

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici, ...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora.

- 1) In uno spazio euclideo  $\mathcal{E}^3$  quali delle seguenti equazioni rappresentano quadriche non degeneri (anche dette non specializzate)?

- F V** a)  $x^2 + y^2 = 1$   
**F V** b)  $y = xz$   
**F V** c)  $y = x^2$   
**F V** d)  $x^2 + y^2 + z^2 = -1$

- 1') In un piano euclideo  $\mathcal{E}^2$  quali delle seguenti equazioni rappresentano coniche non degeneri (anche dette non specializzate)?

- F V** a)  $x^2 + y^2 = 1$   
**F V** b)  $y = xy$   
**F V** c)  $y = x^2$   
**F V** d)  $x^2 + y^2 = -1$

- 2) L'equipaggio dell'Enterprise si trova su un pianeta la cui popolazione ostile e primitiva usa ancora proiettili. Si rifugia in una grotta con un piccolo ingresso, ma i proiettili piovono da ogni direzione. Il Dottor Spock applica all'apertura d'ingresso un filtro deviante che si può regolare in modo che, se un proiettile viaggia con vettore velocità  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  il filtro cambia il suo vettore

velocità in  $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ . Con quali matrici  $A$  ci sono zone della grotta non raggiunte dai proiettili?

- F V** a)  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$   
**F V** b)  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$   
**F V** c)  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$   
**F V** d)  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$

2') L'equipaggio dell'Enterprise si trova su un pianeta la cui popolazione ostile e primitiva usa ancora proiettili. Si rifugia in una grotta con un piccolo ingresso, ma i proiettili piovono da ogni direzione. Il Dottor Spock applica all'apertura d'ingresso un filtro deviante che si può regolare in modo che, se un proiettile viaggia con vettore velocità  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  il filtro cambia il suo vettore

velocità in  $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ . Con quali matrici  $A$  ci sono zone della grotta non raggiunte dai proiettili?

**F V** a)  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$

**F V** b)  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$

**F V** c)  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$

**F V** d)  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$

3) Quali dei seguenti sottoinsiemi di  $\mathbf{R}^2$  ne sono sistemi di generatori?

**F V** a)  $X = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y = x^2\}$

**F V** b)  $X = \{(0, n) \in \mathbf{R}^2 \mid n \in \mathbf{Z}\}$

**F V** c)  $X = \{(1, -2), (-3, 6), (11, -22)\}$

**F V** d)  $X = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y = x\}$

3') Quali dei seguenti sottoinsiemi di  $\mathbf{R}^2$  ne sono sistemi di generatori?

**F V** a)  $X = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y = x^2\}$

**F V** b)  $X = \{(1, n) \in \mathbf{R}^2 \mid n \in \mathbf{Z}\}$

**F V** c)  $X = \{(1, -2), (-3, 3), (0, 0)\}$

**F V** d)  $X = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y = x\}$

4) Quali dei seguenti sono sottospazi di  $\mathcal{E}^3$  ortogonali all'asse  $x$ ?

**F V** a)  $\begin{cases} x = 1 \\ y = z \end{cases}$

**F V** b)  $y = z + 1$

**F V** c)  $\begin{cases} z = 1 \\ y = z \end{cases}$

**F V** d)  $\begin{cases} x = 1 \\ y = \alpha + \beta \\ z = \alpha - \beta \end{cases}$

4') Quali dei seguenti sono sottospazi di  $\mathcal{E}^3$  paralleli all'asse  $x$ ?

- F** **V** a)  $\begin{cases} x = 1 \\ y = z \end{cases}$   
**F** **V** b)  $y = z + 1$   
**F** **V** c)  $\begin{cases} z = 1 \\ y = z \end{cases}$   
**F** **V** d)  $\begin{cases} x = 1 \\ y = \alpha + \beta \\ z = \alpha - \beta \end{cases}$

5) Nello spazio vettoriale  $V$  delle successioni reali quali dei seguenti sottoinsiemi sono chiusi rispetto al prodotto per scalare?

- F** **V** a)  $X = \{\text{successioni costanti}\}$   
**F** **V** b)  $X = \{\text{successioni monotone}\} \cup \{\text{successione nulla}\}$   
**F** **V** c)  $X = \{\text{successioni convergenti}\}$   
**F** **V** d)  $X = \{\text{successioni con tutti gli elementi positivi}\}$

5') Nello spazio vettoriale  $V$  delle successioni reali quali dei seguenti sottoinsiemi sono chiusi rispetto alla somma?

- F** **V** a)  $X = \{\text{successioni costanti}\}$   
**F** **V** b)  $X = \{\text{successioni monotone}\} \cup \{\text{successione nulla}\}$   
**F** **V** c)  $X = \{\text{successioni convergenti}\}$   
**F** **V** d)  $X = \{\text{successioni con tutti gli elementi positivi}\}$

6) Siano  $A, B \in \mathcal{M}_5(\mathbf{R})$ . Quali delle seguenti affermazioni sono vere?

- F** **V** a) Se  $A \cdot B$  non è regolare, anche  $A$  e  $B$  non lo sono.  
**F** **V** b)  $\det(-A) = -\det(A)$   
**F** **V** c) Se  $A$  è regolare, allora  $\det(A^{-1}) = 1/\det(A)$ .  
**F** **V** d)  $\det(A \cdot B) = \det(B \cdot A)$

6') Siano  $A, B \in \mathcal{M}_4(\mathbf{R})$ . Quali delle seguenti affermazioni sono vere?

- F** **V** a) Se  $A \cdot B$  è regolare, anche  $A$  e  $B$  lo sono.  
**F** **V** b)  $\det(-A) = -\det(A)$   
**F** **V** c) Se  $A$  è regolare, allora  $\det(A^{-1}) = 1/\det(A)$ .  
**F** **V** d)  $A \cdot B = B \cdot A$

7) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?

- F** **V** a) Fra le matrici  $A \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ , tutte quelle il cui polinomio caratteristico è  $(t-1)^2(t-5)$  sono diagonalizzabili per similitudine.  
**F** **V** b) Fra le matrici  $A \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$  il cui polinomio caratteristico è  $(t-1)(t-3)(t-5)$ , ce ne sono alcune diagonalizzabili per similitudine e alcune non diagonalizzabili per similitudine.  
**F** **V** c) Fra le matrici  $A \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ , quelle il cui polinomio caratteristico è  $(t^2 - k^2)t$  sono diagonalizzabili per similitudine per ogni  $k \neq 0$ .  
**F** **V** d) Fra le matrici  $A \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ , quelle il cui polinomio caratteristico è  $(t^2 + k^2)t$  sono diagonalizzabili per similitudine per ogni  $k \neq 0$ .

7') Quali delle seguenti affermazioni sono vere?

- F V** a) Fra le matrici  $A \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$  il cui polinomio caratteristico è  $(t-1)^2(t-5)$ , ce ne sono alcune diagonalizzabili per similitudine e alcune non diagonalizzabili per similitudine.
- F V** b) Fra le matrici  $A \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ , tutte quelle il cui polinomio caratteristico è  $(t-1)(t-3)(t-5)$  sono diagonalizzabili per similitudine.
- F V** c) Fra le matrici  $A \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ , quelle il cui polinomio caratteristico è  $(t^2 - k^2)t$  sono non diagonalizzabili per similitudine per ogni  $k \neq 0$ .
- F V** d) Fra le matrici  $A \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ , quelle il cui polinomio caratteristico è  $(t^2 + k^2)t$  sono non diagonalizzabili per similitudine per ogni  $k \neq 0$ .

8) Le matrici  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$  e  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$  sono

- F V** a) simili e congruenti.
- F V** b) congruenti ma non simili.
- F V** c) simili ma non congruenti.
- F V** d) né simili né congruenti.

8') Le matrici  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$  e  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$  sono

- F V** a) simili e congruenti.
- F V** b) congruenti ma non simili.
- F V** c) simili ma non congruenti.
- F V** d) né simili né congruenti.

9) Sia  $A$  l'anello  $(\mathbf{Z}^3, +, \odot)$  dove  $+$  è l'usuale somma di terne di interi e  $(a, b, c) \odot (e, f, g) = (ae, bf, cg)$ . Allora in  $A$  la terna  $(1, 0, 2)$

- F V** a) ammette inverso rispetto a  $\odot$ .
- F V** b) è un divisore dello zero.
- F V** c) non ammette opposto rispetto a  $+$ .
- F V** d) non è un elemento dell'anello.

9') Sia  $A$  l'anello  $(\mathbf{Z}^3, +, \odot)$  dove  $+$  è l'usuale somma di terne di interi e  $(a, b, c) \odot (e, f, g) = (ae, bf, cg)$ . Allora in  $A$  la terna  $(1, 0, 2)$

- F V** a) non ammette inverso rispetto a  $\odot$ .
- F V** b) non è un divisore dello zero.
- F V** c) ammette opposto rispetto a  $+$ .
- F V** d) non è un elemento dell'anello.