

Ricostruzione di mappe Retinotopiche mediante filtri di Gabor

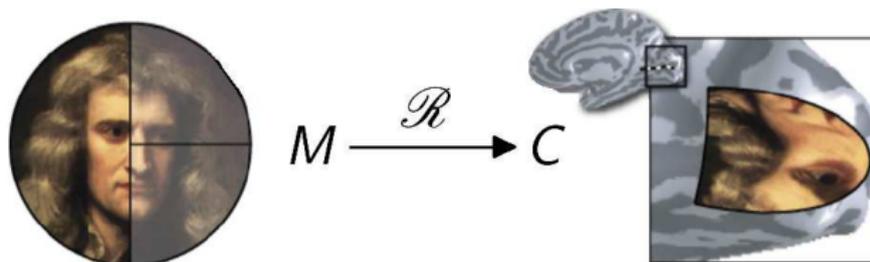
Stefano Diomedì

23 marzo 2018

L'obiettivo è quello di ricostruire mappe retinotopiche o corticali della corteccia visiva umana a partire dall'attività neurale sviluppata in presenza di uno stimolo visivo e misurata mediante fMRI.

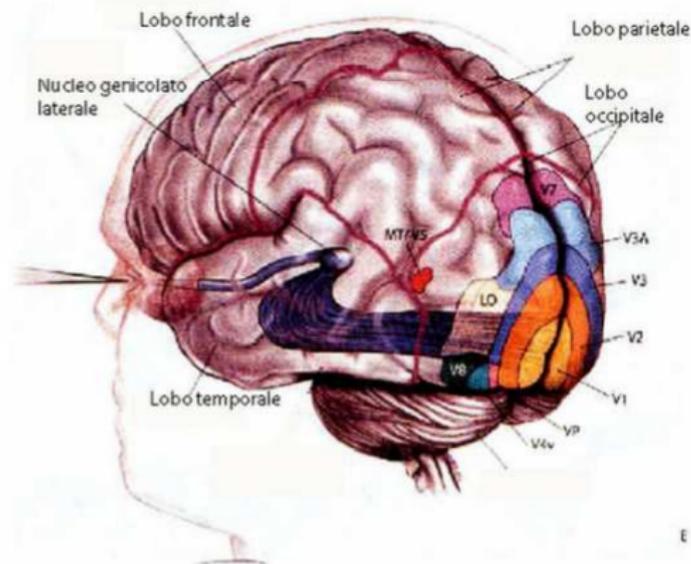
$$\mathcal{R} : M \rightarrow C \quad (1)$$

dove $M \subset \mathbb{R}^2$ è il piano retinico e C la corteccia visiva.



- dataset
- encoding/relazione filtri di gabor energia
- analisi dei campi recettori
- mappa retinocorticale

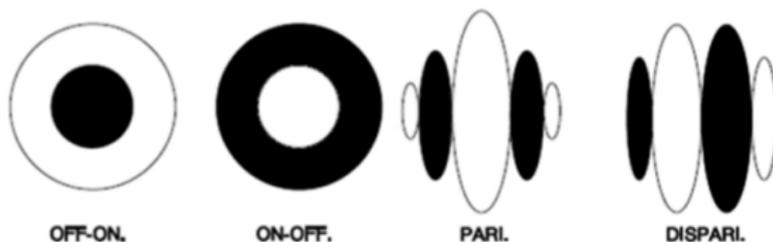
Il percorso degli stimoli visivi



Cellule neuronali Semplici

Le *cellule semplici* vennero individuate negli anni 90 da Hubel e Wiesel. Ogni cellula semplice è caratterizzata da un **Profilo Recettore (PR)** e **Campo Recettore (CR)**

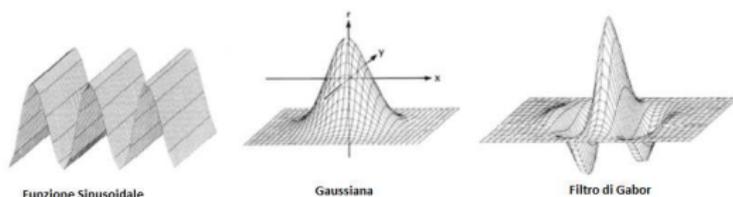
$$PR : CR \rightarrow \mathbb{R} \quad (2)$$



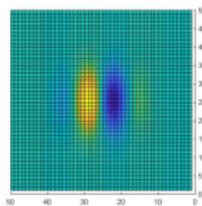
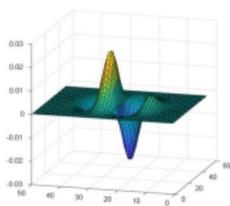
In generale un filtro di gabor :

$$\psi_{\sigma,\omega,\vartheta}(x,y) = e^{i\omega\bar{y}} G_{\sigma}(x,y) \quad (3)$$

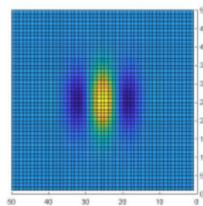
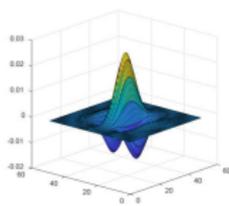
dove ω è la frequenza, ϑ è l'orientazione del filtro, G_{σ} è una Gaussiana 2D e $\bar{y} = -x\sin(\vartheta) + y\cos(\vartheta)$.



$$\text{Im}(\psi_{\sigma,\omega,\vartheta}) = \sin(\omega\bar{y})G_{\sigma}(x, y); \quad \text{Real}(\psi_{\sigma,\omega,\vartheta}) = \cos(\omega\bar{y})G_{\sigma}(x, y) \quad (4)$$



Profilo recettore dispari



Profilo recettore pari

Definizione (Frame)

Una sequenza $\{\psi_n\}_n$ nello spazio di Hilbert \mathcal{H} è detta *frame* se

$\exists A, B > 0$ con $0 < A \leq B$ tali che:

$$\forall x \in \mathcal{H} \quad A \|x\|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, \psi_n \rangle|^2 \leq B \|x\|^2. \quad (5)$$

Definizione (Operatori associati ad un frame)

$$C : \mathcal{H} \rightarrow \ell_2 \quad \text{t. c.} \quad \forall x \in \mathcal{H} \quad C_{\psi_n}(x) = (\langle x, \psi_n \rangle)_n \quad (6)$$

$$R : \ell_2 \rightarrow \mathcal{H} \quad \text{t. c.} \quad \forall c = (c_n)_n \in \ell_2 \quad R(c) = \sum_n c_n \psi_n \quad (7)$$

$$S : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H} \quad \text{t. c.} \quad \forall x \in \mathcal{H} \quad S(x) = RC(x) = \sum_i \langle x, \psi_i \rangle \psi_i \quad (8)$$

Teorema (Teorema di Decomposizione e Ricostruzione)

Sia $\{\psi_i\}_{i=1}^M$ un frame per \mathcal{H} con operatore frame S e operatore di analisi C . Allora, $\forall x \in \mathcal{H}$ se decomponiamo il segnale x nei suoi coefficienti rispetto al frame:

$$C(x) = (\langle x, \psi_n \rangle)_n = (c_n)_n$$

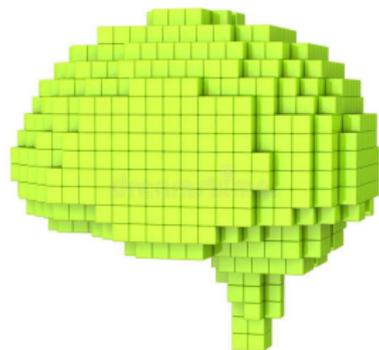
allora, ricostruiamo il segnale x a partire dai coefficienti trovati:

$$x = \sum_n c_n S^{-1} \psi_n$$

data set fMRI

8428 voxel

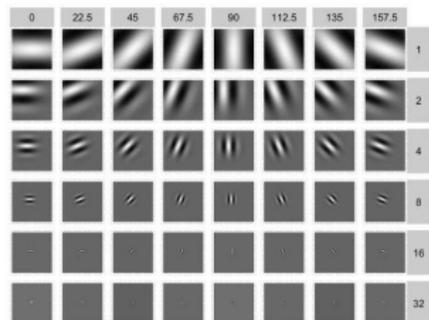
1750 immagini



$$y_{i,v} = \begin{bmatrix} y_{1,1} & y_{1,2} & \dots & y_{1,8428} \\ y_{2,1} & y_{2,2} & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{1750,1} & y_{1750,2} & \dots & y_{1750,8428} \end{bmatrix}$$

generazione banco di filtri GWP

$$\psi_{g_k}(x, y) = e^{-\frac{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2}{2\sigma_k^2}} e^{2\pi i \omega \tilde{y}}$$



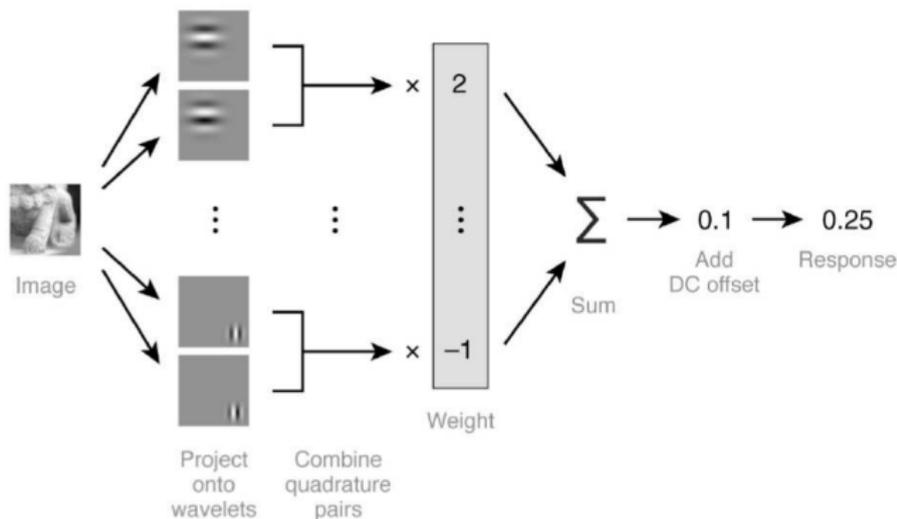
$$\begin{aligned}\tilde{x} &= (x - x_k)\cos(\vartheta_k) + (y - y_k)\sin(\vartheta_k); \\ \tilde{y} &= -(x - x_k)\sin(\vartheta_k) + (y - y_k)\cos(\vartheta_k);\end{aligned}$$

dove $g_k = (x_k, y_k, \vartheta_k, \sigma_k)$ denotano posizione, orientazione e dimensioni del filtro.

8 orientazioni, 6 frequenze spaziali, posizioni su griglia 32x32 all'interno del campo visivo (area circolare).

Otteniamo un banco di 6984 filtri di Gabor rispettivamente con parte reale e immaginaria.

relazione tra energia e filtri



$$\tilde{E}_{ki} = \left| \int I_i(x, y) \psi_{g_k}(x, y) dx dy \right| \rightarrow y_{iv} = \sum_{k=1}^n \tilde{E}_{ki} \beta_{kv} + \beta_{0v} \quad (9)$$

Trovare i pesi β tali che:

$$y_{iv} - \bar{y}_{iv} = y_{iv} - \sum_{k=1}^n \tilde{E}_{ki} \beta_{kv} + \beta_{0v} \approx 0 \quad \forall i \quad \forall v \quad (10)$$

Errore quadratico medio:

$$\min_{\beta} F_v^1(\beta) \text{ con } F_v^1(\beta) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (y_{iv} - \sum_{k=1}^n \tilde{E}_{ki} \beta_{kv} - \beta_{0v})^2 \quad (11)$$

Problema Lasso:

$$\min_{\beta} F_v^1(\beta) \quad t. c. \quad \sum_{k=1}^n |\beta_{k,v}| \leq s \quad (12)$$

Proposizione

Per la convessità, $\forall s$, c'è sempre almeno una soluzione nell'equazione 12.

Sfruttando il teorema dei moltiplicatori di lagrange, il problema ?? è equivalente ad andare a minimizzare la sua lagrangiana, quindi:

$$\min_{\beta} F_v^2(\beta) \quad \text{con} \quad F_v^2(\beta) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (y_{iv} - \sum_{k=1}^n E_{ki} \beta_{kv} - \beta_{0v})^2 + \lambda \sum_{k=1}^n |\beta_{kv}| \quad (13)$$

Proposizione

Se $\bar{\beta}$ minimizza l'equazione 12 , allora c'è un valore di λ tale che $\bar{\beta}$ minimizza l'equazione 13. se $\bar{\beta}$ minimizza l'equazione 13 allora è anche soluzione dell'equazione 12 con $s = \sum_{k=1}^n |\bar{\beta}_k(\lambda)|$

- metodo di discesa del gradiente
- k-cross validation
- Risultato dell'encoding:

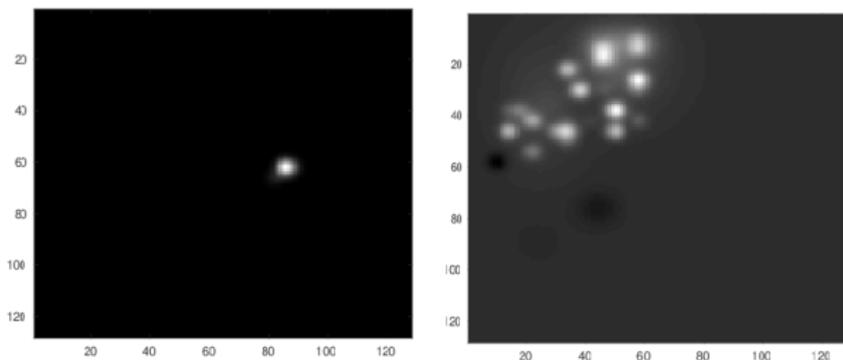
$$\beta = \begin{bmatrix} \beta_{1,1} & \beta_{1,2} & \dots & \beta_{1,8428} \\ \beta_{2,1} & \beta_{2,2} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{6984,1} & \beta_{6984,2} & \dots & \beta_{6984,8428} \end{bmatrix}$$

Generazione dei campi recettori (CR)

Modello campo recettore:

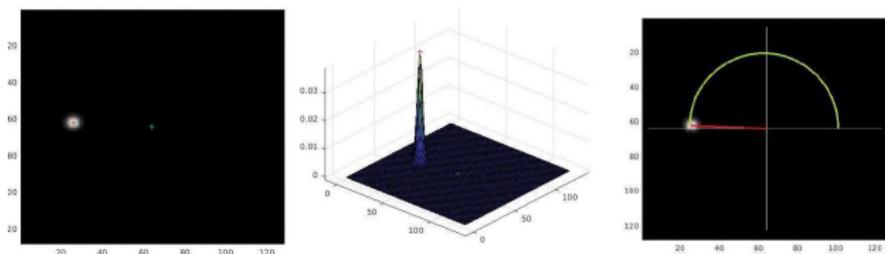
$$CR_v = \sum_{k=1}^n \beta_{k,v} |\psi_{g_k}| = \sum_{k=1}^n \beta_{k,v} \sqrt{\operatorname{Re}(\psi_{g_k})^2 + \operatorname{Im}(\psi_{g_k})^2} \quad (14)$$

Ne otteniamo la rappresentazione del campo recettore:



uno per ogni voxel.

Calcolo del centro e delle coordinate polari.

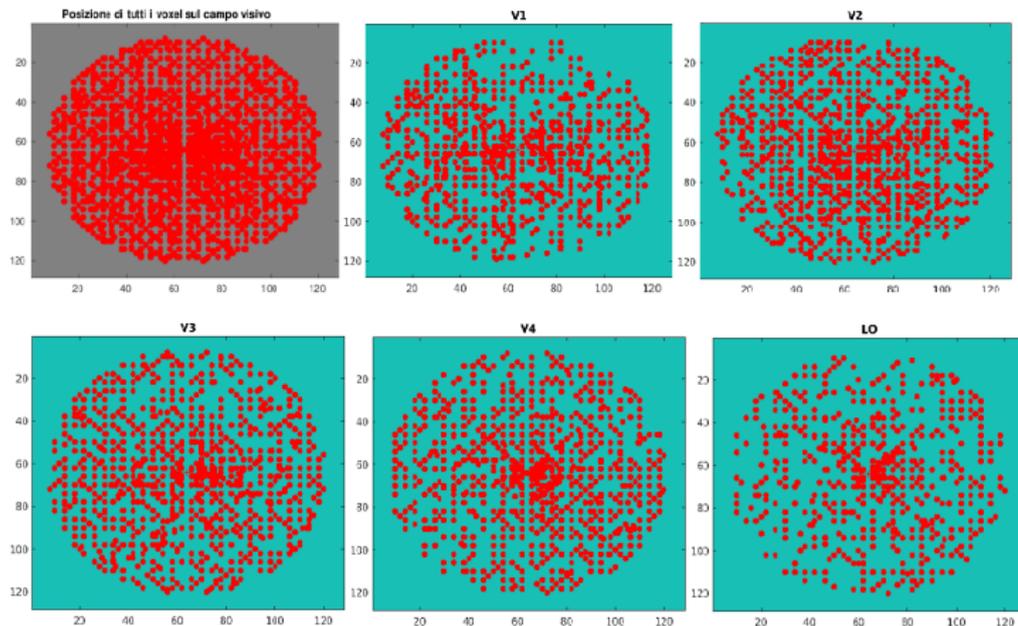


fattore di cortical magnificatio:

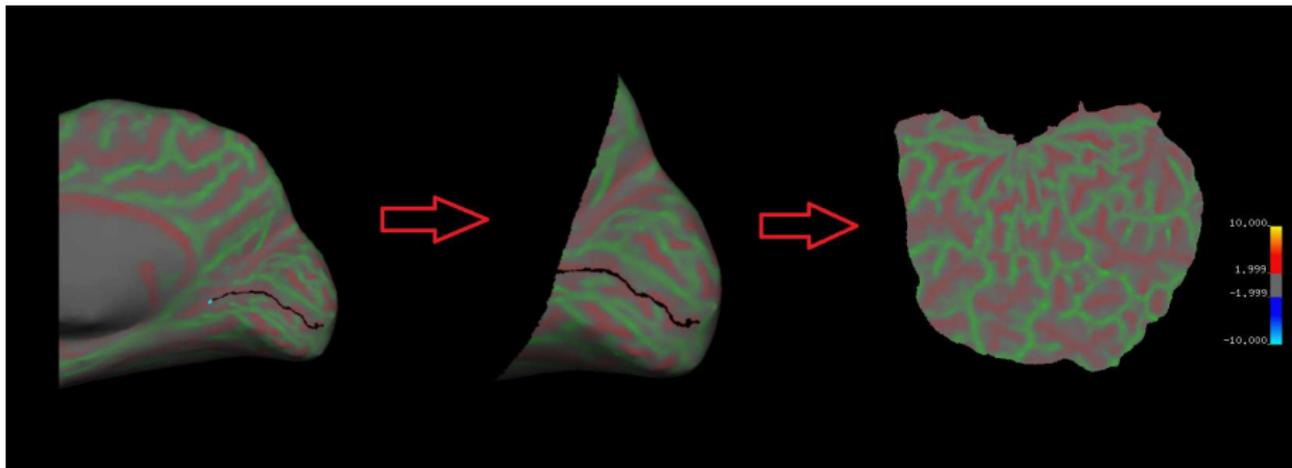
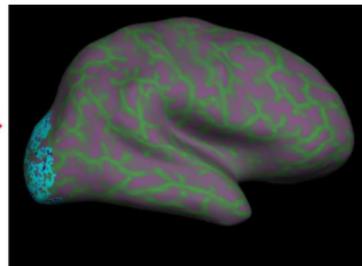
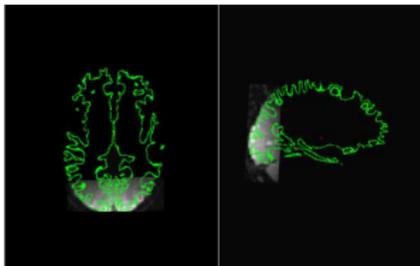
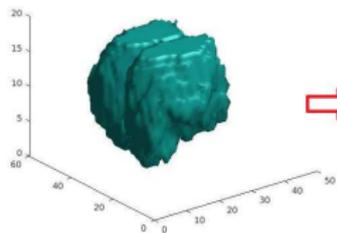
$$M_v = (F + k\rho_v)^{-1} \quad (15)$$

con k costante di scalatura e F costante che indica la distanza media delle cellule neuronali nei pressi della fovea.

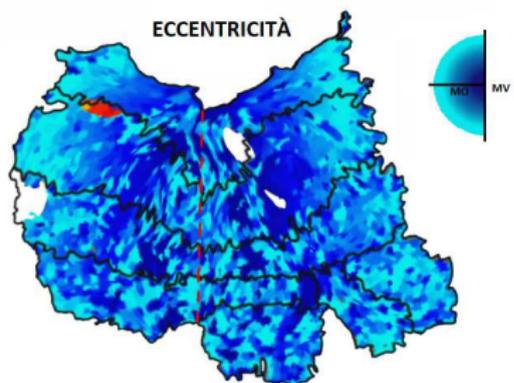
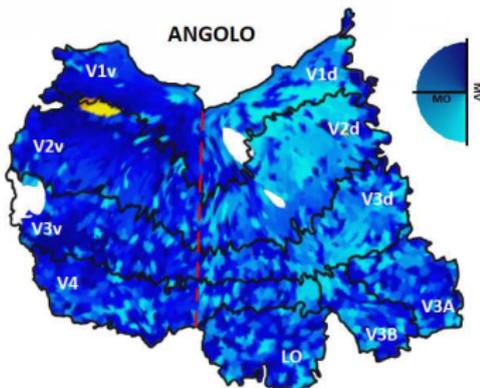
analisi dei centri dei CR



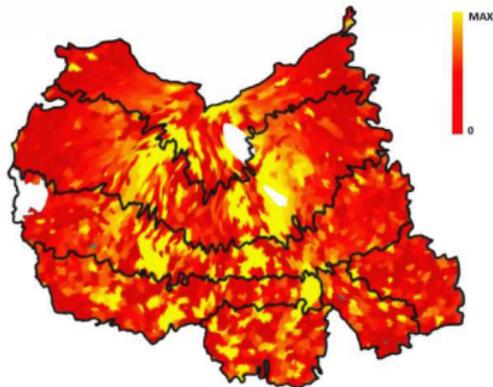
FreeSurfer



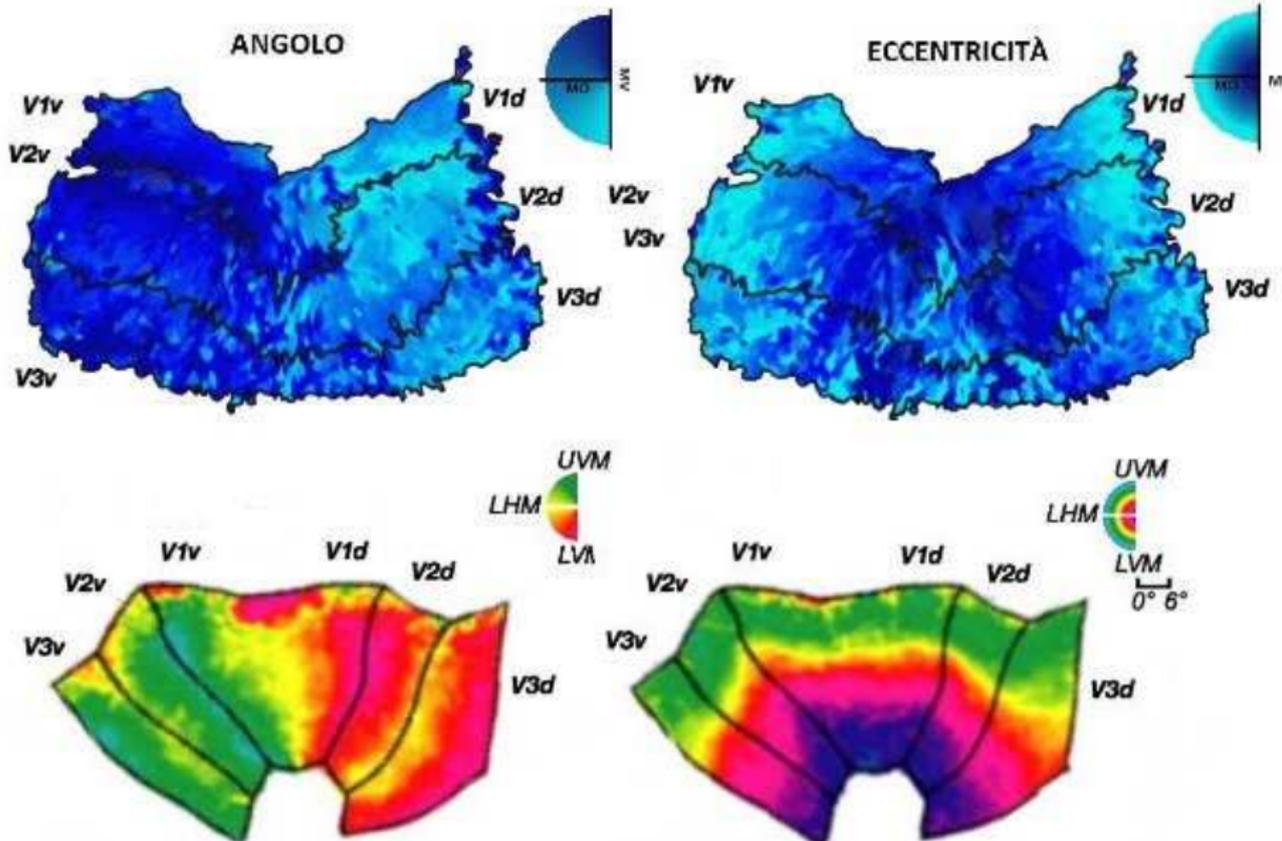
Ricostruzione delle Mappe



FATTORE DI CORTICAL MAGNIFICATION



Ricostruzione delle Mappe



GRAZIE PER L'ATTENZIONE