

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici, ...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora.

1) Sia (V, \langle, \rangle) uno spazio vettoriale euclideo di dimensione n e $\mathcal{B} = (f_1, \dots, f_n)$ una sua base ortonormale. Allora

- F V** a) $V = \mathbf{R}^n$.
F V b) \mathcal{B} è la base naturale.
F V c) dati due vettori qualunque $u, v \in V$, il loro prodotto scalare $\langle u, v \rangle$ è il prodotto scalare naturale delle loro n -ple di componenti rispetto a \mathcal{B} .
F V d) dato un qualunque vettore $v \in V$, la sua h -esima componente rispetto a \mathcal{B} è uguale al prodotto scalare $\langle v, f_h \rangle$.

1') Sia $(\mathbf{R}^n, \langle, \rangle)$ lo spazio vettoriale euclideo standard di dimensione n e $\mathcal{B} = (f_1, \dots, f_n)$ una sua base ortonormale. Allora

- F V** a) la matrice del cambiamento di base dalla base naturale a \mathcal{B} è ortogonale.
F V b) \mathcal{B} è la base naturale.
F V c) la matrice del cambiamento di base dalla base naturale a \mathcal{B} è la matrice I_n .
F V d) dato un qualunque vettore $v \in \mathbf{R}^n$, la sua h -esima componente rispetto a \mathcal{B} è uguale al prodotto scalare $\langle v, f_h \rangle$.

2) Quali delle seguenti sono rappresentazioni, rispetto ad un riferimento cartesiano di \mathcal{E}^3 , di una retta ortogonale all'asse x ?

- F V** a) $\begin{cases} y = 3 \\ z = 1 \end{cases}$
F V b) $\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 3y = 0 \end{cases}$
F V c) $\begin{cases} y + z = 3 \\ x = 5 \end{cases}$
F V d) $y + z = 3$

2') Quali delle seguenti sono rappresentazioni, rispetto ad un riferimento cartesiano di \mathcal{E}^3 , di un sottospazio parallelo all'asse x ?

- F V** a) $\begin{cases} y = 3 \\ z = 1 \end{cases}$
F V b) $\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 3y = 0 \end{cases}$
F V c) $\begin{cases} y + z = 3 \\ x = 5 \end{cases}$
F V d) $y + z = 3$

3) In una matrice reale A di tipo 10×20 , di rango 3,

- F V** a) c'è almeno una 7-upla di righe linearmente indipendenti ma non una 8-pla.
F V b) c'è almeno una terna di righe linearmente indipendenti ma non una quaterna.
F V c) ogni minore di ordine 4 estratto da A ha determinante $= 0$.
F V d) c'è almeno una 17-pla di colonne linearmente indipendenti ma non una 18-pla.

3') In una matrice reale A di tipo 10×20 , di rango 3,

- F V** a) c'è almeno una 7-upla di righe linearmente indipendenti ma non una 8-pla.
F V b) c'è almeno una terna di righe linearmente indipendenti ma non una quaterna.
F V c) ogni minore di ordine 3 estratto da A ha determinante $\neq 0$.
F V d) c'è almeno una terna di colonne linearmente indipendenti ma non una quaterna.

4) Se A e B sono matrici quadrate simili qualunque, allora è vero che

- F V** a) hanno polinomi caratteristici identici.
F V b) hanno determinanti uguali.
F V c) hanno ranghi uguali.
F V d) hanno gli elementi della diagonale principale uguali (eventualmente a meno dell'ordine).

4') Se A e B sono matrici quadrate simmetriche congruenti qualunque, allora è vero che

- F V** a) hanno polinomi caratteristici identici.
F V b) hanno determinanti uguali.
F V c) hanno ranghi uguali.
F V d) hanno gli elementi della diagonale principale uguali (eventualmente a meno dell'ordine).

5) Sia $A \in \mathcal{M}_{10}(\mathbf{R})$; condizione **sufficiente** perché sia $\det A = 0$ è che

- F V** a) almeno cinquanta elementi di A siano nulli.
F V b) gli elementi della diagonale principale siano tutti nulli.
F V c) almeno un elemento della diagonale principale sia nullo.
F V d) novantadue elementi di A siano uguali a 42.

5') Sia $A \in \mathcal{M}_{10}(\mathbf{R})$; condizione **sufficiente** perché sia $\det A = 0$ è che

- F V** a) esattamente nove elementi di A siano non nulli, e gli altri siano nulli.
F V b) gli elementi della diagonale principale siano tutti nulli.
F V c) almeno un elemento della diagonale principale sia nullo.
F V d) venti elementi di A siano uguali a 42.

6) Quali dei seguenti sottoinsiemi dello spazio vettoriale delle successioni reali sono chiusi rispetto alla somma?

- F V** a) $\{(a_i)_{i \in \mathbf{N}} \mid \forall i \in \mathbf{N} \ a_i \geq 0\}$
F V b) $\{(a_i)_{i \in \mathbf{N}} \mid \forall i \in \mathbf{N} \ a_{2i} \cdot a_{2i-1} \geq 0\}$
F V c) $\{(a_i)_{i \in \mathbf{N}} \mid \forall i \in \mathbf{N} \ a_{i+1} = a_i/2\}$
F V d) $\{(a_i)_{i \in \mathbf{N}} \mid \forall i \in \mathbf{N} \ a_i \in \mathbf{Q}\}$

6') Quali dei seguenti sottoinsiemi dello spazio vettoriale delle successioni reali sono chiusi rispetto al prodotto per scalari?

- F V** a) $\{(a_i)_{i \in \mathbf{N}} \mid \forall i \in \mathbf{N} \ a_i \geq 0\}$
F V b) $\{(a_i)_{i \in \mathbf{N}} \mid \forall i \in \mathbf{N} \ a_{2i} \cdot a_{2i-1} \geq 0\}$
F V c) $\{(a_i)_{i \in \mathbf{N}} \mid \forall i \in \mathbf{N} \ a_{i+1} = a_i/2\}$
F V d) $\{(a_i)_{i \in \mathbf{N}} \mid \forall i \in \mathbf{N} \ a_i \in \mathbf{Q}\}$

7) La quadrica di equazione $-x^2 - 3y^2 - 5z^2 = 1$ è

- F V** a) un ellissoide reale.
F V b) un iperboloide iperbolico.
F V c) degenerare.
F V d) vuota.

7') La quadrica di equazione $-x^2 - 3y^2 - 5z^2 + 1 = 0$ è

- F V** a) un ellissoide reale.
F V b) un iperboloide iperbolico.
F V c) degenerare.
F V d) vuota.

8) Siano \mathcal{B}, \mathcal{C} sottospazi euclidei di uno spazio euclideo \mathcal{E} , con $\dim \mathcal{B} \leq \dim \mathcal{C}$. \mathcal{B} è parallelo a \mathcal{C} se e solo se

- F V** a) \mathcal{B} è contenuto in \mathcal{C} .
F V b) nessun vettore libero di \mathcal{B} è anche un vettore libero di \mathcal{C} .
F V c) $\mathcal{B} \cap \mathcal{C} = \emptyset$.
F V d) lo spazio dei vettori liberi di \mathcal{B} è contenuto nello spazio dei vettori liberi di \mathcal{C} .

8') Siano \mathcal{B}, \mathcal{C} sottospazi euclidei di uno spazio euclideo \mathcal{E} , con $\dim \mathcal{B} \leq \dim \mathcal{C}$. \mathcal{B} è parallelo a \mathcal{C} se e solo se

- F V** a) \mathcal{B} è contenuto in \mathcal{C} .
F V b) ogni vettore libero di \mathcal{B} è anche un vettore libero di \mathcal{C} .
F V c) $\mathcal{B} \cap \mathcal{C} = \emptyset$.
F V d) \mathcal{B} è contenuto nello spazio dei vettori liberi di \mathcal{C} .

9) Dato in \mathbf{R}^4 il sottospazio vettoriale U di equazioni
$$\begin{cases} x + z = 0 \\ y + t = 0 \\ x + t = 0 \end{cases}$$
 una sua base è:

- F V** a) $\{(1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 1), (1, 0, 0, 1)\}$.
F V b) $\{(-1, -1, 1, 1), (-2, -2, 2, 2), (-3, -3, 3, 3)\}$.
F V c) $\{(-3, -3, 3, 3)\}$.
F V d) $\{(1, 0, -1, 0), (0, 1, 0, -1)\}$.

9') Dato in \mathbf{R}^4 il sottospazio vettoriale U di equazioni
$$\begin{cases} x + z = 0 \\ y + t = 0 \\ x + y + z + t = 0 \end{cases}$$
 una sua base è:

- F V** a) $\{(1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 1), (1, 1, 1, 1)\}$.
F V b) $\{(-1, -1, 1, 1), (-2, -2, 2, 2), (-3, -3, 3, 3)\}$.
F V c) $\{(-3, -3, 3, 3)\}$.
F V d) $\{(1, 0, -1, 0), (0, 1, 0, -1)\}$.