$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} =$$

$$= 3x^2 + 5xy + 7yz$$

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 5/2 & 0 \\ 5/2 & 0 & 7/2 \\ 0 & 7/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} =$$

$$3x^2 + 5/2\,xy + \tfrac{5}{2}\,yx + \tfrac{7}{2}\,yz + \tfrac{7}{2}\,zy$$

$$= 3x^2 + 5xy + 7yz$$

Date due matrici $A, A' \in M_n(\mathbb{K})$ simmetriche, esse si dicono congruenti se $\exists E \in GL_n(\mathbb{K})$ tale che

$$A' = {}^tE \cdot A \cdot E$$

PROP - A, A' simmetriche sono congruenti $\iff \exists V$, $\exists \mathcal{B}, \mathcal{B}'$ due basi ordinate,

$\exists\, \varphi : V \times V \to \mathbb{K}$ bilineare simmetrica tali che

A è la matrice di Gram di φ relativamente a $\mathcal{B}$,

A' è la matrice di Gram di φ relativamente a $\mathcal{B}'$

PROP – Data una qualunque matrice simmetrica A, esiste una matrice

diagonale $\Lambda = {}^tE \cdot A \cdot E$
dove E è ortogonale (cioè ${}^tE = E^{-1}$), quindi Λ è sia congruente sia simile ad A

PROP — Se D è diagonale, gli autovalori sono gli elementi della diagonale principale e ogni autovalore ha $m_g = m_a =$ n° di volte che tale elemento compare nella diagonale principale.

PROP - Se $D = M_{\mathcal{B}}(T)$ è diagonale, allora $\mathcal{B}$ è una base spettrale relativa a T, cioè una base formata da autovettori di T.

PROP - A simile ad A'

$\Downarrow$

A ed A' hanno polinomi caratteristici identici e hanno gli stessi autovalori con le stesse ma e mg.

OSS - Data A simmetrica, quella matrice diagonale Λ che è sia simile sia congruente ad A presenta sulla diagonale principale gli autovalori di A ripetuti tante volte quant'è la loro $m_a = m_g$.

Sia $A \in M_n(\mathbb{C})$ simmetrica e sia Λ diagonale simile e congruente ad A.

$$\Lambda = \begin{pmatrix} d_1 \neq 0 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_1 \neq 0 \\ & & & 0 \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Allora posso costruire

$$E = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{d_1} & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & 1/\sqrt{d_5} & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Allora ${}^tE = E$ e

$${}^tE \cdot \Lambda \cdot E =$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 0 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & -1 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & 0 & \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\ \ddots \\ 1\end{matrix}}\right\} s \\ n-s \end{matrix}$$

Forma canonica per congruenza di A

PROP - Ogni tale A è congruente alla sua forma can. per congr.

COR - $A, A' \in M_n(\mathbb{C})$ simmetriche sono congruenti $\iff \varrho A = \varrho A'$