

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici, ...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora.

- 1) Si dica quali dei seguenti spazi vettoriali V sono isomorfi a quello dei polinomi in x , a coefficienti reali, di grado ≤ 3 .

F V a) $V = \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$

F V b) $V = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R}) \mid A = {}^tA\}$

F V c) $V = \{\text{segmenti dello spazio ordinario, aventi un estremo in un punto } N\}$

F V d) $V = \{\text{segmenti di un piano fissato, aventi un estremo in un suo punto } N\}$

- 1') Si dica quali dei seguenti spazi vettoriali V sono isomorfi a quello dei polinomi in x , a coefficienti reali, di grado ≤ 2 .

F V a) $V = \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$

F V b) $V = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R}) \mid A = {}^tA\}$

F V c) $V = \{\text{segmenti dello spazio ordinario, aventi un estremo in un punto } N\}$

F V d) $V = \{\text{segmenti di un piano fissato, aventi un estremo in un suo punto } N\}$

- 2) Nello spazio vettoriale $V = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R}) \mid A = {}^tA\}$ la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, rispetto alla base

$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right)$ ha componenti

F V a) $(1, 2, 2, 3)$

F V b) $(1, 2, 3)$

F V c) $(-1, -1, 3)$

F V d) $(1, 1, 1)$

- 2') Nello spazio vettoriale $V = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R}) \mid A = {}^tA\}$ la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, rispetto alla base

$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ ha componenti

F V a) $(1, 2, 2, 3)$

F V b) $(1, 2, 3)$

F V c) $(-1, -1, 3)$

F V d) $(1, 1, 1)$

- 3) L'Enterprise ha trovato la misteriosa zona XYX dello spazio, di cui il Dottor Spock ha scoperto una proprietà: se si lancia un proiettile con vettore velocità v verso questa zona, il proiettile rimbalza all'indietro verso il punto di lancio con vettore velocità $T(v)$ di modulo quadruplo rispetto a v . Allora

F V a) T è lineare e non ha autovalori.

F V b) T è lineare e, rispetto a una certa base ordinata \mathcal{B} è rappresentata dalla matrice identica I_3 .

F V c) T è lineare e ha il solo autovalore 4 di molteplicità geometrica 1.

F V d) T è lineare e ha il solo autovalore -4 di molteplicità geometrica 3.

3') L'Enterprise ha trovato la misteriosa zona XYX dello spazio, di cui il Dottor Spock ha scoperto una proprietà: se si lancia un proiettile con vettore velocità v verso questa zona, il proiettile ne esce con vettore velocità $T(v)$ non nulla, dove la trasformazione T è lineare ed è rappresentata, rispetto ad una certa base ordinata \mathcal{B} , dalla matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$. Allora necessariamente

- F V** a) T non ha l'autovalore 0.
F V b) A è la matrice identica I_3 .
F V c) ci sono proiettili che escono dalla zona XYX lungo la stessa direzione con cui vi sono entrati.
F V d) A è diagonalizzabile per similitudine.

4) In un piano euclideo \mathcal{E}^2 , rispetto a un riferimento cartesiano, il sistema $\begin{cases} x + y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$ rappresenta

- F V** a) l'insieme vuoto.
F V b) l'origine del riferimento.
F V c) una retta contenente l'origine del riferimento.
F V d) tutto il piano.

4') Nello spazio euclideo ordinario \mathcal{E}^3 , rispetto a un riferimento cartesiano, il sistema $\begin{cases} x + y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$ rappresenta

- F V** a) l'insieme vuoto.
F V b) l'origine del riferimento.
F V c) l'asse coordinato z .
F V d) un piano contenente l'origine del riferimento.

5) Le radici del polinomio $x^4 + 19x^2 + 20$ sono tutte di molteplicità 1.

- F V** a) Il polinomio non ha radici reali.
F V b) Il polinomio ha almeno una radice reale positiva.
F V c) Il polinomio ha almeno una radice reale negativa.
F V d) Il numero di radici reali negative del polinomio è pari e non nullo.

5') Le radici del polinomio $x^4 - 8x^3 - 19x^2 - 8x - 20$ sono tutte di molteplicità 1.

- F V** a) Il polinomio non ha radici reali.
F V b) Il polinomio ha almeno una radice reale positiva.
F V c) Il polinomio ha almeno una radice reale negativa.
F V d) Il numero di radici reali negative del polinomio è pari e non nullo.

6) Si dica quali fra le seguenti applicazioni $T : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ sono lineari.

- F V** a) $T((x, y)) = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$
F V b) $T((x, y)) = \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & 1 \end{pmatrix}$
F V c) $T((x, y)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ x & y \end{pmatrix}$
F V d) $T((x, y)) = \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}$

6') Si dica quali fra le seguenti applicazioni $T : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ sono lineari.

F V a) $T((x, y)) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot (x \ y)$

F V b) $T((x, y)) = \begin{pmatrix} 0 & x \\ y & 0 \end{pmatrix}$

F V c) $T((x, y)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ x & y \end{pmatrix}$

F V d) $T((x, y)) = \begin{pmatrix} xy & xy \\ xy & xy \end{pmatrix}$

7) Quali vettori di \mathbf{R}^2 risultano ortogonali a $(1, 0)$ con il prodotto scalare avente, in quanto forma bilineare, la matrice di Gram (rispetto alla base naturale) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$?

F V a) $(1, -1)$

F V b) $(0, 1)$

F V c) $(1, 0)$

F V d) $(2, -1)$

7') Quali vettori di \mathbf{R}^2 risultano ortogonali a $(0, 1)$ con il prodotto scalare avente, in quanto forma bilineare, la matrice di Gram (rispetto alla base naturale) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$?

F V a) $(1, -1)$

F V b) $(0, 1)$

F V c) $(1, 0)$

F V d) $(2, -1)$

8) Quali dei seguenti sono prodotti riga per colonna effettivamente eseguibili?

F V a) $(1 \ 2 \ 3) \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$

F V b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$

F V c) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot (4 \ 5 \ 6)$

F V d) $(1 \ 2) \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$

8') Quali dei seguenti sono prodotti riga per colonna effettivamente eseguibili?

F V a) $(1 \ 2 \ 3) \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$

F V b) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

F V c) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot (4 \ 5 \ 6)$

F V d) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot (1 \ 2)$

9) Quali delle seguenti quadriche di \mathcal{E}^3 sono specializzate (anche dette degeneri)?

F **V** a) $x^2 + y^2 - z^2 = 0$

F **V** b) $z^2 = 2x^2 + y^2 - 1$

F **V** c) $x^2 - y^2 = 1$

F **V** d) $x^2 + y^2 + z^2 = -1$

9') Quali delle seguenti quadriche di \mathcal{E}^3 sono iperboloidi?

F **V** a) $x^2 + y^2 - z^2 = 0$

F **V** b) $z^2 = 2x^2 + y^2 - 1$

F **V** c) $x^2 - y^2 = 1$

F **V** d) $x^2 + y^2 + z^2 = -1$