

$I_{\mathbb{A}} \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ classificazione proiettiva delle coniche

$$rk = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad I_{\mathbb{A}} : X_0^2 = 0 \quad \text{una retta (contata due volte)}$$
$$W : \begin{cases} X_0 = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \quad \text{la stessa retta}$$

$$rk = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad I_{\mathbb{A}} : X_0^2 + X_1^2 = 0 \quad \text{unione di 2 rette}$$
$$(X_0 + iX_1)(X_0 - iX_1) = 0$$
$$W : \begin{cases} X_0 = 0 \\ X_1 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \quad \text{un punto : l'intersezione delle 2 rette}$$
$$(0, 0, 1)$$

$$X_0^2 - 4X_0X_1 + 2X_0X_2 - 12X_1^2 + 20X_1X_2 - 8X_2^2 = 0$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & -12 & 10 \\ 1 & 10 & -8 \end{pmatrix}$$

$$\text{rk } A = 2$$

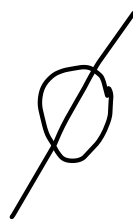
$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -16 & 12 \\ 0 & 12 & -9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -16 & 12 \\ 12 & -9 \end{vmatrix} = 0$$

$$rk = 3$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$I_m, X_0^2 + X_1^2 + X_2^2 = 0$$

$$W: \begin{cases} X_0 = 0 \\ X_1 = 0 \\ X_2 = 0 \end{cases}$$



si può
dimostrare

non contiene
rette; contiene
infiniti punti

In $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ classificazione proiettiva delle quadriche

$rk=1$
 $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$

$I_m: X_0^2 = 0$ un piano (contato 2 volte)

$W: \begin{cases} X_0 = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$ lo stesso piano

$rk=2$
 $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$

$I_m: X_0^2 + X_1^2 = 0$ unione di 2 piani
 $(X_0 + iX_1)(X_0 - iX_1) = 0$

$W: \begin{cases} X_0 = 0 \\ X_1 = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$ una retta: l'intersezione dei 2 piani

$$rk \geq 3 \quad I_m: X_0^2 + X_1^2 + X_2^2 = 0$$

$$W: \begin{cases} X_0 = 0 \\ X_1 = 0 \\ X_2 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \quad \text{un punto}$$

unione di ∞ ~~generatrici~~ rette
passanti per il vertice
non contiene piani
Si può dimostrare

$$rk = 4 \quad I_m: X_0^2 + X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 = 0$$

$$W: \begin{cases} X_0 = 0 \\ X_1 = 0 \\ X_2 = 0 \\ X_3 = 0 \end{cases} \quad \emptyset$$

Contiene ∞ punti,
non contiene piani,
per ogni punto ci sono
due rette ~~generatrici~~ contenute
nell'immagine
Si può dimostrare

In $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ classificazione proiettiva delle coniche

$$\begin{pmatrix} 1, 0 \\ 1, 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0, 1 \\ -1, 0 \end{pmatrix}$$

$I_m: X_0^2 = 0$ una retta (contata 2 volte)

$$\begin{pmatrix} 2, 0 \\ 1, 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0, 2 \\ -1, 0 \end{pmatrix}$$

$I_m: X_0^2 + X_1^2 = 0$ un punto

$$W: \begin{cases} X_0 = 0 \\ X_1 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

lo stesso punto

$$\begin{pmatrix} 1, 1 \\ 1, 0 \end{pmatrix}$$

$I_m: X_0^2 - X_1^2 = 0$ unione di 2 rette
 $(X_0 + X_1)(X_0 - X_1) = 0$

$$W: \begin{cases} X_0 = 0 \\ -X_1 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

un punto: l'intersezione delle 2 rette

$$(3, 0) \quad (0, 3)$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$I_m: X_0^2 + X_1^2 + X_2^2 = 0$$

$\emptyset$

$$V: \begin{cases} X_0 = 0 \\ X_1 = 0 \\ X_2 = 0 \end{cases} \quad \emptyset$$

$$(2, 1) \quad (1, 2)$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$I_m: X_0^2 + X_1^2 - X_2^2 = 0$$

$$W: \begin{cases} X_0 = 0 \\ X_1 = 0 \\ -X_2 = 0 \end{cases} \quad \emptyset$$

contiene ∞ punti
non contiene rette
si può dimostrare

$I_n \mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ classificazione proiettiva delle quadriche

$$(1,0) \quad (0,1) \\ \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

$$I_m: X_0^2 = 0 \quad \text{un piano (contato 2 volte)} \\ W: \begin{cases} X_0 = 0 \\ \sigma = \sigma \\ 0 = 0 \\ \sigma = \sigma \end{cases} \quad \text{la stesso piano}$$

$$(2,0) \quad (0,2) \\ \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

$$I_m: X_0^2 + X_1^2 = 0 \quad \text{una retta} \\ W: \begin{cases} X_0 = 0 \\ X_1 = 0 \\ \sigma = \sigma \\ \sigma = 0 \end{cases} \quad \text{la stessa retta}$$

$$(1,1) \\ \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

$$I_m: X_0^2 - X_1^2 = 0 \\ (X_0 + X_1)(X_0 - X_1) = 0 \quad \text{unione di 2 piani:} \\ W: \begin{cases} X_0 = 0 \\ -X_1 = 0 \\ 0 = \sigma \\ 0 = \sigma \end{cases} \quad \text{una retta, l'intersezione dei 2 piani}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$I_m : x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$$

un punto

$$W : \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

$$(2$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(4,0) \quad (0,4) \quad I_m: X_0^2 + X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 = 0 \quad \emptyset$$

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \quad W: \begin{cases} X_0=0 \\ X_1=0 \\ X_2=0 \\ X_3=0 \end{cases} \quad \emptyset$$

quadrica immaginaria
o vuota

$$(3,1) \quad (1,3) \quad I_m: X_0^2 + X_1^2 + X_2^2 - X_3^2 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \quad W: \begin{cases} X_0=0 \\ X_1=0 \\ X_2=0 \\ -X_3=0 \end{cases} \quad \emptyset$$

quadrica ellittica
o non rigata

contiene ∞ punti
non contiene piani
non contiene rette

Si può dimostrare

$$(2,2) \quad I_m: X_0^2 + X_1^2 - X_2^2 - X_3^2 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \quad W: \begin{cases} X_0=0 \\ X_1=0 \\ -X_2=0 \\ -X_3=0 \end{cases} \quad \emptyset$$

quadrica iperbolica
o doppiamente rigata

contiene ∞ punti
non contiene piani
per ogni punto
passano 2 rette ^{generatrici}
contenute nell'imm.

Si può dimostrare

In $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ classificazione proiettiva delle iperquadriche

$rk=1$	$I_m: X_0^2 = 0$	un punto (contato 2 volte)
$\begin{pmatrix} 1 & \\ & 0 \end{pmatrix}$	$W: \begin{cases} X_0 = 0 \\ X_1 = 0 \end{cases}$	lo stesso punto

$rk=2$	$I_m: X_0^2 + X_1^2 = 0$	due punti
$\begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}$	$(X_0 + iX_1)(X_0 - iX_1) = 0$	
	$W: \begin{cases} X_0 = 0 \\ X_1 = 0 \end{cases}$	$\emptyset$

<u>$I_h \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$</u>	$\begin{pmatrix} 1,0 \\ 1,0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,1 \\ -1,0 \end{pmatrix}$	$I_m: X_0^2 = 0$	un punto (contato 2 volte)
		$W: \begin{cases} X_0 = 0 \\ X_1 = 0 \end{cases}$	lo stesso punto

$\begin{pmatrix} 2,0 \\ 1,1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,2 \\ -1,-1 \end{pmatrix}$	$I_m: X_0^2 + X_1^2 = 0$	$\emptyset$
	$W: \begin{cases} X_0 = 0 \\ X_1 = 0 \end{cases}$	$\emptyset$

$\begin{pmatrix} 1,1 \\ 1,-1 \end{pmatrix}$	$I_m: X_0^2 - X_1^2 = 0$	due punti
$W: \begin{cases} X_0 = 0 \\ -X_1 = 0 \end{cases}$	$(X_0 + X_1)(X_0 - X_1) = 0$	

$$A = \begin{pmatrix} a_0^0 & a_0^1 & a_0^2 \\ a_1^0 & a_1^1 & a_1^2 \\ a_2^0 & a_2^1 & a_2^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \cancel{a_0^0 X^2} + \cancel{2a_1^0 X_0 X_1} + \cancel{2a_2^0 X_0 X_2} + a_1^1 X_1^2 + 2a_2^1 X_1 X_2 + a_2^2 X_2^2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_0 = 0 \end{cases} \quad \frac{X_1}{X_2} = \frac{-a_2^1 \pm \sqrt{(a_2^1)^2 - a_1^1 a_2^2}}{a_1^1} \quad \begin{matrix} \Delta/4 \\ \Rightarrow a_2^1 a_2^2 - a_1^1 a_2^2 = \\ = -|M_0^a| = -A_0^0 \end{matrix}$$