Verificare che la quadrica $Q: 7x^2-48xy-7y^2+25z^2-10z+2=0$ è di rotazione e trovarne il sottospazio di rotazione

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 7 & -24 & 0 \\ 0 & -24 & -7 & 0 \\ -5 & 0 & 0 & 25 \end{pmatrix}$$

M_{00}

$$\begin{vmatrix} (7-\lambda) & -24 & 0 \\ -24 & (-7-\lambda) & 0 \\ 0 & 0 & (25-\lambda) \end{vmatrix} = (25-\lambda) \begin{vmatrix} (7-\lambda) & -24 \\ -24 & (-7-\lambda) \end{vmatrix} = (25-\lambda)(\lambda^2-49-576) =$$

$$= (25-\lambda)(\lambda^2-625) = (25-\lambda)(\lambda+25)(\lambda-25)$$

autovalori:	-25	25
ma	1	2
mg	1	2

$$V_{25}: \begin{pmatrix} -18 & -24 & 0 \\ \cancel{-24} & \cancel{-32} & \cancel{0} \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cancel{0} \\ \cancel{0} \end{pmatrix}$$

$-18l - 24m = 0$

$l = -\frac{24}{18}m = -\frac{4}{3}m$

poli di piani principali relativi a $\lambda = 25$:

$\alpha(-4, 3, \text{qualunque numero}) = (-4\alpha, 3\alpha, \beta)$

due lin. indip.: $(-4,3,0), (0,0,1)$

$$\begin{pmatrix} 0 & -4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

asse di rot. $\begin{cases} -44x - 117y = 0 \\ -5 + 25z = 0 \end{cases}$

piani principali relativi a 25

$\alpha(-44x-117y) + \beta(-5+25z) = 0$

11/9/2009 es. 1b: dire per quali valori di λ Q_λ è di rotazione e trovarne il sottospazio di rotazione.

$$Q_\lambda : \gamma x^2 + \gamma y^2 + \gamma z^2 + 2(\gamma+2)xy + 2(\gamma+2)yz - 2\gamma x - \gamma = 0$$

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} -\gamma & -\gamma & 0 & 0 \\ -\gamma & \gamma & (\gamma+2) & 0 \\ 0 & (\gamma+2) & \gamma & (\gamma+2) \\ 0 & 0 & (\gamma+2) & \gamma \end{pmatrix}$$

M_{00}

$$\begin{vmatrix} (\gamma-\lambda) & (\gamma+2) & 0 \\ (\gamma+2) & (\gamma-\lambda) & (\gamma+2) \\ 0 & (\gamma+2) & (\gamma-\lambda) \end{vmatrix} = (\gamma-\lambda)\begin{vmatrix} (\gamma-\lambda) & (\gamma+2) \\ (\gamma+2) & (\gamma-\lambda) \end{vmatrix} - (\gamma+2)\begin{vmatrix} (\gamma+2) & (\gamma+2) \\ 0 & (\gamma-\lambda) \end{vmatrix} =$$

$$= (\gamma-\lambda)\left((\gamma-\lambda)^2 - (\gamma+2)^2\right) - (\gamma+2)(\gamma+2)(\gamma-\lambda) =$$

$$= (\gamma-\lambda)\left((\gamma-\lambda)^2 - 2(\gamma+2)^2\right) = (\gamma-\lambda)(\gamma-\lambda+\sqrt{2}\gamma+2\sqrt{2})(\gamma-\lambda-\sqrt{2}\gamma-2\sqrt{2}) =$$

$$= (\gamma-\lambda)\left((1+\sqrt{2})\gamma+2\sqrt{2}-\lambda\right)\left((1-\sqrt{2})\gamma-2\sqrt{2}-\lambda\right)$$

autovalori:

$\lambda_1 = \gamma$

$\lambda_2 = (1+\sqrt{2})\gamma + 2\sqrt{2}$

$\lambda_3 = (1-\sqrt{2})\gamma - 2\sqrt{2}$

$\lambda_1 = \lambda_2$

$\gamma = (1+\sqrt{2})\gamma + 2\sqrt{2}$

$\sqrt{2}\gamma = -2\sqrt{2}$

$\gamma = -2$

$\lambda_1 = \lambda_3$

$\gamma = (1-\sqrt{2})\gamma - 2\sqrt{2}$

$-\sqrt{2}\gamma = 2\sqrt{2}$

$\gamma = -2$

$\lambda_2 = \lambda_3$

$(1+\sqrt{2})\gamma + 2\sqrt{2} = (1-\sqrt{2})\gamma - 2\sqrt{2}$

$\cancel{\gamma} + \sqrt{2}\gamma + 2\sqrt{2} = \cancel{\gamma} - \sqrt{2}\gamma - 2\sqrt{2}$

$2\sqrt{2}\gamma = -4\sqrt{2}$

$\gamma = -2$

Solo per $\gamma = -2$ hanno autovalore di molt. >1: $\lambda = -2$ di molt. $= 3$

$$\begin{vmatrix} (\gamma-\lambda) & (\gamma+2) & 0 \\ (\gamma+2) & (\gamma-\lambda) & (\gamma+2) \\ 0 & (\gamma+2) & (\gamma-\lambda) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\gamma & -\gamma & 0 & 0 \\ -\gamma & \gamma & (\gamma+2) & 0 \\ 0 & (\gamma+2) & \gamma & (\gamma+2) \\ 0 & 0 & (\gamma+2) & \gamma \end{pmatrix}$$

$\gamma = -2$

$$U_{-2}: \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ogni $(l, m, n) \in \mathbb{R}^3$ è autovettore relativo a $\lambda = -2$ (per $\gamma = -2$)

Tre autovettori lin. indip.:

$(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$

Tre poli di piani principali:

$(0, 1, 0, 0)$, $(0, 0, 1, 0)$, $(0, 0, 0, 1)$

Tutti i piani per $(1,0,0)$ sono principali

$(0\ 1\ 0\ 0)$

$(0\ 0\ 1\ 0)$

$(0\ 0\ 0\ 1)$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

sottosp. dirot.

$$\begin{cases} 2 - 2x = 0 \\ -2y = 0 \\ -2z = 0 \end{cases}$$

sottosp. di rot. = centro

diagonalizzo

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

Quadrica a centro:

$\lambda_1 \neq 0$
$\lambda_2 \neq 0$
$\lambda_3 \neq 0$

- ellissoide: Q_∞ è n.deg. im mag. M_∞ def
  - $+$: $\lambda_1 > 0$ $\lambda_2 > 0$ $\lambda_3 > 0$
  - $-$: $\lambda_1 < 0$ $\lambda_2 < 0$ $\lambda_3 < 0$
- iperboloide: Q_∞ è n.deg. reale M_∞ indef:
  - $\lambda_1 > 0$ $\lambda_2 > 0$ $\lambda_3 < 0$
  - $\lambda_1 < 0$ $\lambda_2 < 0$ $\lambda_3 > 0$

Paraboloidi

$\lambda_1 \neq 0$
$\lambda_2 \neq 0$
$\lambda_3 = 0$

- par. ellittico: Q_∞ 1 solo punto
  M_∞ segn. $(2,0)$ o $(0,2)$
  - $\lambda_1 > 0$ $\lambda_2 > 0$
  - $\lambda_1 < 0$ $\lambda_2 < 0$
- par. iperbolico, Q_∞ 2 rette
  M_∞ segn. $(1,1)$ $\lambda_1 > 0$ $\lambda_2 < 0$

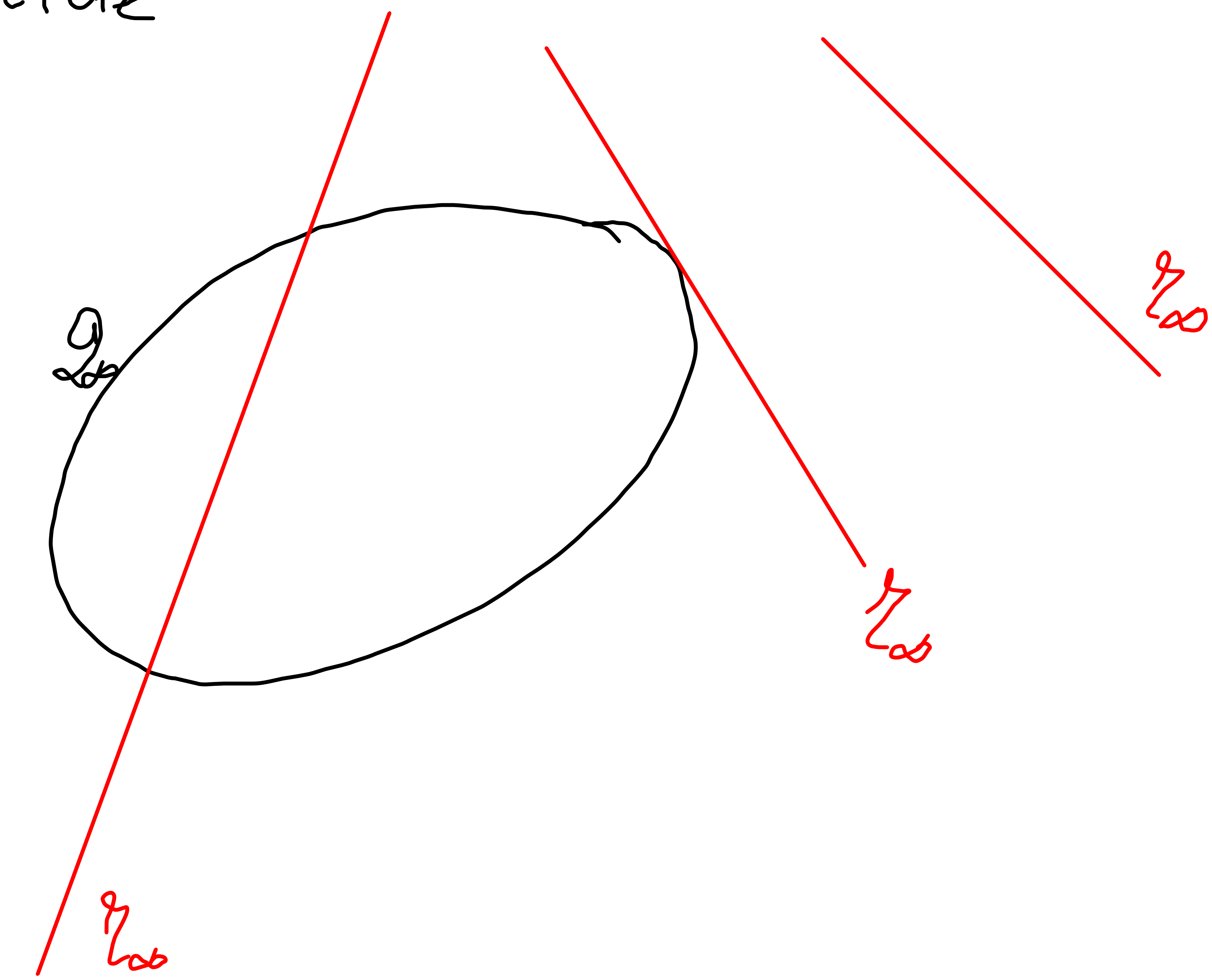
Se voglio sapere quali sono le possibili coniche date da sezioni piane di una fissata quadrica, confronto la retta impropria r_∞ del piano π con la conica all'infinito Q_∞ della quadrica Q.

Infatti, sia $\Gamma = \pi \cap Q$ la conica sezione, m'interessa sapere se π è tangente o no a Q e m'interessa $\Gamma \cap r_\infty$

$$\Gamma \cap r_\infty = (Q \cap \pi) \cap (\pi \cap \pi_\infty) = Q \cap \pi_\infty \cap \pi =$$

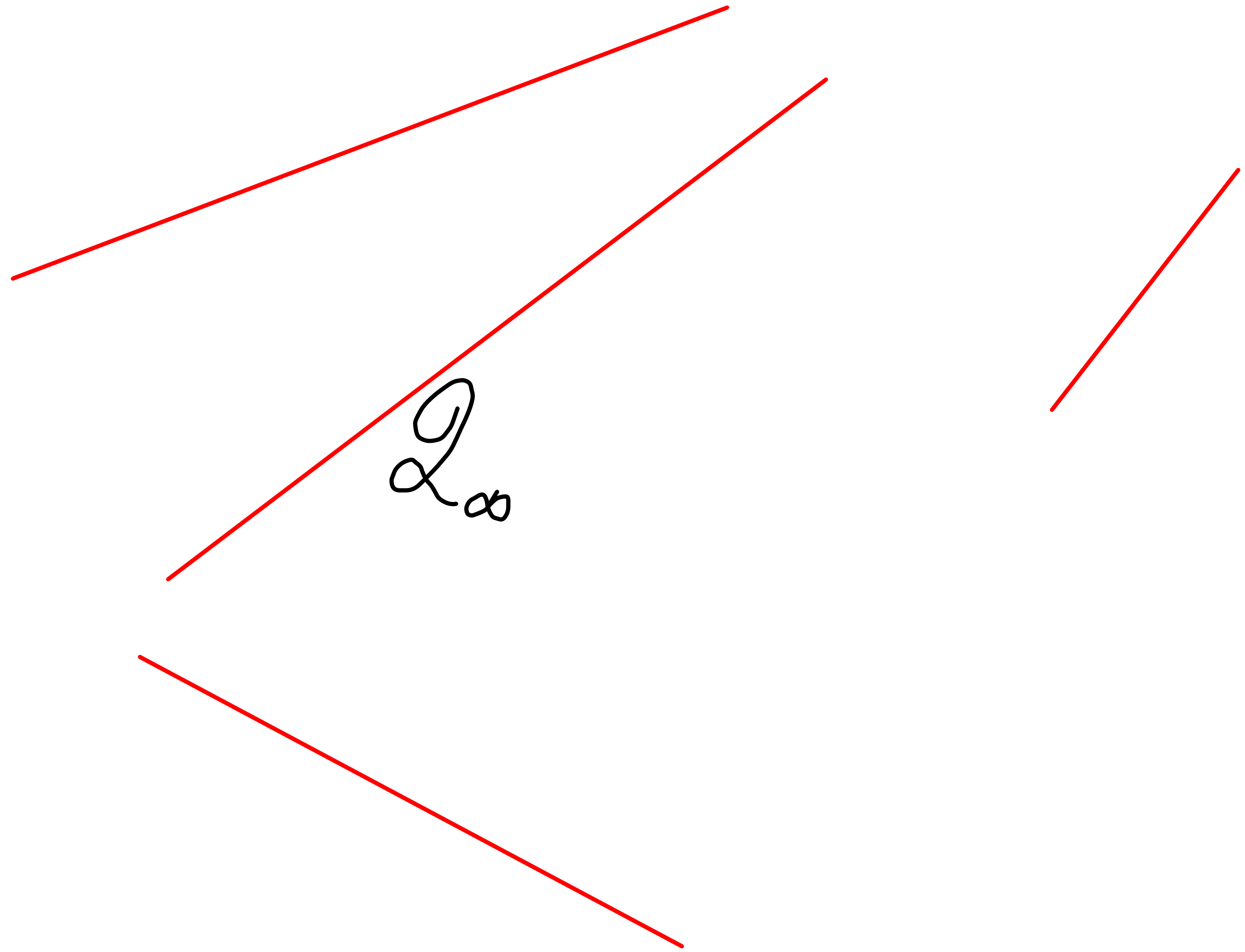
$$= (Q \cap \pi_\infty) \cap (\pi_\infty \cap \pi) = Q_\infty \cap r_\infty$$

Q_∞ di un iperboloide



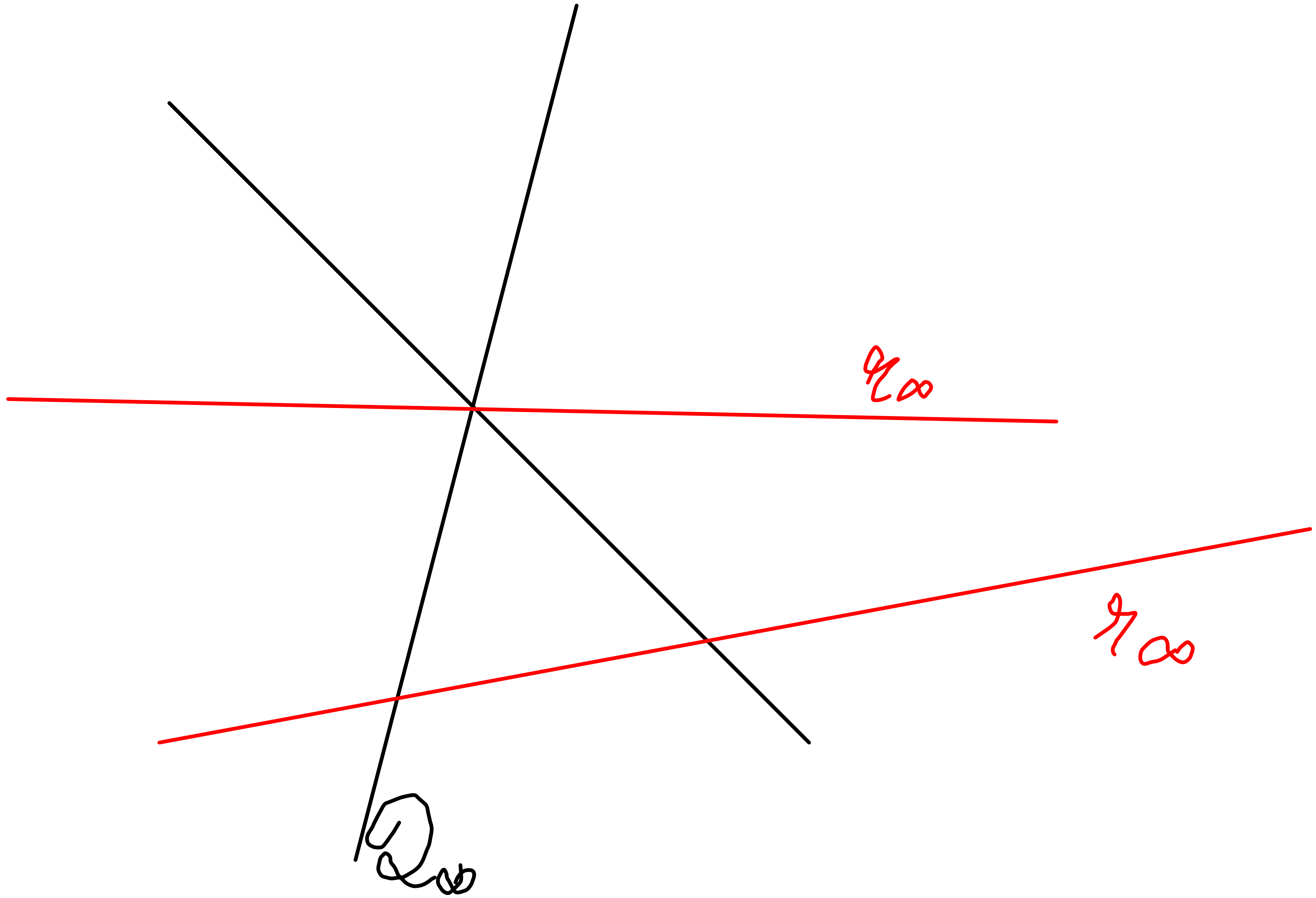
Π_∞

Q_∞ di un ellissoide



Π_∞

Q_∞ Paraboloide iperbolico



Π_∞

Q_∞ di paraboloide ellittico