

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici, ...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora.

1) Per una qualsiasi matrice simmetrica $A \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ di rango 2 vale:

- F V** a) ogni matrice diagonale simile ad A ha esattamente due elementi $\neq 0$.
F V b) non esiste alcuna matrice diagonale simile ad A .
F V c) ogni matrice simile ad A è diagonale.
F V d) $\det A = 0$.

1') Per una qualsiasi matrice simmetrica $A \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ di rango 2 vale:

- F V** a) ogni matrice diagonale simile ad A ha esattamente due elementi $\neq 0$.
F V b) non esiste alcuna matrice diagonale simile ad A .
F V c) ogni matrice simile ad A ha rango 2.
F V d) $\det A \neq 0$.

2) Siano S ed S' due sistemi lineari omogenei qualunque. Il sistema S'' formato dall'unione delle equazioni di S e di S'

- F V** a) è impossibile.
F V b) ha come spazio di soluzioni l'unione degli spazi di soluzioni di S e di S' .
F V c) ha come spazio di soluzioni l'intersezione degli spazi di soluzioni di S e di S' .
F V d) ha come spazio di soluzioni l'insieme delle somme delle soluzioni di S e di S' .

2') Siano S ed S' due sistemi lineari omogenei qualunque. Sia S'' il sistema formato dall'unione delle equazioni di S e di S' .

- F V** a) S'' è impossibile.
F V b) Ogni soluzione di S'' è anche soluzione di S e di S' .
F V c) Ogni soluzione di S è anche soluzione di S'' .
F V d) Ogni soluzione di S' è anche soluzione di S'' .

3) In uno spazio euclideo di dimensione 3, con un riferimento cartesiano, si dica quali delle seguenti rette sono parallele al piano di equazione $x - 2z = -1$.

F V a) $\begin{cases} x = 0 \\ z = 3 \end{cases}$

F V b) $\begin{cases} x = y \\ y = z \end{cases}$

F V c) $\begin{cases} x = 1 \\ y = \alpha \\ z = 1 \end{cases}$

F V d) $\begin{cases} x = \alpha \\ y = 1 \\ z = \alpha \end{cases}$

3') In uno spazio euclideo di dimensione 3, con un riferimento cartesiano, si dica quali delle seguenti rette sono parallele al piano di equazione $x - 2z = -y$.

F V a) $\begin{cases} x = 0 \\ z = 3 \end{cases}$

F V b) $\begin{cases} x = y \\ y = z + 3 \end{cases}$

F V c) $\begin{cases} x = 1 \\ y = \alpha \\ z = 1 \end{cases}$

F V d) $\begin{cases} x = \alpha \\ y = 1 \\ z = \alpha \end{cases}$

4) Si dica quali dei seguenti sottoinsiemi dello spazio vettoriale dei polinomi in x a coefficienti reali sono chiusi rispetto alla somma.

F V a) $X = \{a + ax + ax^2 + ax^3 \mid a \in \mathbf{R}\}$

F V b) $X = \{\text{polinomi in cui il coefficiente di } x^2 \text{ è } \neq 0\} \cup \{\text{polinomio nullo}\}$

F V c) $X = \{\text{polinomi di grado } \leq 5\}$

F V d) $X = \{\text{polinomi in cui il termine noto è o nullo o irrazionale}\}$

4') Si dica quali dei seguenti sottoinsiemi dello spazio vettoriale dei polinomi in x a coefficienti reali sono chiusi rispetto al prodotto per scalare.

F V a) $X = \{a + ax + ax^2 + ax^3 \mid a \in \mathbf{R}\}$

F V b) $X = \{\text{polinomi in cui il coefficiente di } x^2 \text{ è } \neq 0\} \cup \{\text{polinomio nullo}\}$

F V c) $X = \{\text{polinomi di grado } \leq 5\}$

F V d) $X = \{\text{polinomi in cui il termine noto è o nullo o irrazionale}\}$

5) Date matrici $A, B \in \mathcal{M}_{10}$, $A = (a_j^i)$, $B = (b_s^r)$, l'elemento c_3^2 del prodotto (riga per colonna) $A \cdot B$ è uguale a

F V a) $a_3^2 b_3^2$.

F V b) $\langle (a_1^2, \dots, a_{10}^2), (b_1^3, \dots, b_{10}^3) \rangle$ (prodotto scalare naturale).

F V c) $\sum_{h=1}^{10} a_h^2 b_3^h$.

F V d) $(a_1^2 b_3^1, a_2^2 b_3^2, \dots, a_{10}^2 b_3^{10})$.

5') Date matrici $A, B \in \mathcal{M}_{10}$, $A = (a_j^i)$, $B = (b_s^r)$, l'elemento c_3^2 del prodotto (riga per colonna) $A \cdot B$ è uguale a

F V a) $a_3^2 b_3^2$.

F V b) $\langle (a_1^2, \dots, a_{10}^2), (b_3^1, \dots, b_3^{10}) \rangle$ (prodotto scalare naturale).

F V c) $\sum_{h=1}^{10} \sum_{k=1}^{10} a_h^2 b_3^k$.

F V d) $(a_1^2 b_3^1, a_2^2 b_3^2, \dots, a_{10}^2 b_3^{10})$.

6) Quali delle seguenti applicazioni $T : \mathcal{M}_2(\mathbf{R}) \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ sono lineari?

- F V** a) $T(A) = I_2$
F V b) $T\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} d & a \\ b & c \end{pmatrix}$
F V c) $T(A) = \begin{pmatrix} \det A & \det A \\ \det A & \det A \end{pmatrix}$
F V d) $T(A) = -A$

6') Quali delle seguenti applicazioni $T : \mathcal{M}_2(\mathbf{R}) \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ sono lineari?

- F V** a) $T(A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
F V b) $T\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a^2 & b^2 \\ c^2 & d^2 \end{pmatrix}$
F V c) $T(A) = \begin{pmatrix} \text{Tr} A & \text{Tr} A \\ \text{Tr} A & \text{Tr} A \end{pmatrix}$
F V d) $T(A) = A \cdot A$

7) Siano X e Y due basi distinte di uno stesso spazio vettoriale V di dimensione n . Allora $X \cup Y$ è

- F V** a) una base di V .
F V b) un insieme linearmente indipendente.
F V c) un insieme linearmente dipendente.
F V d) un sistema di generatori di V .

7') Siano X e Y due basi distinte di uno stesso spazio vettoriale V di dimensione n . Allora $X \cap Y$ è

- F V** a) una base di V .
F V b) un insieme linearmente indipendente.
F V c) un insieme linearmente dipendente.
F V d) un sistema di generatori di V .

8) Siano $A, C \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ matrici simmetriche regolari. A è congruente a C se e solo se

- F V** a) esiste $E \in GL_n(\mathbf{R})$ tale che $A = {}^t E \cdot C \cdot E$
F V b) i polinomi caratteristici di A e di C sono identici.
F V c) esiste $E \in GL_n(\mathbf{R})$ tale che $A = E^{-1} \cdot C \cdot E$
F V d) detta φ la forma bilineare su \mathbf{R}^n rappresentata canonicamente da A , esiste una base $\bar{\mathcal{B}}$ di \mathbf{R}^n rispetto a cui φ è rappresentata da C .

8') Siano $A, C \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ matrici simmetriche regolari. A è congruente a C se e solo se

- F V** a) esiste $E \in GL_n(\mathbf{R})$ tale che $A = {}^t C \cdot E \cdot C$
F V b) i polinomi caratteristici di A e di C hanno gli stessi numeri di variazioni e permanenze.
F V c) esiste $E \in GL_n(\mathbf{R})$ tale che $A = E^{-1} \cdot C \cdot E$
F V d) detta φ la forma bilineare su \mathbf{R}^n rappresentata canonicamente da A , esiste una base $\bar{\mathcal{B}}$ di \mathbf{R}^n rispetto a cui φ è rappresentata da C .

9) Quali di queste quadriche di \mathcal{E}^3 contengono rette?

- F V** a) $x^2 + y^2 + z^2 = -1$
F V b) $x^2 + y^2 + z^2 = 1$
F V c) $x^2 - y^2 - z^2 = 1$
F V d) $z - x^2 - y^2 = 0$

9') Quali di queste quadriche di \mathcal{E}^3 contengono rette?

F **V** a) $x^2 + y^2 + z^2 = -1$

F **V** b) $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

F **V** c) $x^2 + y^2 - z^2 = 1$

F **V** d) $z - x^2 - y^2 = 0$