

# A mathematical model of the motor cortex

Caterina Mazzetti

Alma Mater Studiorum Università di Bologna

15 Dicembre 2017

Relatore:

Chiar.ma Prof.ssa  
Giovanna Citti

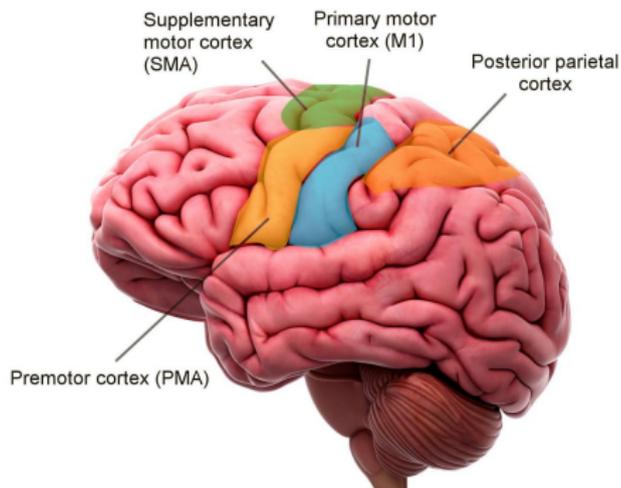
Correlatore:

Chiar.mo Dott.  
Emre Baspinar

Sviluppare un modello matematico di corteccia motoria basato su:

- 1 risultati neurali di A. Georgopoulos;
- 2 modelli matematici di corteccia visiva con strumenti di geometria differenziale.

# La corteccia motoria



- Il cervello ha una struttura modulare.
- Le sue parti (aree) hanno strutture funzionalmente confrontabili.
- L'adattamento del modello motorio ad aree visive non è diretto.

# Attività delle cellule motorie corticali

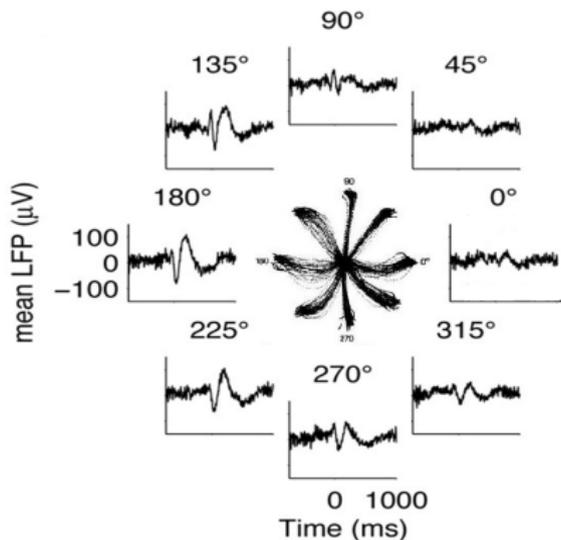


Figura: Esperimento.

Punti chiave:

- direzione del movimento;
- direzione preferenziale (PD);
- posizione iniziale;
- organizzazione ipercolonnare.

# Attività delle cellule motorie corticali

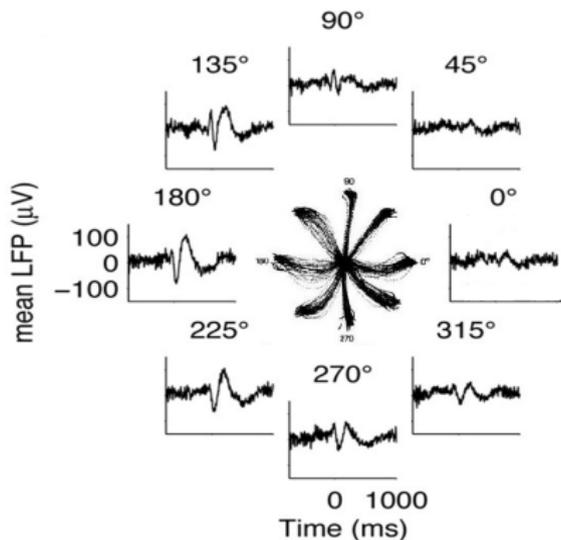


Figura: Esperimento.

Punti chiave:

- direzione del movimento;
- direzione preferenziale (PD);
- posizione iniziale;
- organizzazione ipercolonnare.

# Attività delle cellule della corteccia visiva primaria

Punti chiave:

- selettività dei bordi di un'immagine;
- risposta massima per una precisa posizione ed orientazione in seguito ad un input visivo;
- insieme delle cellule parametrizzato da  $\mathbb{R}^2 \times S^1$ ;
- organizzazione ipercolonnare.

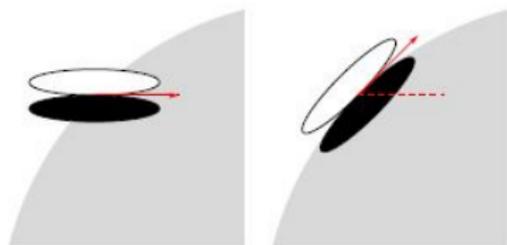


Figura: Rappresentazione di cellule semplici sensibili ad un bordo.

# Fibrato Principale

Un fibrato principale è una quadrupla  $(E, M, G, \pi)$  tale che:

- 1  $M$  (base) e  $E$  (spazio totale) sono varietà differenziabili;
- 2  $G$  è un gruppo di Lie che agisce su  $E$  da destra e definisce la relazione di equivalenza su  $E$ :  $p \sim q \Leftrightarrow \exists g \in G : p = qg$ .
- 3  $M$  è il quoziente di  $E$  rispetto alla relazione di equivalenza;
- 4  $\pi : E \rightarrow M$  associa a  $q \in E$  la sua classe di equivalenza. Per ogni  $x \in M$ ,  $\pi^{-1}(x)$  si dice fibra, ed è diffeomorfo a  $G$ ;
- 5 per ogni  $x \in M$  esiste un intorno  $U$  di  $x$  e un diffeomorfismo

$$\varphi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times G$$

della forma  $\varphi(p) = (\pi(p), \psi(p))$  che è  $G$ -equivariante, ossia  $\varphi(pg) = (\pi(p), \psi(p)g)$  for all  $g \in G$ .

# Fibrato Principale

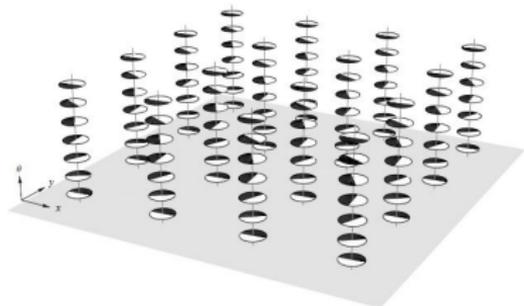
Un fibrato principale è una quadrupla  $(E, M, G, \pi)$  tale che:

- 1  $M$  (base) e  $E$  (spazio totale) sono varietà differenziabili;
- 2  $G$  è un gruppo di Lie che agisce su  $E$  da destra e definisce la relazione di equivalenza su  $E$ :  $p \sim q \Leftrightarrow \exists g \in G : p = qg$ .
- 3  $M$  è il quoziente di  $E$  rispetto alla relazione di equivalenza;
- 4  $\pi : E \rightarrow M$  associa a  $q \in E$  la sua classe di equivalenza. Per ogni  $x \in M$ ,  $\pi^{-1}(x)$  si dice fibra, ed è diffeomorfo a  $G$ ;
- 5 per ogni  $x \in M$  esiste un intorno  $U$  di  $x$  e un diffeomorfismo

$$\varphi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times G$$

della forma  $\varphi(p) = (\pi(p), \psi(p))$  che è  $G$ -equivariante, ossia  $\varphi(pg) = (\pi(p), \psi(p)g)$  for all  $g \in G$ .

# Architettura funzionale per la corteccia visiva



- Struttura per  $\mathbb{R}^2 \times S^1$  a fibrato principale con  $G = S^1$ .
- Struttura di gruppo di Lie di rotazione e traslazione, detto  $SE(2)$

$$R_{\vartheta_1} T_{(x_1, y_1)} \circ R_{\vartheta_2} T_{(x_2, y_2)} (x, y) = R_{\vartheta_3} T_{(x_3, y_3)} (x, y).$$

Campi invarianti a sinistra per la legge di gruppo:

$$X_1 = \cos(\theta)\partial_x + \sin(\theta)\partial_y, \quad X_2 = \partial_\theta, \quad X_3 = \sin(\theta)\partial_x - \cos(\theta)\partial_y.$$

$$X_3 = [X_1, X_2], \quad \text{quindi } Lie(X_1, X_2) = Span(X_1, X_2, X_3)$$

# Metrica sub-Riemanniana e connettività corticale

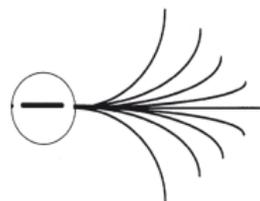
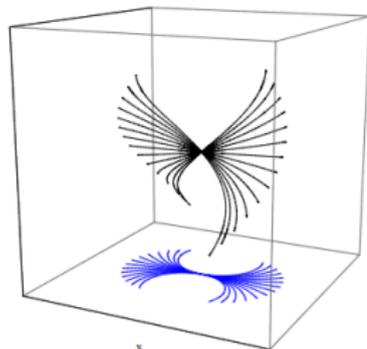
## Teorema di Chow

$X_1, X_2$  sono detti campi di Hörmander se l'algebra di Lie generata ha rango massimo in ogni punto. In questo caso ogni coppia di punti può essere connessa tramite curve integrali dei generatori.

$$d(\xi, \eta) = \inf \{L(\gamma) : \gamma \text{ connette } \xi, \eta\}.$$

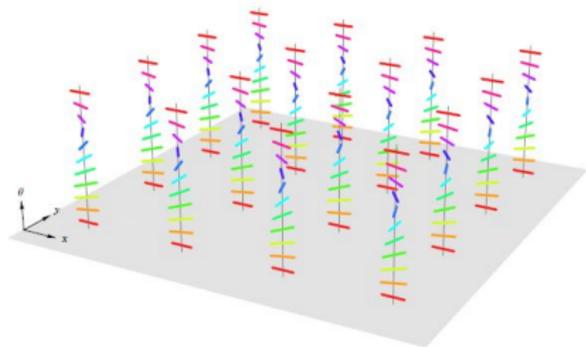
$L$  è calcolata con una opportuna metrica definita su  $\text{Span}(X_1, X_2)$ .

$$\gamma' = e_1 X_1 + e_2 X_2(\gamma), \quad \gamma(0) = \xi.$$



# Un primo modello “statico” di corteccia motoria

M1 come fibrato principale  $(E, M, F, \pi)$ :

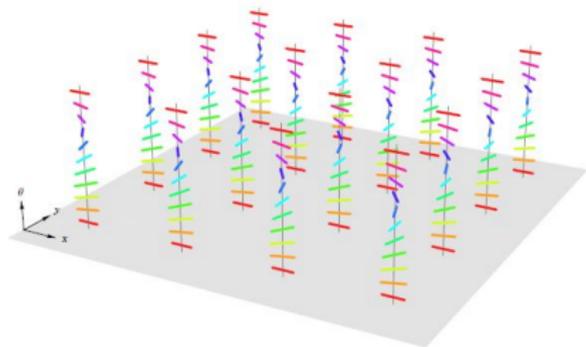


- Abbiamo introdotto la dipendenza dalla posizione senza verifica sperimentale;

$$M \subset \mathbb{R}^2, F = S^1; \quad \pi : M \times S^1 \rightarrow M;$$
$$\Sigma : M \rightarrow M \times S^1; (x, y) \mapsto (x, y, \bar{\vartheta}).$$

# Un primo modello “statico” di corteccia motoria

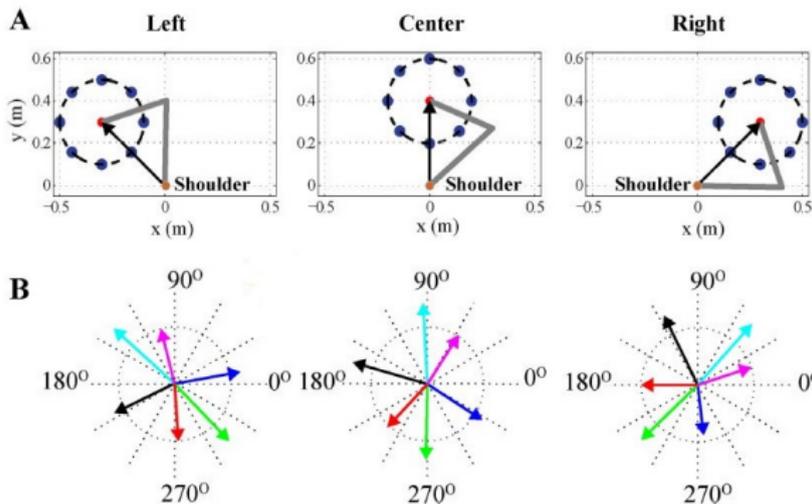
M1 come fibrato principale  $(E, M, F, \pi)$ :



- Abbiamo introdotto la dipendenza dalla posizione senza verifica sperimentale;

$$M \subset \mathbb{R}^2, F = S^1; \quad \pi : M \times S^1 \rightarrow M;$$
$$\Sigma : M \rightarrow M \times S^1; (x, y) \mapsto (x, y, \bar{\vartheta}).$$

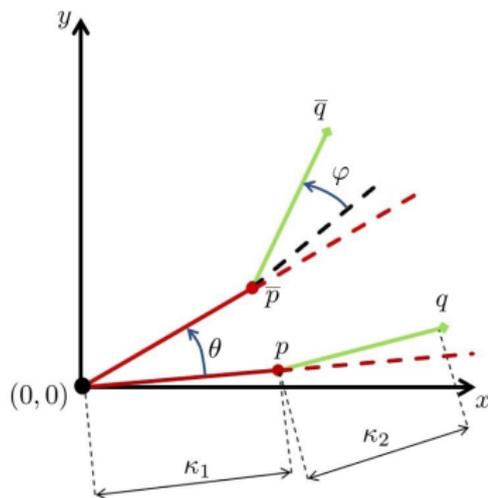
# La dipendenza dalla posizione



Se la direzione PDs delle cellule è  $\bar{\vartheta}$  quando la spalla è fissa, diviene  $\vartheta - \bar{\vartheta}$  quando la spalla è ruotata di un angolo  $\vartheta$ .

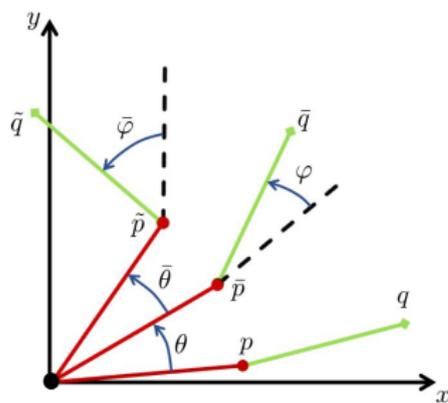
# La scelta delle coordinate

Si considera la dipendenza dallo spostamento.  
M1 come fibrato principale  $(E, M, F, \pi)$ :



- $M = S^1 \times [0, \pi]$ ;
- $F = S^1 \times [0, \pi]$ ;
- $\pi : M \times S^1 \rightarrow M$ ;
- $\Sigma : M \rightarrow M \times (S^1 \times [0, \pi])$

# La legge di gruppo nella fibra



Se  $R_\vartheta$  è la rotazione attorno a 0 di  $\vartheta$ , il movimento di spalla e gomito diviene:

$$A_{\vartheta, \varphi}(p, q) = (\bar{p}, \bar{q}),$$

dove

$$\begin{aligned}\bar{q} &= R(\varphi)(R(\vartheta)q - R(\vartheta)p) + R(\vartheta)p, \\ \bar{p} &= R(\vartheta)p.\end{aligned}$$

Definiamo una legge di gruppo tramite la relazione

$$A_{\tilde{\vartheta}, \tilde{\varphi}} \circ A_{\vartheta, \varphi}(p, q) = A_{\tilde{\vartheta}, \tilde{\varphi}}(p, q).$$

Si ha

$$(\tilde{\vartheta}, \tilde{\varphi}) = (\vartheta + \bar{\vartheta}, \varphi + \bar{\varphi})$$

# Conclusioni

- Abbiamo proposto un modello di corteccia motoria. Il risultato principale è stato introdurre un modello di fibrato principale con scelta di coordinate sulla fibra compatibile con l'esistenza di PD ed ipercolonne di orientazione.
- Ulteriori sviluppi potrebbero essere lo studio della connettività corticale legata ad una scelta di campi di associazione.