PROP — $\dim V = n$; se $X \subseteq V$ è lin. indip., allora $|X| \leq n$. Se $|X| = n$, allora X è base

---

$A \in \mathcal{M}_{m,n}$ rango di A $\mathrm{rk} A$ si definisce come $\mathrm{rk} A \overset{def}{=} \dim(\text{spazio colonna di } A)$.

TEOR — $\mathrm{rk}\, {}^t A = \mathrm{rk} A$

Cioè $\mathrm{rk} A$ è anche $\dim(\text{spazio riga di } A)$

$B \in M_{m,n}$ si dice <u>ridotta</u> per righe se

1) le eventuali righe nulle sono le ultime
2) detto pivot il primo elemento non nullo di una riga a partire da sinistra, il pivot di ogni riga non nulla è più a sinistra del pivot della riga successiva.

PROP - Se B è ridotta, allora

$$\mathrm{rk}\, B = \text{n. di pivot}$$

PROP – Se B è ottenuta da A mediante trasformazioni di riga 1, 2, 3 allora

$$\mathrm{rk}\, B = \mathrm{rk}\, A$$

PROP – Data $A \in M_{m,n}$ $\exists$ successione di trasformazioni di riga che trasformano A in una B ridotta.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -5 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{rk} A = 2$$

Gauss-Jordan

$A \in M_{m,n}$, sia M un minore estratto da A intersecando certe h righe con certe h colonne. Chiamo <u>orlato</u> di M ogni minore M' estratto da A intersecando le stesse righe più una con le stesse colonne più una.

TEOR (Kronecker) - $A \in M_{m,n}$. Sono equivalenti:

1) $rk A = h$
2) $\exists$ un minore M di ordine h con $|M| \neq 0$ e tutti i minori di ordine $> h$ hanno $\det = 0$
3) $\exists$ un minore M di ordine h con $|M| \neq 0$ e tutti i suoi orlati hanno $\det = 0$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -5 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad |M| = -1 \neq 0$$

$$|O_1| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad |O_2| = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -5 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$|O_3| = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad rk A = 2$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -5 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad |M| = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

<u>Sistema lineare</u>: una coppia $S = (A, (b))$ dove $A \in \mathcal{M}_{m,n}$ e $(b) \in \mathcal{M}_{m,1}$

<u>Soluzione di S</u>: ogni n-pla (se esiste) $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ tale che

$$A \cdot \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{pmatrix} = (b)$$

matrice incompleta

m-pla dei <u>termini noti</u>

$X = \{ x \in \{\text{umani qui presenti}\} \mid x \text{ ha 3 braccia} \}$

$= \emptyset$

$Y = \{ x \in \{\text{umani qui presenti}\} \mid x \text{ ha adesso gli occhiali} \}$

$= \{ \text{Edoardo} \}$

$$\mathrm{Sol}\, S = \left\{ (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \right\}$$

S si dice possibile (o compatibile) se $Sol\, S \neq \emptyset$. Impossibile se $Sol\, S = \emptyset$

S possibile si dice determinato se $Sol\, S$ contiene esattamente una n-pla, si dice indeterminato se ne contiene più di una.

con campi infiniti, questo vuol dire addirittura infinite soluzioni.

Sistema lineare omogeneo:
quando $(b) = (0)$

TEOR - $S = (A, (0))$ ha sempre almeno una soluzione, detta banale o ovvia o nulla:
$(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) = (0, \dots, 0)$

TEOR - $S = (A, (0))$ con $A \in M_{m,n}$ ha soluzioni diverse dalla ovvia $\iff rk\, A < n$

PROP - Per qualunque sist. lin. omogeneo $S = (A, (0))$ con $A \in M_{m,n}$, Sol S è un sottosp. vett. di $\mathbb{K}^n$, di $\dim = n - rk\, A$

TEOR (Cramer) — Sia $A \in M_n$. Allora il sistema $S = (A \mid (b))$ ammette soluzione unica $\Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow \det A \neq 0$.

In tal caso la sol. è $\begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot (b)$

TEOR (Rouché-Capelli) Sia $A \in M_{m,n}$. Allora $S = (A \mid (b))$ è possibile $\Longleftrightarrow \operatorname{rk} A = \operatorname{rk} C$, dove C (matrice <u>completa</u>) è $C = \begin{pmatrix} a^1_1 & \cdots & a^1_n & b_1 \\ - & - & - & - \\ a^m_1 & \cdots & a^m_n & b_m \end{pmatrix}$

In tal caso la generica soluzione dipende da $n - \operatorname{rk} A$ parametri.

Gergo: in quel caso si usa dire che ci sono ∞^{n-rkA} soluzioni.

Metodo 1 (Gauss-Jordan) di discussione ed eventuale risoluzione

1) Scrivo la matrice completa C
2) Con trasf. di riga la porto in forma ridotta C'
3) 3') Se l'ultimo pivot di C' è nella colonna dei termini noti, S è IMPOSSIBILE

3'') Altrimenti risolvo l'ultima equazione, eventualmente introducendo parametri, e sostituisco nelle equazioni precedenti.

4) Itero 3''.

$$S:\begin{cases} 2z+3t=1 \\ x+y-5z+t=0 \\ x+y-3z+4t=1 \end{cases} \qquad C=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -5 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow C' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x+y-5z+t=0 \\ 2z+3t=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y-5\dfrac{1-3\alpha}{2}+\alpha=0 \\ z=\dfrac{1-3\alpha}{2} \\ t=\alpha \end{cases}$$

$$-\frac{5}{2}+\frac{15}{2}\alpha+\alpha= \\ =\frac{17}{2}\alpha-\frac{5}{2}$$

$$\begin{cases} x=-\beta-\dfrac{17}{2}\alpha+\dfrac{5}{2} \\ y=\beta \\ z=\dfrac{1-3\alpha}{2} \\ t=\alpha \end{cases}$$

$$Sol\,S=\left\{\left(-\frac{17}{2}\alpha-\beta+\frac{5}{2},\ \beta,\ \frac{1-3\alpha}{2},\ \alpha\right) \,\middle|\, \alpha,\beta\in\mathbb{R}\right\}$$

Metodo 2 (Rouché-Capelli-Kronecker)

0) Ho trovato un minore M di ordine h della incompleta tale che $|M| \neq 0$ e tutti i suoi orlati nella incompleta e nella completa hanno det = 0

1) Cancello le equazioni che non contengono M

2) Trasformo in parametri indipendenti le n-h incognite i cui coefficienti non formano M, porto a secondo membro

3) A questo punto ho un sistema di Cramer di h eq. in h incognite, con matrice incompleta M e termini noti dipendenti da n-h parametri. Lo risolvo in funzione dei parametri.

$$S: \begin{cases} 2z + 3t = 1 \\ \cancel{x + y - 5z + t = 0} \\ x + y - 3z + 4t = 1 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{0} & 0 & \boxed{2} & 3 & 1 \\ \cancel{1} & \cancel{1} & \cancel{-5} & \cancel{1} & \cancel{0} \\ \boxed{1} & 1 & \boxed{-3} & 4 & 1 \end{array}\right)$$

A $\quad$ C

$\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} \neq 0$ $\quad$ $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -5 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 0$

$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & -5 & 1 \\ 1 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 0$ $\quad$ $rk\,A = 2$

$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -5 & 0 \\ 1 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 0$ $\quad$ $rk\,C = 2$

$$\begin{cases} \boxed{\begin{array}{l} 2z = 1 - 3\delta \\ x - 3z = 1 - \gamma - 4\delta \end{array}} \\ y = \gamma \\ t = \delta \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = \dfrac{1 - 3\delta}{2} \\ x = 1 - \gamma - 4\delta + 3\dfrac{1 - 3\delta}{2} \\ y = \gamma \\ t = \delta \end{cases}$$

Dire ~~quando~~ per quali α "è possibile e in tal caso" quante soluzioni ha"

$$S: \begin{cases} x+y-z-4t=\alpha \\ y+\alpha z-t=1 \\ \alpha x-y+z+4t=-4 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1 \quad 1} & -1 & -4 & \alpha \\ \boxed{0 \quad 1} & \alpha & -1 & 1 \\ \alpha & -1 & 1 & 4 & -4 \end{array}\right)$$

A $\quad$ C

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$|M|=1\neq 0$

$rkC \geq rkA \geq 2$

$$|O_1|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & \alpha \\ \alpha & -1 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & \alpha \\ 0 & -(\alpha+1) & (\alpha+1) \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & \alpha \\ -(\alpha+1) & (\alpha+1) \end{vmatrix}=\alpha+1+\alpha^2+\alpha=\alpha^2+2\alpha+1=(\alpha+1)^2$$

$$|O_2|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -1 \\ \alpha & -1 & 4 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ \alpha & -1 & 3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ \alpha & 3 \end{vmatrix}=3+3\alpha=3(\alpha+1)$$

$$rkA=2 \iff \begin{cases} |O_1|=0 \\ |O_2|=0 \end{cases} \iff \begin{cases} (\alpha+1)^2=0 \\ 3(\alpha+1)=0 \end{cases} \iff \alpha=-1$$

Dovrei calcolare

$$|O_3|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ 0 & 1 & 1 \\ \alpha & -1 & -4 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & (\alpha-1) \\ 0 & 1 & 0 \\ \alpha & -1 & -3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & (\alpha-1) \\ \alpha & -3 \end{vmatrix}=-3-\alpha^2+\alpha$$

$\alpha^2-\alpha+3=0 \quad \alpha=\dfrac{1\pm\sqrt{1-12}}{2}$ $\quad 1-12<0$

$$rkA=2 \iff \begin{cases} |O_1|=0 \\ |O_2|=0 \\ |O_3|=0 \end{cases}$$ MAI

Furbizia: sostituisco $\alpha = -1$ in C e vedo cosa succede:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 4 & -4 \end{array}\right) \quad |\Theta_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} \neq 0$$

α	rk A	rk C	sol
$\alpha = -1$	2	3	$\emptyset$
$\alpha \neq -1$	3	3	∞^1 sol

Sp. vettoriali V, W sullo stesso $\mathbb{K}$

$T: V \to W$ si dice **lineare** se

1) $\forall v_1, v_2 \in V$ $\quad T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2)$

in V $\quad$ in W

2) $\forall v \in V, \forall \alpha \in \mathbb{K}$ $\quad T(\alpha v) = \alpha T(v)$

isomorfismo

trasf. lin. biiettiva

Esempi:

1) $V = \{$forze nel punto $P\}$ $\quad W = \{$segmenti con un estremo in $P\}$

$T: V \longrightarrow W$

$\vec{f} \longmapsto$ segmento con stessa dir., stesso verso e lunghezza in cm $=$ intensità di $\vec{f}$ in N

è isomorfismo

2) $V = \{$campi magnetici in $P\}$ $W = \{$forze applicate in $P\}$

$\vec{i}$ una fissata corrente per P

$$T : V \longrightarrow W$$
$$v \longmapsto f = \vec{i} \wedge v$$

è lineare

ma non iso

3) $V = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \exists \lim_{x \to 5} f(x) \}$

$W = \mathbb{R}$

$$T : V \longrightarrow W$$
$$f \longmapsto \lim_{x \to 5} f(x)$$

4) $V = W = C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f$ ha derivate di tutti gli ordini $\}$

$$T : V \longrightarrow W = V$$
$$f \longmapsto \frac{df}{dx}$$

è lineare ma non iso

5) $V = C^0([0,1], \mathbb{R}) \quad W = \mathbb{R}$

$$T : V \longrightarrow W$$
$$f \longmapsto \int_0^1 f(x)\,dx$$

è lineare ma non iso

Data $T: V \to W$ lineare definisco

$$\operatorname{Ker} T = \{ v \in V \mid T(v) = \bar{0}_W \}$$

$$\operatorname{Im} T = \{ w \in W \mid \exists\, v \in V \text{ tale che } T(v) = w \}$$

PROP - $\operatorname{Ker} T$ è un sottosp. vett. di V

$\operatorname{Im} T$ è un sottosp. vett. di W

TEOR - T è iniettiva $\iff \operatorname{Ker} T = \{\bar{0}_V\}$

T è suriettiva $\iff \operatorname{Im} T = W$

T è biiettiva $\iff \operatorname{Ker} T = \{\bar{0}_V\} \wedge \operatorname{Im} T = W$

TEOR - Sia $(e_1, \dots, e_n)$ una base ordinata di V. Allora $\forall v \in V \ \exists!\, (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ tale che

$$v = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n$$

TEOR -

$$\Phi_{\mathcal{B}} : V \longrightarrow \mathbb{K}^n$$

$$v = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n \longmapsto (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$$

componenti di v rispetto a $\mathcal{B}$

è un isomorfismo

$$\begin{array}{c} V \\ \big\downarrow {\scriptstyle \Phi_{\mathcal{B}}} \\ \mathbb{K}^n \end{array}$$

PROP - $T: V \to W$ lineare

siano $v_1, \dots, v_r \in V$

$w_1 = T(v_1), \dots, w_r = T(v_r)$

Allora:

$v_1, \dots, v_r$ lin. dip. $\Longrightarrow$ $w_1, \dots, w_r$ lin. dip.

$w_1, \dots, w_r$ lin. ind. $\Longrightarrow$ $v_1, \dots, v_r$ lin. ind.

Se T è iniettiva

$v_1, \dots, v_r$ lin. ind. $\Longrightarrow$ $w_1, \dots, w_r$ lin. ind.

COR – Se T è iso allora

$v_1, \dots, v_r$ lin. ind. $\Longleftrightarrow$ $w_1, \dots, w_r$ lin. ind.

T trasforma ogni sottosp. vetti di V in un sottosp. vetti. di W della stessa dimensione

TEOR - Siano $\dim V = n$, $\dim \operatorname{Ker} T = h$. Allora

$$\dim \operatorname{Im} T = n - h$$

V sp. vett. di $\dim = n$

$\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ base ordinata di V

W sp. vett. di $\dim = m$

$\mathcal{B}' = (f_1, \dots, f_m)$ base ordinata di W