

In uno sp. vett. V , una combinazione lineare dei vettori $v_1, \dots, v_h$ è un vettore ottenuto, con certi scalari $\alpha_1, \dots, \alpha_h$, come

$$\sum_{i=1}^h \alpha_i v_i = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_h v_h$$

TEOR - $|A| = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{una riga di } A \\ \text{comb. lin. delle} \\ \text{altre righe} \end{array} \right.$

$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{una colonna di } A \\ \text{comb. lin. delle} \\ \text{altre colonne} \end{array} \right.$

$A \in M_n$ si dice triangolare alta
se $\begin{matrix} i > j \\ i < j \end{matrix} \Rightarrow a_{ij} = 0$ bassa

TEOR - Se A è triangolare, allora
 $|A| = \prod_{i=1}^n a_{ii} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn}$

Chiamo operazioni di riga

1) lo scambio di due righe

2) sommare a una riga una comb. lin. delle altre righe

operazioni di colonna

TEOR - Data $A \in M_n$ esistono successioni finite di operazioni di ~~colonna~~ riga che trasformano A in una $B \in M_n$ triangolare.

Metodo 1 per il calcolo del det:

- 1) trasformo A in B triangolare
- 2) calcolo il det B ; questo è uguale al det A moltiplicato per -1 ogni volta che ho effettuato uno scambio di righe

Example

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot 2 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 \cdot 1 + (-3) \cdot 0 \cdot 4 +$$
$$- (-3) \cdot 2 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot 4 - 2 \cdot 0 \cdot (-1) =$$

$$= \cancel{-2} + \cancel{2} + 0$$
$$+ 6 - 4 - 0 = 2$$

$$\begin{pmatrix} \textcircled{1} & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{III} \leftarrow \text{III} - \text{I}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & \textcircled{2} & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{III} \leftarrow \text{III} - \text{II}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det = 1 \cdot 2 \cdot 1 = 2$$

$$A \in M_n \quad A = (a_{ij})_{i,j \in \mathbb{N}_n}$$

Sottomatrice di A è ogni matrice
 ottenuta intersecando alcune righe con
 alcune colonne di A .

$$\text{Es: } \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Minore = sottomatrice quadrata

Minore complementare dell'elemento a_s^r : il

minore M_s^r ottenuto da A cancellando la riga r
e la colonna s

Complemento algebrico (o cofattore) dell'elemento a_s^r : il numero

$$A_s^r := (-1)^{r+s} \cdot |M_s^r|$$

TEOR (Laplace) - $A \in M_n$; $r \in \mathbb{N}_n$ fissato.

$$\det A = \sum_{s=1}^n a_s^r A_s^r$$

$$= \sum_{s=1}^n a_r^s A_r^s$$

← sviluppo di Laplace
lungo la r -esima riga

← lungo la r -esima
colonna

2° metodo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Sviluppo lungo la 1^a riga:

$$A_1^1 = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -6 \quad A_2^1 = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \quad A_3^1 = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -2$$

$$|A| = 1 \cdot (-6) + 2 \cdot 1 + (-3) \cdot (-2) = -6 + 2 + 6 = 2$$

Sviluppo lungo la 1^a colonna:

$$A_1^1 = -6 \quad A_2^1 \text{ me ne frego} \quad A_3^1 = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 8$$

$$|A| = 1 \cdot (-6) + 0 \cdot A_2^1 + 8 = 2$$

Posso semplificare l'ultima calcola.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{III} \leftarrow \text{III} - \text{I}} B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Lo sviluppo lungo la
1ª colonna è diventato
molto comodo:

$$\det A = 1 \cdot B_1 + 0 \cdot B_2 + 0 \cdot B_3 = 1 \cdot B_1 = 2$$

$$B_1 = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2$$

$$A \in M_n \quad |A| \neq 0$$

THEOR - $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot {}^t A^\#$ dove

$$A^\# = \begin{pmatrix} A'_{11} & \dots & A'_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ A'_{n1} & \dots & A'_{nn} \end{pmatrix}$$

Esempio $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ $\det A = 2$

$$A^{\#} = \begin{pmatrix} A_1^1 & A_2^1 & A_3^1 \\ A_1^2 & A_2^2 & A_3^2 \\ A_1^3 & A_2^3 & A_3^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 1 & -2 \\ -10 & 2 & -2 \\ 8 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -6 & -10 & 8 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -5 & 4 \\ 1/2 & 1 & -1/2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Secondo metodo: affianco
la matrice identica I_n e applico trasformazioni di riga
(1, 2, 3) fino a portare A a diventare l'identica,
 I_n sarà diventata A^{-1}

3) moltiplico una riga per un numero $\neq 0$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{III} \leftarrow \text{III} - \text{I}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{II} \leftarrow \text{II} - \text{III}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{I} \leftarrow \text{I} + 3\text{III}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & -3 & 3 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{I} \leftarrow \text{I} - \text{II}$$

$$\begin{pmatrix} -3 & -5 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{II} \leftarrow \frac{1}{2}\text{II}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -5 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & -1/2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

In uno sp. vett. V sia $S \subset V$ $S \neq \emptyset$.

Sottospazio generato da S . l'insieme (che risulta essere sottospazio vettoriale) di tutte le combinazioni lineari di elementi di S . Si indica con $L(S)$ ($\langle S \rangle$, o $\text{span}(S)$). S stesso è detto sistema di generatori di $L(S)$.

Di particolare interesse sono i sistemi di generatori di tutto V .

I vettori $v_1, \dots, v_h$ si dicono linearmente dipendenti se $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_h$ scalari non tutti nulli tali che

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_h v_h = \overline{0}_V \quad (\text{vettore nullo di } V)$$

TEOR - $v_1, \dots, v_h$ sono lin. dipendenti

$\Downarrow$

$\exists r \in \mathbb{N}_h$ tale che v_r è combinazione lineare di $v_1, \dots, v_{r-1}, v_{r+1}, \dots, v_h$

Un insieme $S \subset V$ si dice lin. dipendente se
 $\exists v_1, \dots, v_h \in S$ lin. dipendenti

Un insieme $T \subset V$ si dice linearmente indipendente
se non è linearmente dipendente.

Base di uno spazio vettoriale: un sistema
di generatori di V , linearmente indipendente

TEOR - Tutte le basi di uno sp. vettoriale V hanno la stessa cardinalità (cioè lo stesso numero di elementi).

Tale numero è detto dimensione di V : $\dim V$

PROP - Ogni sottoinsieme di un insieme lin. indep. è lin. indep.

PROP - Ogni soprainsieme di un insieme lin. dip. è lin. dip.

PROP - Ogni soppriinsieme di un sistema di generatori di V è un sistema di generatori di V .

PROP - Sia B una base di V . Se $S \subsetneq B$, allora S non è un sistema di generatori di V .

Base ordinata di V (nel caso di dimensione finita): una n -pla ordinata $B = (e_1, \dots, e_n)$ dove $\{e_1, \dots, e_n\}$ è una base di V .

Data in V una base ordinata $B = (e_1, \dots, e_n)$
la funzione $\Phi_B: V \longrightarrow \mathbb{K}^n$

questi scalari
 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sono univocamente
determinati se B è una base
e' biiettiva.

$$v \longmapsto (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$$

$\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n$

↑
Componenti
di v rispetto
a B

(In realtà è molto di più: è un isomorfismo;
ne parliamo più avanti)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in M_{m,n}$$

Chiamo spazio riga di A il sottospazio di K^n generato dalle righe di A .

Chiamo spazio colonna di A il sottospazio K^m generato dalle colonne di A .

Chiamo rango di A il numero $\text{rk}(A) := \dim(\text{spazio colonna di } A)$

TEOR - $\text{rk}(A) = \text{rk}(^t A)$, cioè
 $\dim(\text{spazio righe di } A) = \dim(\text{spazio colonne di } A)$



è il massimo numero di colonne
(o di righe) linearmente indipendenti;

TEOR - Le operazioni di riga $(1, 2, 3)$ non cambiano lo spazio riga (e quindi nemmeno la sua dimensione $= \text{rk}(A)$).

Metodo 1 per il calcolo del rango di A .

Matrice ridotta per righe: una matrice in cui

1) il pivot (primo elemento $\neq 0$ da sinistra) di ogni riga si trova più a sinistra dei pivot delle righe successive.

2) le eventuali righe nulle sono le ultime righe

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 6 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ Sì}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ No}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 7 \end{pmatrix} \text{ No}$$

Mediante operazioni di riga
trasforma A in una matrice B ridotta. Poi conta
i pivot di B .

Esempio $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & -2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$\underline{II} \leftarrow \underline{II} - \underline{I}$

$\rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & -2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$\underline{IV} \leftarrow \underline{IV} + 2\underline{I}$

$\begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & 0 & -5 \end{pmatrix}$

$\underline{II} \leftrightarrow \underline{III}$

$\begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -5 & 0 & -5 \end{pmatrix}$

$\underline{III} \leftarrow \underline{III} - 4\underline{II}$
 $\underline{IV} \leftarrow \underline{IV} + 5\underline{III}$

$\begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 5 \end{pmatrix}$

$\underline{IV} \leftarrow \underline{IV} + 5\underline{III}$

$\begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\text{rk} = \text{rk } A = 3$

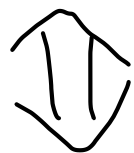
2° metodo: Teor. di Kronecker

TEOR - $A \in M_{m,n}$

$$\text{rk } A = r$$



- 1) $\exists$ minore M di ordine r con $|M| \neq 0$
- e 2) ogni minore M' di ordine $> r$ ha $|M'| = 0$



- 1) $\exists$ minore M di ordine r con $|M| \neq 0$
- e 2) ogni orlata M' di M ha $|M'| = 0$

ogni minore di A ottenuto intersecando le r righe usate per M più una con le r colonne usate per M più una

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & -2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad |M| = 1 \neq 0$$

Orlati di M:

$$O_1 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad |O_1| = 0 \quad O_2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad |O_2| = -1 \quad \left| \begin{smallmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -2 \end{smallmatrix} \right| = 0$$

$$O_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad |O_3| = - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$$

Orlati del NUOVO M:

$$\bar{O}_1 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad |\bar{O}_1| = 0$$

$$\bar{O}_2 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad |\bar{O}_2| = 1 \quad \left| \begin{smallmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{smallmatrix} \right| = 0$$

$$\left| \begin{smallmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & -5 & -5 \end{smallmatrix} \right| = 0$$

$r_K A = 3$