

Sistema lineare: Una coppia $S = (A, (b))$ dove $A \in M_{m,n}$
 $(b) = (b_i)_{i \in \mathbb{N}_m}$ è una m -pla di numeri
 $\in M_{m,1}$

Soluzione di S (se esiste) è una n -pla $(\bar{x}) = (\bar{x}_i)_{i \in \mathbb{N}_n} \in M_{n,1}$
tale che $A \cdot (\bar{x}) = (b)$

Sistema di Cramer: $S = (A, (b))$ in cui $A \in M_n$ e $|A| \neq 0$

TEOR (Cramer) - Se $S = (A, (b))$ è di Cramer, allora
ammette una unica soluzione $(\bar{x}) = (\bar{x}_i)_{i \in \mathbb{N}}$

$$(\bar{x}) = A^{-1} \cdot (b)$$

$$| \cancel{A}^{-1} \cdot \cancel{A} \cdot (\bar{x}) = \cancel{A}^{-1} \cdot (b) |$$

Matrice incompleta di S: $A = \begin{pmatrix} a_1^1 & \dots & a_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^m & \dots & a_n^m \end{pmatrix}$

Matrice completa di S: $C = \begin{pmatrix} a_1^1 & \dots & a_n^1 & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1^m & \dots & a_n^m & b_m \end{pmatrix}$

Colonna dei termini noti: (b)

TEOR - (Rouché-Capelli)

$S = (A, (b))$ ha soluzioni $\Leftrightarrow \text{rk}(A) = \text{rk}(C)$

OSS - Se ci sono soluzioni, esse dipendono da $n - r$ parametri, dove $r = \text{rk}(A) = \text{rk}(C)$.

- Metodo 1 per la risoluzione di un sistema possibile $S = (A, b)$
(Rouché-Capelli-Kronecker)
- 0) Ho trovato un minore M di A , di ordine r , con $|M| \neq 0$, tale che tutti i suoi orlati in A e in C abbiano $\det = 0$
 - 1) Cancello le equazioni i cui coefficienti non hanno contribuito a formare M
 - 2) Trasformo le $n-r$ incognite i cui coefficienti non hanno contribuito a formare M in altrettanti parametri, e li porto a secondo membro
 - 3) Ora ho un sistema di r equazioni in r incognite, con matrice incompleta M e termini noti dipendenti da $n-r$ parametri. È di Cramer. Lo risolvo in funzione dei parametri.

Esempio - $S = (A, b)$ con $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\text{rk } A = 3 = \text{rk } C$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 - 3x_3 = 2 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_3 + x_4 = 2 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 = -1 \end{cases}$$

$|M| = - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$

$M^\# = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & 0 \end{pmatrix}$

M

$$\begin{cases} x_1 = \alpha \\ x_2 + x_3 = 2 + 2\alpha \\ x_3 + x_4 = 2 \\ -2x_2 + x_3 = -1 - 4\alpha \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + 2\alpha \\ 2 \\ -1 - 4\alpha \end{pmatrix}$$

$M = x_1 = \alpha$

Metodo 2 (Gauss-Jordan)

- 1) Scrivo la matrice completa C di S
- 2) Riduco C a matrice ridotta (con operazioni di riga)
- 3) L'ultimo pivot appartiene all'ultima colonna: S impossibile
- 3') Se ci sono righe nulle le cancello
- 3'') Se ci sono righe nulle del sistema S corrispondente a C'
- 4) Risolvo l'ultima equazione, eventualmente introducendo parametri e sostituisco nelle equazioni precedenti.
- 5) Itero 4)

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 - 3x_3 = -2 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_3 + x_4 = 2 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & -2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & 0 & -5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -5 & 0 & -5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} -2x_1 + x_2 - 3x_3 = -2 \\ x_3 + x_4 = 2 \\ -4x_4 = -4 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} -2x_1 + x_2 = -2 + 3 = 1 \\ x_3 = 1 \\ x_4 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = \alpha \\ x_2 = 1 + 2\alpha \\ x_3 = 1 \\ x_4 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 - 3x_3 = -2 \\ x_3 = 2 - 1 = 1 \\ x_4 = 1 \end{cases}$$

Sottospazio vettoriale di $(K, V, +, \cdot)$

$\uparrow$ campo degli scalari $\uparrow$ somma di vettori insieme dei vettori $\uparrow$ prodotto scalare per vettore

è un sottoinsieme $U \subset V$
 tale che, con le stesse
 operazioni $+$ e $\cdot$, $(K, U, +, \cdot)$
 sia esso stesso spazio vettoriale.

TEOR - Un insieme $U \subset V$ è sottospazio vettoriale

- III
- 1) è chiuso rispetto alla somma: $\forall u_1, u_2 \in U \quad u_1 + u_2 \in U$
 - e 2) è chiuso rispetto al prodotto per scalare: $\forall \alpha \in K, \forall u \in U \quad \alpha \cdot u \in U$

Un sistema lineare si dice omogeneo se ha termini noti nulli:
 $(b) = (0)$.

TEOR - Ogni sistema lineare omogeneo è possibile e ha almeno
la soluzione ovvia (o banale, o nulla) $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

TEOR - Un sistema lineare omogeneo ha soluzioni
diverse dall'ovvia $\Leftrightarrow \text{rk}(A) < n$

Sia V un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$; esso può essere visto come insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo (forma cartesiana); può essere individuato come insieme di n -ple dipendenti da parametri (forma parametrica).

PROBLEM A - Dato un insieme finito di generatori del sottospazio V , trovarne rappresentazioni cartesiane e parametriche.

PROCEDIMENTO - In entrambi i casi, forma una matrice A mettendo i generatori in colonna. Poi, usando il teor. di Kronecker, individua un minore M con $|M| \neq 0$, tale che tutti i suoi orlati in A abbiano $\det = 0$.

Ottengo una matrice $B \in M_{n,r}$,
dove r è l'ordine di M (e il rango di A) cancellando le colonne
che non hanno contribuito a formare M .
Le colonne di B costituiscono una base di V

Cartesiana: Affianco a B una colonna di incognite $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$
ottenendo una matrice $C \in M_{n,(r+1)}$. A C impongo
di avere rango r , uguagliando a zero gli $n-r$ minori orlati
di M .

Parametrica: la espressione parametrica è

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = B \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix}$$

Dati sp. vett. V, W sullo stesso campo K , un'applicazione $T: V \rightarrow W$ si dice lineare se, $\forall v_1, v_2 \in V, \forall \alpha \in K$,

$$\begin{aligned} 1) & T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2) \\ \text{e } 2) & T(\alpha \cdot v_1) = \alpha \cdot T(v_1) \end{aligned}$$

Un'applicazione lineare T è detta isomorfismo se è biiettiva.

Un'applicazione lin. T è detta endomorfismo se $\bar{e}$ da V a se stesso; è detta automorfismo se è un isomorfismo da V a se stesso.

Data $T: V \rightarrow W$ lineare

$\text{Ker } T = \{v \in V \mid T(v) = \bar{0}_W\}$, nucleo di T , è un
sottospazio vett. di V

$\text{Im } T = \{w \in W \mid \exists v \in V \text{ t.c. } w = T(v)\}$, immagine di T
è un sottosp. vett. di W .