazione*.

Consideriamo gli assi principali e un parallelepipedo retto infinitesimo coi lati $\Delta \xi_1^0, \Delta \xi_2^0, \Delta \xi_3^0$ ad essi paralleli (Fig. 12): il suo volume sarà

$$(16) \quad \Delta V_0 = \Delta \xi_1^0 \Delta \xi_2^0 \Delta \xi_3^0.$$

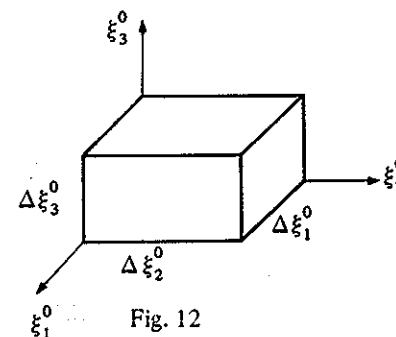


Fig. 12

A seguito della deformazione si otterrà ancora un parallelepipedo retto di lati

$$(17) \quad (1 + \gamma_{11}^0) \Delta \xi_1^0, (1 + \gamma_{22}^0) \Delta \xi_2^0, (1 + \gamma_{33}^0) \Delta \xi_3^0$$

avente volume

$$(18) \quad \Delta V = (1 + \gamma_{11}^0) (1 + \gamma_{22}^0) (1 + \gamma_{33}^0) \Delta \xi_1^0 \Delta \xi_2^0 \Delta \xi_3^0;$$

trascurando i prodotti delle γ_{ik} nei confronti dell'unità, in base a quanto si è detto, si ottiene

$$(19) \quad \Delta V = (1 + \gamma) \Delta V_0$$

e quindi γ ha il significato di *coefficiente di dilatazione cubica* nel punto P .

§ 5. STATICA DEI MEZZI CONTINUI

1) Forze applicate e sforzi interni.

Passiamo in rassegna le forze che possono essere applicate a un mezzo continuo. Anzitutto possono agire due tipi di forze esterne che, nei problemi, risultano in genere note: 1) *forze di massa*, agenti su ogni elemento di massa del corpo (ad es. il peso); 2) *forze superficiali*, agenti su ogni elemento della superficie di esso. La forza di massa agente sull'elemento di massa dm è proporzionale a dm e si può esprimere con $\vec{F} dm$, dove $\vec{F}$ (che ha le dimensioni di un'accelerazione) è un vettore finito.

Ad esempio per il peso si ha $\vec{F} dm = -g \vec{k} dm$, per cui è $\vec{F} = -g \vec{k}$.

Poichè è $dm = \rho dv$ dove ρ è la densità e dv è l'elemento di volume contenente dm , la forza di massa può anche essere espressa con $\rho \vec{F} dv$.

La forza superficiale agente sull'elemento $d\sigma$ si può esprimere invece con $\vec{\psi} d\sigma$, dove $\vec{\psi}$ (che ha le dimensioni di una forza divisa per una superficie) è un vettore finito.

Ci sono poi le forze interne, generalmente incognite, che si esercitano mutuamente fra le varie particelle del corpo (pressioni o tensioni interne); per introdurle dal punto di vista matematico procediamo nel modo seguente: immaginiamo tracciato, all'interno del corpo, un elemento superficiale generico $d\sigma$ e su di esso fissiamo una faccia positiva (e quindi una negativa) ossia un verso positivo per il versore normale $\vec{n}$ (Fig. 13).

Postuliamo ora che, sia in condizioni di quiete che di moto,

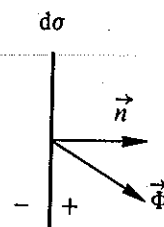


Fig. 13

tutte le forze interne che le particelle del corpo, situate dalla parte della faccia negativa, esercitano sulle particelle situate dalla parte opposta siano equivalenti ad un'unica forza proporzionale a $d\sigma$, detta *sforzo interno* sulla faccia negativa di $d\sigma$ ed esprimibile con $\vec{\Phi} d\sigma$, dove $\vec{\Phi}$ è un vettore finito, generalmente incognito, detto *sforzo interno specifico* sulla faccia negativa di $d\sigma$. $\vec{\Phi}$ si dice anche *pressione* se è acuto l'angolo di $\vec{\Phi}$ col versore $\vec{n}$, *tensione* se detto angolo è ottuso, *sforzo tangenziale* o di *taglio* se detto angolo è retto: $\vec{\Phi}$ varia con la posizione e con la giacitura di $d\sigma$.

Per il principio di azione mutua gli sforzi relativi a facce opposte di uno stesso elemento di superficie $d\sigma$ sono uguali e opposti.

2) Condizioni di equilibrio per mezzi continui.

Nel corso di Meccanica Razionale si è visto che condizione *necessaria* per l'equilibrio di un qualunque sistema meccanico è l'annullarsi del vettore risultante $\vec{R}_e$ e del momento risultante $\vec{\Omega}_e$ (rispetto ad un punto qualsiasi) delle forze esterne, attive e reattive. Tale condizione è anche sufficiente per un corpo rigido.

Per i mezzi continui ammetteremo il seguente postulato: *se le condizioni*

$$(1) \quad \vec{R}_e = 0 \quad \vec{\Omega}_e = 0$$

sono soddisfatte per ogni porzione infinitesima del corpo considerato, allora il corpo è un equilibrio; nelle (1) compariranno: 1) la parte di forze esterne a tutto il sistema che compete alla porzione considerata, 2) gli sforzi interni che traducono l'azione delle particelle contigue sulla porzione considerata.

Tale postulato dà quindi le condizioni sufficienti per l'equilibrio ed è molto intuitivo; infatti ogni porzione sufficientemente piccola potrà sempre equipararsi, per l'equilibrio, a un corpicciolo rigido (basta pensare all'equilibrio di un mucchio di sabbia, composto di tanti granelli, ognuno dei quali può considerarsi rigido).

3) Formule di Cauchy e tensore degli sforzi interni.

Consideriamo per un punto generico P interno al corpo tre elementi superficiali paralleli ai piani coordinati e siano

$$(2) \quad \begin{aligned} \vec{\Phi}_1 &= \Phi_{11} \vec{i} + \Phi_{12} \vec{j} + \Phi_{13} \vec{k} \\ \vec{\Phi}_2 &= \Phi_{21} \vec{i} + \Phi_{22} \vec{j} + \Phi_{23} \vec{k} \\ \vec{\Phi}_3 &= \Phi_{31} \vec{i} + \Phi_{32} \vec{j} + \Phi_{33} \vec{k} \end{aligned}$$

gli sforzi interni specifici che si esercitano sugli elementi normali, nell'ordine, agli assi x_1, x_2, x_3 . Ciascuno degli sforzi specifici si può pensare come somma di tre sforzi specifici, uno normale all'elemento considerato e due tangenti ad esso. Ad esempio $\vec{\Phi}_1$ si può considerare come somma di uno *sforzo specifico normale*, misurato da Φ_{11} , e di due *sforzi specifici tangenziali*, misurati da Φ_{12} e Φ_{13} , paralleli rispettivamente agli assi x_2 e x_3 .

Φ_{11}, Φ_{22} e Φ_{33} sono quindi sforzi specifici normali; le Φ_{ik} con indici disuguali sono sforzi specifici tangenziali.

Sia ora $\vec{\Phi}$ lo sforzo specifico relativo a un generico elemen-

to superficiale $d\sigma$ passante per P . Possiamo far vedere che $\vec{\Phi}$ si può ricavare da $\vec{\Phi}_1, \vec{\Phi}_2$ e $\vec{\Phi}_3$: consideriamo in P tre rette parallele agli assi coordinati e tracciamo un piano infinitamente vicino a P e parallelo all'elemento $d\sigma$, che tagli tali rette nei punti A, B e C , i quali assieme a P individuano un tetraedro infinitesimo (Fig. 14); sia $\vec{n} \equiv (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ il versore normale alla faccia ABC orientato verso l'esterno del tetraedro.

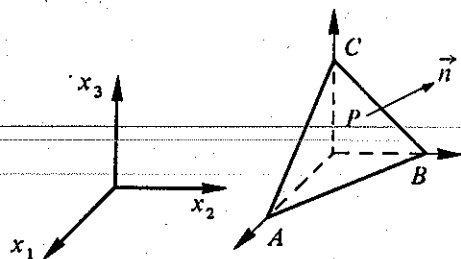


Fig. 14

Le facce PBC, PCA e PAB sono tre elementi superficiali per P paralleli ai piani coordinati e su ognuna di esse assumeremo come direzione positiva della normale quella dell'asse ad essa ortogonale, quindi su di esse agiranno gli sforzi interni specifici (2); indicheremo con $\vec{\Phi}'$ lo sforzo interno specifico relativo alla faccia obliqua e alla normale esterna (cioè esercitato dal tetraedro verso l'esterno). Se, sotto l'azione delle forze esterne, il corpo è in equilibrio, lo sarà anche il tetraedro e quindi necessariamente dovrà essere nullo il vettore risultante $\vec{R}$ di tutte le forze che sono applicate ad esso. Tali forze sono: la forza di massa $\rho \vec{F} dv$, se dv è il volume infinitesimo del tetraedro, e gli sforzi interni

$$\vec{\Phi}_1 d\sigma_1, \vec{\Phi}_2 d\sigma_2, \vec{\Phi}_3 d\sigma_3, -\vec{\Phi}' d\Sigma^{(1)}$$

(1) Essendo $\vec{n}$ la normale esterna, $-\vec{\Phi}' d\Sigma$ è lo sforzo esercitato verso l'interno del tetraedro.

se $d\sigma_1, d\sigma_2, d\sigma_3$ e $d\Sigma$ sono le aree delle facce PBC, PCA, PAB, ABC .

Avremo quindi

$$(3) \quad \vec{R} = \rho \vec{F} dv + \vec{\Phi}_1 d\sigma_1 + \vec{\Phi}_2 d\sigma_2 + \vec{\Phi}_3 d\sigma_3 - \vec{\Phi}' d\Sigma = 0.$$

Se indichiamo con h l'altezza del tetraedro relativa alla base ABC , si ha $dv = \frac{1}{3} d\Sigma h$, mentre, ovviamente, è

$$d\sigma_1 = \alpha_1 d\Sigma, d\sigma_2 = \alpha_2 d\Sigma, d\sigma_3 = \alpha_3 d\Sigma;$$

si ottiene allora da (3)

$$d\Sigma \left(\rho \vec{F} h \frac{1}{3} + \vec{\Phi}_1 \alpha_1 + \vec{\Phi}_2 \alpha_2 + \vec{\Phi}_3 \alpha_3 - \vec{\Phi}' \right) = 0.$$

Passando al limite per $h \rightarrow 0$, la faccia ABC tende a un elemento superficiale passante per P e avente $\vec{n}$ come normale, mentre $\vec{\Phi}'$ tende allo sforzo interno specifico $\vec{\Phi}$ esercitato su detto elemento: si ottiene così

$$(4) \quad \vec{\Phi} = \sum_{i=1}^3 \vec{\Phi}_i \alpha_i;$$

oppure, in forma cartesiana

$$(5) \quad \begin{cases} \Phi_1 = \Phi_{11} \alpha_1 + \Phi_{21} \alpha_2 + \Phi_{31} \alpha_3 \\ \Phi_2 = \Phi_{12} \alpha_1 + \Phi_{22} \alpha_2 + \Phi_{32} \alpha_3 \\ \Phi_3 = \Phi_{13} \alpha_1 + \Phi_{23} \alpha_2 + \Phi_{33} \alpha_3, \end{cases}$$

oppure, sinteticamente,

$$(6) \quad \Phi_i = \sum_k \Phi_{ki} \alpha_k \quad (i = 1, 2, 3).$$

Le suddette formule, chiamate *formule di Cauchy*, esprimono lo sforzo interno specifico relativo a un elemento superficiale comunque orientato in funzione dei coseni direttori della normale e degli sforzi interni specifici esercitati su tre elementi normali agli assi cartesiani.

Le (6) si possono interpretare dicendo che applicando al versore $\vec{n}$ (di componenti cartesiane $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$) un'omografia vettoriale, a cui corrisponde il tensore di componenti Φ_{ki} , si ottiene il vettore $\vec{\Phi}$. Le nove componenti degli sforzi interni danno quindi luogo ad un tensore, detto *tensore degli sforzi interni* o *stress*.

4) Equazioni differenziali dell'equilibrio.

Consideriamo ora una porzione arbitraria v interna al mezzo continuo; sia σ la superficie che la limita ed $\vec{n}$, di componenti $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, il versore della normale esterna. Le condizioni necessarie e sufficienti (essendo v arbitrario) per l'equilibrio sono espresse dalle (1).

Per esplicitare la prima di esse osserviamo che su ogni elemento dv si esercita la forza di massa $\rho \vec{F} dv$, mentre su ogni elemento $d\sigma$ si esercita dall'interno verso l'esterno lo sforzo interno $\vec{\Phi} d\sigma$ (e $-\vec{\Phi} d\sigma$ è lo sforzo interno che si esercita dall'esterno verso l'interno). L'annullarsi del vettore risultante di tutte queste forze porta all'equazione

$$\int_v \rho \vec{F} dv - \oint_{\sigma} \vec{\Phi} d\sigma = 0,$$

ossia, per la (4),

$$(7) \quad \int_v \rho \vec{F} dv - \oint_{\sigma} (\vec{\Phi}_1 \alpha_1 + \vec{\Phi}_2 \alpha_2 + \vec{\Phi}_3 \alpha_3) d\sigma = 0.$$

Ricordando le formule di Gauss (valide, ovviamente, anche quando allo scalare φ si sostituisce un vettore), si ha

$$\int_v \left(\rho \vec{F} - \frac{\partial \vec{\Phi}_1}{\partial x_1} - \frac{\partial \vec{\Phi}_2}{\partial x_2} - \frac{\partial \vec{\Phi}_3}{\partial x_3} \right) dv = 0.$$

Per l'arbitrarietà di v se ne deduce per ogni punto in cui la

funzione integranda è continua

$$(8) \quad \frac{\partial \vec{\Phi}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \vec{\Phi}_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \vec{\Phi}_3}{\partial x_3} = \rho \vec{F},$$

ossia, in forma cartesiana,

$$(9) \quad \begin{cases} \frac{\partial \Phi_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \Phi_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \Phi_{31}}{\partial x_3} = \rho F_1 \\ \frac{\partial \Phi_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \Phi_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \Phi_{32}}{\partial x_3} = \rho F_2 \\ \frac{\partial \Phi_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \Phi_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \Phi_{33}}{\partial x_3} = \rho F_3. \end{cases}$$

Queste tre equazioni (differenziali alle derivate parziali del primo ordine lineari, in cui ρF_i sono note mentre le nove Φ_{ik} sono incognite) sono chiamate *equazioni indefinite dell'equilibrio*, in quanto valide, generalmente, in ogni punto interno.

Ad esse vanno affiancate le *equazioni al contorno* che si ricavano osservando che su ogni elemento $d\Sigma$ della superficie di contorno del corpo agisce la forza esterna nota $\vec{\Psi} d\Sigma$ e, orientando la normale $\vec{n}$ verso l'esterno, lo sforzo interno $\vec{\Phi} d\Sigma$ che il corpo esercita contro la faccia interna della superficie stessa. Per l'equilibrio la somma di queste due forze deve essere nulla, cioè si ha su ogni punto di Σ

$$(10) \quad \vec{\Phi} + \vec{\Psi} = 0$$

ossia, in forma cartesiana, ricordando le (5):

$$(11) \quad \begin{aligned} \Phi_{11} \alpha_1 + \Phi_{21} \alpha_2 + \Phi_{31} \alpha_3 &= -\Psi_1 \\ \Phi_{12} \alpha_1 + \Phi_{22} \alpha_2 + \Phi_{32} \alpha_3 &= -\Psi_2 \\ \Phi_{13} \alpha_1 + \Phi_{23} \alpha_2 + \Phi_{33} \alpha_3 &= -\Psi_3. \end{aligned}$$

Dobbiamo ancora sfruttare la seconda delle (1); basta annullare la somma dei momenti rispetto all'origine O di tutte le for-

ze agenti sul volume arbitrario v che compaiono nelle (7): si ottiene

$$(12) \quad \int_v \rho \vec{F} \times (O-P) dv - \oint_o (\alpha_1 \vec{\Phi}_1 + \alpha_2 \vec{\Phi}_2 + \alpha_3 \vec{\Phi}_3) \times (O-P) d\sigma = 0;$$

applicando la formula di Gauss il secondo termine diventa

$$- \int_v \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} [\vec{\Phi}_1 \times (O-P)] + \frac{\partial}{\partial x_2} [\vec{\Phi}_2 \times (O-P)] + \frac{\partial}{\partial x_3} [\vec{\Phi}_3 \times (O-P)] \right\} dv.$$

Indicando con $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ i versori degli assi cartesiani si ha $P-O = x_1 \vec{i} + x_2 \vec{j} + x_3 \vec{k}$ e quindi

$$\frac{\partial}{\partial x_1} (O-P) = -\vec{i}, \quad \frac{\partial}{\partial x_2} (O-P) = -\vec{j}, \quad \frac{\partial}{\partial x_3} (O-P) = -\vec{k};$$

il detto termine allora diventa

$$- \int_v \left\{ \frac{\partial \vec{\Phi}_1}{\partial x_1} \times (O-P) + \frac{\partial \vec{\Phi}_2}{\partial x_2} \times (O-P) + \frac{\partial \vec{\Phi}_3}{\partial x_3} \times (O-P) \right\} dv + \\ + \int_v (\vec{\Phi}_1 \times \vec{i} + \vec{\Phi}_2 \times \vec{j} + \vec{\Phi}_3 \times \vec{k}) dv;$$

introducendolo nella (12) si ottiene allora

$$\int_v \left(\rho \vec{F} - \frac{\partial \vec{\Phi}_1}{\partial x_1} - \frac{\partial \vec{\Phi}_2}{\partial x_2} - \frac{\partial \vec{\Phi}_3}{\partial x_3} \right) \times (O-P) dv + \\ + \int_v (\vec{\Phi}_1 \times \vec{i} + \vec{\Phi}_2 \times \vec{j} + \vec{\Phi}_3 \times \vec{k}) dv = 0.$$

Il primo integrale si annulla in forza della (8); essendo v arbitrario segue allora

$$(13) \quad \vec{\Phi}_1 \times \vec{i} + \vec{\Phi}_2 \times \vec{j} + \vec{\Phi}_3 \times \vec{k} = 0.$$

Moltiplicando scalarmente per $\vec{k}$ si ha

$$\vec{\Phi}_1 \times \vec{i} \cdot \vec{k} + \vec{\Phi}_2 \times \vec{j} \cdot \vec{k} = 0$$

ossia scambiando il simbolo di prodotto scalare col simbolo di

prodotto vettoriale

$$\vec{\Phi}_1 \cdot \vec{i} \times \vec{k} = \vec{\Phi}_2 \cdot \vec{k} \times \vec{j}$$

cioè

$$(14) \quad \vec{\Phi}_1 \cdot \vec{j} = \vec{\Phi}_2 \cdot \vec{i} \quad \text{ossia} \quad \Phi_{12} = \Phi_{21}.$$

In modo analogo, moltiplicando scalarmente la (12) per $\vec{i}$ o per $\vec{j}$ si otterrebbe

$$(15) \quad \Phi_{13} = \Phi_{31}, \quad \Phi_{23} = \Phi_{32}.$$

Si conclude che il tensore degli sforzi interni è *simmetrico*, quindi ammette in ogni punto una terna di assi principali x_1^0, x_2^0, x_3^0 : ciò significa che lo stato di sollecitazione interna del mezzo in un dato punto può essere rappresentato come la sovrapposizione di tre sforzi normali $\Phi_{11}^0, \Phi_{22}^0, \Phi_{33}^0$, detti *sforzi specifici principali*, diretti secondo le tre direzioni principali del tensore considerato e non accompagnati da sforzi di taglio.

Osserviamo che le (14) e (15) riducono a sei il numero delle incognite che compaiono nelle tre equazioni (9). Il problema però resta ancora indeterminato. In altre parole, assegnate solo le forze $\rho \vec{F}$, le condizioni di equilibrio (9) non sono sufficienti per determinare lo stress.

A tale scopo dovremo precisare le relazioni fra sforzi e deformazioni, ciò che sarà fatto più avanti (n. 6).

5) Caso dei fluidi.

Le considerazioni fin qui svolte si applicano ad ogni mezzo continuo; in particolare valgono anche per i fluidi (liquidi e gas).

Però nei fenomeni abituali che riguardano i fluidi la coesione può essere considerata nulla: ne risulta che per l'equilibrio gli sforzi interni non possono essere di tensione (che allontanerebbe le particelle le une dalle altre), perciò gli *sforzi interni sono di*

pressione. Se poi si prescinde dalla viscosità, cioè si considerano *fluidi perfetti*, la resistenza allo scorrimento delle particelle fluide le une sulle altre è nulla e quindi gli sforzi tangenziali devono essere nulli. In altre parole in un fluido perfetto lo sforzo interno $\vec{\Phi} d\sigma$ su un generico elemento di superficie $d\sigma$ è sempre normale a $d\sigma$: quindi rispetto a qualsiasi sistema di assi si ha

$$\Phi_{23} = \Phi_{13} = \Phi_{12} = 0.$$

Ciò significa che qualunque sistema di assi è un sistema di assi principali per il tensore degli sforzi, cioè qualunque diametro della quadrica caratteristica è asse della quadrica stessa, che perciò risulta essere necessariamente una sfera.

Ma affinché l'equazione

$$\Phi_{11} x_1^2 + \Phi_{22} x_2^2 + \Phi_{33} x_3^2 = 1$$

rappresenti una sfera deve essere

$$(16) \quad \Phi_{11} = \Phi_{22} = \Phi_{33};$$

dunque in un fluido perfetto i tre sforzi principali, relativi a un dato punto, hanno valore comune p , detto *pressione*. Le formule di Cauchy diventano

$$(17) \quad \Phi_i = p \alpha_i \text{ ossia } \Phi = p$$

e ciò equivale al noto "principio di Pascal": *in un fluido perfetto il modulo Φ dello sforzo specifico (normale) su un elemento $d\sigma$ è indipendente dall'orientamento di $d\sigma$* (in altre parole: la pressione in un punto si trasmette ugualmente in tutte le direzioni). La pressione p , in generale, è funzione del posto.

Le equazioni (9) dell'equilibrio si semplificano in

$$(18) \quad \frac{\partial p}{\partial x_1} = \rho F_1, \quad \frac{\partial p}{\partial x_2} = \rho F_2, \quad \frac{\partial p}{\partial x_3} = \rho F_3,$$

che si sintetizzano nell'unica equazione vettoriale

$$(19) \quad \text{grad } p = \rho \vec{F},$$

detta *equazione fondamentale della statica dei fluidi perfetti*.

6) Relazioni fra sforzi interni e deformazioni.

Si è già detto che per rendere determinato il problema del calcolo degli sforzi interni occorre precisare il legame di essi con le deformazioni. Il più naturale postulato che si possa ammettere al riguardo è che le componenti Φ_{ik} siano funzioni regolari delle γ_{rs} e che allo stato naturale (quello in cui le γ_{rs} sono tutte nulle) gli sforzi interni siano nulli.

Sviluppando le Φ_{ik} con la formula di Mac Laurin e, nel caso delle deformazioni infinitesime, arrestando lo sviluppo ai termini di primo grado, si ricava che le sei componenti dello stress risultano funzioni lineari e omogenee delle sei componenti dello strain. In formule

$$(20) \quad \Phi_{ik} = \sum_{r \leq s}^3 a_{ikrs} \gamma_{rs} \quad (i \leq k).$$

Tali equazioni sono invertibili: infatti il determinante (di secondo ordine) dei coefficienti deve essere diverso da zero, dovendo le γ_{rs} essere tutte nulle se tali sono tutte le Φ_{ik} . Anche le γ_{rs} risultano perciò essere funzioni lineari e omogenee delle Φ_{ik} e in ciò consiste la nota *legge di Hooke*, che rispecchia i risultati sperimentali ottenuti nel caso di deformazioni elastiche che non superano il cosiddetto *limite di proporzionalità*.

Per scrivere le espressioni delle sei γ_{rs} come funzioni lineari omogenee delle sei Φ_{ik} sono necessari 36 coefficienti che dipendono dalla sostanza che si studia; si può dimostrare però che di questi coefficienti, detti *moduli di elasticità* della sostanza, solo 21 sono indipendenti: vedremo fra poco che nei corpi isotropi essi si riducono a due indipendenti.

Limitandoci allo studio dei corpi isotropi, cerchiamo di ottenere direttamente le relazioni fra le componenti del tensore degli sforzi e quelle del tensore delle deformazioni esaminando pochi casi elementari di sollecitazione elastica.

Supponiamo che solo la componente Φ_{11} sia diversa da zero e costante (più precisamente sia $\Phi_{11} > 0$), mentre le altre Φ_{ik} siano nulle; dalle (9) si ha allora che le forze di massa devono essere nulle. Consideriamo allora un parallelepipedo retto $\mathcal{P}$ con gli spigoli paralleli agli assi: le (11) ci dicono che sulla faccia 1 ($\alpha_1 = -1$) deve essere $-\Phi_{11} = -\Psi_1$ ossia deve agire una forza superficiale $\Psi_1 > 0$ (Fig. 15), mentre sulla faccia 2 ($\alpha_1 = 1$) deve agire una forza superficiale $\Psi_1 = -\Phi_{11} (< 0)$; le altre quattro

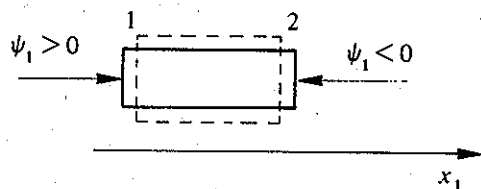


Fig. 15

facce non sono soggette a forze superficiali. Si conclude che il parallelepipedo $\mathcal{P}$ è soggetto a delle pressioni sulle due facce normali all'asse x_1 , mentre la superficie laterale è libera da forze. In base ai risultati sperimentali si ha che $\mathcal{P}$ si contrae nella direzione dell'asse x_1 , mentre invece si dilata nelle direzioni ad esso normale cioè si ha

$$\gamma_{11} < 0, \gamma_{22} > 0, \gamma_{33} > 0;$$

è inoltre

$$\gamma_{12} = \gamma_{13} = \gamma_{23} = 0$$

in quanto non si hanno scorrimenti; per l'isotropia è inoltre $\gamma_{22} = \gamma_{33}$. Le relazioni lineari fra le γ e le Φ si riducono nel caso particolare trattato ad esprimere la proporzionalità fra le $\gamma_{11}, \gamma_{22}, \gamma_{33}$ e la Φ_{11} ; scriveremo le dette relazioni nella forma

$$(21) \quad \gamma_{11} = -\frac{1}{E} \Phi_{11}, \gamma_{22} = \gamma_{33} = \frac{k}{E} \Phi_{11}, \gamma_{12} = \gamma_{13} = \gamma_{23} = 0,$$

dove E è un coefficiente positivo caratteristico della sostanza, detto *modulo di Joung* (che in linea puramente teorica, misurerebbe lo sforzo Φ_{11} necessario affinché sia $\gamma_{11} = -1$, ossia lo sforzo necessario per ridurre a zero lo spigolo del parallelepipedo parallelo all'asse x_1); nel secondo coefficiente di proporzionalità considerato si è introdotta la costante k , mediante la quale si ha

$$\gamma_{22} = \gamma_{33} = -k \gamma_{11},$$

ossia $k = -\frac{\gamma_{22}}{\gamma_{11}}$ esprime il rapporto fra il coefficiente di dilata-

zione trasversale e quello di contrazione longitudinale; k prende il nome di *modulo* (o *rapporto*) di *Poisson*. Le (21) esprimono la legge di Hooke nel caso particolare considerato.

Le due costanti E e k definiscono completamente le proprietà del corpo isotropo (entro il "limite di proporzionalità"): infatti, come ora mostreremo, gli sforzi, anche nel caso più generale, si possono ricondurre a sovrapposizione di sforzi di pura compressione (o trazione), come nel caso ora considerato, e, per la linearità della legge di Hooke, le deformazioni si possono calcolare come somma delle deformazioni che sarebbero prodotte dai singoli sforzi che si sovrappongono.

Se il parallelepipedo $\mathcal{P}$ è soggetto a forze di compressione (o trazione) su tutte e tre le coppie di facce opposte, supposte parallele ai piani coordinati, avremo $\Phi_{11} \neq 0, \Phi_{22} \neq 0, \Phi_{33} \neq 0, \Phi_{12} = \Phi_{13} = \Phi_{23} = 0$. Lo sforzo Φ_{11} da solo darebbe la deformazione espressa da

$$\gamma'_{11} = -\frac{1}{E} \Phi_{11}, \gamma'_{22} = \gamma'_{33} = \frac{k}{E} \Phi_{11};$$

lo sforzo Φ_{22} darebbe da solo

$$\gamma''_{11} = \gamma''_{33} = \frac{k}{E} \Phi_{22}, \gamma''_{22} = -\frac{1}{E} \Phi_{22}$$

e lo sforzo Φ_{33} darebbe da solo

$$\gamma_{11}''' = \gamma_{22}''' = \frac{k}{E} \Phi_{33}, \quad \gamma_{33}''' = -\frac{1}{E} \Phi_{33};$$

gli scorrimenti sono, in tutti i tre casi, nulli. La deformazione dovuta a tutti e tre gli sforzi agenti simultaneamente si ottiene sommando le deformazioni parziali e, introducendo l'invariante primo Φ del tensore delle Φ_{ik} , si ha

$$(22) \quad \begin{cases} \gamma_{11} = \frac{1}{E} [-\Phi_{11} + k(\Phi_{22} + \Phi_{33})] = \frac{k}{E} \Phi - \frac{1+k}{E} \Phi_{11} \\ \gamma_{22} = \frac{k}{E} \Phi - \frac{1+k}{E} \Phi_{22} \\ \gamma_{33} = \frac{k}{E} \Phi - \frac{1+k}{E} \Phi_{33} \end{cases} \quad \gamma_{12} = \gamma_{13} = \gamma_{23} = 0.$$

Passiamo ora al caso generale. Per ottenere le relazioni fra le γ_{rs} e le Φ_{ik} in un punto generico P nel caso di sforzi qualsiasi, possiamo utilizzare i risultati precedenti riferendoci agli assi principali $\xi_1^0, \xi_2^0, \xi_3^0$ del tensore degli sforzi nel punto P . Consideriamo attorno a P un parallelepipedo con gli spigoli paralleli a $\xi_1^0, \xi_2^0, \xi_3^0$ (Fig. 16) ed abbastanza piccolo da poter considerare,

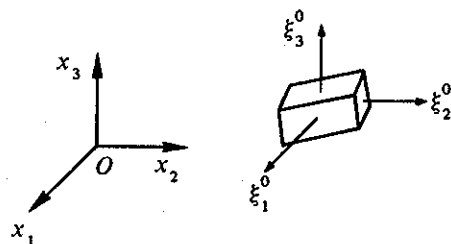


Fig. 16

entro di esso, gli sforzi come costanti ed uguali al valore che essi hanno in P . Se ci riferiamo agli assi ξ_i^0 , gli sforzi di taglio sono nulli e quindi possiamo pensarci nelle condizioni del ca-

so precedente; le relazioni fra deformazioni e sforzi sono le (22) che potremo scrivere con l'indice zero in alto ossia

$$(23) \quad \gamma_{ii}^0 = \frac{k}{E} \Phi - \frac{1+k}{E} \Phi_{ii}^0 \quad (i = 1, 2, 3).$$

Però gli assi ξ_i^0 variano, in generale, da punto a punto e quindi è opportuno riferirsi a un unico sistema di assi $O x_1 x_2 x_3$.

Per ottenere le relazioni relative a detto sistema, ricordiamo le relazioni, valide per qualsiasi tensore, che esprimono come le componenti di un tensore varino al variare del riferimento (formule (11) del § 3)

$$\gamma'_{jl} = \sum_{ik} \alpha_{ij} \alpha_{kl} \gamma_{ik};$$

(le α sono i coseni degli angoli fra gli assi dei due sistemi); se scriviamo queste relazioni per le componenti γ_{jl} rispetto ad un generico riferimento (O) e le componenti γ_{ii}^0 rispetto agli assi principali di origine P , otteniamo

$$(24) \quad \gamma_{jl} = \sum_i \alpha_{ij} \alpha_{il} \gamma_{ii}^0;$$

in particolare si ha, servendosi delle (23),⁽¹⁾

$$\gamma_{11} = \sum_i \alpha_{i1}^2 \gamma_{ii}^0 = \frac{k}{E} \Phi (\sum_i \alpha_{i1}^2) - \frac{1+k}{E} \sum_i \alpha_{i1}^2 \Phi_{ii}^0 = \frac{k}{E} \Phi - \frac{1+k}{E} \Phi_{11};$$

$$\gamma_{12} = \sum_i \alpha_{i1} \alpha_{i2} \gamma_{ii}^0 = \frac{k}{E} \Phi \sum_i \alpha_{i1} \alpha_{i2} - \frac{1+k}{E} \sum_i \alpha_{i1} \alpha_{i2} \Phi_{ii}^0 = -\frac{1+k}{E} \Phi_{12}.$$

In modo analogo si ottengono gli altri γ . Volendo scrivere tutte queste formule in un modo unico introduciamo il cosiddetto simbolo di Kronecker

(1) Si applicano le formule: $\sum_i \alpha_{i1}^2 = 1, \quad \sum_i \alpha_{i1}^2 \Phi_{ii}^0 = \Phi_{11}$

$$\sum_i \alpha_{i1} \alpha_{i2} = 0, \quad \sum_i \alpha_{i1} \alpha_{i2} \Phi_{ii}^0 = \Phi_{12}.$$

Vale infatti la formula, analoga alla (24)

$$\Phi_{jl} = \sum_i \alpha_{ij} \alpha_{il} \Phi_{ii}^0.$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{per } i \neq j \\ 1 & \text{per } i = j. \end{cases}$$

Si ottiene così la formula

$$(25) \quad \gamma_{ij} = \delta_{ij} \frac{k}{E} \Phi - \frac{1+k}{E} \Phi_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3),$$

che esprime la legge di Hooke per i corpi isotropi. Si può anche esprimere il coefficiente di dilatazione cubica γ ; è infatti

$$\gamma = \gamma_{11} + \gamma_{22} + \gamma_{33} = \frac{3k}{E} \Phi - \frac{1+k}{E} (\Phi_{11} + \Phi_{22} + \Phi_{33}) = \frac{2k-1}{E} \Phi.$$

Da qui si può ricavare l'invariante primo Φ dello stress ⁽¹⁾

$$\Phi = \frac{E}{2k-1} \gamma$$

e si possono quindi invertire le (25) ricavando da esse

$$\Phi_{ij} = \frac{E}{1+k} (\delta_{ij} \frac{k}{E} \Phi - \gamma_{ij}) = \delta_{ij} \frac{k}{1+k} \frac{E}{2k-1} \gamma - \frac{E}{1+k} \gamma_{ij};$$

l'introducendo le cosiddette *costanti di Lamè*

$$\lambda = \frac{kE}{(1+k)(1-2k)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+k)},$$

si hanno le formule

$$(26) \quad \Phi_{ij} = -\delta_{ij} \lambda \gamma - 2\mu \gamma_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3);$$

da qui si vede che le relazioni fra sforzi e deformazioni nei corpi isotropi dipendono solo da due costanti materiali (λ e μ); inoltre gli sforzi normali ($i=j$) sono legati al corrispondente coefficiente di dilatazione lineare γ_{ii} e al coefficiente di dilatazione cubica γ , mentre gli sforzi di taglio ($i \neq j$) sono legati solo al

(1) Sperimentalmente si trova che per qualsiasi materiale è $k < \frac{1}{2}$ ossia $2k-1 < 0$; è inoltre $k > -1$ (ossia $1+k > 0$); per la maggiore parte delle sostanze è però $k > 0$.

corrispondente scorrimento γ_{ij} .

7) Equazioni differenziali definitive dell'equilibrio elastico.

Richiamiamo le equazioni (9) che danno le condizioni indefinite di equilibrio

$$(27) \quad \begin{cases} \frac{\partial \Phi_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \Phi_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \Phi_{31}}{\partial x_3} = \rho F_1 \\ \frac{\partial \Phi_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \Phi_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \Phi_{32}}{\partial x_3} = \rho F_2 \\ \frac{\partial \Phi_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \Phi_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \Phi_{33}}{\partial x_3} = \rho F_3. \end{cases}$$

In base alle (26) che esprimono il legame fra sforzi e deformazioni e alle $\gamma_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial s_i}{\partial x_k} + \frac{\partial s_k}{\partial x_i} \right)$ che esplicitano le γ_{ik} e si ha

$$\Phi_{11} = -\lambda \gamma - 2\mu \frac{\partial s_1}{\partial x_1}$$

$$\Phi_{21} = -\mu \left(\frac{\partial s_1}{\partial x_2} + \frac{\partial s_2}{\partial x_1} \right)$$

$$\Phi_{31} = -\mu \left(\frac{\partial s_1}{\partial x_3} + \frac{\partial s_3}{\partial x_1} \right);$$

introducendo queste espressioni nella prima delle (27) si ottiene

$$\begin{aligned} \rho F_1 = & -\lambda \frac{\partial \gamma}{\partial x_1} - \mu \left(\frac{\partial^2 s_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 s_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 s_1}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 s_2}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial^2 s_3}{\partial x_1 \partial x_2} \right) = \\ & -\lambda \frac{\partial \lambda}{\partial x_1} - \mu \Delta s_1 - \mu \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial s_1}{\partial x_1} + \frac{\partial s_2}{\partial x_2} + \frac{\partial s_3}{\partial x_3} \right); \end{aligned}$$

ricordando che è $\gamma = \text{div } \vec{s}$, si ha allora

$$\rho F_1 + (\lambda + \mu) \frac{\partial \operatorname{div} \vec{s}}{\partial x_1} + \mu \Delta s_1 = 0.$$

Introducendo i valori delle Φ nelle altre equazioni (27) si ottengono due equazioni analoghe relative agli indici 2 e 3.

Sinteticamente le tre equazioni possono essere espresse nell'unica equazione vettoriale ⁽¹⁾

$$(28) \quad (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{s} + \mu \Delta \vec{s} + \rho \vec{F} = 0$$

che equivale alle tre equazioni scalari, le quali sono differenziali a derivate parziali del secondo ordine e lineari nelle funzioni incognite s_1, s_2, s_3 .

A tali equazioni vanno affiancate le condizioni al contorno (II) che, sottoposte a calcoli analoghi ai precedenti, diventano

$$\left(\lambda \operatorname{div} \vec{s} + 2\mu \frac{\partial s_1}{\partial x_1} \right) \alpha_1 + \mu \left(\frac{\partial s_1}{\partial x_2} + \frac{\partial s_2}{\partial x_1} \right) \alpha_2 + \left(\frac{\partial s_1}{\partial x_3} + \frac{\partial s_3}{\partial x_1} \right) \alpha_3 = \Psi_1$$

$$\mu \left(\frac{\partial s_1}{\partial x_2} + \frac{\partial s_2}{\partial x_1} \right) \alpha_1 + \left(\lambda \operatorname{div} \vec{s} + 2\mu \frac{\partial s_2}{\partial x_2} \right) \alpha_2 + \left(\frac{\partial s_2}{\partial x_3} + \frac{\partial s_3}{\partial x_2} \right) \alpha_3 = \Psi_2$$

$$\mu \left(\frac{\partial s_1}{\partial x_3} + \frac{\partial s_3}{\partial x_1} \right) \alpha_1 + \mu \left(\frac{\partial s_2}{\partial x_3} + \frac{\partial s_3}{\partial x_2} \right) \alpha_2 + \left(\lambda \operatorname{div} \vec{s} + 2\mu \frac{\partial s_3}{\partial x_3} \right) \alpha_3 = \Psi_3.$$

(1) Indicheremo con $\Delta \vec{s}$ il vettore che ha come componenti cartesiane Δs_i .

§ 6. PICCOLE OSCILLAZIONI ELASTICHE.

1) Equazioni dei piccoli moti elastici.

Passiamo ora a dare qualche cenno sulla dinamica dei mezzi continui.

Possiamo individuare una generica particella del corpo mediante le coordinate che ne danno la posizione P_0 in uno stato di riferimento (lo stato naturale); il moto del corpo può essere assegnato dando in ogni istante t la posizione P^* della particella mediante la funzione

$$P^* = P(P_0, t).$$

Lo spostamento $\vec{s}$ si può esprimere allora con

$$P^* - P_0 = \vec{s} = \vec{s}(P_0, t).$$

La velocità e l'accelerazione della particella sono allora espresse da

$$\vec{v} = \frac{\partial \vec{s}(P_0, t)}{\partial t}, \quad \vec{a} = \frac{\partial^2 \vec{s}(P_0, t)}{\partial t^2}.$$

Se però ci limitiamo al caso di piccoli moti, nei quali cioè le coordinate x_i di P differiscono di pochissimo da quelle di P_0 , nelle funzioni precedenti potremo porre P al posto di P_0 ; si avrà così esplicitamente

$$\vec{s} = \vec{s}(x_1, x_2, x_3, t), \quad \vec{v} = \frac{\partial \vec{s}(x_1, x_2, x_3, t)}{\partial t}, \quad \vec{a} = \frac{\partial^2 \vec{s}(x_1, x_2, x_3, t)}{\partial t^2}.$$

Il passaggio dalle equazioni della statica a quelle della dinamica si fa, come si è visto nel corso di Meccanica razionale, in

base al principio di d'Alembert ossia sostituendo nelle equazioni di equilibrio le forze perdute alle forze attive e quindi in ogni punto alla forza di massa $\rho \vec{F}$ dv agente sull'elemento di volume la forza perduta $\rho \vec{F} dv - \rho \frac{\partial^2 \vec{s}}{\partial t^2} dv$. Dall'equazione indefinita (28) del § 5 si ottiene l'equazione dei piccoli moti elastici

$$(1) \quad (\lambda + \mu) \text{grad div } \vec{s} + \mu \Delta \vec{s} + \rho \vec{F} = \rho \frac{\partial^2 \vec{s}}{\partial t^2}.$$

Le equazioni al contorno restano le stesse, poichè in esse non figurano le forze di massa. Saranno inoltre valide le relazioni (26) del § 5 fra sforzi e deformazioni.

Nei problemi dinamici inoltre, oltre alle forze di massa e superficiali (che potranno eventualmente dipendere dal tempo), si dovranno assegnare anche i dati iniziali (per esempio spostamento e velocità iniziali in ogni punto del corpo).

2) Onde di compressione.

Ci limiteremo a studiare per ora due soluzioni particolari dell'equazione (1) dei piccoli moti e ci riferiremo a un mezzo illimitato in modo da poter prescindere dalle condizioni al contorno.

Una prima soluzione importante è quella determinata da un vettore spostamento $\vec{s}$ irrotazionale; se è

$$(2) \quad \text{rot } \vec{s} = 0,$$

ne consegue che esiste un campo scalare $\varphi(x_1, x_2, x_3, t)$ detto *potenziale degli spostamenti* tale che sia

$$(3) \quad \vec{s} = \text{grad } \varphi;$$

anzi φ e le sue derivate rispetto al tempo saranno determinate a meno di una funzione arbitraria del tempo.

Consideriamo inoltre il caso in cui sia trascurabile la forza di massa $\vec{F}$. Introducendo la (3) nella (1) si otterrà allora

$$(4) \quad (\lambda + \mu) \text{grad } \Delta \varphi + \mu \Delta \text{grad } \varphi = \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \text{grad } \varphi$$

ossia

$$(5) \quad (\lambda + 2\mu) \text{grad } \Delta \varphi - \rho \text{grad } \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0$$

Posto

$$(6) \quad b^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho},$$

si ha

$$(7) \quad \text{grad} \left(b^2 \Delta \varphi - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right) = 0;$$

integrando si ottiene

$$(8) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - b^2 \Delta \varphi = C(t)$$

essendo $C(t)$ una funzione arbitraria del tempo, che potremo però conglobare in $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$ che, come φ , è determinata a meno di un'arbitraria funzione del tempo. Così l'equazione a cui soddisfa φ diventa

$$(9) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = b^2 \Delta \varphi.$$

Questa equazione è la naturale estensione al caso tridimensionale dell'equazione delle corde vibranti; derivandola rispetto ad x_1, x_2 o x_3 si ottiene che ciascuna delle componenti dello spostamento $\vec{s}$ soddisfa a un'equazione analoga

$$(10) \quad \frac{\partial^2 s_i}{\partial t^2} = b^2 \Delta s_i \quad (i = 1, 2, 3)$$

e, in modo analogo, si vede che anche la dilatazione cubica $\gamma = \text{div } \vec{s} = \Delta \varphi$ soddisfa all'equazione

$$(11) \quad \frac{\partial^2 \gamma}{\partial t^2} = b^2 \Delta \gamma.$$

Come caso particolare possiamo considerare fenomeni unidimensionali, in cui cioè tutte le grandezze dipendono dalla sola coordinata spaziale x_1 ; si ha allora

$$(12) \quad s_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \quad s_2 = s_3 = 0;$$

lo spostamento di ogni punto risulta parallelo all'asse x_1 , inoltre il fenomeno è piano, cioè in ciascun piano normale all'asse x_1 il fenomeno risulta identico in ogni punto.

La prima delle (10) diventa

$$(13) \quad \frac{\partial^2 s_1}{\partial t^2} = b^2 \frac{\partial^2 s_1}{\partial x_1^2}$$

ed ha come soluzione generale

$$(14) \quad s_1(x, t) = f(x_1 - bt) + g(x_1 + bt)$$

con f e g funzioni arbitrarie da determinarsi con le condizioni iniziali; f rappresenta onde progressive e g onde regressive, propagantesi parallelamente all'asse x_1 con velocità b . I piani normali all'asse x_1 si spostano nella direzione dell'asse stesso e si dicono *superfici d'onda*. Il moto avviene per *onde piane* e poichè il moto avviene nella direzione di propagazione dell'onda, tali onde si dicono *longitudinali*. Poichè è

$$\gamma = \frac{\partial s_1}{\partial x_1} = f'(x_1 - bt) + g'(x_1 + bt),$$

anche le compressioni e rarefazioni del mezzo si propagano longitudinalmente, per cui tali onde sono dette di *compressione*.

Un altro caso particolare importante è quello delle onde di compressione sferiche, che hanno luogo quando il potenziale degli spostamenti ha simmetria sferica rispetto ad un punto O , che possiamo assumere come polo di un sistema di coordinate sferi-

riche; φ cioè è della forma

$$(16) \quad \varphi = \varphi(r, t)$$

essendo r la distanza da O . Poichè è⁽¹⁾

$$(17) \quad \Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 r \varphi}{\partial r^2},$$

l'equazione (9) diventa

$$(18) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = b^2 \frac{1}{r} \frac{\partial^2 r \varphi}{\partial r^2};$$

posto

$$(19) \quad r \varphi = \Psi,$$

si giunge all'equazione

$$(20) \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = b^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2}$$

da cui

$$(21) \quad \varphi = \frac{1}{r} \Psi = \frac{F(r-bt) + G(r+bt)}{r}$$

con F e G funzioni arbitrarie.

Lo spostamento s è dato da

$$(22) \quad \vec{s} = \text{grad } \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \text{ grad } r$$

e risulta quindi radiale. La sua parte numerica è data da

$$(23) \quad s_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{F'(r-bt) + G'(r+bt)}{r} - \frac{F(r-bt) + G(r+bt)}{r^2}.$$

Si ha anche qui una sovrapposizione di onde progressive (o *divergenti* dall'origine O) e onde regressive (o *convergenti* verso O) che si propagano radialmente con velocità b e che risultano quin-

(1) Si veda D. GRAFFI, *Teoria matematica dell'elettromagnetismo*, Ed. Patron, 1972, Bologna, pag. 47.

di *longitudinali* (essendo radiale anche lo spostamento $\vec{s}$). Ogni sfera di centro l'origine si dilata o si contrae (a seconda del verso di $\vec{s}$).

Si noti che la presenza dei denominatori r ed r^2 nelle formule precedenti dà luogo a una differenza sostanziale rispetto al caso delle onde piane. Se, per esempio, ci si riferisce alle onde divergenti, si vede che se all'istante t e ad una determinata distanza r la s_r ha un certo valore, all'istante $t + \tau$ e alla distanza $r + b\tau$ i numeratori dell'espressione

$$(24) \quad s_r = \frac{F'(r-bt)}{r} - \frac{F'(r-bt)}{r^2}$$

riacquistano lo stesso valore, ma i denominatori risultano aumentati, di modo che s_r si trova diminuito: ciò vuol dire che le onde si attenuano coll'allontanarsi O . Analogamente si vede che le onde convergenti si esaltano avvicinandosi ad O .

Le onde sonore emesse da una sorgente a simmetria sferica sono appunto onde sferiche longitudinali divergenti, di tipo (24).

Per r piccolo prevale il secondo termine, per r grande il primo: ad una certa distanza dalla sorgente si può assumere

$$(25) \quad s_r = \frac{F'(r-bt)}{r}$$

e per ciascuna componente sinusoidale

$$(26) \quad s_r = \frac{A}{r} \sin \frac{2\pi}{\lambda} [r-bt - \theta],$$

poichè l'ampiezza varia come $\frac{1}{r}$, l'intensità del suono (proporzionale al quadrato dell'ampiezza) decresce con la distanza come $\frac{1}{r^2}$ (sempre a una certa distanza dalla sorgente).

3) Onde di distorsione.

Consideriamo ora una seconda soluzione particolare per la equazione (1) dei piccoli moti di un mezzo deformabile e cioè quella per cui è

$$(27) \quad \text{div } \vec{s} = 0$$

ossia $\gamma = 0$ il che significa che in nessun punto vi è compressione o rarefazione. La (1) con $\vec{F} = 0$ e con

$$(28) \quad a^2 = \frac{\mu}{\rho}$$

diventa

$$(29) \quad a^2 \Delta \vec{s} = \frac{\partial^2 \vec{s}}{\partial t^2},$$

che equivale a tre equazioni scalari nelle incognite s_1, s_2, s_3 .

Ci limitiamo a studiare il caso unidimensionale (delle onde piane) supponendo che $\vec{s}$ dipenda solo da x_1 e da t ; allora la (27) dà

$$(30) \quad \frac{\partial s_1}{\partial x_1} = 0$$

mentre la (29) dà, come conseguenza

$$(31) \quad \frac{d^2 s_1}{dt^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 s_2}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 s_2}{\partial x_1^2}, \quad \frac{\partial^2 s_3}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 s_3}{\partial x_1^2};$$

se ne deduce che s_1 è indipendente da x_1 e deve essere lineare in t , ossia

$$s_1 = c_1 t + c_2;$$

poichè però ci riferiamo a soluzioni particolari limitate ai piccoli moti, dovranno prendere in considerazione solo il caso in cui è $c_1 = 0$ e quindi potremo prescindere dalla traslazione $s_1 = c_2$, per cui si potrà porre anche $c_2 = 0$, cioè $s_1 = 0$. Lo spostamento $\vec{s}$ è perciò normale all'asse x_1 , cioè alla direzione di propagazione

delle onde: tali onde sono perciò *trasversali*. Ciascuno dei piani normali all'asse x_1 si sposta su sè stesso.

Tali onde sono dette *di distorsione*.

Dalle (31) è possibile ricavare s_2 e s_3 nella forma

$$s_2 = f_2(x_1 - at) + g_2(x_1 + at), \quad s_3 = f_3(x_1 - at) + g_3(x_1 + at).$$

Se è $f_3 = g_3 = 0$, sarà $s_3 = 0$: ogni punto oscillerà parallelamente all'asse x_2 ; le onde si dicono *polarizzare rettilineamente* e il piano $x_1 x_2$ si dirà piano di vibrazione; le onde saranno progressive e regressive in direzione dell'asse x_1 con velocità di propagazione a . Se è invece $s_2 = 0$, $s_3 \neq 0$, le onde saranno polarizzate rettilineamente con piano di vibrazione $x_1 x_3$. Nel caso generale lo spostamento $\vec{s}$ forma col piano $x_1 x_2$ un angolo θ tale

che $\operatorname{tg} \theta = \frac{s_3}{s_2}$; se per opportuna scelta delle funzioni f_2, f_3, g_2, g_3 tale angolo è costante, si ha ancora polarizzazione rettilinea, altrimenti le onde saranno non polarizzate. Se però s_2 ed s_3 sono funzioni sinusoidali di eguale frequenza, le onde, come è noto dalla composizione di moti sinusoidali su assi ortogonali, saranno *polarizzate ellitticamente*.

Per qualunque materiale la velocità di propagazione delle onde di distorsione $a = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$ è minore della velocità di propaga-

zione delle onde di compressione $b = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$; ciò è dovuto al fatto che la resistenza elastica del materiale nei confronti delle variazioni di volume è notevolmente superiore a quella opposta alle variazioni di posizione.

Entrambe le dette onde sono *onde spaziali* che si propagano nei mezzi continui illimitati. Se il mezzo è invece limitato da una superficie, su di essa si possono propagare *onde superficiali*, che hanno notevole importanza nel caso delle onde sismiche: esse hanno velocità di propagazione minore di quella delle onde spaziali,

in quanto il mezzo oppone ad esse resistenza minore; nei terremoti generalmente gli effetti sono dovuti quasi esclusivamente alle onde superficiali, che subiscono nella propagazione attenuazione minore; le onde spaziali, che subiscono maggiore attenuazione e che spesso arrivano prima, sono deboli e possono servire da segno premonitore.

4) Teorema di Clebsch.

Assegnato un campo vettoriale $\vec{u}$, si consideri una funzione incognita φ che in ogni punto del dominio in cui è definito $\vec{u}$ sia

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = \operatorname{div} \vec{u}.$$

Nota la $\operatorname{div} \vec{u}$, si tratta di un'equazione (di Poisson) differenziale alle derivate parziali del secondo ordine nella funzione incognita φ . La detta equazione si può anche scrivere

$$\operatorname{div} (\vec{u} - \operatorname{grad} \varphi) = 0$$

e quindi se ne deduce l'esistenza di un vettore $\vec{v}$ per cui è

$$\vec{u} - \operatorname{grad} \varphi = \operatorname{rot} \vec{v};$$

si conclude che è

$$\vec{u} = \operatorname{grad} \varphi + \operatorname{rot} \vec{v} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$$

con

$$\operatorname{rot} \vec{u}_1 = 0, \quad \operatorname{div} \vec{u}_2 = 0,$$

cioè vale il seguente *teorema di Clebsch*: un generico campo vettoriale si può sempre esprimere come somma di un campo potenziale (irrotazionale) e di un campo solenoidale.

5) Oscillazioni di tipo qualsiasi.

In base al teorema di Clebsch ogni campo vettoriale $\vec{s}$ può scriversi come somma di un campo $\vec{s}_1$ irrotazionale e di un campo $\vec{s}_2$ solenoidale. Se ne deduce che *uno spostamento elastico generico può sempre pensarsi come sovrapposizione di onde di compressione e di onde di distorsione* e ciò è confermato dalla esperienza.

§ 7. MECCANICA DEI FLUIDI.

1) Accelerazione lagrangiana e accelerazione euleriana.

Per studiare il moto di un fluido si possono seguire due punti di vista:

- 1) *lagrangiano o sostanziale*, secondo cui si segue il moto delle singole particelle;
- 2) *euleriano o locale*, secondo cui si fissa una posizione e si considerano le particelle che, al trascorrere del tempo, passano in quel punto.

In corrispondenza ai due punti di vista si hanno due accelerazioni:

- 1) *accelerazione lagrangiana*, che sorge dalla variazione che la velocità di una determinata particella, individuata dalla sua posizione all'istante t , subisce passando da tale posizione ad un'altra, fra l'istante t e l'istante successivo;
- 2) *accelerazione euleriana*, che sorge dalla variazione rispetto al tempo che in un punto prefissato subisce la velocità fra il passaggio di una particella all'istante t e di un'altra particella all'istante successivo.

L'accelerazione lagrangiana è la derivata rispetto al tempo della velocità di una determinata particella: tale velocità può dipendere dal tempo t sia direttamente sia attraverso la posizione della particella stessa, la quale dipende da t attraverso le sue coordinate $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, ossia è

$$(1) \quad \vec{v} = \vec{v}[x(t), y(t), z(t), t],$$

per cui si ha

$$(2) \quad \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} \frac{dz}{dt},$$

ossia

$$(3) \quad \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} v_x + \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} v_y + \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} v_z.$$

Per indicare sinteticamente tale risultato, si può introdurre la notazione simbolica

$$(\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} = v_x \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} + v_z \frac{\partial \vec{v}}{\partial z}$$

e quindi si ha

$$(4) \quad \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v}.$$

L'accelerazione euleriana si ha invece tenendo fissa la posizione e derivando solo rispetto al tempo t per cui tale accelerazione è $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$.

Possiamo dimostrare la formula

$$(5) \quad (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} = \text{grad} \frac{v^2}{2} + \text{rot} \vec{v} \times \vec{v};$$

infatti è

$$\left(\text{grad} \frac{v^2}{2} \right)_x = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) = v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial x};$$

$$\begin{aligned} (\text{rot} \vec{v} \times \vec{v})_x &= \begin{vmatrix} (\text{rot} \vec{v})_y & (\text{rot} \vec{v})_z \\ v_y & v_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} & -\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \\ v_y & v_z \end{vmatrix} = \\ &= v_z \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) + v_y \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x} \right); \end{aligned}$$

sommando si ha

$$\begin{aligned} (6) \quad \left(\text{grad} \frac{v^2}{2} + \text{rot} \vec{v} \times \vec{v} \right)_x &= v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} = \\ &= [(\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v}]_x \end{aligned}$$

e analoghe formule valgono per le componenti lungo gli assi y e z .

2) Linee di flusso e linee di corrente.

Consideriamo all'istante t una *linea di flusso* del vettore velocità (tale cioè che in ogni suo punto P sia tangente alla velocità $\vec{v}(P)$); chiamiamo *stazionario* un moto che non dipenda dal tempo; dimostriamo che nel moto stazionario le linee di flusso coincidono con le traiettorie delle singole particelle, ossia con le *linee di corrente*; infatti, se una particella si trova all'istante t nella posizione P su di una linea di flusso, si troverà sulla stessa linea di flusso anche nell'istante $t+dt$, perchè la sua posizione nel detto istante è

$$P' = P + \vec{v}(P)dt$$

e lo spostamento $P' - P$ risulta parallelo a $\vec{v}$ (come il vettore che congiunge due punti infinitamente vicini di una linea di flusso).

Ma all'istante $t+dt$ la linea di flusso passante per P non è cambiata, essendo il moto stazionario, e, ripetendo sempre lo stesso ragionamento, si dimostra che la particella si troverà ancora sulla stessa linea di flusso anche in un istante successivo a $t+dt$ e così via. Dunque la linea di flusso considerata è il luogo delle successive posizioni della particella, è cioè linea di corrente.

3) Equazioni del moto di un fluido non viscoso.

Per ottenere l'equazione indefinita del moto di un fluido non viscoso basta sostituire nell'equazione indefinita dell'equilibrio in ogni punto del mezzo la forza di massa con la forza perduta. La forza d'inerzia applicata alla massa infinitesima dm è

$$(7) \quad dm \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho dV \frac{d\vec{v}}{dt};$$

riferendoci all'unità di volume, cioè dividendo per il volume elementare dV si ottiene

$$(8) \quad \rho \frac{d\vec{v}}{dt}.$$

Se nell'equazione dell'equilibrio dei fluidi non viscosi

$$(9) \quad \text{grad } p = \rho \vec{F}$$

introduciamo la detta forza d'inerzia col segno cambiato si ottiene l'equazione

$$(10) \quad \rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\text{grad } p + \rho \vec{F};$$

questa equazione, che corrisponde a tre equazioni scalari, contiene cinque variabili scalari v_x, v_y, v_z, p e ρ . Per completare il bilancio occorre procurarsi ancora due equazioni scalari.

Un'ulteriore equazione si ottiene dal principio di conservazione della massa da cui si deduce la cosiddetta *equazione di continuità*. Basta scrivere che la quantità di massa che entra in un qualunque volume V nel tempo dt attraverso la superficie di contorno σ è esattamente uguale alla variazione della massa m contenuta in V . A tale scopo consideriamo un elemento $d\sigma$, sui cui consideriamo il versore $\vec{n}$ della normale esterna: costruiamo un cilindretto di base $d\sigma$ e di generatrice laterale $\vec{v} dt$ (Fig. 17); la massa contenuta in tale cilindretto, nell'intervallo di tempo dt ha attraversato la superficie $d\sigma$. Per valutare tale massa basta multi-

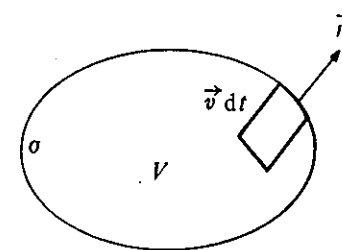


Fig. 17

plicare il volume del cilindretto per la densità ρ

$$(11) \quad -d\sigma \vec{v} \cdot \vec{n} dt \rho.$$

Per calcolare la massa che nell'intervallo di tempo dt attraversa tutta la σ basta integrare l'espressione precedente su tutta la σ e, tenendo conto che la variazione di massa è $dm = \frac{dm}{dt} dt$,

con $m = \int_V \rho dV$, si ha

$$(12) \quad - \oint_{\sigma} \rho \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma dt = \frac{d}{dt} \int_V \rho dV dt.$$

Semplificando per dt , portando $\frac{d}{dt}$ sotto integrale, applicando a primo membro il teorema della divergenza e scrivendo un unico integrale si ha

$$(13) \quad \int_V \left[\text{div} (\rho \vec{v}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right] dV = 0,$$

da cui, per l'arbitrarietà di V , si ottiene

$$(14) \quad \text{div} (\rho \vec{v}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

che è l'equazione di continuità preannunciata.

Per ottenere l'ultima equazione detta *complementare* basta precisare il legame che sperimentalmente si trova esistere fra la

pressione p e la densità ρ , legame che dipende dalla natura del fluido e dallo stato termodinamico in cui esso si trova.

Così per un liquido omogeneo, o per un gas omogeneo che non esplica la sua comprimibilità, l'equazione complementare si limita ad affermare che ρ è costante, per cui l'equazione (14) diventa

$$(15) \quad \operatorname{div} \vec{v} = 0$$

e in tale caso la (15) e la (10) sono sufficienti per determinare le incognite $\vec{v}$ e p .

Per un gas perfetto (cioè lontano dal punto di liquefazione e soggetto a pressioni non troppo forti) in condizioni isoterme è

$$(16) \quad p = a \rho$$

con $a = RT$, dove R è la costante dei gas perfetti e T è la temperatura assoluta supposta costante; per un gas perfetto in condizioni adiabatiche è

$$(17) \quad p = C \rho^\gamma,$$

dove C è una costante e γ è il rapporto fra il calore specifico a pressione costante e quello a volume costante. La (17) vale in condizioni isoentropiche, quando cioè l'entropia non varia né da punto a punto, né da istante ad istante.

Più in generale l'equazione complementare può essere messa nella forma

$$(18) \quad p = f(\rho).$$

In conclusione il quadro delle equazioni indefinite per il moto dei fluidi non viscosi è il seguente

$$(19) \quad \begin{cases} \rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \operatorname{grad} v^2 + \operatorname{rot} \vec{v} \times \vec{v} \right) = \rho \vec{F} - \operatorname{grad} p \\ \operatorname{div} (\rho \vec{v}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, & p = f(\rho). \end{cases}$$

A queste equazioni vanno aggiunte le *condizioni iniziali* e le *condizioni al contorno*. Le prime consistono nell'assegnare la velocità (ossia lo stato cinetico) e la densità (oppure la pressione) nell'istante iniziale in ogni punto del dominio in cui si svolge il fenomeno; le seconde si ottengono facilmente se il contorno è una superficie rigida: basta tradurre matematicamente la impenetrabilità tra fluido e parete, per cui il fluido non può che lambire la parete stessa, ossia imporre l'uguaglianza in ogni istante delle due componenti normali della velocità $\vec{v}$ del fluido e della velocità $\vec{u}$ della parete

$$(20) \quad v_n = u_n$$

e, in particolare

$$(21) \quad v_n = 0$$

se la parete è fissa.

Per calcolare velocità, densità e pressione in ogni istante e in ogni punto del dominio occorre quindi integrare le (19) sotto le dette condizioni: si tratta di un problema molto arduo, trattandosi di equazioni alle derivate parziali (esclusa l'ultima, che è in forma finita) del primo ordine, *non lineari*.

Ci limiteremo a studiare qualche problema particolare.

4) Piccoli moti e vibrazioni acustiche.

Consideriamo "piccoli moti", tali cioè che si possano trascurare i termini di grado superiore al primo nelle funzioni incognite e nelle loro derivate. E' perciò $\frac{d\vec{v}}{dt} \approx \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$; supponiamo inoltre trascurabili le forze di massa. La (19₁) diventa allora

$$(22) \quad \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p.$$

Allo scopo di linearizzare il termine a secondo membro introduciamo una nuova grandezza incognita adimensionale, che chiameremo *concentrazione* definita da

$$(23) \quad s = \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0},$$

dove ρ_0 è la densità media del fluido. Per piccole variazioni di ρ sarà $|s| \ll 1$.

Dalla (23) si ricava $\rho = \rho_0 (1 + s)$; sviluppando in serie la funzione $f(\rho)$ dell'equazione complementare si ricava

$$p = p(\rho_0 + \rho_0 s) = p(\rho_0) + \left(\frac{dp}{d\rho}\right)_{\rho_0} \rho_0 s + \dots \simeq p_0 + c^2 \rho_0 s,$$

dove si è posto $p(\rho_0) = p_0$ e $\left(\frac{dp}{d\rho}\right)_{\rho_0} = c^2$: è infatti p funzione crescente di ρ per cui è $\frac{dp}{d\rho} > 0$. E' $\text{grad } p = c^2 \rho_0 \text{ grad } s$.

Si ha allora, servendosi della nota serie geometrica e linearizzando,

$$\frac{1}{\rho} \text{grad } p = \frac{1}{\rho_0(1+s)} \rho_0 c^2 \text{grad } s = (1-s+s^2-\dots) c^2 \text{grad } s \simeq c^2 \text{grad } s.$$

L'equazione (22) diventa allora

$$(24) \quad \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -c^2 \text{grad } s;$$

facendo il rotazionale di questa equazione e ricordando che il rotazionale di un gradiente è nullo, si ottiene

$$\frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \vec{v} = 0$$

e quindi, se supponiamo che all'istante iniziale il moto sia irrotazionale, si ha in ogni istante successivo

$$\text{rot } \vec{v} = 0;$$

esiste perciò un potenziale cinetico φ , definito a meno di una funzione arbitraria del tempo per cui è

$$(25) \quad \vec{v} = \text{grad } \varphi.$$

Introducendo nella (24) si ha

$$\text{grad} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + c^2 s \right) = 0$$

da cui, conglobando in $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ un'ulteriore funzione arbitraria del tempo

$$(26) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} + c^2 s = 0.$$

L'equazione di continuità (19₂), tenendo conto della (23), diventa

$$\frac{\partial \rho_0 s}{\partial t} + \text{div} [(\rho_0 s + \rho_0) \vec{v}] = 0,$$

da cui, semplificando per ρ_0 , linearizzando e tenendo conto della (25),

$$(27) \quad \frac{\partial s}{\partial t} + \Delta \varphi = 0.$$

Il problema è quindi ricondotto alle due equazioni lineari (26) e (27) nelle due funzioni incognite φ ed s . Derivando la prima parzialmente rispetto al tempo ed eliminando s , si ha

$$(28) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = c^2 \Delta \varphi,$$

mentre operando analogamente sulla seconda ed eliminando φ si ha

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = c^2 \Delta s.$$

Essendo ρ e p funzioni lineari di s , anche ρ e p soddisfano ad identica equazione.

Se ci limitiamo al calcolo di φ nel caso unidimensionale $\varphi = \varphi(x, t)$, la (28) diventa

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$$

ed ha come soluzione generale

$$\varphi(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct)$$

che rappresenta la solita sovrapposizione di onde piane progressive e regressive che si propagano lungo l'asse x con velocità

$$c = \sqrt{\left(\frac{dp}{d\rho}\right)_{\rho_0}}$$

La velocità $\vec{v}$ ha come componenti

$$v_x = f'(x - ct) + g'(x + ct), \quad v_y = v_z = 0;$$

si tratta quindi di onde longitudinali. Anche s , p e ρ si propagano in modo analogo e quindi si tratta di onde di compressione, che, come caso particolare importante, comprendono le vibrazioni acustiche. E poichè, praticamente, tali vibrazioni avvengono in modo adiabatico, essendo

$$\left(\frac{dp}{d\rho}\right)_{\rho_0} = \frac{d}{d\rho} (C\rho^\gamma)_0 = (C\gamma\rho^{\gamma-1})_0 = \frac{C\gamma\rho_0^\gamma}{\rho_0} = \gamma \frac{p_0}{\rho_0},$$

è

$$c = \sqrt{\gamma \frac{p_0}{\rho_0}}$$

Poichè in condizioni normali per l'aria è

$$\gamma = 1,41, \quad p_0 = 101.370 \frac{\text{Kg massa}}{\text{m}^2 \text{sec}^2}, \quad \rho_0 = 1,29 \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3}$$

si ha $c = 332 \text{ m/sec}$ in ottimo accordo con l'esperienza.

5) Teoremi di Bernoulli.

Consideriamo, per ora, un moto stazionario, nel quale cioè $\vec{v}$, p e ρ variano in generale col punto P a cui si riferiscono, ma non variano col tempo. Sarà dunque

$$(29) \quad \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0.$$

Supponiamo inoltre che la forza di massa unitaria sia conservativa cioè ammette un potenziale U per unità di massa, per cui è

$$(30) \quad \vec{F} = \text{grad } U;$$

essendo poi, in virtù dell'equazione complementare, ρ funzione di p poniamo

$$(31) \quad \mathcal{P}(p) = \int^p \frac{dp}{\rho(p)},$$

cosicchè è

$$(32) \quad \text{grad } \mathcal{P} = \frac{d\mathcal{P}}{dp} \text{ grad } p = \frac{1}{\rho} \text{ grad } p.$$

$\mathcal{P}$ si chiama l'entalpia del sistema.

La (19₁) divisa per ρ diventa allora

$$(33) \quad \text{grad } \frac{v^2}{2} + \text{rot } \vec{v} \times \vec{v} = \text{grad } (U - \mathcal{P}).$$

Indichiamo ora con dP il vettore che congiunge due punti infinitamente vicini di una linea di flusso (o di corrente: si veda il n. 2); dP è parallelo a $\vec{v}$ e moltiplicando scalarmente per dP la (33) si ottiene

$$(34) \quad \text{grad} \left(\frac{v^2}{2} - U + \mathcal{P} \right) dP = 0;$$

il prodotto scalare a primo membro non è altro che il differenziale esatto del trinomio $\frac{v^2}{2} - U + \mathcal{P}$ lungo la linea di corrente

considerata; dalla (34) si deduce quindi che lungo la detta linea è

$$(35) \quad \frac{1}{2} v^2 - U + \mathcal{P} = C$$

dove C è una costante (che, generalmente, cambia da linea a linea).

La (35) costituisce il teorema di Bernoulli secondo il quale *nel moto stazionario di un fluido non viscoso soggetto a forza di massa conservativa è costante lungo una linea di corrente la somma dell'energia cinetica $\frac{v^2}{2}$ e dell'energia potenziale $-U$ per unità di massa e dell'entalpia $\mathcal{P}$.*

In particolare per un liquido omogeneo, essendo ρ costante, è $\mathcal{P} = \frac{p}{\rho}$ e quindi la (35) si può scrivere

$$(36) \quad \rho \frac{v^2}{2} - \rho U + p = C;$$

i primi due addendi del trinomio a primo membro rappresentano l'energia cinetica e l'energia potenziale per unità di volume.

Come applicazione della (36) possiamo ricavare la formula di Torricelli che fornisce la velocità di efflusso di un liquido da un recipiente dotato sul fondo di un piccolo foro (piccolo rispetto alle dimensioni del recipiente e al livello h del liquido); se la sezione del recipiente è grande rispetto a quella del foro, il moto può ritenersi stazionario. Considerata una linea di corrente che parte da un punto P_0 della superficie libera del liquido e giunge al foro O (Fig. 18), lungo di essa vale la (36). In P_0 è praticamente $v = 0$, $z = h$ e p uguaglia la pressione atmosferica p_0 ; in O la velocità ha valore incognito, è $z = 0$ e p si può ritenere ancora uguale a p_0 . Essendo $U = -gz$, se ne ricava

$$\rho g h + p_0 = \rho \frac{v^2}{2} + p_0$$

da cui

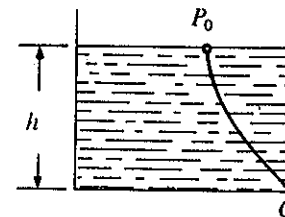


Fig. 18

$$v = \sqrt{2gh}$$

e quindi la velocità di efflusso è quella che raggiungerebbe un grave che cadesse liberamente partendo da fermo da un'altezza h .

Un caso particolare notevole è rappresentato dai cosiddetti moti irrotazionali, per i quali è in ogni istante

$$(37) \quad \text{rot } \vec{v} = 0.$$

Esiste allora uno scalare φ , detto *potenziale di velocità*, definito a meno di una funzione arbitraria del tempo per cui è

$$\vec{v} = \text{grad } \varphi.$$

Introducendo tale espressione nella (19₁), supposta la forza $\vec{F}$ conservativa e introducendo l'entalpia $\mathcal{P}$, si ottiene

$$\text{grad } \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \text{grad } \frac{v^2}{2} = \text{grad } (U - \mathcal{P}),$$

da cui si deduce che l'espressione

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} - U + \mathcal{P}$$

non deve variare con il posto (*teorema di Bernoulli generalizzato*).

Se poi il moto è anche stazionario, è $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$ e vale la (35)

in tutto il dominio del moto (per i moti stazionari generici la (35) vale solo lungo una linea di corrente).

In particolare per un liquido in moto stazionario irrotazionale è ovunque costante il trinomio

$$\frac{1}{2} \rho v^2 - \rho U + p.$$

Ciò permette, per esempio, di studiare il moto stazionario irrotazionale di un liquido attraverso un tubo ad asse orizzontale di sezione variabile; l'equazione di continuità diventa intanto

$$(38) \quad \operatorname{div} \vec{v} = 0$$

e quindi il campo della velocità è solenoidale; poichè il tubo è anche un tubo di flusso (in quanto la velocità risulta tangente al tubo stesso in ogni suo punto), se ne deduce che il flusso di $\vec{v}$ attraverso qualunque sezione del condotto è costante. Considerate due sezioni σ_1 e σ_2 (Fig. 19), è $\Phi_1 = \Phi_2$; per picco-

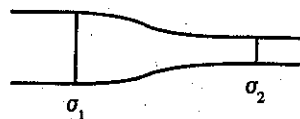


Fig. 19

le sezioni si può supporre $\vec{v}$ perpendicolare alle sezioni stesse per cui si ha

$$\sigma_1 v_1 = \sigma_2 v_2$$

e quindi l'intensità di $\vec{v}$ è inversamente proporzionale alla sezione stessa; in una strozzatura σ_2 si ha allora maggiore velocità ed, essendo praticamente costante l'energia potenziale, si ha anche minore pressione, quindi nella strozzatura il liquido aumenta di velocità e diminuisce la pressione.

Se poi alla (37) affianchiamo la (38) si ricava che il potenziale della velocità soddisfa all'equazione

$$\operatorname{divgrad} \varphi = 0 \quad \text{cioè} \quad \Delta \varphi = 0$$

e quindi risulta armonico.

6) Vortici.

Cominciamo col ricavare un significato fisico del vettore $\operatorname{rot} \vec{v}$; riferendoci al più generale stato cinetico di un corpo rigido ricordiamo che il campo di velocità da esso individuato è espresso da

$$\vec{v}(P) = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times (P-O)$$

dove O è un punto del corpo, $\vec{v}_0$ è la sua velocità, $\vec{\omega}$ è il vettore velocità angolare. Per semplificare i calcoli assumiamo come asse z l'asse per O parallelo ad $\vec{\omega}$. E' allora

$$\vec{\omega} = r \vec{k}, \quad \vec{\omega} \times (P-O) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = -ry \vec{i} + rx \vec{j}$$

Si ha inoltre, ricordando che $\vec{\omega}$ non dipende da P ,

$$\operatorname{rot} [\vec{\omega} \times (P-O)] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -ry & rx & 0 \end{vmatrix} = 2r \vec{k} = 2 \vec{\omega};$$

essendo $\operatorname{rot} \vec{v}_0 = 0$, si ha che è

$$\operatorname{rot} \vec{v} = 2 \vec{\omega},$$

ossia il rotazionale della velocità dei punti di un corpo rigido è il doppio della sua velocità angolare.

In un generico moto fluido consideriamo ora il vettore

$$\vec{r} = \operatorname{rot} \vec{v}$$

(che rappresenta il doppio della velocità angolare di ogni elemento fluido); ad ogni punto P associamo il corrispondente vettore $\vec{r}$: otteniamo così un campo vettoriale solenoidale in quanto è

$$\operatorname{div} \vec{r} = \operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{v} = 0.$$

Un tubo di flusso del vettore $\vec{r}$ si dice *tubo vorticoso*. Esso, come tutti i campi solenoidali, o si estende all'infinito, o termina sul contorno, o si chiude su sè stesso.

E' molto importante il caso di un tubo vorticoso all'esterno del quale il moto sia irrotazionale: detto tubo rappresenta un *vortice*, quale corrisponde all'osservazione di movimenti fluidi.

La circolazione del vettore velocità lungo una linea del tubo che lo avvolge una volta sola eguaglia, per il teorema di Stokes, il flusso di $\vec{r}$ attraverso il tubo vorticoso ed è quindi indipendente dalla linea scelta: si tratta di una grandezza caratteristica del tubo considerato e si chiama *intensità $\mathcal{T}$ del vortice*.

Nel caso particolare in cui si considera un tubo vorticoso infinitamente sottile, si ha un *filetto vorticoso*, che è caratterizzato geometricamente da una linea γ detta *linea vorticoso*, cioè da una linea di flusso del vettore $\vec{r}$. Se $d\sigma$ rappresenta la sezione del filetto in un punto generico P della linea, sezione fatta con un piano passante per P e normale a γ , risulta

$$d\mathcal{T} = r d\sigma$$

e la quantità $d\mathcal{T}$ non varia al variare del punto P su γ .

7) Vortici nei fluidi perfetti soggetti a forze conservative.

Consideriamo ora fluidi perfetti (ossia non viscosi) soggetti a forze di massa conservative. Introducendo l'entalpia $\mathcal{P}$, l'equazione del moto (10) si scrive

$$(39) \quad \frac{d\vec{v}}{dt} = \text{grad} (U - \mathcal{P}).$$

Consideriamo una linea chiusa γ sempre formata dalle stesse particelle fluide (e quindi eventualmente deformabile) e chiamiamo C la circuitazione della velocità lungo di essa; sarà ⁽¹⁾

(1) L'accelerazione dei punti di γ è quella lagrangiana; si deriva inoltre anche il dP in quanto la curva è variabile.

$$\frac{dC}{dt} = \frac{d}{dt} \oint_{\gamma} \vec{v} \cdot dP = \oint_{\gamma} \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot dP + \oint_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{v}.$$

In base alla (39) si ha

$$\frac{dC}{dt} = \oint_{\gamma} \text{grad} (U - \mathcal{P}) \cdot dP + \oint_{\gamma} d \frac{v^2}{2} = \oint_{\gamma} d \left(U - \mathcal{P} + \frac{v^2}{2} \right) = 0,$$

essendo nullo l'integrale di un differenziale esatto lungo una curva chiusa. Se ne deduce

$$C = \text{cost.}$$

questa relazione esprime il teorema di Thomson: *in un fluido perfetto soggetto a forze di massa conservative è costante la circuitazione della velocità lungo una curva chiusa formata sempre dalle stesse particelle*.

Dal teorema di Thomson si può dedurre il teorema di Lagrange: *in un fluido perfetto in moto regolare sotto l'azione di forze di massa conservative non si possono creare vortici*: infatti se in un dato istante in ogni punto di una regione $\mathcal{R}$ aciclica del fluido è $\text{rot } \vec{v} = 0$, consideriamo una generica linea chiusa γ tutta contenuta in $\mathcal{R}$; nell'istante considerato si ha per il teorema di Stokes

$$C = \oint_{\gamma} \vec{v} \cdot dP = \int_{\sigma} \text{rot } \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma = 0$$

(dove σ è una generica superficie che ha come orlo γ ed è tutta contenuta in $\mathcal{R}$). In base al teorema di Thomson sarà $C = 0$ in ogni altro istante lungo la linea formata dalle particelle che costituivano γ all'istante iniziale; poichè ciò si verifica per ogni linea chiusa di $\mathcal{R}$, deve risultare nullo il flusso di $\text{rot } \vec{v}$ attraverso una qualunque superficie σ di $\mathcal{R}$ e quindi deve essere ovunque $\text{rot } \vec{v} = 0$. Perciò se in un determinato istante è $\text{rot } \vec{v} = 0$ in una regione aciclica $\mathcal{R}$, sarà sempre $\text{rot } \vec{v} = 0$ in $\mathcal{R}$.

In particolare se il moto del fluido parte dalla quiete, non si possono formare vortici sotto l'azione di forze di massa con-

servative in quelle parti di fluido in cui il moto è regolare. I vortici si formano, per esempio, per scontro fra due correnti fluide.

Dimostriamo ora un primo teorema di Helmholtz sui vortici: *i tubi vorticosi e quindi i vortici sono sempre formati dalle stesse particelle*. Si consideri infatti in un dato istante un tubo vorticoso e si consideri sulla sua parete un'area generica σ anche infinitesima e si indichi con γ la linea chiusa che la delimita; la circuitazione C della velocità $\vec{v}$ lungo γ è nulla perchè, essendo $\text{rot } \vec{v}$ tangente a σ , è nullo il flusso di $\text{rot } \vec{v}$ attraverso σ . Ma, per il teorema di Thomson, se C è nulla in un dato istante, lo è sempre, cioè le particelle che costituiscono γ sono sempre tali che lungo la linea chiusa γ da esse determinata è sempre $C=0$, quindi attraverso la superficie infinitesima σ , limitata da γ , $\text{rot } \vec{v}$ ha flusso sempre nullo cioè è tangente a σ e perciò tutta la σ e di conseguenza le particelle di γ appartengono sempre ad un tubo vorticoso. Quindi un tubo vorticoso, e perciò anche un vortice, è sempre costituito dalle stesse particelle.

Un secondo teorema di Helmholtz afferma che *in un fluido perfetto in moto regolare sotto l'azione di forze conservative i vortici hanno sempre la stessa intensità*: infatti l'intensità di un vortice è misurata, in un dato istante, dalla circuitazione C del vettore velocità lungo una curva chiusa tracciata sulla superficie che limita il vortice in modo da avvolgerlo una sola volta. Le particelle che formano tale linea, per il primo teorema di Helmholtz, resteranno sempre sulla parete che limita il vortice e la circuitazione C di $\vec{v}$ lungo detta linea (che si manterrà chiusa e avvolgerà il vortice una sola volta) resterà costante in base al teorema di Thomson; il valore dell'intensità C del vortice rimarrà quindi costante.

Ne segue che i vortici in un fluido perfetto soggetto a forze di massa conservative non si possono distruggere nella regione in cui il moto è regolare.

§ 8. CENNI DI MAGNETOFLUIDODINAMICA E ONDE DI ALFVÉN

Diamo ora un cenno su un recentissimo capitolo della Fisica Matematica che si è sviluppato quasi esclusivamente negli ultimi anni a seguito delle sue numerose e importanti applicazioni a fenomeni cosmici (macchie solari, campi magnetici nel cosmo) e a problemi tecnici (viaggi spaziali, controllo dell'energia termonucleare, produzione di energia elettrica dall'energia termica senza passare attraverso l'energia meccanica, ecc.). Questo nuovo capitolo ha preso il nome di magnetofluidodinamica in quanto studia particolari fenomeni che sorgono quando un fluido elettricamente conduttore è in moto in presenza di un campo magnetico.

Per poter ottenere le equazioni che descrivono tali fenomeni dovremo quindi associare le equazioni dell'elettromagnetismo a quelle della dinamica dei fluidi introducendo in esse i termini di mutua azione; ci limiteremo ai fluidi incompressibili e non viscosi.

Le equazioni di Maxwell rimangono inalterate in quanto, com'è noto dalla teoria della relatività, valgono anche per i mezzi in moto:

$$\begin{aligned} (1_1) \quad & \left\{ \begin{array}{l} \text{rot } \vec{H} = \vec{u} + \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ \text{rot } \vec{E} = - \mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \end{array} \right. \end{aligned}$$

è stato ammesso implicitamente che siano valide le equazioni ma-

teriali $\vec{B} = \mu \vec{H}$, $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$, ciò che anche in un mezzo in moto è senz'altro accettabile, se la velocità del mezzo è molto piccola nei confronti della velocità della luce.

Una notevole modifica va introdotta invece nell'espressione del vettore densità di corrente $\vec{u}$ in quanto si può dimostrare che al campo elettrico $\vec{E}$ va aggiunto un campo indotto dal moto delle particelle del mezzo che con velocità $\vec{v}$ tagliano le linee di induzione magnetica $\vec{B} = \mu \vec{H}$; questo campo indotto vale $\mu \vec{v} \times \vec{H}$ (e, ovviamente, è nullo se $\vec{v}$ è parallelo a $\vec{B}$, cioè se il moto avviene lungo le linee di induzione).

A tutta la corrente elettrica di conduzione $\gamma(\vec{E} + \mu \vec{v} \times \vec{H})$ va inoltre aggiunta la corrente elettrica di convezione, determinata dalla densità di carica spaziale ρ_e che viene trasportata con velocità $\vec{v}$ dal moto del fluido. Concludiamo che la semplice equazione materiale $\vec{u} = \gamma \vec{E}$ dei mezzi in quiete va sostituita con la equazione più complessa

$$(2) \quad \vec{u} = \gamma(\vec{E} + \mu \vec{v} \times \vec{H}) + \rho_e \vec{v}.$$

Continuano a valere le equazioni

$$(3) \quad \text{div } \vec{D} = \rho_e, \text{div } \vec{H} = 0.$$

Nell'equazione della dinamica dei fluidi occorre aggiungere alle forze abituali quelle di natura elettromagnetica e precisamente:

1) la cosiddetta forza deflettente di Lorentz $\mu \vec{u} \times \vec{H}$ esercitata nella unità di volume dall'induzione $\vec{B} = \mu \vec{H}$ sulla corrente di densità $\vec{u}$ che taglia le linee di induzione (se $\vec{u}$ fosse parallela a $\vec{B}$, tale forza si annullerebbe);

2) la forza $\rho_e \vec{E}$ esercitata dal campo elettrico $\vec{E}$ sulla carica ρ_e esistente nell'unità di volume. L'equazione del moto è quindi

$$(4) \quad \rho \frac{d\vec{v}}{dt} = - \text{grad } p + \rho \vec{F} + \mu \vec{u} \times \vec{H} + \rho_e \vec{E},$$

dove ρ è la densità del mezzo (supposta costante) ed $\vec{F}$ è la for-

za di massa di natura non elettromagnetica: la supporremo conservativa in modo che sia

$$(5) \quad \vec{F} = - \text{grad } U.$$

Rimane poi inalterata l'equazione di continuità che per i fluidi incompressibili è

$$(6) \quad \text{div } \vec{v} = 0.$$

Si tratta, come si vede, di un sistema di equazioni che presenta difficoltà formidabili, dovute anche al fatto che i termini di azione mutua fra campo elettromagnetico e moto risultano tutti non lineari.

Ci limiteremo a ricavare una soluzione sotto le seguenti limitazioni:

1) la conducibilità γ del mezzo sia tanto grande da poter essere considerata infinita; in tale caso dalla (2), divisa per γ al $\lim_{\gamma \rightarrow \infty}$ si ricava:

$$\vec{E} + \mu \vec{v} \times \vec{H} = \frac{1}{\gamma} (\vec{u} - \rho_e \vec{v}) \rightarrow 0,$$

per cui l'incognita $\vec{E}$ può essere espressa così

$$(7) \quad \vec{E} = -\mu \vec{v} \times \vec{H};$$

la (1₂) diventa allora

$$(8) \quad \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \text{rot}(\vec{v} \times \vec{H});$$

si può dimostrare inoltre che per γ molto grande si ha:

a) la corrente di spostamento $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ è trascurabile nei confronti della corrente $\vec{u}$ per cui dalla (1₁) si ricava

$$(9) \quad \vec{u} = \text{rot } \vec{H};$$

b) la densità spaziale di carica ρ_e è sempre nulla se lo è al-

l'istante $t = 0$; basta infatti derivare la (3₁) rispetto al tempo ricavando $\frac{\partial \rho_e}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \vec{D} = \operatorname{div} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \simeq 0$; se ne ricava che ρ_e non dipende dal tempo e quindi mantiene sempre il suo valore iniziale che è nullo.

- 2) il fluido sia soggetto a un campo magnetico uniforme $\vec{H}_0$;
- 3) il fenomeno sia unidimensionale, ossia le grandezze del fenomeno dipendano solo dal tempo e da una sola coordinata cartesiana per esempio la z .

L'equazione del moto, per la (5) e la (9) diventa allora

$$(10) \quad \frac{d\vec{v}}{dt} = -\operatorname{grad} \left(\frac{p}{\rho} - U \right) + \frac{\mu}{\rho} \operatorname{rot} \vec{H} \times \vec{H};$$

il problema è quindi ricondotto alle equazioni (6), (8), (10) oltre alla condizione iniziale (3₂). Si tratta quindi complessivamente di sette equazioni in sette incognite (le componenti cartesiane di $\vec{v}$ e $\vec{H}$ e la pressione p): le equazioni sono alle derivate parziali del 1° ordine non lineari.

La (6) nel caso unidimensionale dà $\frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$ e quindi v_z può dipendere solo dal tempo e rappresenta perciò un moto rigido traslatorio di tutto il fluido parallelamente all'asse z . Per semplicità, dato che stiamo cercando una soluzione particolare, possiamo porre:

$$(11) \quad v_z = 0.$$

Si ha allora:

$$(12) \quad \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} v_z = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}.$$

Per un generico vettore $\vec{W}$ si ha poi ($\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ sono i versori di una terna cartesiana)

$$(13) \quad \operatorname{rot} \vec{W} = \frac{\partial}{\partial z} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ W_x & W_y & W_z \end{vmatrix} = \frac{\partial}{\partial z} (\vec{k} \times \vec{W}) = \vec{k} \times \frac{\partial \vec{W}}{\partial z};$$

segue in particolare che il rot di un qualunque vettore ha componente nulla lungo l'asse z . Allora dalla proiezione di (8) sull'asse z si ha $\frac{\partial H_z}{\partial t} = 0$, mentre dalla (3₂) si ha $\frac{\partial H_z}{\partial z} = 0$, per cui H_z è costante ed uguale quindi alla componente H_{0z} del campo magnetico primario $\vec{H}_0$.

E' inoltre

$$(14) \quad \operatorname{rot} (\vec{v} \times \vec{H}) = \frac{\partial}{\partial z} [\vec{k} \times (\vec{v} \times \vec{H})] = \frac{\partial}{\partial z} (H_z \vec{v} - v_z \vec{H}) = H_{0z} \frac{\partial \vec{v}}{\partial z}$$

$$(15) \quad \operatorname{rot} \vec{H} \times \vec{H} = \left(\vec{k} \times \frac{\partial \vec{H}}{\partial z} \right) \times \vec{H} = (\vec{k} \cdot \vec{H}) \frac{\partial \vec{H}}{\partial z} - \left(\frac{\partial \vec{H}}{\partial z} \cdot \vec{H} \right) \vec{k} =$$

$$= H_{0z} \frac{\partial \vec{H}}{\partial z} - \frac{1}{2} \frac{\partial H^2}{\partial z} \vec{k} =$$

$$= H_{0z} \frac{\partial \vec{H}}{\partial z} - \operatorname{grad} \frac{H^2}{2}$$

Ponendo $\vec{H} = \vec{H}_0 + \vec{h}$ e tenendo conto di (14), (12) e (15) le (8) e (10) diventano

$$(16) \quad \frac{\partial \vec{h}}{\partial t} = H_{0z} \frac{\partial \vec{v}}{\partial z}$$

$$(17) \quad \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\operatorname{grad} \left(\frac{p}{\rho} - U + \frac{\mu}{\rho} \frac{H^2}{2} \right) + \frac{\mu}{\rho} H_{0z} \frac{\partial \vec{h}}{\partial z};$$

l'ultima equazione si può scindere nella sua componente parallela piano xy e nella sua componente parallela all'asse z

$$(18) \quad \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \frac{\mu}{\rho} H_{0z} \frac{\partial \vec{h}}{\partial z}, \quad \operatorname{grad} \left(\frac{p}{\rho} + \frac{\mu}{\rho} \frac{H^2}{2} - U \right) = 0.$$

Derivando la (16) rispetto al tempo e la (18₁) rispetto a z si ottiene

$$(19) \quad \left(\frac{\partial^2 \vec{h}}{\partial t^2} - V_a^2 \frac{\partial^2 \vec{h}}{\partial z^2} \right) = 0 \quad \text{con} \quad V_a^2 = \frac{\mu}{\rho} H_{0z}^2;$$

se invece si derivasse la (16) rispetto a z e la (18) rispetto al tempo si troverebbe che anche $\vec{v}$ soddisfa alla (19) e quindi il campo magnetico indotto $\vec{h}$ e la velocità $\vec{v}$ (entrambi normali alla direzione di propagazione), che soddisfano alla equazione (19) delle corde vibranti, si propagano per onde piane trasversali nella direzione dell'asse z con velocità:

$$V_a = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} H_{0z}.$$

Si vede immediatamente che non c'è propagazione in direzione normale ed $\vec{H}_0$ e che la componente di $\vec{H}_0$ normale alla direzione di propagazione non ha effetto. Con calcoli analoghi a quelli usati nel caso delle onde elettromagnetiche si ricava che la soluzione generale del sistema costituito dalle equazioni (16) e (18) è espressa dalle componenti cartesiane

$$h_i = f_i(z - V_a t) + g_i(z + V_a t)$$

$$v_i = -\sqrt{\frac{\mu}{\rho}} f_i(z - V_a t) + \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} g_i(z + V_a t), \quad (i = x, y)$$

dove le f e le g rappresentano funzioni arbitrarie da determinarsi in base alle condizioni iniziali e ad eventuali condizioni al contorno: se ci si limita alle onde progressive, $\vec{v}$ è antiparallela ad $\vec{h}$, mentre nelle onde regressive $\vec{v}$ è proprio parallela ad $\vec{h}$.

Queste onde sono dette magnetoidrodinamiche o di ALFVÉN.

Da (18₂) si ricava che il trinomio

$$p + \frac{\mu}{2} H^2 - \rho U$$

rimane costante in tutta la regione occupata dal fluido, potendo

solo variare col tempo, e ci dà per esempio la pressione p non appena sia noto $\vec{H}$ e per un determinato valore z_0 di z la pressione in funzione del tempo: si ha infatti

$$p(z, t) = -\frac{\mu}{2} H^2(z, t) + \rho U(z) + p(z_0, t) + \frac{\mu}{2} H^2(z_0, t) - \rho U(z_0).$$

Il campo elettrico $\vec{E}$ si ricava mediante la (7): è quindi possibile risolvere completamente il problema.

§ 9. TEORIA DI DIFFUSIONE DEL CALORE.

1) Legge di Fourier.

A fondamento di tutta la teoria riguardante la diffusione del calore introduciamo la legge di Fourier relativa alla diffusione del calore attraverso una parete piana indefinita le cui facce siano mantenute a temperature diverse e costanti T_1 e T_2 (con $T_1 > T_2$) (Fig. 20).

Detta legge afferma che c'è passaggio di calore dalla faccia più calda alla più fredda e che la *quantità di calore q che passa attraverso l'unità di superficie nell'unità di tempo, detta densità di corrente termica, è direttamente proporzionale alla differenza di temperatura fra le due facce e inversamente proporzionale alla loro distanza s ossia:*

$$(1) \quad q = k \frac{T_1 - T_2}{s}$$

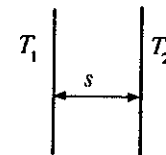


Fig. 20

dove k , *coefficiente di conducibilità termica interna*, dipende dal materiale che compone la parete.

Per estendere tale risultato al caso di un solido qualunque, consideriamo in un dato istante, nel dominio occupato dal corpo, la famiglia di *superfici isoterme*

$$T(x, y, z) = \text{cost.}$$

e ne consideriamo due infinitamente vicine, corrispondenti ai valori T e $T + \Delta T$ (Fig. 21); allo strato solido compreso fra di esse appli-

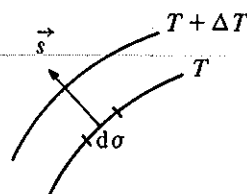


Fig. 21

chiamo la legge di Fourier: più precisamente consideriamo un elemento $d\sigma$ della superficie $T = \text{cost.}$ e su di esso prendiamo il versore normale $\vec{s}$ orientato nel verso delle T crescenti. La quantità di calore dq che nell'unità di tempo attraversa lo strato passando per $d\sigma$ è uguale al prodotto di $d\sigma$ per la densità di corrente termica e quest'ultima si calcola in base alla (1) in cui a s si sostituisca la distanza Δs fra le due superfici considerate e ad $T_1 - T_2$ la differenza $T - (T + \Delta T) = -\Delta T$; si avrà allora:

$$dq = -k \frac{\Delta T}{\Delta s} d\sigma$$

e al limite per $\Delta s \rightarrow 0$ si ha la formula ($\frac{\partial T}{\partial s}$ è la derivata di T nella direzione di $\vec{s}$)

$$(2) \quad dq = -k \frac{\partial T}{\partial s} d\sigma;$$

il segno meno indica che la corrente termica va nel verso delle temperature decrescenti.

Per giungere al caso più generale consideriamo nel dominio occupato dal corpo un elemento superficiale $d\sigma$ comunque orientato e sia $\vec{n}$ il versore normale a $d\sigma$ (orientato come si dirà in seguito).

Per calcolare la quantità di calore dq che nell'unità di tempo attraversa $d\sigma$, consideriamo la superficie isoterma passante per il centro di $d\sigma$ e sia $\vec{s}$ il versore normale ad essa orientato come le T crescenti; sia $d\sigma'$ la proiezione normale di $d\sigma$ su tale superficie (Fig. 22). Si ha

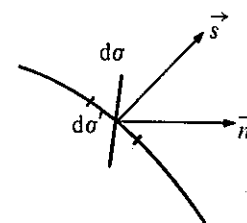


Fig. 22

$$d\sigma' = d\sigma \vec{s} \cdot \vec{n}$$

($\vec{n}$ è preso in modo che formi con $\vec{s}$ un angolo $\leq \pi/2$, essendo $\vec{s} \cdot \vec{n}$ il coseno dell'angolo fra i due elementi di superficie); dq è quella stessa che nell'unità di tempo attraversa $d\sigma'$ ed è quindi per la (2)

$$dq = -k \frac{\partial T}{\partial s} d\sigma' = -k \frac{\partial T}{\partial s} \vec{s} \cdot \vec{n} d\sigma.$$

Ora $\frac{\partial T}{\partial s} \vec{s}$ è il gradiente di T (normale all'isoterma nel verso delle T crescenti) e quindi si conclude con la formula (valida per qualunque orientamento di $\vec{n}$)

$$(3) \quad dq = -k \text{grad } T \cdot \vec{n} d\sigma = -k \frac{\partial T}{\partial n} d\sigma;$$

$-k \text{grad } T$ si chiama *vettore densità di corrente termica*.

2) Equazione della diffusione del calore.

Tale equazione si basa sul principio della conservazione della quantità di calore. Si devono escludere trasformazioni di calore in altra forma di energia.

Consideriamo una porzione v arbitraria del mezzo e sia σ la superficie che la limita di cui $\vec{n}$ sia il versore della normale esterna; scriviamo che la quantità di calore che entra in v attraverso la σ nel tempo dt (proporzionale a dt) è uguale all'incremento nel tempo dt della quantità di calore Q contenuta in v . Detto c

il calore specifico (per unità di massa) e ρ la densità del mezzo è $Q = \int_v c \rho T dv$. Ricordando la (3) si ha

$$\oint_v k \text{ grad } T \cdot \vec{n} d\sigma dt = \frac{d}{dt} \int_v c \rho T dv dt.$$

Applicando al primo membro il teorema della divergenza e portando la derivata rispetto al tempo sotto il secondo integrale (in cui ρ e c sono da considerarsi indipendenti dal tempo) si ha

$$\int_v \left[\text{div}(k \text{ grad } T) - c \rho \frac{\partial T}{\partial t} \right] dv = 0$$

e quindi per l'arbitrarietà di v se ne deduce

$$(4) \quad \text{div}(k \text{ grad } T) = c \rho \frac{\partial T}{\partial t}.$$

Se il mezzo è omogeneo, k , c e ρ si possono considerare costanti (anche se, in effetti possono avere delle variazioni per grandi variazioni della temperatura T) e quindi posto

$$\frac{k}{c\rho} = b^2 \text{ si ha } (5) \quad b^2 \Delta T = \frac{\partial T}{\partial t}$$

che si chiama *equazione della diffusione del calore* ed è alle derivate parziali del secondo ordine lineare.

Se si considera un corpo limitato occorre introdurre anche delle condizioni al contorno; se supponiamo che il corpo sia a contatto con altri corpi a temperatura T_0 (nota in ogni punto ed eventualmente funzione del tempo) si può, escluso uno scambio di calore per irraggiamento e supposta non grande la differenza $T - T_0$, ammettere, in base all'esperienza, che la quantità di calore dq che nell'unità di tempo esce attraverso un elemento $d\sigma$ del contorno sia

$$(6) \quad dq = \gamma (T - T_0) d\sigma,$$

dove T è la temperatura del corpo in $d\sigma$ e γ è il coefficiente di

conducibilità superficiale e dipende dal corpo (e, eventualmente, dalla velocità relativa del corpo rispetto al fluido in cui può essere immerso); ora in base alla (3) è sulla σ

$$\frac{dq}{d\sigma} = -k \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_\sigma$$

per cui si ha su σ la condizione

$$(7) \quad \frac{\partial T}{\partial n} = -\frac{\gamma}{k} (T - T_0)$$

che lega la derivata normale di T ai valori della T e della T_0 .

Come casi particolari considereremo:

a) $\frac{\gamma}{k}$ molto grande in modo da poter essere considerato infinito:

la (7) diventa allora

$$(8) \quad T = T_0$$

cioè la temperatura sulla superficie è sensibilmente uguale a quella del mezzo con cui è a contatto.

b) $\gamma = 0$ (corpo termicamente isolato) per cui la (7) diventa

$$(9) \quad \frac{\partial T}{\partial n} = 0.$$

Il problema fondamentale della diffusione del calore consiste nella soluzione dell'equazione (5) affiancata dalla condizione al contorno (7) e assegnata la temperatura T all'istante iniziale in ogni punto del corpo. Si può dimostrare che, sotto certe ipotesi di regolarità per i dati iniziali e al contorno, la soluzione esiste ed è unica.

Nel caso stazionario la (5) diventa

$$(10) \quad \Delta T = 0,$$

ossia la temperatura è una funzione armonica; se la (10) è affiancata dalla (8) il problema è di Dirichlet, mentre con la (9) diventa un problema di Neumann ed ha come immediata soluzione

zione $T = \text{cost.}$

3) Caso unidimensionale.

Ci occuperemo per ora del caso unidimensionale, in cui cioè la temperatura è funzione di una sola coordinata spaziale per esempio la x ; le superfici isoterme sono perciò piani perpendicolari all'asse x .

La (5) diventa

$$(11) \quad b^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial T}{\partial t}$$

Tale equazione riguarda la diffusione del calore attraverso una parete omogenea illimitata a facce parallele che sono superfici isoterme oppure attraverso un filo rettilineo, omogeneo, a sezione costante, termicamente isolato sulla superficie laterale. Le condizioni iniziali consisteranno nell'assegnare la temperatura per $t=0$ in ogni punto ossia

$$(12) \quad T(x, 0) = f(x),$$

mentre le condizioni al contorno consisteranno nell'assegnare per $t > 0$ la temperatura agli estremi $x = 0$ e $x = l$ del corpo.

Supponiamo che sia

$$(13) \quad T(0, t) = T(l, t) = 0.$$

Si tratta di risolvere il problema costituito dalla (11) con le condizioni (12) e (13).

Possiamo cercare delle soluzioni a variabili separate del tipo

$$T(x, t) = X(x) \Theta(t).$$

Sostituendo nella (11) e separando le variabili abbiamo

$$\frac{X''}{X} = \frac{1}{b^2} \frac{\Theta}{\Theta},$$

da cui con le solite considerazioni si ottiene

$$(14) \quad X'' + \omega^2 X = 0, \quad \dot{\Theta} = -\omega^2 b^2 \Theta,$$

dove ω è una costante (reale o complessa). Si ricava

$$X = A \cos \omega x + B \sin \omega x \quad \Theta = C e^{-\omega^2 b^2 t}.$$

Imponendo le (13) si ha

$$A = 0, \quad \sin \omega l = 0$$

da cui $\omega l = n\pi$, ossia $\omega_n = n \frac{\pi}{l}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)

e quindi ω deve essere reale e assumere uno degli infiniti autovalori suddetti. Una soluzione semplice del problema (11) e (13) è quindi

$$(15) \quad T_n(x, t) = B_n \sin \frac{n\pi}{l} x e^{-(n^2 \pi^2 / l^2) b^2 t} \quad (B_n = BC).$$

Essendo la (11) lineare e le (13) lineari omogenee, la serie delle soluzioni semplici (15)

$$T(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi}{l} x e^{-(n^2 \pi^2 / l^2) b^2 t}$$

è ancora soluzione del problema se è convergente. Imponendo la condizione iniziale (12) si ha

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi}{l} x = f(x),$$

ossia le infinite costanti arbitrarie B_n vengono determinate dal fatto che sono i coefficienti dello sviluppo della funzione $f(x)$ assegnata per $0 \leq x \leq l$ in serie di soli seni.