

Completamento di curve e applicazione alla determinazione di difetti in materiali elastici

Francesco Colibazzi

Alma Mater Studiorum Università di Bologna

23 Marzo 2018

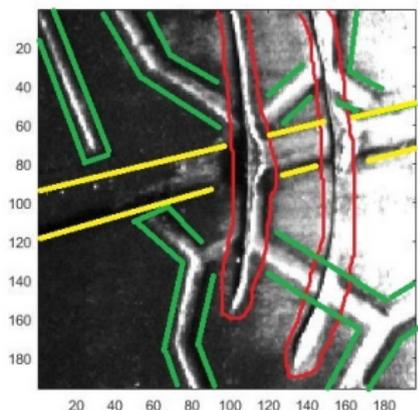
Relatore: Prof.ssa Giovanna Citti

Correlatori: Ing. Valeriano Ballardini, Ing. Alessandro Ghidotti Piovani



L'obiettivo del nostro lavoro è quello di rilevare e ricostruire anomalie a forma di tagli in un materiale elastico.

- funzionale energia: $E(k(s)) = \int_0^l k(s)^2 ds$.
- modello di completamento in $SE(2)$ con metrica sub-Riemanniana;
- filtraggio con funzioni di Gabor;
- classificazione mediante orientazione, curvatura e frequenza.



Un filtro di Gabor è un filtro lineare ottenuto mediante la modulazione sinusoidale con una Gaussiana di deviazione standard σ .

$$\psi(x, y) = e^{-\frac{(\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2)}{2\sigma^2} + 2\pi i \omega \tilde{y}},$$

ove la mappa $(x, y) \rightarrow (\tilde{x}, \tilde{y})$ è una rotazione di angolo θ :

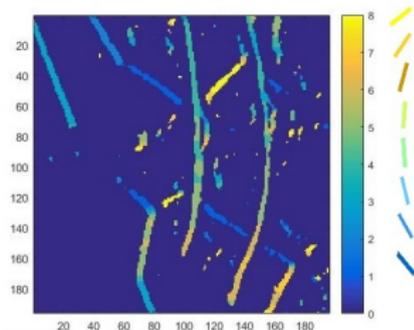
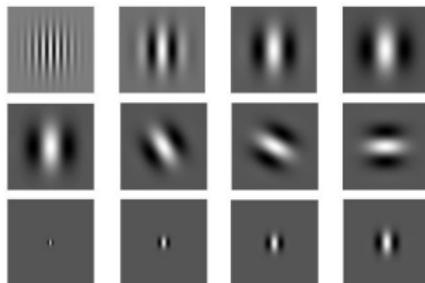
$$\tilde{x} = x \cos(\theta) + y \sin(\theta),$$

$$\tilde{y} = -x \sin(\theta) + y \cos(\theta).$$

$$O(x, y) = \int I(x', y') \psi_{\theta_j}(x' - x, y' - y) = (I * \psi_{\theta_j})(x, y).$$

Riportiamo in output l'energia definita come

$$E(x, y, \theta) = \text{Real}(O(x, y))^2 + \text{Im}(O(x, y))^2.$$



Lifting in $SE(2)$ - Modello Citti-Sarti

- Sia $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ un curva parametrizzata ad arco $\dot{\gamma}(t) = (\cos \theta(t), \sin \theta(t))$;
- $\gamma(t)$ viene *liftata* in $\mathbb{R}^2 \times S^1$: $\tilde{\gamma}(t) = (x(t), y(t), \theta(t))$;
- la curva liftata soddisfa $\dot{\tilde{\gamma}}(t) = X_1 + kX_2$ ove

$$X_1 = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} = \cos \theta \partial_x + \sin \theta \partial_y, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \partial_\theta.$$

- l'insieme dei vettori $a_1 X_1 + a_2 X_2$ definisce un piano e ogni curva liftata è tangente ad un vettore di tale piano;
- non esistono curve liftate con derivata in direzione

$$X_3 = \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix} \text{ ortogonale a } X_1 \text{ e } X_2.$$

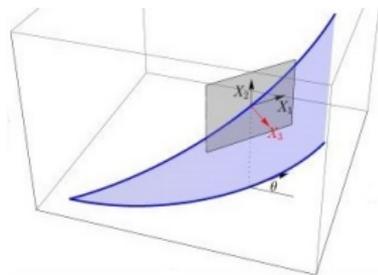


Figura: G.Sanguinetti,
*Sub-Riemannian Fast Marching
in $SE(2)$.*

Varietà sub-Riemanniane

Definizione

Sia M una varietà differenziabile di dimensione n . Sia Δ un sottofibrato del fibrato tangente. Δ è una *distribuzione orizzontale* se per ogni punto $\xi \in M$ esiste un intorno $U_\xi \subset M$ di ξ e m campi vettoriali C^∞ linearmente indipendenti X_1, \dots, X_m definiti su U_ξ tali che per ogni punto $\eta \in U_\xi$

$$\text{Span}(X_{1|\eta}, \dots, X_{m|\eta}) = \Delta_\eta \subseteq T_\eta M.$$

Definizione

Chiamiamo *varietà sub-Riemanniana* una tripla (M, Δ, g) ove:

- 1 M è una varietà differenziabile;
- 2 Δ è distribuzione orizzontale di rango m ;
- 3 $g := \langle \cdot, \cdot \rangle$ è un prodotto scalare definito su Δ .

Definizione

Sia (M, Δ, g) una varietà sub-Riemanniana. Una curva $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ di classe C^1 è detta *orizzontale*, se e solo se $\gamma'(t) \in \Delta_{\gamma_t}$, per ogni $t \in [a, b]$.

Siano X, Y campi vettoriali su M varietà differenziabile. Definiamo *parentesi di Lie*, o *commutatore*, il campo vettoriale

$$[X, Y] = XY - YX.$$

Chiamiamo *algebra di Lie generata da* X_1, \dots, X_m , denotata

$$\mathcal{L}(X_1, \dots, X_m)$$

lo span degli operatori X_1, \dots, X_m e dei rispettivi commutatori di ogni ordine.

Condizione di Hörmander - Teorema di Chow

Definizione

Sia M una varietà differenziabile di dimensione n e $\{X_j\}_j, j = 1, \dots, m$ una famiglia di campi vettoriali C^∞ su M . Se vale la seguente condizione

$$\mathcal{L}(X_1, \dots, X_m)|_\xi = T_\xi M \simeq \mathbb{R}^n \quad \forall \xi \in M$$

diciamo che i campi vettoriali $\{X_j\}_{j=1, \dots, m}$ soddisfano la *condizione di Hörmander*.

Teorema

Sia (M, Δ, g) una varietà sub-Riemanniana, se i campi X_1, \dots, X_m soddisfano la condizione di Hörmander in ogni punto, allora per ogni coppia di punti p, q , esiste una curva orizzontale γ che li congiunge.

Struttura sub-Riemanniana dello spazio $SE(2)$

- Una base per il fibrato tangente è data dalla terna $\{X_1, X_2, X_3\}$. In ogni punto $p \in SE(2)$, i campi

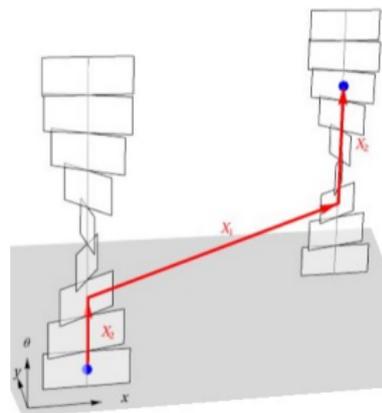
$$X_1 = \cos(\theta)\partial_x + \sin(\theta)\partial_y, \quad X_2 = \partial_\theta, \quad X_3 = [X_2, X_1] = -\sin(\theta)\partial_x + \cos(\theta)\partial_y;$$

generano lo spazio tangente $T_p(SE(2))$;

- i campi X_1, X_2 , definiscono una distribuzione $\Delta = \text{span}\{X_1, X_2\}$ che soddisfa la condizione di Hörmander poiché

$$-[X_1, X_2] = [X_2, X_1] = X_3;$$

- l'Algebra generata da $\{X_1, X_2\}$ dà tutto il fibrato tangente.



1

¹Figura: G. Sanguinetti, *Invariant models of vision between phenomenology, image statistics and neurosciences*

Geodetiche

Definita la norma di un vettore orizzontale $|v| = \langle v, v \rangle^{1/2}$, la lunghezza di una curva orizzontale C^1 a tratti, $\gamma : [a, b] \rightarrow M$, risulta: $l(\gamma) := \int_a^b |\dot{\gamma}(t)| dt$.

Definizione

Data (M, Δ, g) una varietà sub-Riemmanniana, definiamo *distanza di Carnot-Carathéodory* tra due punti $p, q \in M$

$$d(p, q) := \inf \{ l(\gamma), \gamma : [a, b] \rightarrow M, \gamma(a) = p, \gamma(b) = q, \\ \gamma \text{ curva orizzontale assolutamente continua.} \}$$

$$\lambda(\tilde{\gamma})(t) = \int_a^b |\dot{\tilde{\gamma}}(s)| ds = \int \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{\theta}^2} = \int_a^b \sqrt{1 + k^2} ds.$$

Definizione

Sia (M, Δ, g) una varietà sub-Riemmanniana. Una curva $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ con $\gamma(a) = p$, $\gamma(b) = q$, assolutamente continua, che realizza la distanza $d(p, q)$ è chiamata *geodetica*.

Geodetiche normali e lunghezza minima di una curva

Teorema

Le geodetiche normali sono localmente curve orizzontali di lunghezza minima.

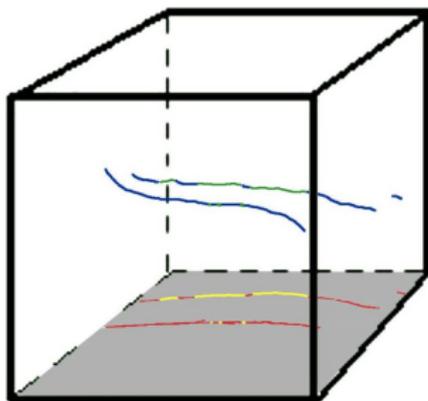
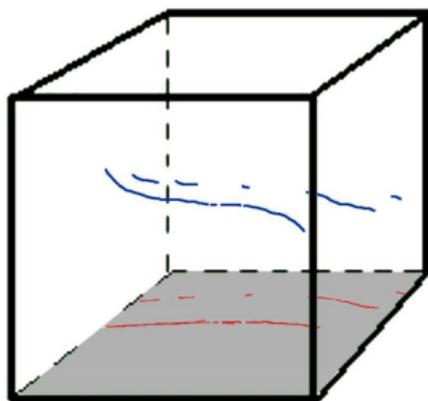
Esempio

Consideriamo i campi

$$X_1 = \cos(\theta)\partial_x + \sin(\theta)\partial_y, \quad X_2 = \partial_\theta, \quad X_3 = [X_2, X_1] = -\sin(\theta)\partial_x + \cos(\theta)\partial_y;$$

le geodetiche normali associate a questi campi sono localmente dei cerchi

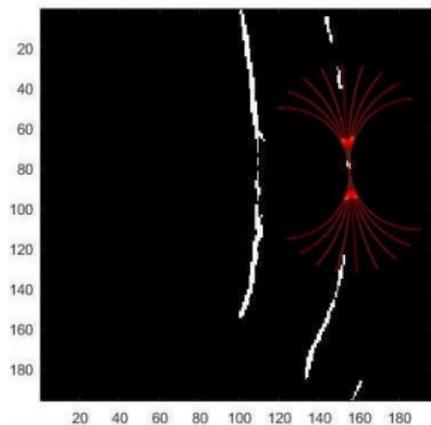




L'integrazione delle curve integrali $\tilde{\gamma}(t) = X_1(t) + k(t)X_2(t)$ con k costante dà l'espressione di $\tilde{\gamma}$

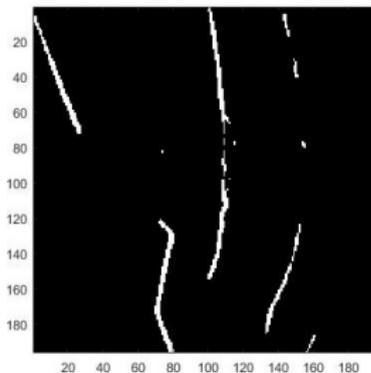
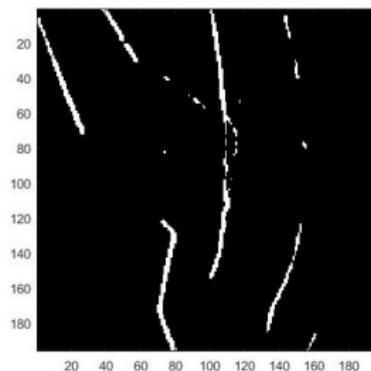
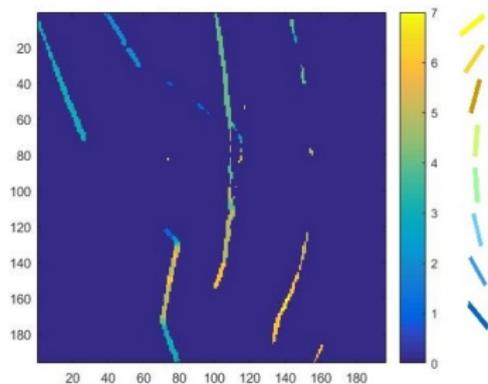
$$\begin{cases} x = \frac{\sin(kt)}{k} \\ y = \frac{1 - \cos(kt)}{k} \\ \theta = kt \end{cases} .$$

La proiezione in 2D delle curve liftate $\tilde{\gamma}(t)$ dà i completamenti cercati.



Classificazione sull'orientazione

- l'orientazione θ di ciascun pixel (x, y) viene selezionata con funzioni di Gabor;
- essendo i tagli quasi verticali, cancelliamo le componenti con orientazioni eccessive.



Classificazione sulla curvatura

$$k = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}} = \dot{\theta} \cos^2 \theta + \dot{\theta} \sin^2 \theta = \dot{\theta}.$$

Consideriamo come filtro il disco $B((x, y), 5)$

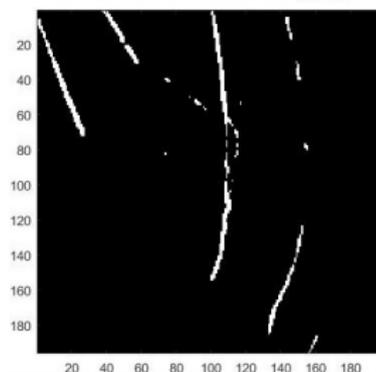
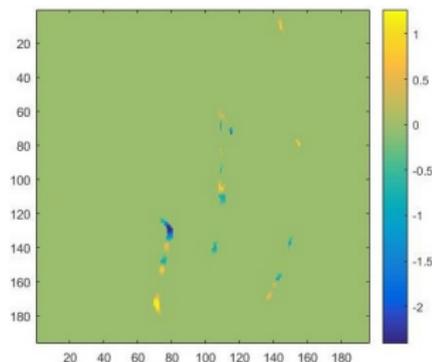


$$u^+(x, y) := \frac{\sum_{(d,e) \in I} G(d, e)}{\text{card}(B((x, y), 5) \cap A_i)} \quad \text{tali che } (d, e) \in B_{i+},$$

$$u^-(x, y) := \frac{\sum_{(d,e) \in I} -G(d, e)}{\text{card}(B((x, y), 5) \cap A_i)} \quad \text{tali che } (d, e) \in B_{i-}.$$

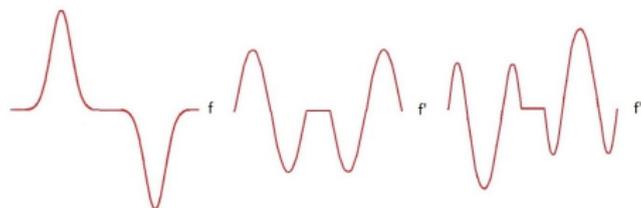
Si ha quindi l'espressione della derivata direzionale di G in direzione F :

$$D_F G = u^+ + u^-.$$



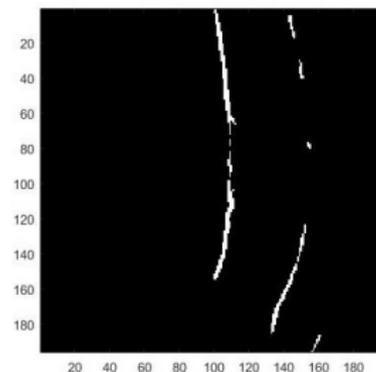
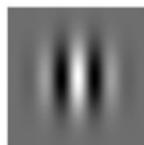
Classificazione sulle frequenza

- f profilo in sezione superficie;
- f' funzione luminosità;
- f'' derivata seconda.



a)

b)



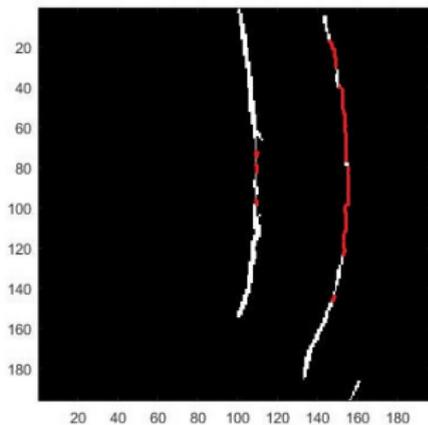
Connessione mediante curve di Bézier

- La scelta della costante k nell'equazione delle elastiche risulta determinante per il calcolo delle geodetiche sub-Riemanniane;
- le H-bump incidono sull'energia della frattura;
- nelle aree comprese tra due H-bump effettueremo delle connessioni con archi di cerchi;
- occorrerebbe introdurre una metrica opportuna nello spazio decodificando numericamente le geodetiche associate.

Sia $\gamma(t) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^d$. Una *curva piana di Bézier* $\gamma(t)$ di grado n è definita a partire da un insieme di punti, detti *punti di controllo*, $P_i \in \mathbb{R}^2 \quad i = 0, \dots, n$ ed è data da

$$\gamma(t) = \sum_{i=0}^n P_i B_{i,n}(t), \quad t \in [0, 1],$$

ove $B_{i,n}$ è il polinomio $B_{i,n}(t) = \binom{n}{i} (1-t)^{n-1} t^i$.



Conclusioni

- Per un'ulteriore distinzione fra tagli e bump sarebbe interessante rivedere l'assetto dell'illuminatore;
- utilizzo di tecniche di shape from shading;
- studio di una metrica alternativa per il modello di completamento.