UNIVERZITA KONŠTANTÍNA
FILOZOFA V NITRE

FAKULTA PRÍRODNÝCH VIED

BRUNO D'AMORE

CONCEPTS, OBJECTS, SEMIOTIC AND MEANING.

INVESTIGATIONS OF THE CONCEPT'S CONSTRUCTION IN MATHEMATICAL LEARNING

(dizertačná práca)

NITRA 2006

(University of Nitra, Slovakia, “Constantine the Philosopher”, Faculty of Science)

Predkladateľ: Bruno D’Amore
Školiteľ: prof. RNDr. O. Šedivý, CSc.
Pomocný školiteľ: prof. F. Spagnolo, PhD.
Vedný odbor: 11 – 17 – 09 Teória vyučovania matematiky

Table of Contents

Mathematical objects and sense
How semiotic transformations change the sense of mathematical objects

Bruno D'Amore

Department of Mathematics, University of Bologna, Italy
Faculty of Education, University of Bolzano, Italy
Pedagogical High School, Locarno, Switzerland
MESCUD, University Distrital "F. José de Caldas", Bogotà, Colombia

Study carried out within the research programme: «*Methodological aspects (theoretial and empirical) in pre- and in-service training for teachers of Mathematics at all school levels*», funded by the University of Bologna.

Sunto. In questo articolo intendo mostrare una conseguenza che si manifesta talvolta nelle trasformazioni semiotiche di trattamento e conversione di una rappresentazione semiotica il cui senso deriva da una pratica condivisa; il passaggio dalla rappresentazione di un oggetto matematico ad un'altra attraverso trasformazioni, da un lato conserva il significato dell'oggetto stesso, ma talvolta può cambiarne il senso. Questo fatto viene dettagliatamente mostrato attraverso un esempio, ma inserendolo all'interno di una vasta cornice teorica che chiama in causa gli oggetti matematici, i loro significati, le loro rappresentazioni.

Summary. In this paper I will demonstrate a consequence at times manifest in the semiotic transformations involving the treatment and conversion of a semiotic representation whose sense derives from a shared practice. The shift from one representation of a mathematical object to another via transformations, on the one hand maintains the meaning of the object itself, but on the other can change its sense. This is demonstrated in detail through a specific example, while at the same time it is collocated within a broad theoretical framework that poses fundamental questions concerning mathematical objects, their meanings and their representations.

Resumé. Dans cet article j'entends montrer une conséquence qui se manifeste quelquefois dans les transformations sémiotiques de traitement et de conversion d'une représentation sémiotique, dont le sens découle d'une pratique partagée; le passage d'une représentation d'un object mathématique à une autre, au moyen de transformations, d'un côté il conserve la signification de l'object pris en considération, mais il peut aussi changer son sens. Ce fait peut être montré par un exemple, mis à l'intérieur d'un cadre théorique, qui prend en considération les objects mathématiques, leurs significations, leurs représentations.

Zusammenfassung. In diesem Artikel möchte ich eine Folgerung, die sich manchmal in den semiotischen Veränderungen der Behandlung und der Umwandlung einer semiotischen Dartstellung erweist, deren Sinn von einer billigten Praxis stammt; der Übergang mittels Veränderungen von der Darstellung eines matematischen Gegenstandes zu einer anderen Darstellung bewahrt einerseits den Sinn des Gegenstandes selbst, aber kann es manchmal die Bedeutung ändern. Dies wird ausführlich durch ein Beispiel gezeigt, welches aber in einem grossen theoretischen Rahmen eingereiht wird, der sich die mathematischen Gegenstände, sowie deren Bedeutungen und Darstellungen bedient.

Resumen. En este artículo intento mostrar una consecuencia que se evidencia algunas veces en las transformaciones semioticas de tratamiento y conversión de una representación semiotica cuyo sentido deriva de una práctica compartida; el pasaje de la representación de un objeto matemático a otra por medio de transformaciones, de una parte conserva el significado del objeto mismo, pero en ocasiones puede cambiar su sentido. Esto hecho está aquí evidenciado detalladamente por medio de un ejemplo,

pero insertándolo en el seno de un amplio marco teórico que llama en causa los objetos matemáticos, sus significados, sus representaciones.

Resumo. Neste artigo quero mostrar uma consequência que, ás vezes, se apresenta nas trasformações semióticas de processamento e conversão de uma representação semiótica, o sentido da qual resulta de uma pratica compartilhada; a passagem da representação de um objeto matemático para uma outra através de trasformações, mantêm o significado do mesmo objeto, mas ás vezes pode trocar o seu sentido. Isso è mostrado com detalhes através de um exemplo, inscrito dentro de um grande quadro teórico que o relaciona com os objetos matemáticos, seus significados, suas representações.

0. Premise

This study is divided in two distinct parts.

In the first part, principally via pertinent quotations, I will describe a general epistemological, ontological and semiotic path within the currently much-debated question of certain theoretical approaches to research in Mathematics education. The aim is to clearly delimit the theoretical field of reference and avoid any possible misunderstanding.

In the second part, via the narration of one principal and several other exemplary episodes, I will discuss a question, subsequently central to my conclusion, concerning the attribution of different senses to diverse semiotic representations which could represent the same mathematical object, an attribution on the part of both students and teachers (trainee and in service teachers) at all school levels.

Part 1

1. A theoretical path

1.1. *Ontology and knowledge*

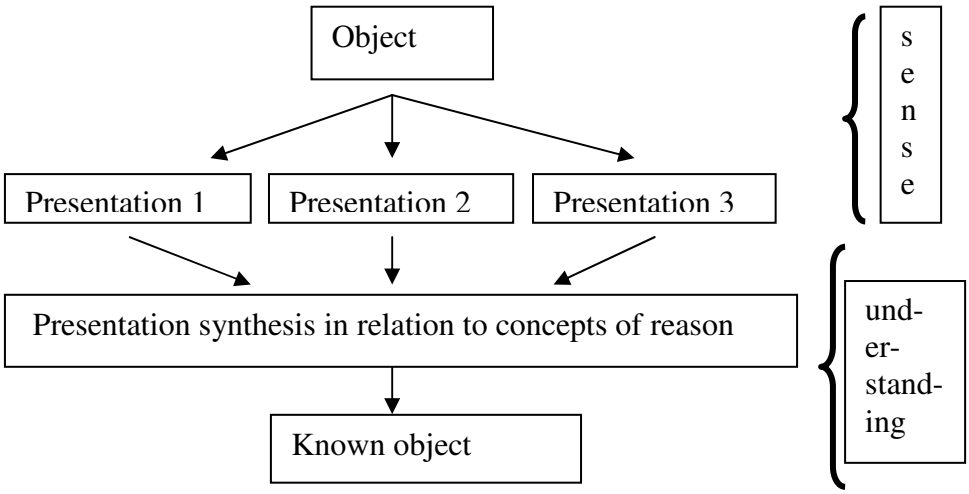
In a number of studies in the late 1980s and 1990s I sustained the position that, while the mathematician can avoid debating the question of the *sense* of the *mathematical objects* he uses and of the sense of *mathematical knowledge*, this question is of vital importance for the researcher in Mathematics education (D'Amore 1999, pp 23-28, and elsewhere). Such a position is amply supported by Radford (2004): «One can very well survive doing mathematics without adopting an explicit ontology, that is, a theory dealing with the nature of mathematical objects. This is why it is almost impossible to infer from a technical paper in mathematics its author's ontological stand. The situation has become very different when we talk about *mathematical knowledge*. (…) Theoretical questions about the content of knowledge and the ways such a content is transmitted, acquired or constructed, has led us to a point in which we can no longer avoid taking ontology seriously».

This conviction has led me to dedicate much time to the study of conceptual knowledge, after having established an ontological belief on the basis of the way in which human beings *know* concepts (D'Amore, 2001a,b; 2003a,b). The debate is long-standing and can be traced back to Ancient Greece, but Radford makes every effort to pose the question in modern terms: «Men, he said, have a prior intellectual knowledge of

conceptual things thanks to an autonomous activity of the mind, independently of the concrete world» (Radford, 2004) [the reference "he said" is to the mathematician Pietro Catena (1501-1576, Professor at the University of Padua and author of *Universa Loca*, in which he asserted that «mathematical objects are ideal and innate entities» (Catena, 1992)].

The debate becomes truly modern with the distinction between (human) "intellectual concepts" and "concepts of objects" proposed by Immanuel Kant (1724-1804) in his *Critique of Pure Reason*: «[These] concepts of the pure intellect are not concepts of objects; they are logical skeletons without content; their function is to make possible a regrouping or *synthesis* of intuitions. The synthesis is the responsibility of what Kant identified as the cognitive faculty of Understanding» (Radford, 2004).

The following diagram is a particularly interesting attempt to illustrate the relationship between the idea of *sense* and of *understanding*:



1.2. *An anthropological approach*

For many researchers, an anthropological approach necessarily comes before a pragmatic choice (D'Amore, 2003b, and elsewhere). Once again, the position of Radford is clearly within this tradition: «In this line of thought, an anthropological approach cannot avoid taking into account (…) the fact that the manners in which we use the diverse kinds of signs and artefacts during our acts of knowing are subsumed in cultural prototypes of sign and artefact usage (…). What is relevant is that the use of signs and artefacts alter our modes of reception of the objects of the world, that is to say, signs and artefacts alter the way in which the objects are given to us through our senses (…). To summarize: From the viewpoint of an anthropological epistemology, the way in which I see that the riddle of mathematical objects can be solved is to consider mathematical objects as fixed patterns of activity embedded in the always changing realm of reflective and mediated social practice» (Radford, 2004).

There is general convergence of opinion concerning this position: «Mathematical objects must be considered symbols of cultural units which emerge through a system of uses connected to mathematical activities practiced by groups of people and thus evolve with the passage of time. What determines the progressive emergence of "mathematical objects" is the fact that certain types of practices are typical of specific institutions and that the "meaning" of these objects is intimately linked to the problems faced and the

activities conducted by human beings, thereby rendering impossible the reduction of the meaning of a mathematical object merely to its mathematical definition» (D'Amore, Godino, 2006).

1.3. *Systems of practice*

This convergence can be further exemplified: «The notions of 'institutional (and) personal meaning' of mathematical objects have led to those of 'personal practice', 'systems of personal practices', 'personal (or mental) object', useful instruments for the study of 'individual mathematical cognition' (Godino, Batanero, 1994; 1998). Each of these notions has a precise institutional collocation. Clarifying these points is essential in order to define and render operative the notions of 'personal and institutional relationship to the object' introduced by Chevallard (1992)» (D'Amore, Godino, 2006).

Our idea of "system of personal practices" is consistent with Radford's anthropological semiotic approach (ASA): «In the anthropological semiotic approach (ASA) the ideality of the concept of the conceptual objects is directly connected to the historical and cultural context. The ideality of mathematical objects – i.e. what makes them general – is entirely dependent on human activity» (Radford, 2005).

The sociological aspects of this dependence on human activity and social practice is thus expressed: «The mathematical learning of an object O by an individual I within the society S is nothing more than the agreement of I to the practices that other members of S develop with reference to the object O» (D'Amore, in D'Amore, Radford, Bagni, 2006) and: «classroom practices can be considered as systems of adaptation of students to society» (Radford, in D'Amore, Radford, Bagni, 2006).

1.4. *Object and mathematical object*

Nevertheless, this "mathematical object" has to be described: the definition we propose of "mathematical object" derives from Blumer's (1969, pag. 8) description of an object as «*Mathematical object* (Godino, 2002): anything that can be indicated or to which one can refer" and can thus be expressed as "anything that can be indicated, referred to or named during mathematical construction, communication or learning.

We can distinguish different types of mathematical objects at various levels:

- "language" (terms, expressions, notations, graphs, …) in various registers (written, oral, gestural, ….)
- "situations" (problems, extramathematical applications, exercises, …)
- "actions" (operations, algorithms, techniques for calculating, procedures, …)
- "concepts" (introduced via definitions or descriptions) (line, point, number, mean, function, …)
- "properties or attributes of objects" (propositions concerning concepts, …)
- "argumentations" (for example, the validation or explanation of propositions, deductions, etc. …).

These objects are then organised within more complex entities such as conceptual systems, theories, …» (D'Amore, Godino, 2006).

A related notion is that of *semantic function*, in which a relationship is established between two (ostensible or non ostensible) mathematical objects based upon a representational or instrumental dependence, whereby one can be used in place of the other and vice versa (D'Amore, Godino, 2006). Furthermore, «(…) the mathematical objects referred to in mathematical practices and their developments, on the basis of the

linguistic practices of which they are a part, can be considered in terms of the following dual aspects or dimensions: (Godino, 2002):

- personal – institutional: as we have already seen, shared systems of practices within an institution give rise to "institutional objects", while systems used by a single individual can be considered as "personal objects";
- ostensible (graphs, symbols, …) - non ostensible (which evoke "doing" Mathematics, represented in texts, oral, graphic, gestural, …);
- extensive – intensive: the relationship established between an object introduced in a linguistic practice as a specific, concrete example (for example, the function $y=2x+1$) and a more general, abstract class (for example, the family of functions $y= mx+n$);
- elementary – systemic: in some circumstances mathematical objects function as unitary entities (presumably already known) while in others they function as systems which can be broken down for analysis;
- expression – content: prior and subsequent to any semiotic function.

These aspects are presented in complementary pairs which exist in a dual and dialectic relationship and are considered as attributes applicable to distinct primary and secondary objects, thereby giving rise to distinct 'versions' of such objects» (D'Amore, Godino, 2006).

If, however, we consider the linguistic practice of representation: «I think that we must distinguish between two types of objects within the development of mathematical competence (mathematical learning): the mathematical object itself and the linguistic object that expresses it» (D'Amore, in D'Amore, Radford, Bagni, 2006).

I shall turn back to the representation soon, in order to investigate its roles more specifically.

1.5. *Learning objects*

During my attempts to define learning difficulties concerning the concepts and the knowledge of objects, I have often made use of *Duval's paradox*: «(…) on the one hand the learning of mathematical objects cannot but be a conceptual learning, while on the other activity involving mathematical objects is only possible via the use of semiotic representations. This paradox can constitute a definite vicious circle for the learning process. How can learners avoid confusing mathematical objects with their semiotic representations when the former cannot but be related to the latter? The impossibility of direct access to mathematical objects without semantic representations makes their confusion practically inevitable. Moreover, how can learners fully acquire mathematical practices, necessarily linked to semiotic representations, without a previous conceptual learning of the objects represented? The paradox becomes even greater if mathematical and conceptual activity are considered as one and the semiotic representations are then considered secondary and extrinsic» (Duval, 1993, p. 38).

These questions can be mainly referred to a certain way of construing the idea of semiotics.

Once again, I agree with Radford: «The epistemological problem can be summarised in the following question: how can we know these general objects when our only access to them is through the representations that we make of them?» (Radford, 2005).

1.6. *The representation of objects*

As regards the representation of objects, Radford makes reference to Kant: «In a famous

letter to Herz, written in February 21, 1772, Kant questions the efficacy of our representations and asks: 'On what basis do we construct the relationship between what we call representation and its corresponding object?' (…) In this letter Kant questions the legitimacy of our representations in presenting and representing objects. In semiotic terms, Kant reflects on the adequacy of the sign. (…) Kant's doubt is of an epistemological order» (Radford, 2005).
The question posed particularly concerns the idea of the sign, since for Mathematics this form of representation is specific. The sign is in itself a specification of the particular, but can also be interpreted in terms of the general: «If a mathematician can perceive the general in the particular, this is, as Daval (1951, p.10) observes, 'because he has faith in the sign as an adequate representation of the meaning» (Radford, 2005).
Signs are, however, artefacts, linguistic objects (in the broad sense), terms which represent in order to indicate: «(…) objectivisation indicates a process the scope of which is to show something (an object) to someone. What are the means of showing the object? They are those which I call *semiotic means of objectivising*. They are objects, artefacts, linguistic terms, more generally signs used to render visible an intention and conclude an action» (Radford, 2005).
These means perform a multiple role concerning highly complex interrelationships between sign, culture and humanity: «(…) the entire culture can be seen as a system of systems of signs in which the meaning of a signifier becomes in turn a signifier of another meaning or indeed the signifier of its own meaning» (Eco, 1973, p. 156).
Moreover, the "cognitive role of the sign" is very important (Wertsch, 1991; Kozoulin, 1990; Zinchenko, 1985): I cannot examine closely this aspect in the present paper, although I consider it as a fundamental concept of General Semiotics: «all processes of signification between human beings (…) presuppose a system of signification as a necessary condition» (Eco, 1975, p. 20), so a cultural agreement to codify and interpret and thus produce knowledge.
The choice of signs, above all when composing languages, is neither neutral or independent , but rather preconstitutes the destiny of the thought expressed and of the communication realised. For example, «The language of algebra imposes a sobriety of thought and expression, a sobriety in ways of creating meaning unthinkable before the Renaissance. It imposes what I have elsewhere called a *semiotic contraction* and presupposes the loss of the *origo*» (Radford, 2005).
The loss of *origo* (origin, principle) has been widely studied by Radford (2000, 2002, 2003) and this loss constitutes the point of departure for the second part of this paper.

Part 2

2. Object, its shared meaning and its semiotic representations: the narration of an episode

2.1. *The episode*
In a fifth class (pupils aging 10 years) of an Italian Primary School, the teacher has conducted an introductory lesson in a-didactic situation concerning the first elements of probability, in which the pupils construct, with at least the use of some examples, the idea of "event" and "the probability of simple events". As an example, the teacher uses a normal die with six faces to study the random results from a statistical point of view.

From this emerges a frequency probability which is, however, interpreted in the classical sense. The teacher then proposes the following exercise:
Calculate the probability of the following event: the result of an even number when throwing the die.
Pupils discuss in groups and above all sharing strategies devised under the direction of the teacher decide that the answer is expressed by the fraction $\frac{3}{6}$ because «the possible results are 6 (at the denominator) while the results that render the event true are 3 (at the numerator)».
After having institutionalised the construction of this knowledge, satisfied by the result of the experience and the fact that the outcome has been rapidly obtained and the pupils have shown considerable skill in handling fractions, the teacher proposes that, on the basis of the equivalence between $\frac{3}{6}$ and $\frac{50}{100}$, it is also possible to express the probability by writing 50% and that this is indeed more expressive, since it means that the probability of such a result is a half, in terms of the generality of all possible events which is 100. A pupil observes that «so we can also use the [fraction] $\frac{1}{2}$», and the proposal is verified through the explanation of the pupil, rapidly accepted by all and once again institutionalised by the teacher.

2.2. *Semiotic analysis*
If we analyse the different semiotic representations of the same event which emerge during this activity – "the result of throwing a die is an even number" – it is possible to identify at least the following:

- semiotic register: natural language: probability that the result of throwing a die is an even number
- semiotic register: the language of fractions: $\frac{3}{6}$, $\frac{50}{100}$, $\frac{1}{2}$
- semiotic register: the language of percentages: 50%.

2.3. *The sense shared via different semiotic representations*
Each of the preceding semiotic representations is the signifier which follows from a preceding single meaning (Duval, 2003). The shared "sense" of what was being developed together was always the same and therefore the mathematical practice carried out and described led to semiotic transformations for which the final results were easily accepted:

- conversion: from the semiotic representation expressed in the natural language register to the written form $\frac{3}{6}$
- treatment: from the written forms $\frac{3}{6}$ and $\frac{50}{100}$ to $\frac{1}{2}$
- conversion: from the written form $\frac{50}{100}$ to 50%.

2.4. *Required previous knowledge*

In the episodes considered several types of knowledge, apparently well-constructed, interact:

- knowledge and use of fractions
- knowledge and use of percentages
- knowledge and use of the event: the result of throwing a die is an even number.

Each of these is manifest in the unitary and shared practices of the class.

2.5. *Sequel to the episode: the loss of a shared sense caused by semiotic transformations*

At the end of the sequence the pupils are asked if the fraction $\frac{4}{8}$ can be used to represent the same event, since it is equivalent to $\frac{3}{6}$. *The answer is negative, unanimous and without hesitation*. Even the teacher, who had previously handled the situation with confidence, asserts that «$\frac{4}{8}$ *cannot* represent the event because a die has 6 faces and not 8». Pressed to consider further the question, the teacher adds: «There are not only dice with 6 faces, but also dice with 8 faces. In that case, yes, the fraction $\frac{4}{8}$ that can represent the result of throwing a die is an even number».

Now I am going to examine this episode from a semiotic perspective, after having first considered some general principles.

3. A symbolism for semiotic principles

In other studies I have already used the following definitions and symbols (D'Amore, 2001a, 2003a,b, and elsewhere):

semiotic $=_{df}$ representation realised via a system of signs

noetic $=_{df}$ conceptual acquisition of an object.[1]

Hereafter I will use:

r^m $=_{df}$ m^{th} semiotic register

$R^m{}_i(A)$ $=_{df}$ i^{th} semiotic representation of concept A in the semiotic register r^m

(m = 1, 2, 3, …; i = 1, 2, 3, …).

From this we can see that, if the semiotic register changes then so does the semiotic representation, but changing the semiotic representation does not necessarily imply changing the semiotic register.

The following diagram illustrates the question even more clearly (with reference to Duval, 1993):

[1] According to Plato noetic refers to the act of conceptualising via thought, while according to Aristotle it is the very act of conceptual understanding.

characteristics of the semiotic: *representation – treatment – conversion* [imply different cognitive activities]

concept A to be represented ⇨ choice of distinctive features of A

⇩

REPRESENTATION of A [$R^m_i(A)$] in a given semiotic register r^m

⇩ transformation of representation *TREATMENT*

new representation ($i \neq j$) [$R^m_j(A)$] in the *same* semiotic register r^m

⇩ transformation of register *CONVERSION*

new representation ($h \neq i$, $h \neq j$) [$R^n_h(A)$] in a *different* semiotic register r^n ($n \neq m$)

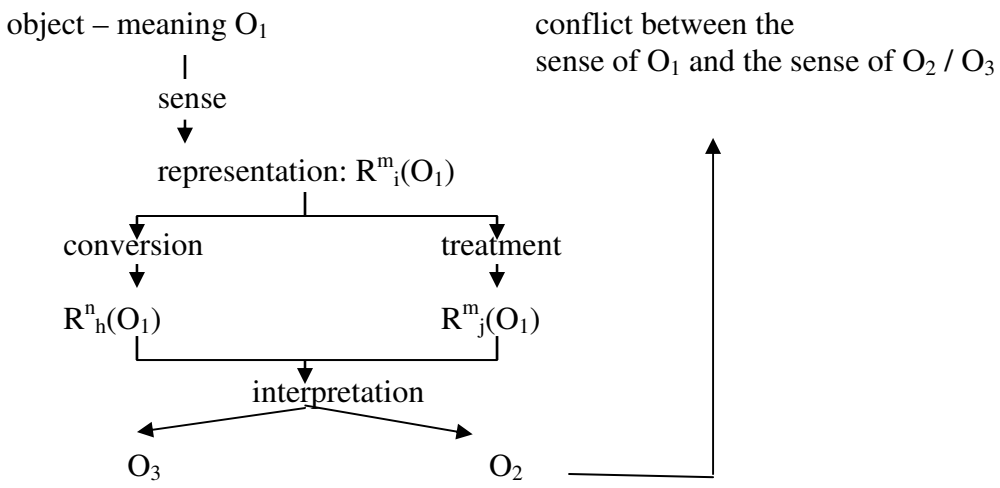
(m, n, i, j, h = 1, 2, 3, …)

4. Let's turn back to the episode

- There exists a mathematical object (meaning) O_1 to represent: the probability that the result of throwing a die is an even number;
- a *sense* is ascribed to the object on the basis of a presumable shared experience which is part of a social practice shared in the class;
- a semiotic register r^m is chosen in order to represent O_1: $R^m_i(O_1)$;
- a treatment is effected: $R^m_i(O_1) \rightarrow R^m_j(O_1)$;
- a conversion is effected: $R^m_i(O_1) \rightarrow R^n_h(O_1)$;
- $R^m_j(O_1)$ is interpreted and the mathematical object (meaning) O_2 is recognised in it;
- $R^n_h(O_1)$ is interpreted and the mathematical object (meaning) O_3 is recognised in it.

What is the relationship between O_2, O_3 and O_1?
Identity can be recognised; and this means that there is a previous knowledge, on the basis of which identity itself can be pointed out.
But we can avoid to recognise identity, so the "interpretation" is or seems different, and in this case we lose the *sense* of the original starting-object (meaning) O_1.

The following diagram summarises the complexity of what has happened in the classroom, in order to highlight the connection between objects, meanings, semiotic representations and sense:



In our example:

- object - meaning O_1: the probability that the result of throwing a die is an even number;
- sense: the shared classroom experience under the supervision of the teacher leads to the conclusion that the sense of O_1 is that described by the pupils and desired by the teacher: many possible outcomes and many outcomes consistent with the event;
- choice of a semiotic register r^m: rational numbers Q expressed as fractions; representation: $R^m_i(O_1)$: $\frac{3}{6}$;
- treatment: $R^m_i(O_1) \rightarrow R^m_j(O_1)$, i.e. from $\frac{3}{6}$ to $\frac{1}{2}$;
- treatment: $R^m_i(O_1) \rightarrow R^m_k(O_1)$, i.e. from $\frac{3}{6}$ to $\frac{4}{8}$;
- conversion: $R^m_i(O_1) \rightarrow R^n_h(O_1)$, i.e. from $\frac{3}{6}$ to 50%;
- $R^m_j(O_1)$ is interpreted and the mathematical object (meaning) O_2 is recognised in it;
- $R^m_k(O_1)$ is interpreted and the mathematical object (meaning) O_3 is recognised in it;
- $R^n_h(O_1)$ is interpreted and the mathematical object (meaning) O_4 is recognised in it.

What is the relationship between O_2, O_3, O_4 and O_1?

In some cases, (O_2, O_4), identity of the signifier is recognised, thus indicating previously-constructed knowledge which permits this recognition. There is one single, shared sense. In another case, (O_3), the identity is not recognised, in that the interpretation is or seems to be different and so the sense of the object (meaning) O_1 has been lost.

Duval too treats the question of different representation of the same object (Duval 2005).

It is not necessarily the case that the loss of sense occurs only as a result of conversion. As we have seen in our example, the loss is caused by the treatment from $\frac{3}{6}$ to $\frac{4}{8}$. The

teacher's interpretation of $\frac{4}{8}$ did not consider a plausible object the very same O_1 derived from the shared sense which had led to the representation $\frac{3}{6}$.

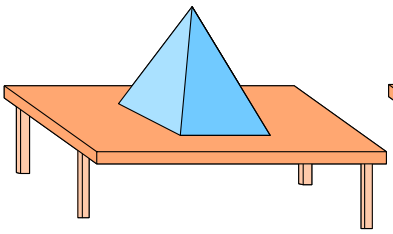
The same experiment conducted with older students and even trainee teachers shows that if the treatment from $\frac{3}{6}$ to $\frac{4}{8}$ is an example of loss of sense, the loss is even greater with the treatment from $\frac{3}{6}$ to $\frac{7}{14}$; while it is decidedly less in the conversion from $\frac{3}{6}$ to 0.5.

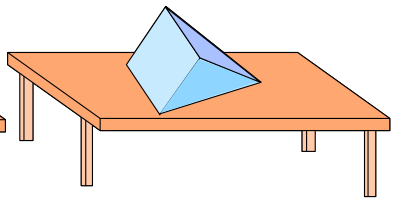
5. Examples of other episodes

5.1. Nursery school pupils

5 5

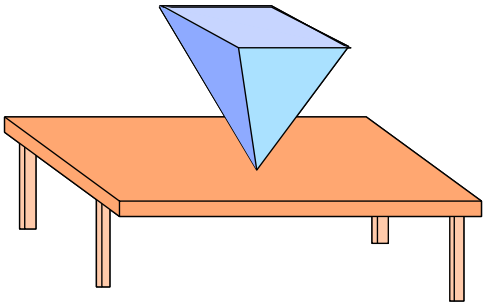
«This is a big number» «This is a small number»



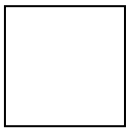


«This is a pyramid» «This is a pyramid lying down»

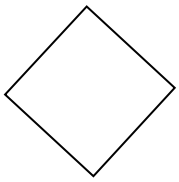
«This isn't a pyramid. It can't stand up!»



5.2. Primary school pupils
«7+3=10 is an addition, but 10=7+3 isn't»



«This is a square»

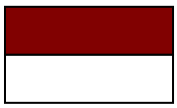


«This isn't, it's a rhombus»

«0,5 means a half»; «1:2 is a half too»; «2:4 is 0,5 but it isn't a half»

5.3. Middle school pupils

«$\frac{1}{2}$ can be expressed as 0,5 or 50%;

but, while $\frac{1}{2}$ equals to  , 0,5 doesn't, and 50% even less»

«$\frac{1}{2}$ is a fraction you use at school, ½ is what you find in books».

«These are two *different* halves of the *same* rectangle»

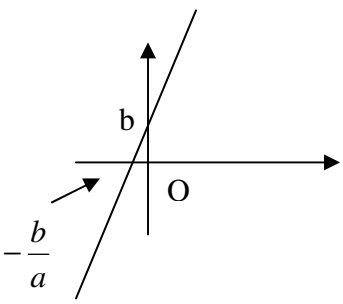
5.4. Secondary school pupils

«A point is a geometric entity which has *zero dimension*; it's small and round; if you change its form it isn't a point any more».

«$y=x^2-2x+1$ is a parabola; (after explicit treatments, $x^2-2x+y+1=0$ is obtained); $x^2-2x+y+1=0$ is *almost* a circumference».

«(…) $(x-1)(x+2)=0$ isn't an equation, (while) $x^2+x-2=0$ is».

Total cost of y € for the rent of a party location for x hours at a € per hour, plus the fixed cost of b €; the students and the teacher produce the semiotic representation: $y=ax+b$; a transformation is effected via the treatment to $x-\frac{y}{a}+\frac{b}{a}=0$ which is represented as:



and universally interpreted as a "straight line". The semiotic representation obtained from the initial representation via treatment and conversion is no longer recognised as the same mathematical object and assumes a different *sense*.

5.5. University students

$$x^2+y^2+2xy-1=0 \xrightarrow{\text{TREATMENT}} x+y=\frac{1}{x+y}$$

sense: from «A circumference» to «A sum which has the same value as its reciprocal»; Researcher: «Is it or isn't it a circumference?»; student A: «Absolutely not. A circumference must have x^2+y^2»; student B: «If it is simplified, yes» [i.e it is the semiotic transformation of treatment which gives or not a certain sense: the inverse treatments would lead back to a circumference];[2]

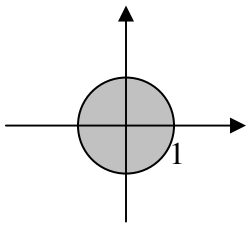
$$(n-1)+n+(n+1) \xrightarrow{\text{TREATMENT}} 3n$$

sense: from «The sum of three consecutive whole numbers» to «The triple of a natural number»; Researcher: «Is it possible to consider it the sum of three consecutive whole numbers?»; student C: «No, like that, no, like that it's the sum of three equal numbers, n".

The sum of the first 100 natural positive numbers (according to Gauss) is considered. The final semiotic result of successive changes effected via some treatments and conversions 101×50; this representation is not recognised as being a representation of the initial object; the presence of the multiplication sign forces all the students to search for a certain sense in mathematical objects in which the term "multiplication" (or a similar term) appears.

5.6. Postdoctoral students/Trainee teachers

Mathematical object: The sum of two square numbers is less than 1; semiotic representation universally shared: $x^2+y^2<1$; after changes in semiotic representation via treatments: $(x+iy)(x-iy)<1$ and conversion:



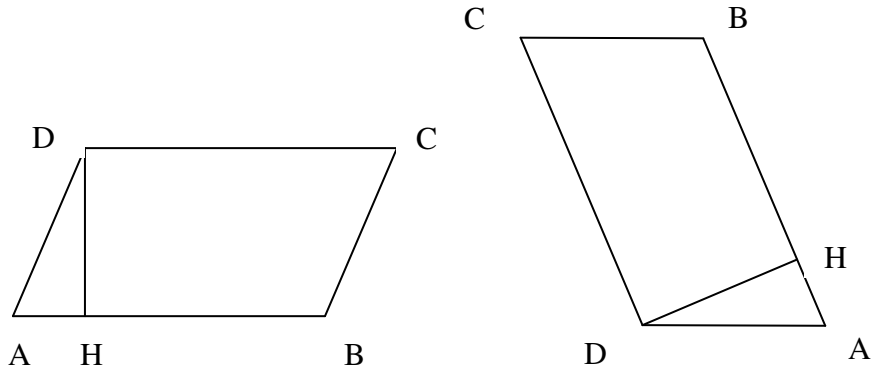
arriving at: $\rho^2+i^2<0$. In spite of that fact that the transformations are clearly and explicitly carried out, discussing each change of semiotic register, nobody is willing to admit the unique nature of the mathematical object in question. The final representation is considered a "parametric inequality in C"; the *sense* has been modified.

[2] But, as the reader should have already noted, here it is by no means a circumference.

Postdoctoral students/Trainee secondary school teachers
A) Mathematical object: Series of triangular numbers; interpretation and conversion: 1, 3, 6, 10, …; change of representation via treatment: 1, 1+2, 1+2+3, 1+2+3+4,….; this representation is seen as «Sequence of the partial sums of the succeeding natural numbers».
B) Mathematical object: Sequence of square numbers; interpretation and conversion: 0, 1, 4, 9, …; change of representation via treatment: 0, (0)+1, (0+1)+3, (0+1+3)+5,….; this representation is seen as «Sum of the partial sums of the succeeding odd numbers».

In none of these examples did the students accept that the *sense* of the final semantic representation obtained via the semantic transformations illustrated coincided with the *sense* of the initial mathematical object. Such a result clearly indicates a path for future analysis.

5.7. Primary school teachers



«DH is the height» «DH isn't the height»

5.8. Middle school teachers
From the text: «The height of a rectangle is 2/3 of the base, knowing…»;

«This figure represents the situation…» «… but this doesn't»;
why? «Because here the base is shorter».

5.9. Secondary school teachers
«I can make a *bijective mapping of* N with Z, but Z has more elements than N».

6. Discussion of the representations of a given object provided by Primary school teachers and considered suitable for their pupils

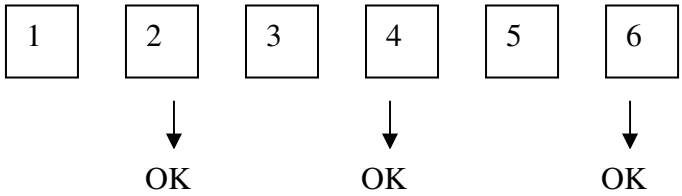
During a Primary school teacher training course we addressed the theme: *First elements of probability*. In conclusion we asked the teachers to represent the mathematical object:

"the result of throwing a die is an even number", using the symbolism they considered most suitable for their pupils. All the proposals were collected and voted on. The following results are in order of preference:

$\frac{3}{6}$ 50% $\frac{1}{2}$ (three and three) $\frac{\bullet\bullet\bullet}{\circ\circ\circ}$ (three out of six) $\frac{\circ\circ\circ}{6}$ (three out of six) $\frac{\circ\circ\circ}{\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet}$

(2, 4, 6 in relation to 1, 2, 3, 4, 5, 6) $2\cdot4\cdot6 / 1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6$

(figurative - operative)



The importance of analysing the production of students is underlined by Duval: «Emphasis on the importance of descriptions in the acquisition of scientific knowledge and the first stages of mathematical learning must be accompanied by consideration of another question, fundamental both for research and for teachers: the analysis of the productions of pupils. It is within the perspective of the development of descriptions that the most personal and diverse productions are obtained, since these can be realised verbally or through drawings or diagrams… In this case, for research a methodological question is posed, while for teachers the question is one of diagnosis. We shall see how any analysis of students' productions must clearly distinguish, for every semantic production – discursive or non-discursive -, between *different levels of articulation of sense* which do not demonstrate the same operations» (Duval 2003).
In the considered case, the "pupils" are Primary school teachers, while the "teachers" are university lecturers.[3]
The productions of the "pupils-teachers" previously illustrated can be analysed in a number of different ways. Once again I will follow the approach of Duval (2003): «(…) we must not confuse what we shall call an 'authentic' task of description with a 'merely formal' one. (…) A task is authentic when it requires observation of the object of the situation to describe. (…) In this case the pupil has access to each of the two elements of the pair (object and representation of the object) independently. A task is merely formal when it requires a simple change of register of representation: a verbal description based on a diagram or vice versa. The pupil no longer has independent access to the object represented. Formal descriptions are thus conversion tasks designed to maintain invariable what is represented (…)» (Duval 2003).
I believe that this distinction proposed by Duval can explain, at least in part, the episode described in paragraphs 2 and 5:

[3] That this "change of role" can be considered as plausible is amply demonstrated in the international literature; here I will indicate only what is furnished within the field of PME by Llinares, Krainer (2006), which contains a rich specific bibliografy.

When a mathematical object is observable and known through shared practices, the "authentic description" completely corresponds to the characteristics of the object, i.e. to the practice constructed around it and with it, and thus to the sense that all this acquires for participants in the elaboration of this practice. But the use of semiotic transformations at times leads to substantial modifications in the description, thereby "becoming a merely formal description" obtained via semiotic practices which may be shared, but which deny access to the object represented and so compromise the conservation of its *sense*.

7. Conclusion

What I would like to emphasize here is how the sense of a mathematical object is more complex than it is considered within the usual pair (object and its representations). There are semantic links between pairs of this kind:

(object, its representation) – (object, its other representation)

These links are due to semiotic transformations between the representations of the same object, but then cause the loss of sense of the initial object. Although both object and semiotic transformations are the result of shared practices, the outcomes of the transformations can require *other* attributions of sense through *other* shared practices. This is highly suggestive for all studies of ontology and knowledge.

The phenomenon described can be used to complete the picture proposed by Duval of the role of the multiple representations of an object in understanding it and also to break the vicious circle of the paradox. Every representation carries with it a *different* "subsystem of practices", from which emerge *different* objects (previously called O_1, O_2, O_3 y O_4). But the articulation of these objects within a more general system requires a change of perspective, a movement into another context in which the search for a *common structure* is a part of the system of global practices in which distinct "partial objects" play a role.

The progressive development of the use of different representations undoubtedly enriches the meaning, the knowledge and the understanding of the object, but also its complexity. In one sense the mathematical object presents itself as unique, in another as multiple.

What is then the nature of the mathematical object? The only reply would seem to be "structural, formal, grammatical" (in the epistemological sense) together with "global, mental, structural" (in the psychological sense) which we as subjects construct within our brains as our experience is progressively enriched.

Clearly these considerations lead to potential future developments in which ideas, apparently diverse, will work together to search for explanations for phenomena concerning the attribution of sense.

References

Blumer H. (1969). *Symbolic interactionism. Perspective and method.* Englewood Cliffs NJ: Prentice Hall.

Catena P. (1992). *Universa loca in logicam Aristetolis in mathematicas disciplinas*. (G. Dell'Anna ed.). Galatina (Le): Congedo.

Chevallard Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 12, 1, 73-112.

D'Amore B. (1999). *Elementi di didattica della matematica*. Preface by Colette Laborde. Bologna: Pitagora. [Version in Spanish: D'Amore B. (2006). *Didáctica de la Matemática*. With a letter by Guy Brousseau. Preface to the Spanish edition by Luis Rico. Bogotá: Editorial Magisterio].

D'Amore B. (2001a). Concettualizzazione, registri di rappresentazioni semiotiche e noetica. *La matematica e la sua didattica*. 2, 150-173. [Version in Spanish: D'Amore B. (2004). Conceptualización, registros de representaciones semióticas y noética: interacciones constructivisticas en el aprendizaje de los conceptos matemáticos e hipótesis sobre algunos factores que inhiben la devolución. *Uno*. 35, 90-106].

D'Amore B. (2001b). Un contributo al dibattito su concetti e oggetti matematici: la posizione "ingenua" in una teoria "realista" vs il modello "antropologico" in una teoria "pragmatica". *La matematica e la sua didattica*. 1, 4-30. [Version in Spanish: D'Amore B. (2001). Una contribución al debate sobre conceptos y objetos matemáticos. *Uno*. 27, 51-76].

D'Amore B. (2003a). La complexité de la noétique en mathématiques ou les raisons de la dévolution manquée. *For the learning of mathematics*. 23, 1, 47-51. [Version in Spanish: D'Amore B. (2002). La complejidad de la noética en matemáticas como causa de la falta de devolución. *TED*. Bogotà, Università Pedagogica Nazionale. 11, 63-71].

D'Amore B. (2003b). *Le basi filosofiche, pedagogiche, epistemologiche e concettuali della Didattica della Matematica*. Bologna: Pitagora. [Version in Spanish: D'Amore B. (2005). *Bases filosóficas, pedagógicas, epistemológicas y conceptuales de la Didáctica de la Matematica*. México DF, México: Reverté-Relme. Preface by Guy Brousseau. Preface to the Spanish version by Ricardo Cantoral. Translation by Martha Isabel Fandiño Pinilla]. [Version in Portugese: D'Amore B. (2005). *As bases filosóficas, pedagógicas, epistemológicas e conceituais da didáctica da matematica*. Preface to the Italian edition: Guy Brousseau. Preface: Ubiratan D'Ambrosio Tradução: Maria Cristina Bonomi Barufi. Escrituras: São Paulo].

D'Amore B., Godino D. J. (2006). Punti di vista antropologico ed ontosemiotico in Didattica della Matematica. *La matematica e la sua didattica*. 1, 7-36. [Version in Spanish: in preparation].

D'Amore B., Radford L., Bagni G.T. (2006). Ostacoli epistemologici e prospettiva socio-culturale. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*. 29B, 1, 11-40.

Daval R. (1951). *La métaphysique de Kant*. Paris: PUF.

Duval R. (1993). Registres de représentations sémiotiques et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*. 5, 37-65.

Duval R. (2003). Décrire, visualiser ou raisonner: quels 'apprentissages premiers' de l'activité mathématique? *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*. 8, 13-62.

Duval R. (2005). Transformations de representations semiotiques et demarche de pensée

en mathématiques. Colloque COPIRELEM, Strasbourg, 30th may 2006 – 1st june 2006. In press.
Eco U. (1973). *Segno*. Milano: ISEDI.
Eco U. (1975). *Trattato di semiotica generale*. Milano: Bompiani.
Godino J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 22, 2/3, 237-284.
Godino J. D., Batanero C. (1994). Significado istitucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 14, 3, 325-355.
Godino J. D., Batanero C. (1998). Clarifying the meaning of mathematical objects as a priority area of research in mathematics education. In: Sierpinska A., Kilpatrick J. (eds.) (1988). *Mathematics Education as a Research Domain: A Search for Identity*. (177-195). Dordrecht: Kluwer A. P.
Kozoulin A. (1990). *Vygotsky's psychology*. Cambridge, MA: Harvard Univ. Press.
Llinares S., Krainer K. (2006). Mathematics (student) teachers and teacher educators as learners. In: Gutierrez A., Boero P. (eds.) (2006). *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education.* Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers B.V. In press.
Radford L. (2000). Signs and meanings in students' emergent algebraic thinking: a semiotic analysis. *Educational studies in mathematics*. 42, 3, 237-268.
Radford L. (2002). The seen, the spoken and the written. A semiotic approach to the problem of objectification of mathematical knowledge. *For the learning of mathematics*. 22, 2, 14-23.
Radford L. (2003). Gestures, speech and the sprouting of signs. *Mathematical thinking and learning*. 5, 1, 37-70.
Radford L. (2004). Cose sensibili, essenze, oggetti matematici ed altre ambiguità. *La matematica e la sua didattica*. 1, 4-23.
Radford L. (2005). La generalizzazione matematica come processo semiotico. *La matematica e la sua didattica*. 2, 191-213.
Wertsch JV. (1991). *Voices in the mind. A sociocultural approach to mediate action*. Cambridge, MA: Harvard Univ. Press.
Zinchemko VP. (1985). Vygotsky's ideas about units for he analysis of mind. In: Wertsch J. V. (ed.) (1985). *Culture, communication and cognition: Vygotskian perspectives*. Cambridge, MA: Harvard Univ. Press.

D'Amore B. (2000). Problems of Representing Concepts in the Learning of Mathematics. In: AA. VV. (2000). *Proceedings of the International Conference: Mathematics for living*. Amman, Jordan, november 18-23 2000. 1-5.

The complexity of noetic in Mathematics as a cause for the devolution that was to be

Bruno D'Amore

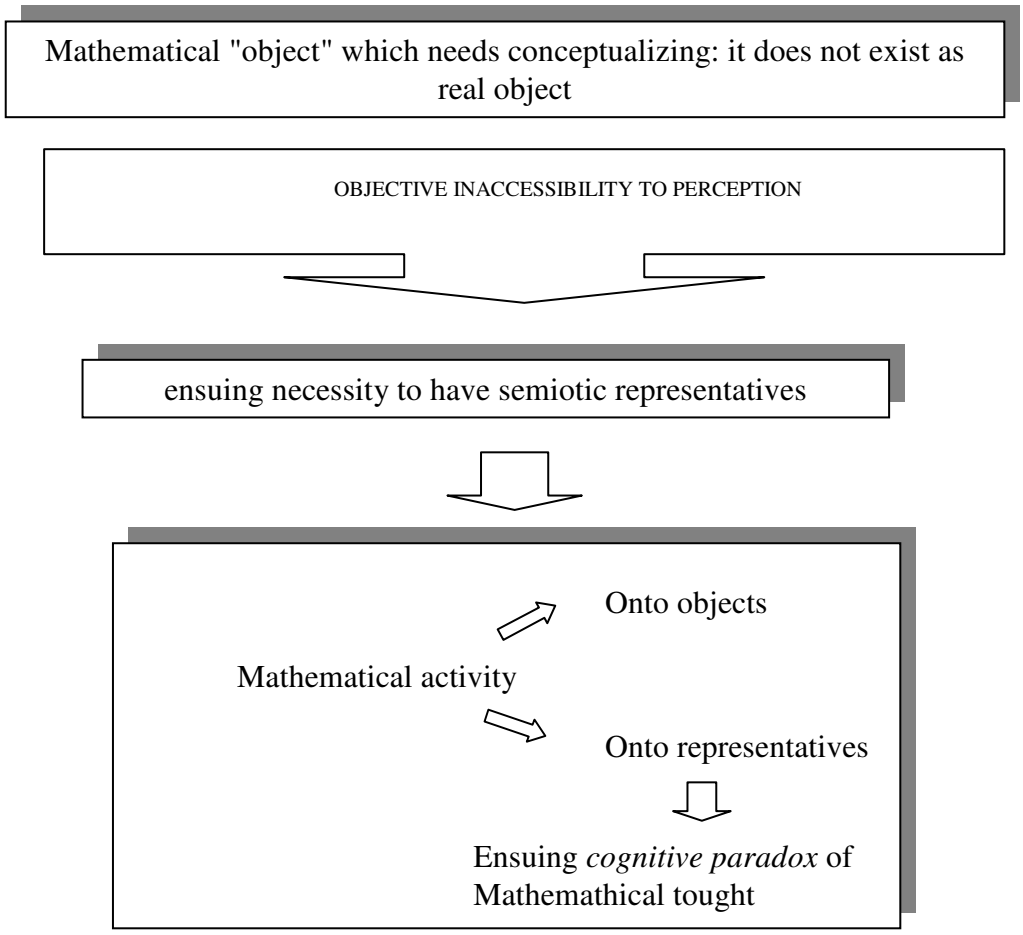
Research Group in Mathematical Education
Departement of Mathematical Sciences - University of Bologna

1. Concepts and objects in Mathematics

Each and every concept in Mathematics:

- refers to "non-objects", what follows from this is that conceptualization is not and can not be based on meanings resting on tangible reality; in other words, Mathematics does not allow ostensive referrals
- is compelled to make use of representations, as there are no "real objects" that can be shown in stead or as recall; therefore conceptualization, of necessity, has to go through representation patterns. These patterns for various reasons, and particularly so if they are of a linguistic type can not be univocal. [In this paper "real object" is meant in the intuitive aspect of "thing". The exact meaning is well shown by Aristotle in his *Metaphysics* where he claims that "a thing" so far as is part of the reality, offers the following features:
    - it is tridimensional
    - it is accessible (approachable) through more than one sense at a time, independent of semiotic representations
    - it is possible to separate it materially from other parts of reality, from other "things"]
- more often than not the Mathematical discourse refers to "Mathematical objects" rather than Mathematical concepts. This is because objects have become the focus of research more than concepts have. (Duval, 1998).

The notion of concept, which most Authors consider preliminary or, at any rate, of prime importance, in Duval acquires a secondary place, while what becomes the prime focus is the couple: *sign system - object*, as will be shown here when I refer to the *cognitive paradox of Mathematical thought*, pointed out by Duval himself (1993, p. 38). The following outline seems to be more effective than words:



2. The *cognitive paradox* in Mathematical thought

Let us consider this *paradox* as expressed by Duval (Duval, 1993, p. 38; translation by the writer in agreement with the Author):
"(…) on the one hand, learning Mathematical objects can only be a conceptual learning, and, on the other hand, any activity on Mathematical objects is made possible merely by means of semiotic representations. This paradox could become a concrete vicious circle as far as learning is concerned. How would it be possible for learners not to get Mathematical objects mixed up with their own semiotic representations if the one and only relation they have is with semiotic representations? (Learners are bound to confuse Mathematical objects with their semiotic representations because they can relate only to these representations).
Being unable to build up a direct access to Mathematical objects, which can only happen through a semiotic representation leads to an unavoidable confusion, or nearly unavoidable. And, on the other side, how can learners master Mathematical procedures, if they do not already possess a conceptual learning of the objects represented? This paradox becomes further intriguing if Mathematical activity is identified with conceptual activity and if semiotic representations are seen as secondary or extrinsic".

For a clear definition of terms, without however any claim at completeness, as these terms are not always used with an identical meaning, I prefer to state the meanings and symbols I will use hereafter:
semiotics = $_{df}$ acquisition of a representation realized by means of signs
noetic = $_{df}$ conceptual acquisition of an object.
From now on:
r^m = $_{df}$ is intended to mean semiotic register (m = 1, 2, 3, …)
$R^m{}_i$ (A) = $_{df}$ semiotic representation i-nth (i = 1,2, 3, …) of an object A within the semiotic register r^m.
One may notice that if the semiotic register changes, the semiotic representation will also by necessity change, whilst the opposite is not always true; i. e. the semiotic representation may change even when we keep the same semiotic register.

3. Examples of semiotic representations of a concept C

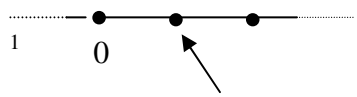
Concept C

Semiotic register r^1: *the common language*
Semiotic representation $R^1{}_1$: fifthy per cent
Semiotic representation $R^1{}_2$: a half
etc.

Semiotic register r^2: *the arithmetic language*
Semiotic representation $R^2{}_1$: ½ (as a fraction)
Semiotic representation $R^2{}_2$: 0.5 (as a decimal number)
Semiotic representation $R^2{}_3$: 5.10^{-1} (as a power)
etc.

Semiotic register r^3: *the algebric language*
Semiotic representation $R^3{}_1$: $\{x \in Q^+ \mid 2x-1=0\}$
(as a set of rational numbers)
Semiotic representation $R^3{}_2$: $y=f(x)$: $x \rightarrow \frac{x}{2}$ (as a function)
etc.

Semiotic register r^4: *the figural language*
Semiotic representation $R^4{}_1$:



etc.

Semiotic register r^5: *pictographic patterns*
Semiotic representation $R^5{}_1$: 
Semiotic representation $R^5{}_2$: 
Semiotic representation $R^5{}_3$: 
etc.

etc.

Other instances can be drawn from the elementary set theory, the so-called "set theory", where the same set can be represented within different semiotic registers, and, within each one of these, by using various semiotic representations.

4. Duval's paradox and the causes for the devolution that was to be

Can we find a potential cause for a devolution that was to be, hidden within this paradox, which was so properly highlighted by Duval?
According to the teacher, according to the noosphere and according to the student himself/herself, he (the student) is coming into contact with a mathematical object; however, in practice, though nobody is aware of this, the student is coming into contact with a particular semiotic representation of that "object". The student has not, and cannot have, direct access to the "object" and the teacher and the noosphere confuse the two things. It is as if the student becomes stuck, inhibited, he can do nothing else except confusing the "object" with "each and every semiotic representation of it" simply because he is not aware of this, in fact he cannot be. Therefore, when facing up to a subsequent conceptual need, such as the need to change the semiotic representation of that same "object", our student is not provided with cultural or cognitive critical criteria; the teacher and the noosphere are unable to understand the reason for this and accuse the student, thus making him feel guilty about something he does not understand.
Actually, in this phase of the paradox, no one really understands what is happening, since each one of the actors in this predicament has a different perception of the problem.

5. Semiotic and noetic in the learning of Mathematics

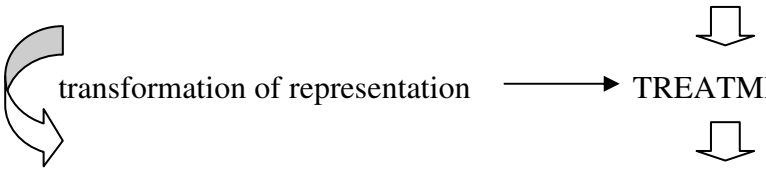
In Mathematics, the conceptual acquisition of any object has to go through the acquisition of one or more semiotic representations. (Duval 1998a,b,c; 1989; 1993; Chevallard, 1991; Godino, Batanero, 1994).
Once more, I will use a graphic to illustrate the issue under consideration, as it results in being more effective and more incisive.

characteristics of semiotics { representation, treatment, conversion } these three cognitive activities are all different

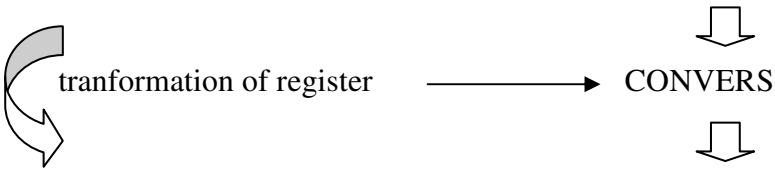
object A to be represented

choice of special features of A

REPRESENTATION R^m_1 (A) in a given semiotic register r^m



new representation (i ≠j) $R^m{}_1$ (A) in the same semiotic register

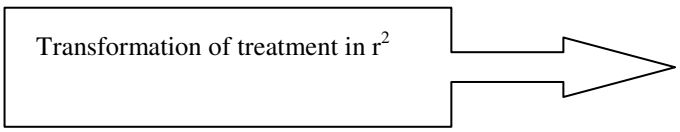


new representation (h≠i, h≠j) R^n_h(A) in a *different* semiotic register r^n
(n ≠ m)

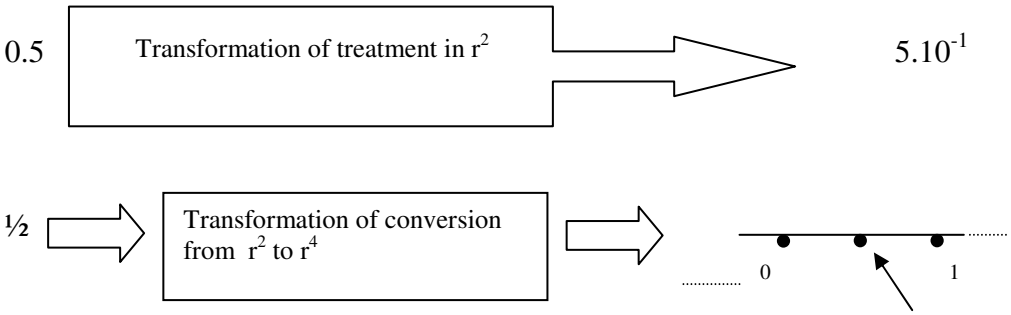
(m, n, i, j, h = 1, 2, 3, …)

I would like to draw your attention to the arrows which, in the first part of the graph,. point upwards.
Here is why this is so. The distinctive features of the object A depend upon the semiotic ability of representation in the chosen register. If we chose a different register, other features of A would be considered. This is due to the fact that two representations of the same object, though in different registers, will have different contents.

6. Examples of treatment and conversion

½ 

0.5



etc.

7. Characteristics of noetic

The conceptual acquisition of Mathematical object is based upon two of its "strong" features (Duval, 1993):

- the use of more than one register of semiotic representation is typical of the human thought
- the creation and development of new semiotic systems is symbol (historical) of the progress of knowledge.

These considerations underline the tight interdependence between noetic and semiotics, as we proceed from one to the other. It is not just that there is no noetic without semiotics, but that semiotics is taken as a necessary feature to allow the first step towards noetic.

More in depth information is now needed about the theory that R. Duval has been developing in the past few years.
In his theory, a central place is given to conversion as opposed to all other functions, and in particular to treatment, which is considered by most as crucial from the point of view of the process of learning in Mathematics.

8. An attempt at "defining" construction

The construction of mathematical concepts is, of consequence, tightly dependent on the ability to use *more* registers of semiotic representations of those concepts:

- To represent them in a given register
- To treat such representations within the one and same register
- To convert such representation from a given register to a different one.

These three elements taken together and the previous considerations point out the tight link to be found between noetic and constructivism. What we mean by "construction of knowledge in Mathematics" is in actual facts the combination of these three "actions" on concepts. We mean by it the very expression of the ability to *represent* concepts (choosing their specific traits); to *treat* the representation thus obtained within a given register, to *convert* these representations from one register to another.

It is as if we were defining the base operations, which, taken together, clarify that "construction" which, otherwise, will remain a mysterious and ambiguous term, subject to all sorts of interpretation, even a metaphysical one.

9. The process of learning within a school system and the noetic that was to be

The student who, though unaware, gives devolution up or is unable to get involved (because of negative results in previous attempts) or is unable to face his direct responsibilities in the construction of knowledge inside the school system, shows a lack of skills (at times based on an unfounded assumption) either to represent, or treat, or convert, because of the lack of a specific teaching method prior to it.
In fact, the teacher may not be worried by the individual components of construction, owing to a supposed identity between semiotics and noetic (Duval, 1993). The idea of this identity is widespread amongst teachers, particularly those teachers who have never considered this issue or who see it as superfluous; Speranza 1997; Porla, Rivero, Martin, 1997).
This could lead to a remissive choice on behalf of the student and, as a consequence, to school-like approach to knowledge (D'Amore, 1999).

The term " school-like approach to knowledge" is here used by myself to refer to a largely unconscious act carried out by the student who, at a certain point of his social and school life, (nearly always during the primary cicle) delegates the institution and the teacher (its representative) the task to *select the meaningful knowledges*. By meaningful knowledge I define a socially accepted knowledge, because the status of the noosphere is recognised and legitimized. By so doing, the student waives the responsibility of choosing for himself according to his tastes, interests, motivation, …). Since this school-like approach implies the recognition of the teacher as the keeper of that knowledge that matters socially, we obviously witness, more or less at the same time, a " school-like approach" to interpersonal relationship (between student and teacher, between student and classmates) as well as to the relationship between student and knowledge. This process is defined as "school-like approach to relationships".
The result in D'Amore's research (1998) strongly supports the "game of triads", i.e., representation, treatment, conversion. In the research, a message showing a simple binary relation (names of towns and states were given with the binary relation beeing: "it is in …") was offered to students from different levels, using different semiotic registers and representations.

The students were supposed to realize that *the message was the same, the information was the same*. What the research results show is the enormous difficulty the students face when they have:

- to go from a representation to the content represented
- to check that a transformation of representation of the treatment type has taken place between two representations in a given semiotic register
- to check that a transformation of representation of the conversion type has taken place between two semiotic representations in two different semiotic registers.

With no interpretation key and finding it difficult to "read" the situation, students give "meanings" to the message by creating information of various sorts (which in same cases I defined as "parasite information") far from any communicative intention of the author. In fact students look for indicators either of treatment or of conversion in marginal features such as the shape of the graphs, the type of figures in it by chance, etc, totally meaningless for the teacher.

10. The devolution that was to be, the end of implication

When this vast number of representations and transformations happens to be mismanaged, the reaction of the teacher who, beeing disappointed, merely observes the lack of learning in his pupils, is too simplistic and banal. Where can one find the crucial reason for this failure? This aspect is much more interesting and an examination of failures could be revealing.

However, I am interested in the issue of the devolution that was to be, in the issue of an individual implication that came to cease. In my mind, I picture the figure of a students who, though clever, sensitive and aware, limits himself to observe and ascertain his own failure in his attempt at solving the triad "representation, treatment, conversion".
This could be due to that sensitivity or to a lack of introspective analysis he is not guilty of.

The student may come to the decision (however not consciously) to … limit the damages by accepting the formalism, the surface of what is required of him. Thus he conforms to a school-like approch to his knowledge and behavior, that is to say he accepts the teacher's total mediation towards the object of knowledge, he accepts the teacher's choices and even his tastes (D'Amore, 1999). A cogent analysis of its many components, for instance being able to point out the different ways in which the construction of knowledge comes to be (our specific example was a concept with ½ as its representative), could help the teacher understand the exact point in time when the student surrenders, when the devolution does not come into being, when the student gives up his personal involvement in the construction of knowledge There is an enormous difference between institutionalised knowledge on the part of the teacher who represents the institution that has decided what is the learning that counts; and a school-like approach, the passive acknowledgement of the teacher's choices.

In the first case, the teacher mediates between pupil and knowledge and helps the former to be an active participant: he supports the choices and "discoveries" of the student; he gives them a statute that can be spent at an institutional level and gives these discoveries official authorization to usage; the basis of it all being that the student himself built it up.

In the second case the teacher becomes an absolute mediator and renders the student a passive subject from whom blind faith is required towards an institution, in exchange for promises about future competences which may never be acquired or spent. The pupil will no long constructs, will no longer learn.
I believe that a comprehensive study of the triad (representation, treatment, conversion) can be applied to the analysis of why students give up on an individual involvement, can be applied to uncover the underlying reason for this relinquishment, the reason for this process of a school-like approach to learning.

REFERENCES

Chevallard Y. (1991). Dimension instrumentale, dimension sémiotique de l'acitivité mathématique. *Séminaire de Didactique des Mathématiques et de l'Informatique de Grenoble.* LSD2, IMAG, Université J. Fourier, Grenoble.

D'Amore B. (1998). Oggetti relazionali e diversi registri rappresentativi: difficoltà cognitive ed ostacoli. *L'educazione matematica*, 1, 7-28 [in italian and english]. Spanish version: *Uno,* 15, 1998, 63-76.

D'Amore B. (1999). Scolarizzazione del sapere e delle relazioni: effetti sull'apprendimento della matematica. *L'insegnamento della Matematica e delle scienze integrate.* 22A, 3, 247-276.

Duval R. (1988a). Ecarts sémantiques et cohérence mathématique. *Annales de Didactique et de Sciences cognitives*. 1, 7-25.

Duval R. (1988b). Approche cognitive des problèmes de géométrie en termes de congruence. *Annales de Didactique et de Sciences cognitives*. 1, 57-74.

Duval R. (1988c). Graphiques et équations. *Annales de Didactique et de Sciences cognitives*. 1, 235-253.

Duval R. (1993). Registres de représentations sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives,* ULP, IREM Strasbourg. 5, 37-65.

Duval R. (1998). Signe et object (I). Trois grandes étapes dans la problématique des rapports entre répresentation et objet. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives.* 6, 139-163.

Godino J.D., Batanero C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique desMathématiques.* 3, 325-355.

Porlán R., Rivero A., Martin R. (1997). Conocimiento profesional y epistemológico de los profesores. *Enseñanza de las Ciencias*. 15-2, 155-171.

Speranza F. (1997). *Scritti di Epistemologia della Matematica.* Bologna: Pitagora.

D'Amore B. (2001). Une contribution au débat sur les concepts et les objets mathématiques. *Scientia Paedagogica Experimentalis*. Gent, Belgio. XXXVIII, 1, 17-46.

Une contribution au débat sur les concepts et les objets mathématiques: la position "naïve" dans une théorie "réaliste" contre le modèle "anthropologique" dans une théorie "pragmatique" [4]

Bruno D'Amore

Nucleo di Ricerca in Didattica della Matematica
Dipartimento di Matematica
Università di Bologna, Italia

Facoltà di Scienze della Formazione Primaria
Libera Università di Bolzano, Italia
Freie Universität Bozen, Italien

Résumé. Dans cet article on analysera de différentes interprétations des termes "concept" et "objet" en Mathématique, dans l'histoire de la pensée philosophique, psychologique, et dans la toute récente acception "anthropologique", en montrant qu'il est nécessaire d'adopter une théorie "pragmatique".

Summary. In this article various interpretations of the terms "concept" and "object" in Mathematics are analysed, using the History of Philosophical Thought, Psychology, and the recent "anthropological" perspective, demonstrating how it could be necessary to enter into a "pragmatic" theory.

1. Les concepts: terminologie courante, philosophique et littéraire.

On a écrit des oeuvres entières sur la nature des concepts, et des philosophes de premier plan se sont occupés de ce thème.[5]
Dans les dictionnaires de philosophie on en trouve des définitions qui se ressemblent assez; j'utiliserai la définition suivante, à caractère aristotélique, comme prototype: «En général, tout procédé rendant possible la description, la classification et la prévision des objets connaissables». Il faut remarquer que, selon cette acception:

- le concept est un processus, quelque chose donc de dynamique et non de statique;

[4] Travail executé dans le cadre du Programme de recherche locale: *Recherches sur le fonctionnement du système élève-enseignant-savoir: motivations de la dévolution manquée*, avec des financements ex-60%.
[5] Pour la rédaction de ce paragraphe 1, j'utiliserai essentiellement D'Amore (1999), chap. 6.

- il peut exister un concept de n'importe quoi, des objets concrets (le concept de *table*) aux abstraits (le concept du *nombre 3*); des objets réels aux irréels, inexistants, imaginaires;
- il existe une différence entre *nom* et *concept*; il suffit de penser que des noms différents peuvent se référer au même concept.

À ce point, deux problématiques fondamentales s'imposent:

- la *nature* du concept
- la *fonction* du concept.

La question sur la *nature* du concept a eu, en philosophie, deux réponses différentes:

- le concept est l'*essence* même des choses, donc leur essence nécessaire (ce qui rend les choses comme elles sont) (malgré la présence de nombreuses différences, comme il est compréhensible, je dirais que cette idée, née avec Socrate et détaillée par Aristote, a eu nombre de disciples jusqu'à Husserl)
- le concept est le *signe* de l'objet, donc il se trouve en rapport de signification avec ce dernier (cette idée est d'origine stoïque, mais elle a été reprise pendant le Moyen Age, en remontant peut-être à Boétius et puis à Abelard; mais elle a été adoptée par les logiciens au début du vingtième siècle).

La question sur la *fonction* du concept a donné lieu à deux conceptions fondamentalement différentes:

- de type *final*: le concept a comme but celui d'exprimer ou de révéler la substance des choses;
- de type *instrumental*: et on a là quatre déterminations ultérieures:
  - le concept est un instrument pour *décrire* les objets et pour en permettre la *récognition* (cette définition a été anciennement adoptée par les Epicuriens et par les Stoïques; puis par certains philosophes de la science au vingtième siècle);
  - le concept est un instrument pour *classifier* les concepts de la manière la plus *économique* possible (Mach, par exemple, adopte cette idée ; et là la question se déchaîne, selon laquelle les concepts scientifiques seraient des pseudo - concepts au sens de Croce);
  - le concept est un instrument pour *organiser* les données de l'expérience de sorte à établir entre elles des *connexions* de caractère logique (cette idée a été acceptée par Duhem);
  - le concept est un instrument pour *prévoir* (on peut citer à ce propos Dewey et Quine, par exemple, même si pour des raisons complètement différentes).

Une manière complètement différente de discuter philosophiquement des concepts est celle de l'école française et allemande. Il s'agit là moins de *définir* les concepts que d'essayer d'analyser *comment ils se forment*. Nous avons donc les précisons suivantes:

- concepts *à priori* ou concepts *purs* (pour utiliser la terminologie kantienne) : il s'agit des concepts qui ne dérivent pas de l'expérience: concepts d'unité, de pluralité et cetera (je trouve ces exemples justement chez Kant);
- concepts *à fortiori* ou concepts *empiriques*: ce sont des notions générales définissant des classes d'objets donnés ou construites; par exemple: le concept de *vertébré*, de *plaisir* et cetera ; ils concernent tous les individus appartenants à ces classes, et eux seulement, qu'on puisse les isoler (*un* chat, choisi dans la classe des vertébrés) ou non (comme il serait le cas pour *un* plaisir).

La position ci-dessus, par exemple, est celle qu'assume André Lalande dans son *Vocabulaire technique et critique de la philosophie* (PUF, Paris 1926).

Il est donc clair dans quel sens on peut parler, en tout cas, d'*intension* et d'*extension* d'un concept (au pire des cas il y aura des concepts à extension vide...).

Mais qu'est-ce que signifie *concept*, du point de vue étymologique? Son nom latin (*conceptus*, de *concipere*) se réfère clairement au résultat de l'acte de conception ou de génération de l'esprit pendant son détachement de l'immédiat des impressions sensibles et des représentations particulières et sa réalisation d'une signification universelle. Mais alors, on pourrait penser à une coïncidence avec le mot *idée*; ou bien on pourrait faire coïncider le concept avec le λόγοζ (le *verbum*, la langue mentale); ou encore avec le mot *notion*.
Chacune de ces interprétations (et d'autres encore) fut soutenue dans le temps par quelques éminents philosophes. Cela nous autorise à confondre dorénavant le *concept* avec l'*idée*, même si l'*idée* implique aussi une sorte de *représentation* tandis que le *concept* pourrait aussi en être immune.

Si on passe à des dictionnaires de langue commune, non philosophiques, édités dans des pays différents, on trouve par exemple:

- «Ce que l'esprit entend et comprend par le moyen de l'observation, de la réflexion et de l'induction»; parfois, outre à *entend* et *comprend*, on trouve aussi *arrive à des conclusions*;
- «La créature conçue - la chose imaginée et inventée par notre intellect»;
- «Pensée que l'esprit forge à partir de deux ou plusieurs idées, en remontant de l'individuel au général ; [mais aussi :] Idée, opinion»;
- «Pensée conçue par l'esprit; et de manière plus détaillée: idée, notion exprimant les caractères essentiels et constants d'une réalité donnée que l'on forge en saisissant tous ensemble (...) les différents aspects d'un objet déterminé qu'on tient à avoir à l'esprit dans leur complexe»;
- «Terme philosophique se référant en général au contenu logique ou à la signification des signes linguistiques et des images mentales».

Pour compléter cette introduction, il peut être intéressant de voir l'usage que quelques hommes de lettres font de ce terme. Dante Alighieri utilise *concepts* au sens de *conceptions* dans le *Paradis* 3-60; de nombreux hommes de lettres de différents pays du monde utilisent ce mot dans le même sens. Mais il est clair que les hommes de lettres utilisent ce mot de la manière la plus vaste possible, comme d'autre part, on fait, et il est juste de le faire, dans la langue commune, où *concept* signifie aussi *opinion*, *manière de voir, principe, projet, intention, estime, réputation* et cetera, selon la langue qu'on utilise.

Tout cela n'était que pour témoigner de l'énorme difficulté et des différences qu'on rencontre quand on s'engage à faire face de manière significative et rigoureuse à une problématique comptant parmi ses fondements un mot qu'on a employé des milliers d'années à définir.

2. Les concepts: terminologie psychologique, dans le domaine didactique.

Si nous voulons faire des progrès significatifs et spécifiques il faut chercher des textes qui conviennent davantage à l'esprit de notre recherche.
Je ne puis donc pas m'empêcher de rappeler que L. S. Vygotskij (1960, 1962) travailla longuement sur la formation des concepts, justement, dans le cadre d'un plus large domaine de recherche sur l'influence des causes sociales sur les différences psychiques entre les individus (influence du milieu sur les différences psychiques). Dans ce cas il parle justement de *développement conceptuel*, en distinguant essentiellement trois phases (mais sa théorisation est beaucoup plus complexe, je simplifie ici):

- *phase des accumulations syncrétiques*, caractérisée par le manque d'une référence objective stable;
- *phase de la pensée par complexes*; dans cette phase le sujet tend vers une manière de penser objective; le sujet reconnaît des connexions concrètes, mais non logiques ou abstraites;
- *phase conceptuelle*; dans cette phase le sujet opère en utilisant sa capacité d'abstraction.

Vygotskij consacra une attention particulière à la formation des concepts scientifiques, spécialement de type scolaire au cours de l'enfance, et il mit en évidence le lien que les enfants établissent entre ces concepts et les composantes concrètes et figuratives, longtemps avant de les établir avec des composantes logiques ou abstraites. Cette priorité parait nécessaire pour la "fondation" du concept elle-même. À propos de l'ordre de l'acquisition des concepts, Vygotskij (1962) fit une affirmation célèbre, apparemment paradoxale, selon laquelle les concepts scientifiques se développent *avant* les concepts spontanés; mais Vygotskij dit aussi: «si le programme fournit le matériau approprié»; en somme : la supposée nécessité enfantine de devancer la phase abstraite d'apprentissage par la phase empirique ne semble pas aussi nécessaire qu'on le croyait. [On reviendra sur les concepts scientifiques et sur Vygotskij dans **4.**].
Mais alors on peut mettre en discussion la position de J. Bruner (1964), celle de la célèbre triade des modes de représentation des concepts:

- *exécutif*
- *iconique*
- *symbolique*

qui, disons-le pour précision, se référait justement à la mathématique.
Prenons un exemple très célèbre: l'acquisition du concept de mesure par les enfants âgés de 3 à 5 ans; et mettons en juxtaposition les modalités de Piaget et celles d'un célèbre disciple de l'école soviétique : Gal'perin.
■ Dans la description de l'apprentissage spontané du concept de mesure qu'effectuent Piaget, Inhelder et Szeminska (1948), on propose à l'enfant des situations empiriques où on lui demande d'effectuer une mensuration, jusqu'à arriver à un concept abstrait, tout en respectant la théorie des étapes évolutives. Le comportement de l'enfant suivrait un *iter* très connu, et tenu toujours en grande considération à l'école maternelle et au cours du premier cycle de l'école primaire italienne: l'enfant effectue d'abord des mensurations spontanées avec des pseudo-unités de mesure, et on a là une prédominance de l'activité perceptive; ensuite il choisit plus attentivement l'unité de mesure, et il acquiert la capacité de réutiliser plusieurs fois l'unité; il aboutit finalement à la conscience de la conservation des grandeurs (et des mensurations). Comme on le voit la terminologie typiquement piagetienne est encore utilisée avec fréquence.

■ L'épreuve de Gal'perin (1969) lie davantage la mensuration à l'idée de chiffre en prenant appui entre autre, des idées fondationnelles de A. N. Kolmogorov. Le premier objectif est celui d'arriver à l'idée d'unité; puis au fait que la mesure par rapport à une unité donnée est un chiffre dont on peut se souvenir même sans en connaître le nom, tout simplement en mettant de côté un petit morceau de bois ou un bouton chaque fois qu'on utilise une unité; à ce point on fait coïncider la mesure avec le nombre de fois où on a utilisé l'unité (l'exemple proposé est: remplir une carafe avec des verres d'eau pour en évaluer la capacité); et enfin identification et acceptation de la relativité du chiffre-mesure, par rapport à l'unité utilisée.
Il me semble que tout cela explique bien quel est l'acharnement et l'intérêt avec lesquels les plus célèbres théoriciens de l'apprentissage conceptuel se sont intéressés à ce sujet; et cela nous explique de plus en plus, au moins de manière implicite, ce qu'ils entendent avec *concept,* au moins dans le domaine de l'apprentissage cognitif.

3. Les concepts dans les processus d'enseignement et d'apprentissage.

Doit-on enseigner les concepts? *Peut-on* apprendre les concepts? Et encore: ces questions ont-elles du sens?
Ces dernières sont des questions-pivot, sur lesquelles il est nécessaire de réfléchir, et que quelques Auteurs traitent de manière trop hâtive ou trop naïve.
Cette problématique s'est développée aux environs des années '60, surtout dans les pays anglophones, dans le cadre du vaste mouvement international pour le renouvellement curriculaire qui a touché le monde entier. Cela a été provoqué très certainement par la grande revalorisation éducative des contenus de différentes disciplines, des sciences en particulier, et spécialement de la mathématique. Dans ce contexte, l'un des auteurs de ce virage à niveau mondial a été très certainement J. Bruner.[6] Cela porta par conséquent à un débat animé concernant le curriculum scolaire, surtout par rapport justement au secteur des sciences en général et de la mathématique en particulier.
Je vais résumer ce débat, en commençant par cette question, préliminaire aux questions précédentes: à *quoi* doit-on éduquer, quand on enseigne les sciences à l'école? Il y a deux réponses possibles:

- à la *méthode scientifique*: l'objectif est celui de faire acquérir une certaine maîtrise dans la méthodologie;
- à l'acquisition et à la maîtrise des *concepts essentiels* de la science.

Le débat n'était pas nouveau; la première réponse peut certainement se reconduire à la *méthode de l'intelligence* de John Dewey (1933), mais les années '60 témoignèrent d'un débat enflammé à l'intérieur duquel tous ceux qui promouvaient des idées didactiques assez bien construites[7] eurent un succès facile.
Dans ce débat s'insère bien un autre type de proposition, celle de Gagné (1965-1985) qui tend à séparer la didactique des concepts *concrets* de celle des concepts *abstraits*; le caractère concret et l'abstraction doivent être considérées par rapport à la qualité de référence des objets qu'on considère dans les concepts:

[6] Pour en comprendre la raison, voir Tornatore (1974), chap. 9.
[7] Sur ce débat, mais de manière plus approfondie, voir Pontecorvo (1983, pages 262-263).

- s'il s'agit de concepts dérivés de l'observation empirique des objets, il s'agit de concepts concrets;
- s'il s'agit de concepts dérivés de définitions, et impliquant donc des relations abstraites, il s'agit de concepts abstraits.

Gagné élabore une théorie des hiérarchies d'apprentissage au sommet de laquelle, comme dernier point on trouve les concepts abstraits.
Cette idée des hiérarchies poussa nombre d'autres auteurs à l'idéation de hiérarchies similaires, en suivant d'autres paramètres; et en particulier je me réfère aux travaux de Klausmeier, Gathala et Frayer (1974) et Klausmeier (1979, 1980) qui divisent l'apprentissage des concepts dans l'école primaire en quatre niveaux:

- niveau concret: l'enfant reconnaît un objet qu'il a déjà vu dans la même situation;
- niveau d'identité: l'enfant reconnaît un objet qu'il a déjà vu, mais dans des conditions différentes;
- niveau de classification: l'enfant reconnaît que deux choses se ressemblent sous un certain aspect, et, en généralisant, il les classifie dans la même catégorie, même si les critères de classification ne sont pas clairs;
- niveau formel: l'enfant est capable de nommer la classe qu'il a obtenue au troisième niveau, c'est à dire qu'il est capable de nommer le concept sélectionné par les attributs qui lui ont permis la classification.[8]

Il semble donc que cette étude sur la manière de développement des concepts concerne surtout l'âge 3-10. Il sera nécessaire de tresser cette recherche avec la recherche didactique.
Le développement des concepts et l'apprentissage sont donc très liés entre eux.
Peut-on arriver à penser que le moment culminant de l'ontogenèse est l'organisation de la connaissance par catégories? Luria (1982) soutient cette thèse, et les méthodes utilisées pour effectuer cette organisation sont les suivants à son avis:

- méthode de la définition du concept: on demande de répondre de manière spontanée et libre à des questions du genre : «Qu'est-ce que c'est?» ; les réponses peuvent être spécifiques, c'est à dire référées à des particularités, ou de type catégoriel;
- méthode de la comparaison – différentiation: on donne deux objets différents, mais avec quelques caractéristiques en commun et on demande d'identifier les caractéristiques communes et les différences;
- méthode de la classification: on donne plusieurs objets et on demande d'en classifier un sous-ensemble, formé par les objets ayant une caractéristique commune;
- méthode de la formation des concepts artificiels: on revient à Vygotskij; l'expérimentateur a tout prédisposé pour arriver à un concept bien établi auquel on voulait parvenir.

Toutefois il faut dire qu'on ne peut qu'être d'accord avec Cornu e Vergnioux (1992, pages 55-56) quand ils affirment que l'apprentissage de un concept isolé est impossible, car chaque concept est mis en corrélation, joint à des autres. On dois parler alors de trames conceptuelles. On reviendra sur ce point dans peu de temps (et je renvoie à D'Amore, 1999).

[8] Des clarifications ultérieures sur les liens entre les niveaux de Klausmeier, les phases de Gagné et les stades de Piaget, ainsi que des exemplifications d'applications didactiques, peuvent être retracées dans Pontecorvo (1983).

4. Le rôle du langage dans l'apprentissage et dans la formulation des concepts.

Il est évident qu'en tout cela le langage joue un rôle d'une importance extraordinaire.
Il est bien connu que de la position de Piaget on a approché toujours plus «une dévaluation cognitive progressive du langage» (Pontecorvo, 1983, page 292); Ce dernier «doit être vu par rapport à la position de Piaget. Elle se situe contre toute conception identifiant l'origine de la pensée dans la communication sociale à travers le langage, et contre toute conception assimilant les systèmes logiques à des systèmes linguistiques (...) La pensée, insiste Piaget, n'est pas originée par le langage (...) la "structure" d'un système opératoire n'est pas la structure d'un système de signes mais la structure d'un système "d'actions intériorisées"» (Tornatore, 1974, page 137).
Voilà pourquoi Piaget assume la position suivante:

- l'image est un signifiant dont le but est celui de désigner des objets de manière figurative;
- le concept est un signifié ayant comme fonction l'individuation des caractères constitutifs de l'objet par rapport à d'autres termes de la même classe (et non de le nommer);
- le mot, signe verbal désignant le concept n'ajoute rien, quant à la connaissance, au concept lui-même.

La position de Vygotskij (1962, page 106) est très différente: en effet il voit le langage comme un médiateur entre l'individu et la culture; il affirme que la formation d'un concept se vérifie par le moyen d'une opération intellectuelle guidée par l'utilisation des paroles nécessaires à la concentration active de l'attention, l'abstraction de certains concepts, la synthèse et la symbolisation de ces concepts par le moyen d'un signe.
L'organisation cognitive de l'enfant reçoit donc, grâce au langage, une dimension n'appartenant qu'à elle, et qui lui est naturelle depuis son début: la dimension *sociale*. S'il est vrai que l'enfant apprend à catégoriser dans le rapport linguistique avec l'adulte, il est vrai aussi que des formes de catégorisation doivent être déjà présentes en embryon *avant* leur systématisation définitive et adulte. Vygotskij établit donc une comparaison entre les concepts spontanés (ou quotidiens) et les concepts scientifiques:

- les premiers ont la caractéristique d'appartenir à l'expérience personnelle,
- les seconds font déjà partie d'un système de concepts. L'effet de l'école sur les compétences de l'enfant est celui de systématiser les concepts qu'il possède déjà et ceux qu'il acquiert au fur et à mesure.

Une position, celle-ci véritablement révolutionnaire, sur laquelle se fonde une grande partie de la didactique actuelle.
Je veux terminer cette rapide vue d'ensemble sur le langage et l'apprentissage des concepts en rappelant, parmi tant d'études possibles, ceux de Madame Nelson (1974, 1977). Comme je l'ai déjà souligné, le concept, au moins du point de vue de l'apprentissage cognitif, est interprété aujourd'hui comme quelque chose de plus en plus vaste, qui n'est plus lié exclusivement aux catégories, aux classes, et cetera; le concept, pour Nelson (1977), est lié à n'importe quelle acquisition de connaissance, à la condition qu'elle soit «définie et incorporée dans un contexte ou un système». Par conséquent, indépendamment du degré de généralité ou d'abstraction, ce qui compte est qu'il y ait un cadre de référence, un réseau de relations: «les concepts existent nécessairement à l'intérieur d'un cadre (*framework*) conceptuel» (Nelson, 1977).

Il devient alors décisif pour l'apprentissage d'un concept le fait d'avoir une série de connaissances se référant, par exemple, à un objet. L'exemple que l'auteur elle-même propose se réfère au terme "balle" dans une expérience avec un enfant de 12 mois: le réseau de relations tournant autour du mot "balle" se réfère à l'endroit où elle a été vue, à l'activité que d'autres personnes font avec elle, que l'enfant même peut faire avec elle, aux caractéristiques fonctionnelles de l'objet, les lieux où tout cela peut se dérouler et cetera. L'objet est donc lié à un vaste réseau de relations, dont l'ensemble finit par constituer le concept; et, comme on l'a vu, le *mot* joue un rôle décisif. Avec le temps, l'enfant ajoutera à cette première formation du concept d'autres attributions, d'autres fonctions et cetera, en permettant ainsi au concept de contenir des éléments fonctionnels, relationnels, perceptifs, *descriptifs*, jusqu'aux termes qui les désignent, aussi bien individuellement que collectivement. Il est évident aussi que le lien avec les *scripts* est très fort, et que ces derniers ont été pensés comme des plus amples cadres de référence à l'intérieur desquels il sera possible de situer les concepts dans les différentes phases de leur évolution et de leur présentation. Tout cela permet de reconnaître les traits d'identification du concept, ce qui permet à son tour de reconnaître les nouveaux exemplaires pouvant partager le *nom* avec celui qui les précède.
Mais le point d'aboutissement est celui où, malgré des *scripts* différents, le sujet arrive, comme on le dit, à supercatégoriser: «Les catégories aussi bien que les *scripts* peuvent offrir des cadres de référence pour les concepts eux-mêmes: en effet, il n'y a aucune raison pour laquelle les concepts insérés dans un contexte ou l'autre soient différents dans le contenu ou dans la structure. Par exemple: les ours peuvent faire partie du *script* relatif au zoo ou bien ils peuvent faire partie d'une catégorie taxinomique relative aux animaux.» (Nelson, 1977, page. 223).
Pensons à quel point l'évidence de ces réflexions s'impose dans l'activité de didactique de la Mathématique, quand le même concept, introduit dans un *script* donné, n'est pas accepté quand on le retrouve dans une catégorie différente.
Qu'est-ce qui rend la compréhension des concepts difficile? Quel est le niveau dans lequel il existe des difficultés dans la compréhension des concepts?
Les réponses possibles sont plusieurs. D'abord, les différents niveaux de formations des concepts: des études sur ce point sont plus communes dans le monde de la didactique des sciences naturelles (Giordan, De Vecchi, 1987; Astolfi, Develkay, 1989) et de l'histoire (Clary, Genin, 1991). Et puis l'existence d'objectifs-obstacles (Meirieu, 1987 ; Astolfi, Develkay, 1989).

5. Les définitions de concept et de schéma élaborées par Vergnaud.

Gérard Vergnaud, a affronté dans plusieurs occasions la problématique visant à distinguer et à définir les idées de concept et de schéma. Après avoir déclaré que la connaissance rationnelle doit être de type opératif, il définit le schéma une organisation invariante du comportement par une classe de situations données (Vergnaud, 1990).
En particulier, beaucoup de ses exemples sont tirés du domaine de la mathématique:

- la numération d'une petite collection d'objets de la part d'un enfant de 5 ans nécessite de l'application d'un schéma lui permettant de coordonner les mouvements des yeux et des mains et de coordonner la séquence numérique avec eux; en particulier, il existe une constante significative d'un comportement de type

schématique dans la répétition du dernier nom numéral, prononcé sur un ton différent;

- la résolution d'équations linéaires par des adolescents suit à son avis un schéma, une organisation inchangée;
- l'exécution de l'addition en colonne de nombres naturels suit un schéma déjà assumé;

et cetera.

Selon Vergnaud, si on analyse de manière critique la difficulté de certains élèves dans la solution de devoirs de mathématique, par exemple d'enfants face à des problèmes d'arithmétique, c'est en termes de *schémas* qu'il faut analyser le choix des données à utiliser, le choix des opérations, surtout quand il existe plusieurs choix possibles. Même les procédures ne seraient que des schémas.

À ce point il introduit l'idée de "concept-en-acte" et de "théorème-en-acte"; il s'agit des connaissances contenues dans les schémas : on peut aussi les désigner avec l'expression plus compréhensive d' "invariants opérateurs".

Selon Vergnaud il existe trois types logiques d'invariant opérateur:

- invariants du type *proposition*, ceux auxquels convient l'attribution d'être vrais ou faux;
- invariants du type *fonction propositionnelle*; avec ce terme on peut désigner une expression contenant une ou plus variables individuelles telles que quand on met à leur place des constantes individuelles elle donne lieu à une proposition;
- invariants du type *argument*: ils peuvent être des objets, des relations, des propositions, des fonctions propositionnelles, ou autre: il s'agit substantiellement d'instantiations de variables ou exemples de fonctions propositionnelles, ou de propositions elles-mêmes.

On revient maintenant aux concepts. Selon Vergnaud, le point décisif dans la conceptualisation du réel et dans la didactique est le passage des *concepts-comme-instrument* aux *concepts-comme-objet* et une opération linguistique essentielle dans cette transformation est justement la nominalisation. Cela pourrait se résumer en un seul mot: *conceptualisation*.

Il est donc fondamental, de donner une définition pertinente et efficace de *concept* on ne pourrait jamais y renoncer. Dans plusieurs travaux, avec des variations minimes, Vergnaud en suggère une qu'on peut illustrer de la manière suivante :

un concept est une triade d'ensembles:

$C = (S, I, \mathcal{S})$

où:

- S est l'ensemble des situations donnant sens au concept (le *référent*);
- I est l'ensemble des invariants sur lesquels se fonde la capacité operationnelle des schémas (le *signifié*);
- $\mathcal{S}$ est l'ensemble des formes linguistiques et non linguistiques permettant de représenter symboliquement le concept, ses procédures, les situations et les procédures de tractation (le *signifiant*).

Selon Vergnaud, le fait d'étudier le développement et le fonctionnement d'un concept signifie prise en considération tour à tour de ces trois "plans" séparément et dans leurs relations réciproque et mutuelle.

6. Le virage “anthropologique”: signifié institutionnel et personnel des objets mathématiques.

Malgré cela, les questions sur la nature cognitive des concepts mathématiques et sur la nature de la signification des objets mathématiques prirent tout autre direction déjà au cours des années ’70.
«Une théorie de la signification est une théorie de la compréhension; c’est à dire, ce dont doit rendre compte une théorie de la signification est ce qu’on connaît quand on connaît le langage, soit quand on connaît les significations des expressions et des discours du langage», déclarait Dummet en 1975 (Dummett, 1991).
Peu d’années après, en 1980, Brousseau se demanda: quelles sont les composantes de la signification déductibles du comportement mathématique qu’on observe dans l’élève? Quelles sont les conditions qui mènent à la reproduction d’un comportement tout en gardant la même signification? (Brousseau, 1981). N’existerait-il pas, par hasard, une “variété didactique” du concept de sens, spécifique pour la mathématique, jamais étudiée, jamais soulignée jusqu’à présent ni en linguistique ni en psychologie? (Brousseau, 1986).
L’accentuation de la nécessité d’études sur les concepts centrés sur les procès d’apprentissage a été mise en acte par Sierpinska (1990) aussi: «La compréhension du concept sera (…) conçue comme l’acte d’acquisition de sa signification. Tel acte sera probablement un acte de généralisation et synthèse de significations par rapport à des éléments propres à la 'structure' du concept (la 'structure' du concept est le réseau de significations des énoncés qu’on a pris en considération). Ces significations particulières doivent être acquises par des actes de compréhension. (...) La méthodologie des actes de compréhension est concernée principalement par le processus de construction de la signification des concepts».
On se trouve là face à la nécessité d’éclairer la nature de la signification, en confrontant deux catégories différentes dans lesquelles les théories peuvent être partagées en théories réalistes (ou figuratives) et en théories pragmatiques (cette division a déjà paru en Kutschera, 1979).

Dans les théories réalistes la signification est «une relation conventionnelle entre des signes et des entités concrètes ou idéales existant indépendamment des signes linguistiques; par conséquent elles se fondent sur un réalisme conceptuel» (Godino, Batanero, 1994). Comme le déclarait déjà Kutschera (1979), «Selon cette conception la signification d’une expression linguistique ne dépend pas de son utilisation dans des situations concrètes, mais il advient que l’utilisation se fonde sur la signification, une division nette entre sémantique et pragmatique étant possible».
Dans la sémantique réaliste qui en dérive, on attribue des fonctions purement sémantiques aux expressions linguistiques: la signification d’un nom propre (comme ‘Bertrand Russell’) est l’objet que ce nom propre désigne (dans ce cas Bertrand Russell) ; les énoncés atomiques (comme ‘A est un fleuve’) expriment des faits décrivant la réalité (dans ce cas A est vraiment le nom d’un fleuve); les prédicats binaires (comme ‘A lit B’) désignent des attributs, ceux indiqués par la phrase qui les exprime (dans ce cas la personne A lit la chose B). Toute expression linguistique est donc un attribut de certaines entités: la relation nominale qui en dérive est la seule fonction sémantique des expressions.

On reconnaît là les positions de Frege, de Carnap, et les positions assumées par Wittgenstein dans le *Tractatus*.
Une conséquence de cette position est l'admission d'une observation scientifique (en même temps donc empirique et objective ou intersubjective) comme pourrait l'être, à un premier niveau, une logique des énoncés et des prédicats.
Du point de vue qui nous intéresse le plus, si on applique les suppositions ontologiques de la sémantique réaliste à la mathématique, on en tire nécessairement une vision platonique des objets mathématiques: dans ce domaine en effet, les notions, les structures, et cetera, ont une réelle existence qui ne dépend pas de l'être humain, parce qu'elles appartiennent à un domaine idéal; «connaître» du point de vue mathématique signifie découvrir des entités et leurs relations dans ce domaine. Et il est évident aussi que cette vision comporte un absolutisme de la connaissance mathématique en tant que système de vérités certaines, éternelles, non modifiables par l'expérience humaine, vu qu'elles la précèdent ou, au moins, elles lui sont étrangères et indépendantes. Des positions de ce genre, même si elles ont des nuances différentes, ont été adoptées par Frege, Russell, Cantor, Bernays, Gödel, …; et elles durent faire face à des critiques véhémentes [le conventionnalisme de Wittgenstein et le presque empirisme de Lakatos: voir Ernest (1991) et Speranza (1997)].

Dans les théories pragmatiques les expressions linguistiques ont des significations différentes selon le contexte où on les utilise, toute observation scientifique résulte donc impossible, parce que la seule analyse possible est "personnelle" ou subjective, de toute manière circonstanciée et non généralisable. On ne peut qu'examiner les différentes "utilisations": l'ensemble des "utilisations" détermine en effet la signification des objets.
On reconnaît là les positions de Wittgenstein dans les *Recherches Philosophiques*, quand il admet que la valeur significative d'un mot dépend de sa fonction dans un jeu linguistique, vu qu'à l'intérieur de celui-ci, le mot a un mode d'«emploi» et un but concret pour lequel il a été utilisé, justement. Le mot n'a donc pas de signification en lui-même, et cependant il peut être significatif.
Les objets mathématiques sont donc des symboles d'unités culturelles qui émergent d'un système d'utilisations caractérisant les pragmatiques humaines (ou, au moins, de groupes homogènes d'individus) et se modifiant sans cesse dans le temps, aussi suivant la nécessité. En fait, les objets mathématiques et la signification de ces objets dépendent des problèmes affrontés en mathématique et de leurs solutions.

	THEORIES "REALISTES"	**THEORIES "PRAGMATIQUES"**

signification	relation conventionnelle entre signes et entités concrètes ou idéales, indépendantes des signes linguistiques	dépend du conteste et de l'emploi
sémantique contre pragmatique	division nette	non-division ou division nuancée
objectivité ou intersubjectivité	totale	absente ou discutable
sémantique	les expressions linguistiques ont des fonctions purement sémantiques	les expressions linguistiques et les mots ont des significations "personnelles", ils sont significatifs dans des contextes convenables, mais ils n'ont pas de significations absolues, en soi
analyse	possible et licite : la logique, par exemple	une analyse "personnelle" ou subjective, seule, est possible, l'analyse ne doit pas être généralisable, ni absolue
conséquente vision épistémologique	conception platonique des objets mathématiques	conception problématique des objets mathématiques
connaître	découvrir	employer dans les contextes qui conviennent
connaissance	elle est un absolu	elle est relative à la circonstance et à l'emploi spécifique
exemples	Wittgenstein dans le *Tractatus*, Frege, Carnap [Russell, Cantor, Bernays, Gödel]	Wittgenstein dans les *Recherches Philosophiques* [Lakatos]

Dans la direction pragmatique, on comprend la définition que donne Chevallard (1991) d'objet mathématique: un objet mathématique est «un *émergent* d'un système de pratiques où sont manipulés des objets matériels qui se découpent dans différents *registres sémiotiques*: registre de l'oral, des mots ou expressions prononcés; registre du gestuel; domaine de la scription, de ce qui est écrit ou dessiné (graphismes, formalismes, calcul etc.), c'est-à-dire registre de l'écrit» étant donné que le "praxema" est un objet matériel lié à la praxis, l'objet est alors émergent d'un système de praxème. Dans cette acception, la notion de signification d'un objet a moins d'intérêt que celle de *rapport à l'objet*, relation avec l'objet. C'est sur cette idée que s'appuie la construction de la "théorie de la connaissance" de Chevallard, ou mieux de son "anthropologie cognitive", à l'intérieur de laquelle on peut situer la didactique.
Mais alors la personne (ou l'institution, comme ensemble de personnes) qui se met en relation avec l'objet est centrale, et non l'objet en lui-même: «Un objet existe dès lors qu'une personne X ou une institution I reconnaît cet objet comme un *existant* (pour elle). Plus précisément, on dira que l'objet O *existe pour X* (respectivement, *pour I*) s'il

existe un objet, que je note R(X,O) (respectivement $R_I(O)$), que j'appelle *rapport personnel de X à O* (respectivement *rapport institutionnel de I à O*)» (Chevallard, 1992, page. 86).
Cette position a marqué un tournant intéressant dans le contexte des théories encadrant toute recherche en Didactique de la Mathématique, encore plus si on souligne les recherches successives dans lesquelles plusieurs Auteurs ont éclairci et rendu opératoires les notions de Chevallard, en créant des instruments conceptuels adéquats et en les mettant en rapport à ceux que d'autres positions avaient fourni à ce propos.
Par exemple, une clarté exemplaire nous vient des études de Godino et Batanero (1994) parce qu'on définit là de manière rigoureuse tous les termes de la question: ce que signifie "pratique", ce que c'est qu'une "pratique personnelle", ce que c'est qu'une institution, ce qu'est une pratique institutionnelle, quelle est la différence entre des objets personnels et institutionnels et comme on définit chacun d'eux, ce que sont les significations d'un objet personnel et d'un objet institutionnel, quels liens existent entre signification et compréhension, … Un des mérites de ce travail, auquel je renvoie, consiste aussi bien dans son éclaircissement des termes, que dans la proposition d'exemples adéquats, et aussi enfin, dans la mise en évidence des similitudes et des différences entre les différentes théories de la signification.
Pour donner, d'un coup, une caractéristique de cette position dans la formulation de Chevallard-Godino-Batanero l'essentiel est l'activité des personnes face à la résolution de domaines de problèmes (phénoménologie), d'où émergent les objets (concepts, termes, énoncés, relations, théories etc.), relatifs aux contextes institutionnels et personnels. Ces contextes se définissent suivant les domaines de problèmes qu'on affronte et suivant les instruments sémiotiques disponibles.
Je reviendrai d'ici peu sur cette position, avec des exemples significatifs.
Encore une note. Pour expliquer l'emphase avec laquelle on traite des phénomènes typiques de la cognition humaine dans le travail de Godino et Batanero (1994), il vaut mieux mettre en évidence le fait que, tandis que dans le texte de Chevallard (1992) on juge le contexte institutionnel plus important par rapport au contexte personnel, Godino et Batanero tendent à privilégier la "sphère du mental", du sujet humain, pour essayer un équilibre entre les deux contextes et pour empêcher que la sphère du personnel soit occultée du domaine institutionnel.

7. Quelques précisions, avant de continuer.[9]

Dans ce paragraphe, il s'agira de quelques précisions terminologiques, de considérations complémentaires et de notes cautionnelles.

7.1. Parfois, en mathématique, on parle de "concepts" parfois d' "objets". Quelle est la différence? Elle pourrait être le résultat d'un caprice des mathématiciens, mais il s'agit par contre d'une différence bien fondée, puisqu'elle se base sur les trois points suivants:

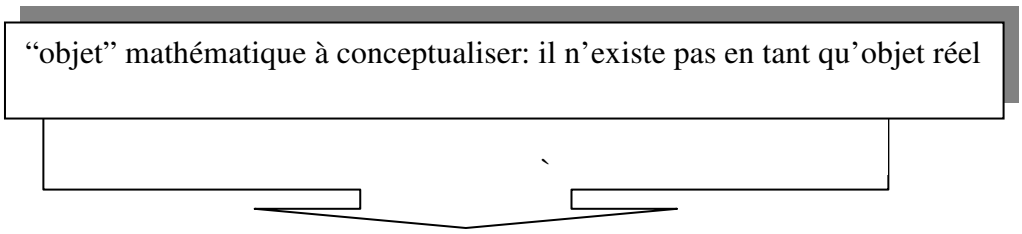
- Tout concept mathématique a des liens avec des "non-objets", du point de vue du réalisme naïf; la conceptualisation n'est donc pas fondée sur des significations s'appuyant sur la réalité concrète, et elle ne peut pas l'être, vu que, dans les mathématiques, des renvois ostensibles ne sont pas possibles;

[9] Pour la rédaction de ce paragraphe je me sers de D'Amore (*).

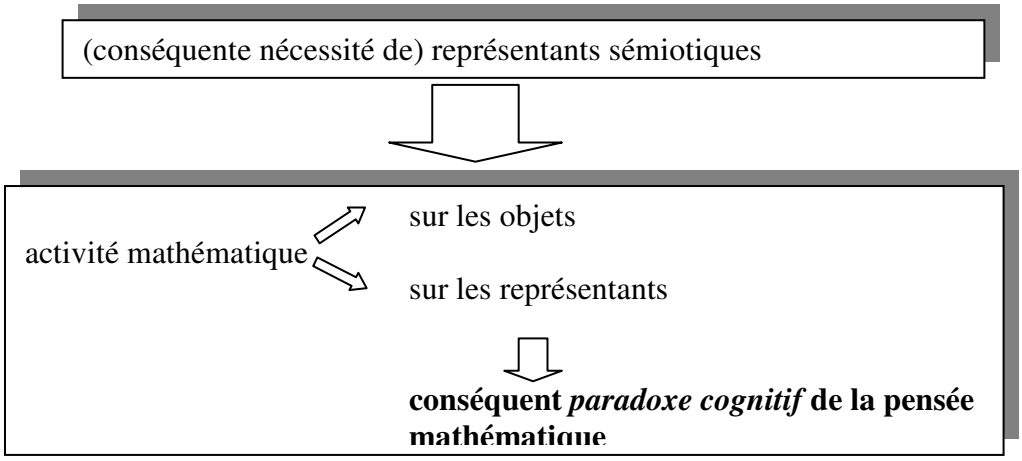
- Tout concept mathématique doit nécessairement se servir de représentations, vu qu'il n'y a pas d'"objets" à exhiber à leur place ou à leur évocation;[10] la conceptualisation doit donc nécessairement passer à travers des registres de représentation qui, pour de différentes raisons, surtout s'ils ont un caractère linguistique, ne peuvent pas être univoques: dans les mathématiques il n'y a pas d'accès sensible (vue, toucher, …) direct aux "objets" mais seulement à leurs représentations sémiotiques dans des différents registres linguistiques;
- On parle plus souvent en mathématique d'"objets mathématiques" que de concepts mathématiques car en mathématique on étudie *de préférence* des objets plus que des concepts: «La notion d'objet est une notion que l'on ne peut pas utiliser dès que l'on s'interroge sur la nature, sur les conditions de validité ou sur la valeur des connaissances» (Duval, 1998, p. 139).

7.2. Dans la voie ouverte par Duval, la notion de concept, préliminaire ou au moins prioritaire chez presque tous les Auteurs, devient secondaire, tandis que ce qui assume un caractère prioritaire est le couple (*signe*, *objet*), ce qui mène au *paradoxe cognitif de la pensée mathématique*, mis en évidence justement par Duval (1993)[11] et que je présenterai plus bas. En Duval (1996) on cite un passage de Vygotskij dans lequel on déclare dans la substance qu'il n'y a pas de concept sans signe: «Toutes les fonctions psychiques supérieures sont unies par une caractéristique commune supérieure, celle d'être des processus médiatisés, c'est à dire d'inclure dans leur structure, en tant que partie centrale et essentielle du processus dans son ensemble, l'emploi du signe comme moyen fondamental d'orientation et de maîtrise des processus psychiques (…) L'élément central (du processus de formation des concepts) est l'utilisation fonctionnelle du signe, ou du mot, comme moyen permettant à l'adolescent de soumettre à son pouvoir ses propres opérations psychiques, de maîtriser le cours des propres processus psychiques…» (Vygotskij, 1962; dans l'édition française, 1985, aux pages 150, 151, 157).
Il est clair que si on met l'accent sur le couple (*signe*, *objet*), toutes les représentations triadiques (de C.S. Peirce, de G. Frege, de C.K. Ogden et I.A. Richards) deviennent fausses. [12]

7.3. Je résume une partie de ce qu'on a déjà vu, en interprétant Duval (1993), dans le schéma suivant (soumis à l'acceptation de la part de l'Auteur) :



[10] Ici on entend "objet" dans le sens d' "objet réel" ou de "chose". Dans la *Métaphysique,* Aristote exprime bien ce que cela signifie quand il affirme que la chose, en tant que partie du réel, est ce qui présente les trois caractéristiques suivantes: tridimensionnalité, accessibilité sensorielle multiple (c'est à dire de plusieurs sens à la fois) indépendance des représentations sémiotiques et possibilité de séparation matérielle des autres parties de la réalité, des autres "choses".
[11] Mais les premiers travaux de Duval sur cet argument remontent au 1988 (Duval, 1988 a, b, c).
[12] Voir D'Amore (*) pour une tractation plus complète.



Voyons donc comment on peut définir ce *paradoxe cognitif de la pensée mathématique*, qui a des fortes répercussions cognitives (Duval, 1993, p. 38): «(…) d'une part, l'appréhension des objets mathématiques ne peut être qu'une appréhension conceptuelle et, d'autre part, c'est seulement par le moyen de représentations sémiotiques qu'une activité sur des objets mathématiques est possible. Ce paradoxe peut constituer un véritable cercle pour l'apprentissage. Comment des sujets en phase d'apprentissage pourraient-ils ne pas confondre les objets mathématiques avec leurs représentations sémiotiques s'ils ne peuvent avoir affaire qu'aux seules représentations sémiotiques? L'impossibilité d'un accès direct aux objets mathématiques, en dehors de toute représentation sémiotique, rend la confusion presque inévitable. Et, à l'inverse, comment peuvent-ils acquérir la maîtrise des traitements mathématiques nécessairement liés aux représentations sémiotiques s'ils n'ont pas déjà une appréhension conceptuelle des objets représentés? Ce paradoxe est d'autant plus fort que l'on identifie activité mathématique et activité conceptuelle et que l'on considère les représentations sémiotiques comme secondaires ou extrinsèques».

Dans ce paradoxe, que Raymond Duval a mis en évidence magistralement, il peut se cacher une cause potentielle de dévolutions manquées, comme j'essaie de démontrer dans D'Amore (*). Le problème principal (qu'on résume brièvement ici) réside dans le fait que l'enseignant, les représentants de la noosphère et l'étudiant lui-même peuvent penser en contact direct avec un "objet" mathématique. Mais, et parfois personne ne semble s'en rendre compte, l'étudiant n'a pas accès qu'à une représentation sémiotique particulière de cet "objet". L'étudiant n'a pas d'accès direct à l' "objet", et ne peut pas l'avoir, tandis que l'enseignant et les représentants de la noosphère croient que l'un lui donne automatiquement l'autre! Et l'étudiant est bloqué, pour ainsi dire, inhibé: il ne peut rien faire, excepté confondre l' "objet" et sa représentation sémiotique parce qu'il n'a pas les moyens de les distinguer. Son rapport personnel au savoir a comme "objet" quelque chose de nuancé, de confus. Et donc, face à une successive nécessité conceptuelle, se manifestant par exemple avec la nécessité de modifier la représentation sémiotique de ce même "objet", l'étudiant n'a ni des moyens critiques ni culturels ni cognitifs; l'enseignant et la noosphère n'en comprennent pas la raison et ils accusent l'étudiant, en le culpabilisant ainsi de quelque chose qu'il ne comprend pas, on l'accuse d'une incapacité indéfinie, non circonstanciée ni détaillée: personne ne sait *exactement* ce que, au juste, l'étudiant sait ou ne sait pas faire.

8. Le concept (ou objet) en mathématique, comme superposition ou comme accumulation de conceptions provisoires.

J'essaierai ici une convergence entre:

(a) une position exclusivement didactique-cognitive, à caractère fortement naïf, accueillant comme hypothèse de base le constructivisme de la connaissance la plus élémentaire, position celle-ci, se fondant sur les positions a-critiques les plus diffusées;

(b) une position anthropologique dans laquelle tout se réfère au rapport personnel envers l'objet mathématique. Tout cela dans le domaine d'une théorie de l'apprentissage mathématique qui n'est caractérisée par aucun type de préconception théorique ou ontologique.

Ce paragraphe **8.** n'est qu'une tentative initiale de médiation entre les positons les plus naïves, mais enracinées dans le sens commun, et ce qu'on a expliqué jusqu'à présent.
Dans le paragraphe **9.** je ferai quelques considérations critiques.

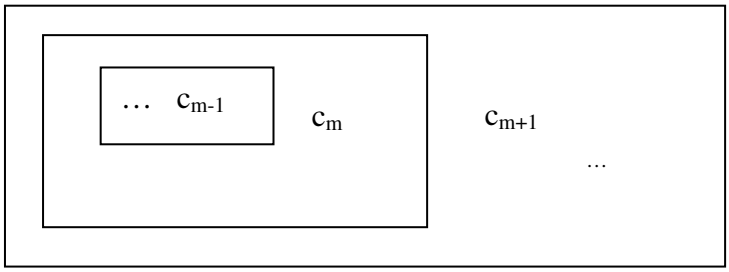
Soient c_i les conceptions provisoires, dans un processus linéaire et évolutif (au moins dans le temps) d'assimilation et mise à point, relativement à un objet mathématique C. Il est nécessaire de distinguer entre :

- c_i scientifiques de type institutionnel, qu'on appellera académiques (a), c'est à dire celles que la communauté scientifique (académique) accepte comme pertinentes, significatives et correctes; il s'agit de R(I(C)) partagés; on les appellera c_i de type a;
- c_i cognitives de type institutionnel, qu'on appellera scolaires (s), dues à l'action de l'école et à la noosphère, c'est à dire celles que quelqu'un construit ou a construit à l'école; il s'agit de R(X(C)) qui peuvent être aussi non partagées; on les appellera c_i de type s.

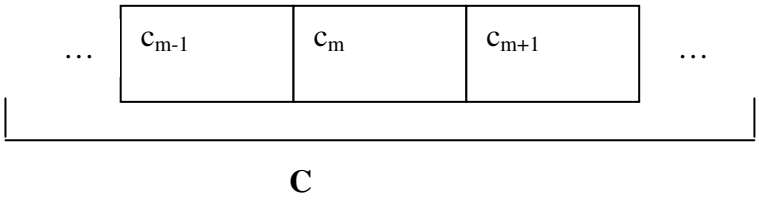
Les c_i de type a se différencient de celles de type s seulement parce que les deuxièmes sont plus en retard par rapport aux premières (c'est à dire: les index déposants ont une valeur numérique inférieure), ou bien parce qu'elles sont critiquement moins riches et plus fondées sur des sensations, sur le bon sens, et qu'elles sont liées à des applications, qui sont moins l'objet de révision et de réflexion critique, et plus liées à de différentes clauses du contrat didactique.
Le sens du processus didactique usité, dans sa forme la plus naïve, mais aussi la plus diffusée, est celui de porter à la fin les individus à la formation d'un concept C qui est le pic du processus évolutif, ***le*** concept, qu'on suppose existent, de type a (ou, au moins, le plus proche possible de celui-ci).
Toutefois, comme toute conception est dans une évolution historico-critique *perpétuelle*, il est impossible d'évaluer le franchissement de cette limite, surtout parce qu'on pourra parler à la rigueur d'«objet acquis par la communauté scientifique jusqu'à présent» sans se mettre dans la situation de prévoir le futur de cet objet. L' "objet" est donc dans cette conception quelque chose d'idéal, d'abstrait, l'apex d'un processus toujours en acte, dont on n'a qu'une idée limitée à l'évolution historique et à l'état actuel.

La formation de C à partir de la succession c_i peut se penser selon deux modalités:

superposition: toute conception provisoire c_{m+1} ajoute et intègre la précédente c_m, c'est à dire la comprend et y ajoute quelque chose, en se superposant à elle:



accumulation: toute conception provisoire c_{m+1} ajoute quelque chose (en plus) à la c_m précédente :



En réalité, on a souvent (toujours?) des mélanges des deux modalités.

EXEMPLE 1: le pseudo-objet *droite*.
Je vais tracer, de manière approximative, une succession de conceptions provisoires relativement à un objet supposé *droite*. Dans sa longue histoire évolutive, on pourrait penser à une succession comme celle-ci:
c_1: droite primitive: segment (ses caractéristiques sont: le fait d'être droit et subtil, et son indépendance nominale de la longueur); celle-ci est l'idée naïve d'un enfant
c_2: droite euclidienne: idéalisation de c_1 [ses caractéristiques sont: le fait d'avoir une seule dimension (ce qui est l'idéalisation du "subtil") et le fait d'être allongeable (ce qui est l'idéalisation de l'indépendance du nom de la longueur)]; la relation entre points et droite n'est pas très claire; au sens pitagorique, le modèle est celui des perles (monades) enfilées dans le collier (droite); mais chez Euclide cette position naïve a déjà disparu
c_3: droite dense: idéalisation de c_2: entre deux points il y en a *toujours* un autre: le modèle pitagorique est dépassé
c_4: droite continue (déjà aux temps de Newton et Leibniz): sur la droite il existe de sièges convenables aux points correspondants à des valeurs irrationnelles ($\sqrt{2}$) et transcendantes (π) même si leur statut épistémologique n'est pas encore bien clair
c_5: droite d'Hilbert (définie implicitement par les axiomes): il n'y a plus de tentative de définition explicite pour essayer d'égaler l'image de droite à un modèle pre-figé qu'on veut rejoindre, mais on a une idéalisation de cette conception à l'intérieur d'un système théorique
c_6: droite comme nom commun utilisé indifféremment dans le domaine euclidien et non euclidien: on ne parle plus de dimension, du fait d'être droite, ou d'être infinie (mais toujours illimitée)

c_7: dénomination de droite donnée à des entités différentes de modèles différents (droite finie ou infinie, discrète, dense ou continue, limitée ou illimitée…)
c_8: objet n-2 dimensionnel dans une variété n-dimensionnelle
…
Comment peut-on établir si d'autres c_i suivront, et lesquels? Le pseudo-objet C "droite" est une superposition ou une accumulation des conceptions précédentes ; il semble que de c_1 à c_5 on puisse parler surtout de passages de type "superposition", tandis que de c_6 à c_8 il semble s'agir surtout de passages de type "accumulation".

EXEMPLE 2: le pseudo-objet *addition*.
Je tracerai, de manière approximative, une succession de conceptions provisoires relatives à l'objet supposé *addition*. Dans sa longue histoire évolutive, on pourrait penser à une succession comme celle-ci:
c_1: addition pytagorique (ordinal et cardinal confondus) en N-{0}; l'addition comme cardinal de recueils disjoints; il s'agit là de la conception naïve d'un petit enfant (c'est sur ce point que Vergnaud explique quelques-uns de ses *théorèmes en acte*)
c_2: addition en Q_a; je pense aux additions entre fractions, dans l'histoire sumérienne, égyptienne, et puis grecque
c_3: addition en N et en Q_a (0 inclus); au cours du Moyen - Age, dans le monde indien-arabe il devient nécessaire de référer l'addition aux cas où un des termes de la somme est zéro
c_4: addition en Z
c_5: addition en Q
c_6: addition en R
c_7: addition dans le domaine complexe C
c_8: addition dans les quaternions et, plus en général, dans les systèmes complexes n-valables; je pense aux recherches de Hamilton, Grassmann, Frobenius et Hankel; certaines propriétés formelles de l'addition typiques des nombres N, Z, Q, R et C se perdent, et toutefois l'opération qui étend et généralise l'addition est appelée toujours de la même manière
c_9: addition généralisée dans les réseaux et dans les algèbres de Boole
c_{10}: addition généralisée dans les structures $<A,+,\times, 0, 1,...>$
…
Comment peut-on établir si d'autres c_i suivront, et lesquels? Le pseudo-objet C "addition" est superposition ou accumulation des conceptions précédentes; il semble que de c_1 à c_7 on puisse parler de passages surtout de type "superposition", tandis que de c_8 à c_{10} il semble s'agir surtout de passages de type "accumulation".

9. Critiques à la position précédente.

La vision tracée dans le paragraphe 8., je le répète, n'est qu'un schéma résumant les positions les plus naïves, mais aussi les plus populaires à cet égard. Voyons maintenant quelques notes fortement critiques.

En tout cas, une réflexion mûre montre que l'activité des particuliers face aux problématiques créant des c_i est essentielle; dans ce sens, un supposé ordre hiérarchique perd de sens, à mon avis; par conséquent, une plus grande… noblesse conceptuelle supposée pour les c_i de type a, par rapport à celles de type s, disparaît.[13] Les "objets" se constituent de l'activité des personnes face à la solution de problèmes, de façon indépendante de tout contexte institutionnel aussi ; même, dans un certain sens, on privilégie les significations personnelles par rapport aux significations institutionnelles.
De ce point de vue, il semble insensé de parler, par exemple, de l' "objet droite" (ou de l' "idée de droite", ou du "concept de droite") comme on le fait normalement: évidemment, on est plutôt forcé à parler de "pluralité d'objets"; il ne s'agit donc pas tellement d'une "montée" vers un apex, mais d'une pluralité d' "objets" *différents* qui, tout banalement, ont leur nom propre en commun, mais ce dernier n'identifie pas une seule entité, comme dans la vision qu'on a appelé "théorie réaliste", et sa signification dépend d'un contexte d'utilisation, comme dans la vision qu'on a appelé "théorie pragmatique".
Tout c_i est donc, dans cette vision, un "objet droite" (probablement, une analyse plus attentive pourrait montrer qu'à son tour, il est lui-même une pluralité…).
Tout c_i est le résultat d'un rapport personnel à l'objet, mais, comme on a vu chez Chevallard et Godino-Batanero, *l'objet est ce rapport personnel lui-même*, et non pas un supposé "objet en soi".
D'autre part, Wittgenstein lui-même insiste sur le fait qu'on ne doit pas parler d'idées mathématiques au sens où, par contre on le fait normalement, c'est à dire comme le résultat d'un processus d'abstraction, vu que cela est à l'origine de graves confusions philosophiques, psychologiques [et didactiques, comme me le suggère Juan Godino (dans une lettre privée)]. Wittgenstein dans les *Recherches Philosophiques* insiste sur le concept de diversité d'utilisation, ou d'utilisations différentes du "terme" ("droite", "addition", dans mes exemples plus haut).
Chez Godino-Batanero, on propose d'associer l'entité théorique "signification de Ox" (en réalité une classe de significations) à l'objet mathématique Ox: on passe ainsi de l'accentuation du "concept", de ses définitions et de ses règles d'utilisation, à une nouvelle accentuation des domaines de problèmes, des pratiques des techniques qui constituent la base de ces entités intensionnelles.
Les deux cas que j'ai fourni, "droite" et "addition", constituent donc justement un exemple de la relativité des objets Ox qui parfois sont des entités mentales (donc personnelles), et parfois des entités abstraites (institutionnelles). Je n'ai pas trop insisté sur l'éclaircissement et la définition de cette distinction, parce que je la considère occasionnelle et réciproque…

Je crois pouvoir déclarer que l'identification de problèmes spécifiques, d'activités pratiques, d'activités techniques etc. qui, ont porté même d'un point de vue historique à la création de toute "conception", tout "objet", toute "règle", est d'une importance fondamentale dans les études théoriques d'Education Mathématique, dans la recherche dans ce domaine, et dans la pratique didactique. Il est aussi extrêmement important

[13] Lorsqu'on accepterait ce point, il pourrait avoir des fortes repercussions dans la pratique didactique; et, à mon avis, il devrait être étudié non seulement du point de vue théorique, comme on a fait jusqu'à présent, dans le domaine de l'Education Mathématique, pour ainsi dire, mais aussi du point de vue de l'action pratique, dans le domaine de ce qu'on appelle Didactique de la Mathématique (Godino, Batanero, 1998).

d'établir la dépendance réelle ou présumée de cette recherche des contextes institutionnels (il pourrait y avoir une raison historique, ou éducative, ou instrumentale etc., ou toutes ces raisons ensemble).

Bibliographie.

Anderson R.C., Spiro R.J. & Montague W.E. (1977), *Schooling and the acquisition of knowledge*. Hillsdale N.J., Lea.

Astolfi J.-P. & Develay M. (1989), *La transposition didactique en mathématique, en physique et biologie*. Irem de Lyon, Lirdis.

Brousseau G. (1981), Address of members of the G.R.D.M. (France) at the ICME IV. August 1980. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 2, 1, 130-135.

Brousseau G. (1986), Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7, 2, 33-115.

Bruner J.S. (1964), The course of cognitive growth. *American Psychologist*, 19, 1-15.

Chevallard Y. (1991), Dimension instrumentale, dimension sémiotique de l'activité mathématique. *Séminaire de Didactique des Mathématiques et de l'Informatique de Grenoble*. LSD2-IMAG, Université Joseph Fourier, Grenoble.

Chevallard Y. (1992), Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. Recherches en Didactique de la Mathématique, 12, 1, 73-112.

Clary M. & Genin C. (1991), *Enseigner l'histoire à l'école* ? Paris, Hachette/Istra.

Cornu L. & Vergnioux A. (1992), *La didactique en questions*. Paris, Hachette.

D'Amore B. (1999). *Elementi di Didattica della Matematica*. Bologna, Pitagora.

D'Amore B. (*), Conceptualisation, registres de représentations sémiotiques et noétique : interactions constructivistes dans l'apprentissage des concepts mathématiques et hypothèse sur quelques facteurs inhibant la dévolution.

Dewey J. (1933), *How we think*. Edit. Italienne: 1961. Florence, La Nuova Italia

Dummett A.A.E. (1991), ¿ Qué es una teoria del significado ? In: Valdés L.M. (ed.), *La búsqueda del significado*. Madrid, Tecnos. [Il faut remarquer que la version originale de ce travail remonte au 1975].

Duval R. (1988a). Ecarts sémantiques et cohérence mathématique. *Annales de Didactique et de Sciences cognitives*. 1, 7-25.

Duval R. (1988b). Approche cognitive des problèmes de géométrie en termes de congruence. *Annales de Didactique et de Sciences cognitives*. 1, 57-74.

Duval R. (1988c). Graphiques et équations. *Annales de Didactique et de Sciences cognitives*. 1, 235-253.

Duval R. (1993), Registres de représentations sémiotiques et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Science Cognitives*, ULP, IREM Strasbourg. 5, 37-65.

Duval R. (1996). Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques ? Texte du cours tenu à la VIII Ecole estivale de Didactique de la Mathématique, 1995 ; actes de 1996.

Duval R. (1998), Signe et objet (I). Trois grandes étapes dans la problématique des rapports entre représentations et objet. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*. 6, 139-163.

Ernest P. (1991), *The philosophy of mathematics education*. London, Falmer Press.
Gagné R. (1965-1985), *The conditions of learning*. New York, Holt, Rinehart & Winston Inc. 1965. L'œuvre subit un changement complet de plan quand il fut publié par Cbs College Publishing, 1985.
Gal'perin P.Ja. (1969), Contributo allo studio dello sviluppo intellettuale del bambino, dans: Veggetti M.S. (ed.) (1977), 43-63. [L'article de Gal'perin fut publié dans une revue soviétique en 1969].
Giordan A. & De Vecchi G. (1987), *Les origines du savoir*. Neuchâtel, Delachaux et Niestlé.
Godino J. & Batanero C. (1994), Significado institucional y personal de los objectos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14, 3, 325-355. [Trad. it. Bologna, Pitagora 1999, comment livre dans la série: Bologna-Querétaro].
Godino J. & Batanero C. (1998), The dialectic relationships among theory, development and practice in Mathematics Education: a meta-analysis of three investigations. In: Malara N.A. (Ed.) (1998), *An international view on didactics of mathematics as a scientific discipline. Proceedings of WG 25 ICME 8, Sevilla July 1996*. Modena, CNR-MURST-University of Modena.13-22.
Klausmeier H.J. (1979), *Un modello per l'apprendimento dei concetti*, in: Pontecorvo C. & Guidoni P. (ed.) (1979).
Klausmeier H.J. (1980), *Learning and teaching concepts*. New York, Academic Press.
Klausmeier H.J., Gathala E.S. & Frayer d.A. (1974), *Conceptual learning and development*. New York and London, Academic Press.
Kutschera F. von (1979), *Filosofia del lenguaje*. Madrid, Gredos.
Luria A.R. (1982), *Language and Cognition*, (ed. by J. V. Wertsch). Washington, V. H. Winston.
Meirieu P. (1987), *Apprendre... oui, mais comment* ? Paris, ESF.
Nelson K. (1974), Concept, word and sentence: interrelations in acquisition and development. *Psychological Review*, 81, 4**.**
Nelson K. (1977), Cognitive development and the acquisition of concepts, in: Anderson R.S., Spiro r.J. & Montague W.E. (eds.) (1977).
Piaget J., Inhelder B. & Szeminska A. (1948), *La géométrie spontanée de l'enfant*, Paris, PUF.
Pontecorvo C. (Ed.) (1983), *Conoscenza scientifica e insegnamento*. Torino, Loescher.
Pontecorvo C. & Guidoni P. (1979), *Scienza e scuola di base*. Rome, Istituto della Enciclopedia Treccani.
Sierpinska A. (1990), Some remarks on understanding in mathematics, *For the Learning of Mathematics*, 10, 3, 24-36.
Speranza F. (1997), *Scritti di Epistemologia della Matematica*. Bologne, Pitagora.
Tornatore L. (1974), *Educazione e conoscenza*. Turin, Loescher.
Vergnaud G. (1990), La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19, 133-169.
Vygotskij L.S. (1960), *The development of higher forms of attention in* childhood. In: Werscht J.V. (Ed.), *The concept of activity in Soviet psychology*. Armonk NY, Sharpe 1981, 189-240. La I édition russe remonte au 1960, Moscou, Izd. Akad. Pedag.
Vygotskij L.S. (1962), *Thought and language*. Cambridge, MIT Press. Il s'agit d'un résumé tiré de l'édition originale en langue russe, un recueil d'articles publiés à

Moscou en 1956. Ed. française: 1985, Paris, éd. Sociale. Ed. italienne: 1990, Bari Laterza.

J'exprime mes remerciements les plus sincères à mon ami et collègue Juan Godino, de l'Université de Grenade, qui m'a aidé en me conseillant quelques textes et en acceptant de lire de manière critique quelques versions précédentes de ce travail.

D'Amore B. (2001). Conceptualisation, registres de représentations sémiotiques et noétique: interactions constructivistes dans l'apprentissage des concepts mathématiques et hypothèse sur quelques facteurs inhibant la dévolution. *Scientia Paedagogica Experimentalis*. Gent, Belgio. XXXVIII, 2, 143-168.

Conceptualisation, registres de représentations sémiotiques et noétique:
interactions constructivistes dans l'apprentissage des concepts mathématiques et hypothèse sur quelques facteurs inhibant la dévolution [14]

Bruno D'Amore

N.R.D.
Nucleo di Ricerca in
Didattica della Matematica
Dipartimento di Matematica
Università di Bologna

Facoltà di Scienze
della Formazione
Libera Università di Bolzano
Freie Universität Bozen
Bressanone – Brixen (Bz)

Summary. Ce travail s'inspire aux études dont Raymond Duval (1988a,b,c, 1993) a été indiscutablement le pionnier, et il se situe dans le filon des recherches du NRD de Bologne, ces dernières visant à retracer et à mettre en évidence les différentes hypothèses à la base de la dévolution manquée (Perrin Glorian, 1994), et donc à la base de la scolarisation du savoir mathématique (D´Amore, 1999a).

Summary. This study derives inspiration from the original discussions of Raymond Duval (1988a,b,c 1993), and forms part of the research being done by the NRD of Bologna University. It attempts to draw out and to substantiate the diverse hypotheses that lie at the foundations of unsuccessful devolution (Perrin Glorian, 1994), and therefore also at the foundations of the schooling of mathematical awareness (D'Amore, 1999a).

1. Concept et conceptualisation

Qu'est-ce qu'un "concept"?
Dans (D'Amore, 1999b, pages 193-208) j'ai tenté de fournir les idées fondamentales pour essayer de répondre à cette question apparemment naïve. Cependant ce qu'on constate avec une certitude absolue n'est que la complexité immense de la "définition" de ce mot… Et cela pour plusieurs raisons.

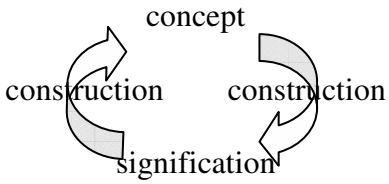
[14] Travail exécuté dans le cadre du Programme de recherche locale (ex 60%): *Recherches sur le fonctionnement du système élève-enseignant-savoir: motivations de la dévolution manquée*.

Une des difficultés réside dans la multiplicité des facteurs et des causes participant à l'idée de "concept". Pour expliquer cela brièvement, et donc de façon incomplète, il n'est pas correct d'affirmer que le "concept de droite" (pourvu qu'il existe), est celui que conçoivent les savants qui ont dédié leurs études et leurs réflexions à cet argument; il semble plus correct d'affirmer, par contre, qu'il y a une forte composante "anthropologique" pour ainsi dire, mettant en évidence l'importance des relations entre $R_I(X,O)$ [rapport institutionnel à tel objet du savoir] et $R(X,O)$ [rapport personnel à tel objet du savoir] (je suis en train d'utiliser des symboles et des termes utilisés par Chevallard, 1992). Dans ce cas, naturellement, l'expression "objet du savoir" sous-entend l'expression "objet *mathématique* du savoir", ce que Chevallard (1991, page 110) définit:

"[…] Un objet (par exemple, un objet mathématique) est un *émergent* d'un système de pratiques où sont manipulés des objets matériels qui se découpent dans différents *registres sémiotiques*: registre de l'oral, des mots ou expressions prononcés; registre du gestuel; domaine de la scription, de ce qui est écrit ou dessiné (graphismes, formalismes, calcul, etc.), c'est-à-dire registre de l'écrit".

À la "construction" d'un "concept" participerait donc aussi bien le côté institutionnel (le Savoir) que le côté personnel (de tous ceux qui peuvent accéder à ce Savoir, donc non seulement les savants). Maints Auteurs se trouvent d'accord sur cette position; je me borne à suggérer ici le travail de Godino et Batanero (1994) parce qu'il s'agit d'un article d'une importance extraordinaire dans le débat dans lequel j'essaye de m'insérer, vu qu'il parle justement des rapports entre les significations institutionnelles et personnelles des objets mathématiques.

Mais alors, distinguer le "concept" de sa construction n'est pas facile, et peut être, ni possible ni souhaitable: un concept est, pour ainsi dire, continuellement en train de se construire, de se constituer, et dans cette construction même réside la partie la plus problématique et donc la plus riche de sa signification:



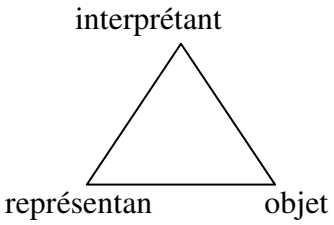
On pourrait appeler cette construction: *conceptualisation,* comme certains auteurs le font; on pourrait aussi se demander de quoi il s'agit et comment cela se produit. En essayant d'éclairer cet argument, plusieurs savants reconnus ont proposé des hypothèses et des théories desquelles je ne donnerai pas de détails, en renvoyant à D'Amore (1999b) pour une idée d'ensemble; il suffira de rappeler les contributions (souvent ouvertement opposées) de Vygotskij, de Piaget, de Gal'perin, de Bruner, de Gagné, … juste pour se limiter aux plus célèbres.

S'engager dans cette aventure porte à se rendre compte d'une chose au moins: la deuxième question (*Qu'est-ce qu'est* ou *Comment se déroule la conceptualisation*?) reste fondamentalement un mystère…

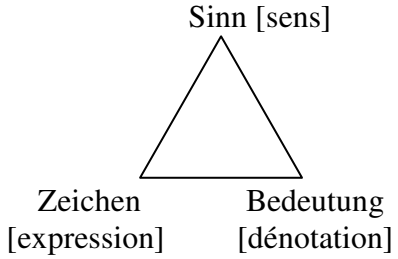
Un pas éclaircissant très profond a été tenté par Vergnaud (1990) qui unifia le concept à sa composante constitutive; selon Vergnaud, le point décisif dans la conceptualisation (et dans la didactique, mais il s'agit là d'un discours plus spécifique, que je continuerai d'ici peu en le développant) est le passage des *concepts-comme-instrument* aux

concepts-comme-objet, et une opération linguistique essentielle dans cette transformation est la *nominalisation.* Par le terme "conceptualisation" il désigne justement cette appropriation consciente, en proposant la définition suivante: un concept C est la triade (S, I, *S*) où S est le référent, I le signifié et *S* le signifiant.
L'idée de Vergnaud pourrait être considérée comme une des conclusions possibles d'un courent "classique", celui qui se réfère aux trois "triangles" (bibliographie spécifique in: D'Amore, 1999b):

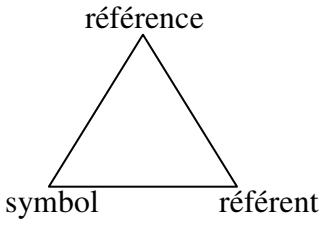
le triangle de Charles Sanders Peirce [1839-1914], objet de publication en 1883:



le triangle de Gottlob Frege [1848-1925], objet de publication en 1892:



le triangle de C. K. Ogden et de I. A. Richards, qui aurait dû être une synthèse des deux autres, objet de publication en 1923:



En fait *s'approprier* d'un concept (quoi que cela signifie) implique toujours beaucoup plus que *le nommer* (la question remonte au moins au Moyen Age)… (D'Amore, 1999b).
Or, loin de moi l'idée d'essayer une théorie générale sur ce genre de choses; mais, sans aucun doute, le cas de la mathématique est particulier dans ce domaine, et cela pour trois raisons au moins:

- tout concept mathématique se réfère à des "non-objets"; la conceptualisation n'est donc pas fondée sur des significations s'appuyant sur la réalité concrète et ne peut pas l'être; en d'autres mots, les références ostensibles ne sont pas possibles dans les mathématiques

- tout concept mathématique doit être supporté par des représentations, vu l'absence d'objets à exhiber à sa place ou à mesure de l'évoquer;[15] la conceptualisation doit donc nécessairement passer par des registres de représentation qui, pour différentes raisons, ne peuvent pas être univoques, surtout s'ils ont un caractère linguistique
- en mathématique on parle plus souvent d' "objets mathématiques" que de concepts mathématiques, car la mathématique étudie de préférence des objets plutôt que des concepts; "La notion d'objet est une notion que l'on ne peut pas utiliser dès que l'on s'interroge sur la nature, sur les conditions de validité ou sur la valeur des connaissances. Ainsi parle-t-on plus souvent d'objets mathématiques que de concepts mathématiques, car ce sont des objets que l'on étudie en mathématiques et non pas des concepts" (Duval, 1998).

Il est absolument nécessaire de souligner que le terme "concept" comme on l'utilisera dans la suite ne renvoie pas du tout aux mêmes occurrences et à la même utilisation qu'en font Piaget, Kant, Vergnaud, Vygotskij, Chevallard, que j'ai cités. Dans le chemin frayé par Duval la notion de concept, préliminaire, ou prioritaire dans presque tous les Auteurs, devient secondaire, tandis que ce qui acquiert un caractère prioritaire est le couple (*signe*, *objet*), comme je le mettrai en évidence encore mieux dans le paragraphe suivant, au moment où je me référerai au *paradoxe cognitif de la pensée mathématique* qui a été mis en évidence justement par Duval (1993, page 38). Dans Duval (1996) on cite un passage de Vygotskij dans lequel on déclare essentiellement qu'il n'y a pas de concept sans signe :
"Toutes les fonctions psychiques supérieures sont unies par une caractéristique commune supérieure, celle d'être des processus médiatisés, c'est à dire d'inclure dans leur structure, en tant que partie centrale et essentielle du processus dans son ensemble, l'emploi du signe comme moyen fondamental d'orientation et de maîtrise des processus psychiques (…). L'élément central (du processus de formation des concepts) est l'utilisation du signe, ou du mot, comme moyen permettant à l'adolescent de soumettre à son pouvoir ses propres opérations psychiques, de maîtriser le cours des propres processus psychiques. (…)" (Vygotskij, 1962; dans l'ed. française, 1985, aux pages 150, 151, 157).

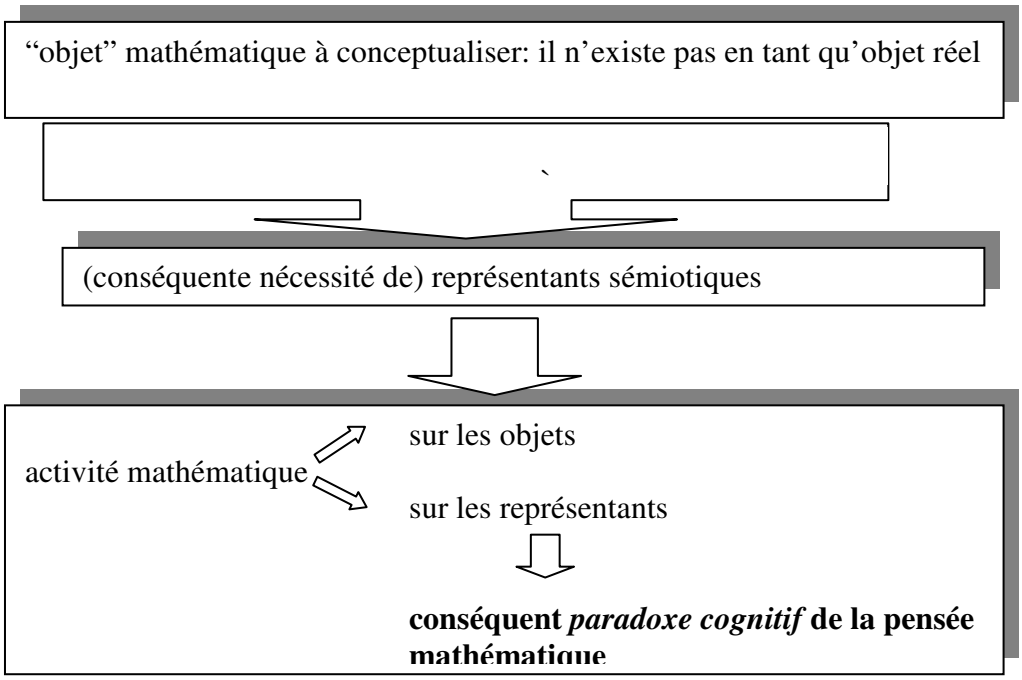
À propos de cette citation de Vygotskij ou bien pour profiter de cette citation, il nous faut une considération rapide à propos du mot "signe", que des entretiens et des conversations avec Raymond Duval m'ont suggéré. En effet Duval affirme que chez certains chercheurs en didactique, le *signe* est réduit aux *symboles conventionnels* qui connotent directement e isolément des objets.
Pour ce qui concerne De Saussure (1916) (que Vygotskij connaissait bien à cause de sa formation de linguiste), il n'y a pas de signe en dehors d'un "système de signes". Par exemple, les paroles n'ont pas de signification qu'à l'intérieur du système d'une langue (d'où les problèmes concernant la traduction). Quand dans Duval (et donc ici) on parle de "registre de représentation sémiotique" on se réfère à un système de signes qui permet d'accomplir les fonctions de communication, traitement et objectivation, et on

[15] Ici on entend "objet" dans le sens d' "objet réel" ou de "chose". Dans la *Métaphysique,* Aristote exprime bien ce que cela signifie quand il affirme que la chose, en tant que partie du réel, est ce qui présente les trois caractéristiques suivantes: tridimensionnalité, accessibilité sensorielle multiple (c'est à dire de plusieurs sens à la fois) indépendance des représentations sémiotiques et possibilité de séparation matérielle des autres parties de la réalité, des autres "choses".

ne se réfère pas aux notations conventionnelles qui ne forment aucun système. Par exemple, la numération binaire, ou la numération décimale forment un système, mais les lettres ou les symboles qu'on utilise pour indiquer des opérations algébriques n'en forment aucun. Il faudrait donc sans doute traduire Vygotskij en mettant la locution "système de signes" au lieu du mot "signe".
Il faut remarquer aussi que de ce point de vue et contrairement à l'opinion commune, un système sémiotique n'est pas un instrument: il est constitutif du fonctionnement même de la pensée et de la connaissance. Seulement un code utilisé pour recodifier un message déjà exprimé peut être un instrument.

2. Le cas de la mathématique

Le schéma suivant me semble beaucoup plus efficace qu'un long discours:



Voyons qu'est-ce que ce *paradoxe* (Duval, 1993, page 38):
"(…) d'une part, l'appréhension des objets mathématiques ne peut être qu'une appréhension conceptuelle et, d'autre part, c'est seulement par le moyen de représentations sémiotiques qu'une activité sur des objets mathématiques est possible. Ce paradoxe peut constituer un véritable cercle pour l'apprentissage. Comment des sujets en phase d'apprentissage pourraient-ils ne pas confondre les objets mathématiques avec leurs représentations sémiotiques s'ils ne peuvent avoir affaire qu'aux seules représentations sémiotiques? L'impossibilité d'un accès direct aux objets mathématiques, en dehors de toute représentation sémiotique, rend la confusion presqu'inévitable. Et, à l'inverse, comment peuvent-ils acquérir la maîtrise des traitements mathématiques nécessairement liés aux représentations sémiotiques, s'ils n'ont pas déjà une appréhension conceptuelle des objets représentés? Ce paradoxe est d'autant plus fort que l'on identifie activité mathématique et activité conceptuelle et que l'on considère les représentations sémiotiques comme secondaires ou extrinsèques".

Dans ce paradoxe, que Raymond Duval met bien en évidence ici, peut-il se cacher une cause potentielle de dévolutions manquées?
À l'avis de l'enseignant, à l'avis de la noosphère et à son propre avis, l'étudiant est en train d'entrer en contacte avec un "objet" mathématique, mais en effet, et parfois personne ne semble s'en rendre compte, l'étudiant n'est en train d'entrer en contacte qu'avec une représentation sémiotique particulière de cet "objet". L'étudiant n'a pas d'accès direct à l' "objet", et ne peut pas l'avoir tandis que l'enseignant et la noosphère confondent les deux choses ; l'étudiant est bloqué, pour ainsi dire, inhibé: il ne peut rien faire, excepté confondre l' "objet" et sa représentation sémiotique parce qu'il ne s'en rend pas compte, il ne le sait pas. Et par conséquent, face à une successive nécessité conceptuelle qui se manifesterait par exemple avec la nécessité de modifier la représentation sémiotique de ce même objet, l'étudiant n'aurait pas de moyens critiques, ni culturels ni cognitifs; l'enseignant et la noosphère n'en comprenant pas la raison ils accusent l'étudiant, en le culpabilisant pour quelque chose qu'il ne comprend pas.
En réalité dans cette phase paradoxale personne ne comprend plus ce qui est en train de se passer, dans la mesure où chacun des acteurs de cette aventure a une perception différente du problème.
D'autre part, l'analyse des représentations est un événement nouveau dans l'étude des procès cognitifs. En revanche, elle a été utilisée davantage sur le plan strictement philosophique. Duval (1988) écrit :
"L'analyse des répresentations a commencé dès que l'on s'est interrogé sur les conditions de validité de la connaissance et que l'on a découverte que toute connaissance est inséparable d'une activité de représentation. La troisième des *Meditationes Metaphysicae* de Descartes est le premier texte où la problématique d'une telle analyse se trouve explicitement développée. Elle se trouve entière centrée sur le contenu des représentations".

Mais j'affronterai cette question de manière beaucoup plus détaillée et spécifique. Pour ce faire, je devrai affronter la longue explication d'un adjectif présent dans le titre.

3. Apprentissage, constructivisme, symbolisation

Pourquoi ai-je mis l'adjectif "constructivistes" dans le titre?
Pour répondre à cette question je dois partir de loin, en m'inspirant à Moreno Armella (1999).
Dans sa *Critique de la raison pure*, Kant postule que la connaissance est le résultat d'un contacte entre un sujet apprenant et un objet de connaissance. Il se sert d'une comparaison: comme un liquide adopte la forme du récipient qui le contient, de même les impressions sensorielles adoptent les formes que les structures cognitives leurs imposent. Mais pour que cela advienne, et il s'agit là de la bien célèbre hypothèse forte de Kant, il nécessite de formes innées de sensibilité, tels espace, temps, causalité, permanence de l'objet, permanence et employabilité d'expériences précédentes etc.
La connaissance n'est donc plus banale représentation de la réalité extérieure; elle est par contre le résultat de l'interaction entre le sujet apprenant (ses structures cognitives) et ses "expériences sensorielles". En outre le sujet apprenant abandonne sa passivité typique (qui remonte à Descartes ou à Locke) et construit, structure ses expériences, en participant activement au processus d'apprentissage dans une vraie et propre

construction. Il s'agit d'une transformation: un objet de connaissance, entrant en contacte avec un sujet apprenant, est transformé, reconstruit, grâce aux instruments de connaissance que possède ce dernier.

Pour bien comprendre la position kantienne, je me servirai de Duval (1998) ; il est essentiel de comprendre que de Descartes à Kant la problématique commune est celle des rapports entre représentation et objet: on passe du contenu des représentations du sujet aux objets de connaissance (scientifique). Si on veut analyser les représentations dans leur rapport avec les objets représentés on a des rapports dans les termes de *causalité*: Descartes suppose une correspondance entre le contenu de la représentation et l'objet représenté; Kant passe, comme je voulais le mettre en évidence, à l'analyse de recherches sur l'organisation interne du sujet, pour passer du contenu à l'objet. Quelle est enfin la nature des représentations?[16] Les processus de pensée sont uniquement mentaux, aussi bien chez Descartes que chez Kant, ce qui implique un lien étroit entre les représentations du sujet et les objets.
Tout cela constitue, selon Duval (1998), la "première étape"; cette position sera dépassée par une "deuxième étape" de Bolzano aux thèses d'Hilbert en 1904 et puis par une "troisième étape" qui des thèses d'Hilbert en 1922 arrive à Turing et Von Neumann. Mais revenons à Kant.
D'où viennent justement ces instruments de connaissance nécessaires à transformer les expériences du sujet? L'épistémologie kantienne de l'apprentissage, pour utiliser une terminologie moderne, se réfère à un sujet apprenant adulte, déjà doté donc d'un langage développé, aux capacités d'abstraction et de généralisation. Il est licite de se poser la question suivante: comment tout cela changera-t-il si on se réfère à l'apprentissage dans le milieu scolaire, par des jeunes sujets apprenants (enfants, adolescents ou jeunes) faisant leurs premières armes, utilisant des langages encore en train de s'élaborer?
Il n'est pas tout à fait absurde de penser que l'épistémologie constructiviste a pris naissance justement du besoin de répondre à ce problème. Piaget, en 1937, s'exprimait ainsi:
"[…] La connaissance du monde extérieur débute par une utilisation immédiate des choses […] L'intelligence ne débute ainsi ni par la connaissance du moi ni par celle des choses comme telles, mais par celle de leur interaction, et c'est en s'orientant simultanément vers les deux pôles de cette interaction qu'elle organise le monde en s'organisant elle-même." (Piaget,1937, page 311).
Le savoir acquis peut donc être vu comme le produit de l'élaboration de l'expérience avec laquelle le sujet apprenant entre en contacte; et cette élaboration consiste dans l'interaction entre l'individu et son milieu et dans la façon dont l'individu intériorise le monde externe. Quelles que soient les particularités de ces "activités", le sujet apprenant doit s'engager en quelque chose qui le porte nécessairement à symboliser. Il s'agit d'une nécessité typiquement humaine, la seule sur laquelle tous les Auteurs s'accordent! Il s'agit d'une élaboration (aux caractéristiques internes ou sociales ou les deux) s'organisant autour ou à l'intérieur des systèmes sémiotiques de représentation.
On peut dire même plus: que la connaissance "*est*" l'intervention et l'utilisation des signes.

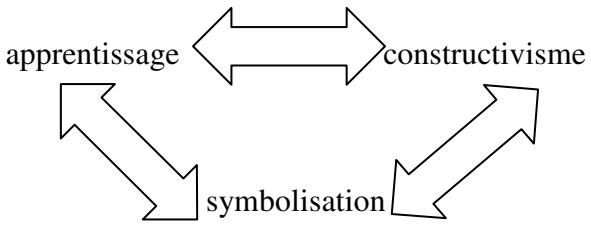
[16] Il peut être intéressant de voir ce que Kant écrit à propos du mot *représentation*: "Le mot *représentation* est bien compris et employé avec confiance, bien que sa signification ne puisse jamais être explicitée par une définition" (Kant, cit. par Duval, 1998, au début du paragraphe 1).

Donc le mécanisme de production et d'utilisation, subjectif et intersubjectif de ces signes, le mécanisme de représentation des "objets" de l'acquisition conceptuelle est crucial pour la connaissance.
Dans ce sens j'accepte et j'acquiers ce que Moreno Armella (1999) énonce comme "un principe qu'il nous semble essentiel de respecter: *toute action cognitive est une action médiate à cause d'instruments matériels ou symboliques*". La connaissance dépend aussi justement de ces instruments de médiation que nous utilisons pour sa construction, et elle dépend de l'ensemble et du type des significations que ces instruments reçoivent de l'entourage social.
Or, tout cela avait déjà été prévu par le programme de l'épistémologie constructiviste, et cela avait été exprimé de la manière suivante:
"[…]L'action n'a pas lieu seulement en fonction d'impulsion internes […] Dans l'expérience de l'enfant, les situations auxquelles il a affaire sont engendrés par son entourage social, les choses apparaissent dans des contextes qui leur confèrent des significations particulières. L'enfant n'assimile pas des objets "purs" […] Il assimile des situations dans lesquelles les objets jouent un certains rôles et non pas d'autres. Quand le système de communications de l'enfant avec son entourage social devient plus complexe […] ce que nous pourrions appeler l'expérience directe des objets commence à être subordonnée […] au système de significations que lui confère le milieu social" (Piaget, Garcia, 1983, chap. IX, pag. 274).
Le fait que la connaissance à l'école et son apprentissage comme construction sont conditionnés par les situations spécifiques de cette institution est d'une évidence indiscutable. Donc l'apprentissage à l'école n'est pas l'apprentissage tout court! Les problèmes de l'apprentissage mathématique à l'école appartiennent à ce milieu socioculturel spécifique[17] avant de se poser au niveau épistémologique.
Ces quelques considérations auxquelles on peut facilement se rallier aboutissent à certaines réflexions qui se révèlent bientôt nécessaires. Si simplement on transfère, pour ainsi dire, à l'école les thèses de l'épistémologie constructiviste, on se retrouve face à des affirmations du genre: "L'étudiant construit sa propre connaissance"; ou, plus radicalement: "Chaque étudiant construit *sa propre version* de la connaissance". Ma, vu la spécificité du milieu de l'école, des réponses naissent dont la réponse paraît lointaine; par exemple, comment peut-on vérifier que les constructions du savoir de l'étudiant sont compatibles avec celles de ses copains, avec les exigences de l'institution, avec les attentes de l'enseignant?
S'il est vrai, et il l'est, que toute connaissance (mathématique en particulier) reflète en même temps une dimension sociale et une dimension personnelle, l'école ne constitue pas une exception, au contraire: elle est le lieu où cette double nature s'institutionnalise.
Pendant l'apprentissage de la mathématique, on introduit les étudiants à un nouveau monde, conceptuel et symbolique (surtout représentatif). Ce monde n'est pas le fruit d'une construction solitaire, mais le fruit d'une vraie et propre interaction, très complexe, avec les membres de la microsociété dont fait partie le sujet apprenant: ses propres copains et l'enseignant (et la noosphère, parfois floue, parfois pressante) (Chevallard, 1992). C'est grâce à un continuel débat social que le sujet apprenant devient conscient du conflit entre "concepts spontanés" et "concepts scientifiques"; l'acte d'enseigner ne se constitue pas seulement de la tentative de généraliser, amplifier,

[17] Cette perspective socioculturelle tant particulière a remarquablement influencé les études sur l'éducation (Wertsch, 1993).

rendre plus critique le “sens commun” des étudiants; il est d’une action bien plus complexe comme Vygotskij nous a enseigné dans *Pensée et Langage* (1962):
“Les recherches sur le processus de formation des concepts nous ont appris que le concept est non pas un simple ensemble de liaison associative assimilé à l'aide de la mémoire, non pas une habileté mentale automatique mais un véritable et complexe acte de pensée […] Le processus de développement des concepts ou des significations de mots exige le développement de toute une série de fonctions (l'attention volontaire, la mémoire logique, l'abstraction, la comparaison et la distinction) et tous ces processus psychiques très complexes ne peuvent être simplement appris et assimilés. […] L'expérience pédagogique nous apprend, non moins que la recherche théorique, que l'enseignement de concepts s'avère toujours pratiquement impossible pédagogiquement sans profit. Le maître qui tente de suivre cette voie n'obtient habituellement rien d'autre qu'une vaine assimilation de mots, un pur verbalisme, simulant et imitant chez l'enfant l'existence des concepts correspondants mais masquant en réalité le vide.” (pages 211-212)

L’acte d’apprendre semble donc être une **construction** soumise à la nécessité de “socialisation”, ce qui se passe naturellement par un moyen communicatif (par exemple le langage) et ce qui dans la mathématique sera conditionné de manière toujours plus décisive par le choix du médiateur **symbolique**, c’est à dire par le registre de représentation choisi (ou imposé, à différents titres, même seulement par les circonstances). [Ce qui explique finalement le titre de ce paragraphe].



4. Sémiotique et noétique dans l’apprentissage de la mathématique

Dans le domaine mathématique, l’acquisition conceptuelle d’un objet passe nécessairement par l’acquisition d’une ou plusieurs représentations sémiotiques. Duval le dit le premier, en présentant la problématique des registres, dans les célèbres articles de 1988 publiés dans les *Annales* (1988a, 1988b, 1988c) [dont le travail de 1993 constitue la première ébauche d’une synthèse (1993); mais Duval publie des travaux sur cet argument en 1989 et en 1990 aussi]; Chevallard (1991), Godino e Batanero (1994) le confirment.
Donc, en empruntant de Duval: **il n’y a pas de noétique sans sémiotique.**
Je préfère expliciter les significations des termes que j’utilise et qui ne sont pas toujours utilisés dans le même sens. Je n’aurai là aucune prétention exhaustive:
sémiotique $=_{df}$ acquisition d’une représentation réalisée par des signes
noétique $=_{df}$ acquisition conceptuelle d’un objet[18]

[18] Pour Platon, la noétique est l’acte de concevoir par la pensée; pour Aristote, l’acte même de compréhension conceptuelle.

J'entendrai, désormais:

$r^m =_{df}$ registre sémiotique (m = 1, 2, 3, …)

$R^m_i(A) =_{df}$ représentation sémiotique i-ème (i = 1, 2, 3, …) d'un contenu A dans le registre sémiotique r^m

Sur la base de ces choix on peut remarquer que si le registre sémiotique change, la représentation sémiotique change nécessairement aussi, tandis que le contraire n'est pas toujours vrai: la représentation sémiotique peut changer dans le maintien du même registre sémiotique.

J'utiliserai encore une fois un schéma pour illustrer la question car il me semble plus incisif et efficace :[19]

caractéristiques de la sémiotique { *représentation*, *traitement*, *conversion* } ces trois sont des activités cognitives différentes

contenu de A à représenter

choix des traits caractéristiques de A

REPRESENTATION $R^m_i(A)$ dans un registre sémiotique donné r^m

transformation de représentation —*TRAITEMENT*→

nouvelle représentation ($i \neq j$) $R^m_j(A)$ dans le *même* registre sémiotique r^m

transformation de registre —*CONVERSION*→

nouvelle représentation ($h \neq i$, $h \neq j$) $R^n_h(A)$ dans un *autre* registre sémiotique r^n ($n \neq m$)

(m, n, i, j, h = 1, 2, 3, …)

Il faut remarquer les flèches qui, dans la première partie du schéma vont du bas en haut. Leur raison d'être est la suivante: les traits distinctifs figés du contenu A dépendent des capacités sémiotiques de représentation du registre choisi. En choisissant un registre différent on figerait d'autres traits de A. Cela dépend du fait que deux représentations du même objet dans des registres différents ont des contenus différents.

[19] Je me réfère à nouveau à Duval (1993).

Caractéristiques de la noétique

L'acquisition conceptuelle d'un objet mathématique se fonde sur deux caractéristiques "fortes" de cet objet (Duval, 1993):

1. l'utilisation de plusieurs registres de représentation sémiotique est typique de la pensée humaine
2. la création et le développement de nouveaux systèmes sémiotiques est le symbole (historique) du progrès de la connaissance.

Ces considérations montrent l'étroite interdépendance entre noétique et sémiotique, dès qu'on passe de l'une à l'autre: non seulement donc il n'y a pas de noétique sans sémiotique, mais la sémiotique est assumée comme une caractéristique nécessaire à garantir le premier pas vers la noétique.
À ce point, une précision concernante la théorie que Raymond Duval est en train de développer depuis des années se rend nécessaire.
Dans cette théorie on accorde à la conversion une place centrale par rapport aux autres fonctions, et en particulier par rapport à celle de traitement qui est considérée par la plupart décisive du point de vue mathématique.
Pourquoi? A mon avis, pour au moins trois différentes raisons:
1. La conversion cogne contre des phénomènes d'incohérence qui ne sont pas conceptuels (en tant que liés au sens même de la conversion). Ces phénomènes d'incohérence constituent l'obstacle le plus stable qu'on puisse observer dans l'apprentissage de la mathématique, à tous les niveaux et dans tous les domaines.
2. La conversion permet de définir des variables cognitives indépendantes, ce qui rend possible la construction des observations et des expériences relativement précises et fines. Certes, une fois validées à travers une recherche très méthodique elles peuvent ensuite être utilisées comme des variables didactiques. Duval ne travaille donc pas au niveau d'une classe pendant des semaines, il se comporte plutôt comme le font un biologiste ou un médecin quand ils veulent comprendre le fonctionnement du cerveau.
3. La conversion, dans les cas d'incohérence, suppose une coordination des deux registres de représentation mobilisés; cette coordination n'est jamais donnée à priori et elle ne se construit pas spontanément en se basant seulement sur le fait que des activités mathématiques didactiquement intéressantes sont effectuées. Ce qu'on appelle "conceptualisation" ne commence réellement que quand se met en marche, fut-il à l'état d'ébauche, la coordination de deux différents registres de représentation.

La théorie des registres doit être évaluée en se fondant sur les apports relatifs à la richesse, à la nouveauté des observations, ainsi qu'à la nouveauté des activités d'apprentissage que les variables cognitives permettent de définir; et non pas par rapport à des idées reçues sur ce qu'est la mathématique, ni sur la base de considérations globalisantes qui ne sont pas contrôlables avec des méthodologies précises.
C'est chaque élève qui apprend, et personne ne peut apprendre (ou comprendre) à la place d'un autre! En outre, le succès d'une action didactique ne se juge pas immédiatement, mais seulement quelques années plus tard: il y a nombre de réussites immédiates qui se révèlent des échecs dans le temps…

Voilà donc pourquoi Duval insiste sur le caractère central de la conversion; voilà ce qui est le noyau qui fait véritablement la différence entre sa théorie des registres et tout ce

qui peut se dire ou tout ce qu'on a l'habitude de dire sur les signes et sur la sémiotique ou sur ce qui est cognitif.
Mais ce point-là devra être éclairé de manière beaucoup plus approfondie dans le futur…

5. Construction de la connaissance mathématique et registres de représentation sémiotique: une tentative de "définition" de *construction*

La construction des concepts mathématiques dépend donc étroitement de la capacité d'utiliser *plusieurs* registres de représentations sémiotiques de ces concepts:

1. de les *représenter* sur un registre donné
2. de *traiter* ces représentations à l'intérieur d'un même registre
3. de *convertir* ces représentations d'un registre donné à un autre

L'ensemble de ces trois éléments et les considérations faites aux paragraphes **2** et **3** mettent en évidence l'étroit lien entre noétique et constructivisme: cette "construction de la connaissance en mathématique" n'est-elle pas justement l'union de ces trois "actions" sur les concepts, c'est à dire l'expression même de la capacité de *représenter* les concepts, de *traiter* les représentations obtenues à l'intérieur d'un registre établi et de *convertir* les représentations d'un registre à un autre?
C'est comme si on était en train de spécifier les opérations de base qui dans leur ensemble définissent cette "construction" qui resterait sinon un terme mystérieux et ambigu, ouvert à toute sorte d'interprétations, même métaphysiques.[20]
Il faut remarquer encore que d'un point de vue cognitif on doit accorder plus d'importance au point 3 (la conversion) qu'au point 2 (le traitement) parce que cela permet de définir les variables indépendantes aussi bien pour l'observation que pour l'enseignement.
Mais d'un point de vue mathématique on accorde d'habitude plus d'importance au traitement qu'à la conversion. Et c'est pour cela qu'au cours de l'histoire les mathématiciens ont développé des registres spécifiques qui ont permis des différentes formes de calcul (arithmétique, algébrique, analytique, logique,…).

6. Scolarisation et noétique manquée

Le renoncement (naturellement inconscient) de l'étudiant à la dévolution, l'incapacité de l'étudiant à s'investir (ce qui est souvent une conséquence de tentatives échouées), en assumant directement et personnellement la responsabilité de la construction de la connaissance au sein du milieu scolaire, sont liées à l'incapacité (parfois seulement supposée) de représenter, de traiter, ou bien de convertir, à cause d'un manque didactique spécifique originel. L'enseignant pourrait en effet ne pas se soigner de

[20] Naturellement cette observation, tout le paragraphe, mais aussi cet article dans son intégrité, ont été élaborés de manière spécifique pour la mathématique; je ne peux pas évaluer jusqu'à quel point ils peuvent s'appliquer à une théorie des concepts, ou, même, à une gnoséologie.

chaque composant de la construction en supposant une identité de sémiotique et noétique (Duval, 1993) (il s'agit là d'une opinion très répandue parmi les enseignants, spécialement parmi ceux qui n'ont jamais eu l'occasion de réfléchir sur cette question, ou qui la considèrent superflue).[21] Cela pourrait amener l'étudiant à choisir l'échec, et donc à la scolarisation des connaissances (D'Amore, 1999a).[22]

Une réflexion s'impose sur l'impossibilité d'une noétique sans sémiotique préalable dans l'apprentissage mathématique conceptuel. En effet, l'acquisition d'un concept mathématique C n'est que l'acquisition de l'une de ses représentations sémiotiques $R^m_i(C)$ dans un registre sémiotique donné r^m; en fait, seulement à travers cela C se "manifeste" tout en se rendant disponible à la construction de l'apprentissage au sens qu'on a expliqué.[23]
Mais il y a plus: quel que soit le $R^m_i(C)$ en r^m, il ne donne pas toutes les références (sémiotiques) de C en r^m (la représentation sémiotique d'un concept n'est jamais univoque); il y aura d'autres représentations sémiotiques $R^m_h(C)$ ($h \neq i$) de C en r^m. (On passe de l'une à l'autre avec une transformation de traitement).
On peut donc parler de C^m: concept C représenté en r^m, c'est à dire "limité" à son aspect "relatif" au registre sémiotique r^m.
C^m peut s' "apprendre" en r^m mais ce qu'on obtient n'est qu'une partielle approximation à C, disons: une partielle "construction" de C.
Pour arriver à la compréhension de C il faut s'approprier de la conversion portant de $R^m_i(C^m)$ en r^m à $R^n_j(C^n)$ en r^n, pour chaque m et n: cela rend possible le choix d'un registre au lieu d'un autre, face à n'importe quelle situation relative à C.

Celui dont on parle ici est le noyau central de toute l'argumentation, celui qui nous porte à insister sur notre phrase topique constituant le pivot fondamental de tout le système que je suis en train de décrire: **il n'y a pas de noétique sans sémiotique**.
Pour renforcer le "jeu des triades" (représentation, traitement, conversion), on peut voir quelle est l'issue de la recherche décrite dans D'Amore (1998). Dans cette recherche le même message concernant une situation relative à un simple exemple de relation binaire (on donnait des noms de villes et des noms d'états et la relation binaire était: "est en"), était proposé à des élèves à des différents niveaux scolaires, dans des différents registres sémiotiques, et avec des différentes représentations sémiotiques, et ce qu'on demandait était justement de reconnaître qu'il s'agissait du *même message*, de la *même information*.

---

[21] Ce qui renvoie à un discours beaucoup plus général, celui sur les croyances implicites de l'enseignant, affronté de manière profonde, systématique et recourante en (Speranza, 1997).
[22] "J'entends ici me référer par le terme "scolarisation du savoir" à cet acte largement inconscient par lequel l'élève à un certain moment de sa vie sociale et scolaire (mais presque toujours au cours de l'école primaire) délègue à l'école (en tant qu'institution) et à l'enseignant (en tant que représentant de l'institution) la tâche de *sélectionner pour lui les connaissances significatives* (celles qui le sont d'un point de vue social, par un statut reconnu et légitimé par la noosphère) en renonçant à assumer directement leur choix sur la base d'une forme quelconque de critère personnel (goût, intérêt, motivation,…). Du moment où cette scolarisation comporte la reconnaissance de l'enseignant comme dépositaire des connaissances, du savoir socialement valables, il est évident qu'il y aura, plus ou moins en même temps, une scolarisation des rapports interpersonnels (entre l'étudiant et l'enseignant et entre l'étudiant et ses copains) et du rapport entre l'étudiant et le savoir: c'est ce qui (…) s'appelle "scolarisation des relations"." (D'Amore, 1999a).
[23] À mon avis, ceci est un noyau essentiel à traiter dans les cours pour la formation des enseignants, tout en l'enrichissant d'exemples significatifs.

Le résultat de cette recherche montre justement les difficultés rencontrées par les étudiants

- à remonter d'une représentation au contenu représenté
- à vérifier qu'entre deux représentations sur un registre sémiotique donné il est simplement advenu une transformation concernante la représentation du type traitement
- à vérifier qu'entre deux représentations sémiotiques dans deux différents registres sémiotiques il est advenu une transformation de représentation de type conversion.

Faute de clés de lecture, et ayant des difficultés dans la "lecture" des situations, les étudiants donnent un "sens" au message en créant des informations de types différents (que dans quelque cas j'ai appelé "informations parasites") parfois éloignées de toute intention communicative de l'auteur; et ils cherchent des prétextes au traitement ou à la conversion dans des aspects tout à fait marginaux, tels: la forme des schémas, le type d'images présentes etc., ce qui est insignifiant pour l'adulte.

7. Exemples

Avant de présenter quelques exemples de façon détaillée quelque note de prudence est indispensable.

La première note concerne la langue naturelle en tant que registre.
Tout en acceptant la langue naturelle comme registre, il faut quand même préciser de façon explicite qu'il s'agit d'un registre plus complexe que les autres auxquels on fera référence. Premièrement, ce registre permet des fonctionnements du discours (et donc des traitements) très hétérogènes. Il existe ainsi un fonctionnement spontané tel celui des conversations, des narrations, des discussions, mais il existe aussi un fonctionnement spécialisé qu'on retrouve, par exemple dans le raisonnement déductif en mathématique, et qui est tout à fait différent. Voilà pourquoi Duval (1995, pages 91 et suivantes) distingue quatre fonctions du discours caractérisantes tout registre s'appelant "langue":

- fonction référentielle de désignation des objets,
- fonction apophantique d'expression d'énoncés complets,
- fonction d'expansion discursive d'un énoncé complet et
- fonction de réflexivité discursive.

En d'autres mots une langue, contrairement à d'autres registres, est multifonctionnelle (Duval, 1996, III partie).

La deuxième note concerne l'opportunité de considérer les signes et les représentations isolément.
Même si dans les exemples suivants on présuppose cela, on le fait uniquement dans le but d'illustrer nos thèses, en réalité on devrait toujours tendre à présenter le système ou les systèmes que les représentations forment et dans lesquels elles fonctionnent en tant que représentations. Cela est très facile pour le système d'écriture des chiffres, pour les figures géométriques; mais beaucoup moins pour les écritures algébrique et logique. La raison de cette différence est la suivante. L'intérêt d'un système sémiotique en mathématique est avant tout celui de permettre un traitement (mathématique) des

représentations. Il faut donc le présenter, dans la mesure du possible, par rapport au jeu de transformations internes qu'elles permettent. Et, de ce point de vue, la langue et les figures géométriques ne sont pas du tout, proprement parlant, des registres "techniques". Cela correspond à la distinction entre les structures de signification ternaire (langues et formes) et binaires (pour lesquelles les "triangles" montrés dans le cadre du premier paragraphe sont des faux schémas).

Seulement en tenant compte des fortes limitations que les deux notes précédentes imposent, il est sensé d'accepter les exemples suivants qui n'ont qu'un but explicatif.

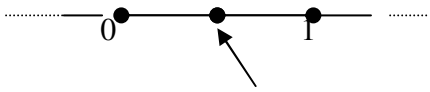
concept C

registre sémiotique r^1: la langue commune
représentation sémiotique R^1_1: un moyen
représentation sémiotique R^1_2: la moitié
etc.

registre sémiotique r^2: la langue arithmétique
représentation sémiotique R^2_1: ½ (écriture fractionnaire)
représentation sémiotique R^2_2: 0.5 (écriture décimale)
représentation sémiotique R^2_3: $5 \cdot 10^{-1}$ (écriture exponentielle)
etc.

registre sémiotique r^3: la langue algébrique
représentation sémiotique R^3_1: $\{x \in Q^+ / 2x-1=0\}$ (écriture des ensembles)
représentation sémiotique R^3_2: $y=f(x)$: $x \rightarrow x/2$ (écriture fonctionnelle)
etc.

registre sémiotique r^4 : le langage figuratif
représentation sémiotique R^4_1:
etc.

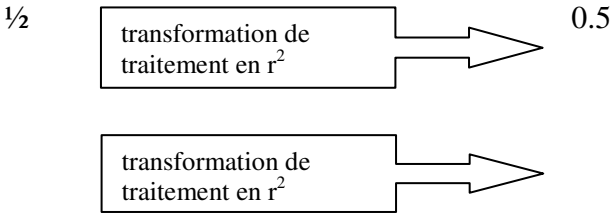


registre sémiotique r^5: schémas pictographiques
représentation sémiotique R^5_1:

représentation sémiotique R^5_2:

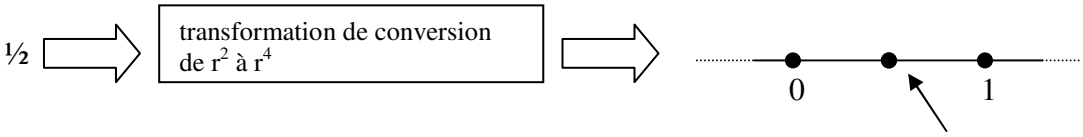
représentation sémiotique R^5_3:

etc.



0.5 $5 \cdot 10^{-1}$

etc.



etc.

D'autres exemples peuvent être tirés de ce qu'on appelle "théorie des ensembles" élémentaire ou naïve, dans laquelle le même ensemble peut être représenté dans des différents registres sémiotiques et, à l'intérieur de chacun de ces registres, en utilisant de différentes représentations sémiotiques.

8. La dévolution manquée, la cessation de l'implication

Dans le cas d'un échec dans la gestion de cette énorme quantité de représentations et de transformations il serait trop banal et simpliste de se limiter à une constatation, comme parfois l'enseignant déçu par l'apprentissage manqué de ses élèves semble faire. Où se niche la *motivation* de cet échec? Cet aspect est déjà plus intéressant qu'une analyse des différents échecs et il pourrait nous révéler beaucoup.

Mais ici c'est la problématique de la dévolution manquée, de la cessation d'une implication personnelle qui m'intéresse.
Je pense à un étudiant même doué, même conscient, même sensible, qui, peut-être justement à cause de cette sensibilité qu'il n'arrive pas à satisfaire, ou à cause d'une incapacité d'introspection dont il n'est pas responsable, se borne à observer et à constater son propre échec dans la tentative de faire face à la complexité de l'appel de la triade "représentation, traitement, conversion". L'étudiant pourrait décider (fut-il de manière tout à fait inconsciente) de limiter les dommages en acceptant le formalisme, la surface de ce qu'on lui demande, en s'adaptant à scolariser son savoir et son comportement c'est à dire en adoptant la médiation totale de l'enseignant par rapport à l'objet de connaissance, en adoptant ses choix et même ses goûts (D'Amore, 1999a). Une analyse très juste des différentes composantes, et donc la capacité de faire le point des différents aspects dans lesquels se représente la construction de la connaissance (dans notre cas spécifique, dans l'exemple donné en **7**., le concept ayant ½ comme un de ses nombreux représentants), pourrait aider l'enseignant à comprendre quel a été le moment exact de la résignation, de la dévolution manquée, de la cessation de l'implication personnelle de l'étudiant dans cette construction.
Il existe une énorme différence entre d'un côté l'institutionnalisation de la connaissance de la part de l'enseignant en tant que représentant de l'institution qui a décidé quel est le savoir qui compte; et de l'autre la scolarisation, l'acceptation passive des choix de l'enseignant.

- Dans le premier cas l'enseignant joue le rôle de médiateur entre l'élève et le savoir et il rend actif le premier: il consacre les choix et les "découvertes" de l'élève en leur reconnaissant un statut institutionnel d'employabilité et un permis officiel d'emploi; le fondement de tout cela réside dans le fait que c'est l'élève qui construit.
- Dans le deuxième cas l'enseignant joue le rôle de médiateur totalisant et il rend l'élève un sujet passif: il lui demande une confiance aveugle dans l'institution en échange de promesses sur des capacités et des compétences futures qui n'arriveront pas forcément ou qui ne seront pas forcément employables. L'élève cesse là de construire, en cessant donc d'apprendre.

Je crois que l'étude détaillée de la triade (représentation, traitement, conversion) peut s'appliquer à l'analyse des situations de renoncement à l'implication personnelle, pour dénicher la raison qui provoque ce renoncement, la raison de la scolarisation.

Appendice: Relativité des registres

Ceux qui étudient ce genre de problèmes se posent un doute de nature théorique: un registre de représentation sémiotique est-il un absolu ou non?
En d'autres mots si je vois un signe, un dessein, une formule, une écriture comme une représentation sémiotique $R^x_y(C)$ d'un "objet" ou concept C donné, puis-je établir avec certitude à quel registre sémiotique il appartient? En d'autres mots: y a-t-il en absolu des registres de représentation sémiotique qu'on peut déduire de la *forme* d'une seule représentation spécifique?
À mon avis, la réponse est *négative*: la caractéristique spécifique d'un registre sémiotique dépend de manière très étroite de l'objet qu'on veut représenter; donc pour "comprendre" le message proposé il faut posséder des indications préliminaires sur l'objet.
Je montrerai cela par deux exemples.

Exemple 1. Si l'objet C est "calcul numérique en Q", le registre sémiotique r^1 "écriture décimale" et le registre sémiotique r^2 "écriture fractionnaire" sont deux registres sémiotiques *différents* parce que les 3 activités cognitives fondamentales liées à la sémiotique (représentation, traitement, conversion) sont différentes (comme on le démontre en Duval, 1993, pages 41-42); et en outre le passage de l'un à l'autre est une transformation de conversion (même référence bibl.).

Exemple 2. Si l'objet C est "valeur d'un élément de Q donné" (par exemple celui qui est représenté, entre autres, par ½), le registre sémiotique "écriture décimale" et le registre sémiotique "écriture fractionnaire" peuvent se penser identiques à l'intérieur du registre sémiotique r^1 "écritures en forme arithmétique" (le passage de l'un à l'autre est en fait une transformation de traitement).

Je donnerai maintenant quelques exemples de représentations sémiotiques dont l'aspect purement visuel se prête à des différentes interprétations dues au registre dans lequel on pense devoir les interpréter:

	"carré": dans le registre géométrique figuratif

	“il faut que”: dans le registre de l’écriture formelle de la logique modale

<	“mineur”: dans le registre d’écriture de l’arithmétique “angle”: dans le registre figuratif géométrique

| |	“valeur absolue”: dans le registre d’écriture algébrique “couple de droites parallèles”: dans le registre symbolique géométrique élémentaire

^	“angle”: dans le registre figuratif géométrique “et”: dans le registre d’écriture formelle de la logique énonciative

	“1/8”: dans le registre schématique pictographique référé à des fractions “45°”: dans le registre figuratif géométrique synthétique “secteur circulaire”: dans le registre figuratif géométrique synthétique

+	“plus”: dans le registre de l’écriture arithmétique “axes cartésiens non orientés”: dans le registre figuratif géométrique analytique “droites perpendiculaires”: dans le registre figuratif géométrique synthétique

×	“fois”: dans le registre écriture arithmétique “droites incidentes”: dans le registre figuratif géométrique synthétique

→	“vecteur”: dans le registre de l’algèbre linéaire ou de la physique ou de la géométrie “indicateur”: dans un registre schéma “implication matérielle”: dans le registre logique formel ou mathématique

∅	“vide”: dans le registre de l’écriture ensembliste “zéro”: dans le registre de l’écriture numérique des informaticiens “½”: dans le registre schématique pictographique de l’écriture fractionnaire

etc.

Une représentation sémiotique n’est donc pas un message absolu en elle-même, à moins qu’on ne spécifie de quelque manière le registre de représentation; le message dépend donc de l’objet qu’on veut représenter dans une sorte de cercle vicieux. En d’autres mots, une représentation sémiotique constitue un signifiant changeant selon le signifié dont il est signifiant.

Bibliographie

Chevallard Y. (1991). Dimension instrumentale, dimension sémiotique de l'activité mathématique. *Séminaire de Didactique des Mathématiques et de l'Informatique de Grenoble*. Année 1990-1991, LSD2, IMAG, Université J. Fourier, Grenoble, 103-117.

Chevallard Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 12, 1, 73-112.

D'Amore B. (1998). Oggetti relazionali e diversi registri rappresentativi: difficoltà cognitive ed ostacoli. *L'educazione matematica*, 1, 7-28 [texte bilingue, en italien et en anglais]. En espagnol: *Uno*, 15, 1998, 63-76.

D'Amore B. (1999a). Scolarizzazione del sapere e delle relazioni: effetti sull'apprendimento della matematica. *L'insegnamento della Matematica e delle scienze integrate*. 22A, 3, 247-276.

D'Amore B. (1999b). *Elementi di Didattica della Matematica*. Bologna, Pitagora.

De Saussure F. (1915), *Cours de linguistique générale*. Paris et Lausanne, Payot. [5ª édit. 1960].

Duval R. (1988a). Ecarts sémantiques et cohérence mathématique. *Annales de Didactique et de Sciences cognitives*. 1, 7-25.

Duval R. (1988b). Approche cognitive des problèmes de géométrie en termes de congruence. *Annales de Didactique et de Sciences cognitives*. 1, 57-74.

Duval R. (1988c). Graphiques et équations. *Annales de Didactique et de Sciences cognitives*. 1, 235-253.

Duval R. (1993). Registres de représentations sémiotiques et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, ULP, IREM Strasbourg. 5, 37-65.

Duval R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Berne, Peter Lang.

Duval R. (1996). Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques ? *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 16, 3, 349-382.

Duval R. (1998). Signe et objet (I). Trois grandes étapes dans la problématique des rapports entre représentation et objet. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*. 6, 139-163.

Godino J.D. & Batanero C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 3, 325-355.

Moreno Armella L. (1999). Epistemologia ed Educazione Matematica. *La matematica e la sua didattica*, 1, 43-59.

Perrin Glorian M.-J. (1994). Théorie des situations didactiques: naissance, développement, perspectives. In: Artigue M., Gras R., Laborde C. & Tavignot P. (eds.) (1994), *Vingt ans de didactique des mathématiques en France. Hommage à Guy Brousseau et Gérard Vergnaud*. Grenoble, La Pensée Sauvage. 97-148.

Piaget J. (1937). *La construction du réel chez l'enfant.* Neuchâtel, Delachaux et Niestlé.

Piaget J. & Garcia R. (1983). *Psychogenèse et histoire des sciences*. Paris, Flammarion.

Speranza F. (1997). *Scritti di Epistemologia della Matematica*. Bologna, Pitagora.

Vergnaud G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19, 133-169.
Vygotskij L. (1962). *Thought and Language*. Cambridge, MIT Press. [Ed. française: 1985, Paris, Editions Sociales]. [Ed. italienne: 1990, Bari, Laterza].
Wertsch J. (1993). *Voces de la mente*. Madrid, Visor.

J'exprime ma sincère gratitude à Raymond Duval, lecteur patient des versions précédentes de cet article, qui m'a suggéré de nombreuses modifications et intégrations, qui m'a conseillé des textes inclus maintenant dans la bibliographie et qui, plus généralement, est en train de me guider dans ce genre d'études.

D'Amore B., Fandiño Pinilla MI. (2002). Un acercamiento analitico al "triángulo de la didáctica". *Educación Matemática*. México DF, México. 14, 1, 48-61.

Un acercamiento analítico al "triángulo de la didáctica"[24]

Bruno D'Amore – Martha Isabel Fandiño Pinilla

N.R.D., Núcleo de Investigación en Didáctica de la Matemática
Departamento de Matemáticas
Universidad de Bolonia, Italia

Facultad de Ciencias de la Formación
Universidad Libre de Bolzano
Bressanone – Brixen (Bz), Italia

Sumario. En este texto se resumen algunas consideraciones derivadas de la literatura, sugiriendo una "lectura analítica", del triángulo alumno – maestro– saber, entendido como modelo sistémico de la "didáctica fundamental". La idea no es la de eludir la intrínseca complejidad del modelo, sino la de sugerir un intento de articular, con el objetivo de mejorar, las reflexiones que varios autores han propuesto al respecto.

Summary: In this work we take up again some considerations derived from the literature, suggesting an "analytical lesson" from the triangle student – teacher – knowledge intended as a systematic model of "fundamental didactics". The idea not get involved in the intrinsic complexity of the model, but only to suggest a way of articulating mainly the reflections which various authors have made on this subject.

1. Notas preliminares [25]

La investigación en Didáctica de las Matemáticas de los últimos 20 años ha insistido particularmente en analizar, los múltiples y variados detalles posibles que se "esconden" en el interior del "triángulo" que tiene como "vértices": alumno, maestro, saber (Chevallard, Joshua, 1982).
Se trata de un modelo sistémico que sirve sobre todo para situar y analizar la naturaleza de las múltiples relaciones que se establecen entre los tres "elementos" que están en los

[24] Trabajo desarrollado en el ámbito del Programa de Investigación de la Unidad de Bologna: «*Investigaciones sobre el funcionamiento del sistema: alumno-maestro-saber: motivaciones de la falta de devolución*», dentro del Programa de Investigación Nacional: «*Dificultades en matemáticas: instrumentos para observar, interpretar, intervenir*», cofinanciado con fondos del Ministerio de la Instrucción, de la Universidad y de la Investigación de Italia.

[25] Partimos de la hipótesis que el lector de este artículo conoce términos como "situación didáctica", "contrato didáctico", "obstáculo" (didáctico, ontogenético o epistemológico) etc.; es decir, todos aquellos términos que, desde nuestro punto de vista, caracterizan el lenguaje que le es propio a esta disciplina y que por tanto es compartido por los investigadores, estudiosos, maestros y en general por todos los que hacen de la Didáctica de las Matemáticas su objeto de estudio o se sirven de ella para entender y mejorar su trabajo. Para cada evidencia remitimos a D'Amore (2002b). Más aún, en este artículo tales conceptos son discutidos.

"vértices", en el sentido descrito por la llamada "didáctica fundamental" (Henry, 1991).[26]

Para mayor precisión:
la *didáctica fundamental* permite afrontar en *forma sistémica* los diferentes aspectos que aparecen en la relación didáctica;
el *modelo sistémico* permite situar y analizar la *naturaleza compleja* del "triángulo" (la complejidad depende del hecho que el modelo toma en consideración simultáneamente todas las mutuas relaciones entre los "vértices" incluyendo múltiples relaciones de diversa naturaleza).

Sin embargo en este artículo intentaremos una visión *analítica,* separando los elementos que componen el "triángulo". Esta forma de proceder, aunque una parte reduce la visión sistémica, de otra permite una mayor profundidad en el análisis. Esta dirección nos conduce a un primer análisis sintético en el parágrafo 1; en el parágrafo 2 introducimos el concepto fundamental de *milieu* que usaremos después, en el parágrafo 3, para entrar una vez más pero con mayor profundidad en el análisis de los *mismos elementos* del "triángulo". Tal proceso analítico NO elimina la complejidad sistémica del modelo (que permanece siempre *ternaria*), pero sí permite conocer mejor las especifidades ligadas a cada elemento.

En este sentido, para decirlo brevemente (aunque después tenemos que retomar todo esto con mayor profundidad):

■cada "vértice" actúa como un polo de referencia:
- el "vértice" *saber* representa el polo ontológico o epistemológico
- el "vértice" *alumno* representa el polo genético o psicológico
- el "vértice" maestro representa el polo funcional o pedagógico.

■cada "lado" evidencia relaciones entre dos polos:
- el lado *saber - alumno* se podría identificar con el verbo "aprender"
- el lado *saber - maestro* con el verbo "enseñar" [que trae con sí toda la problemática de la "transposición didáctica" (Chevallard, 1995) y de la "ingeniería didáctica"[27] (Artigue, 1992)]

[26] Sobre este aspecto es inevitable la referencia al *milieu* de Brousseau; sólo a manera de exposición, hacemos referencia a éste en el próximo parágrafo, pero las dos cosas están estrechamente entrelazadas: la complejidad del sistema contrasta con la necesidad de describir la problemática que, recurriendo a la escritura, es forzosamente lineal.

[27] Se llama "transposición didáctica" al conjunto de todo cuanto concierne a la transformación del saber en "saber a enseñar". Esta transformación no sólo está determinada por las decisiones, preferencias o expectativas del maestro, sino también por el currículo, las expectativas sociales y/o de los padres, las exigencias y/o necesidades de los alumnos. El saber enseñado no coincide con el saber aprendido, esto por varios motivos entre los cuales están: los obstáculos al aprendizaje, y el hecho que de los procesos de enseñanza y de aprendizaje son una parte de la vasta problemática de la comunicación, por ejemplo se sabe muy bien que no hay coincidencia entre el mensaje emitido y el mensaje recibido. Forma parte de esta misma problemática toda la teoría de la ingeniería didáctica que se puede, en primera instancia, pensar como la organización metodológica a la cual el maestro recurre para encontrar la forma para que se aprenda el saber enseñado. (D'Amore, 1999b, 2002b)

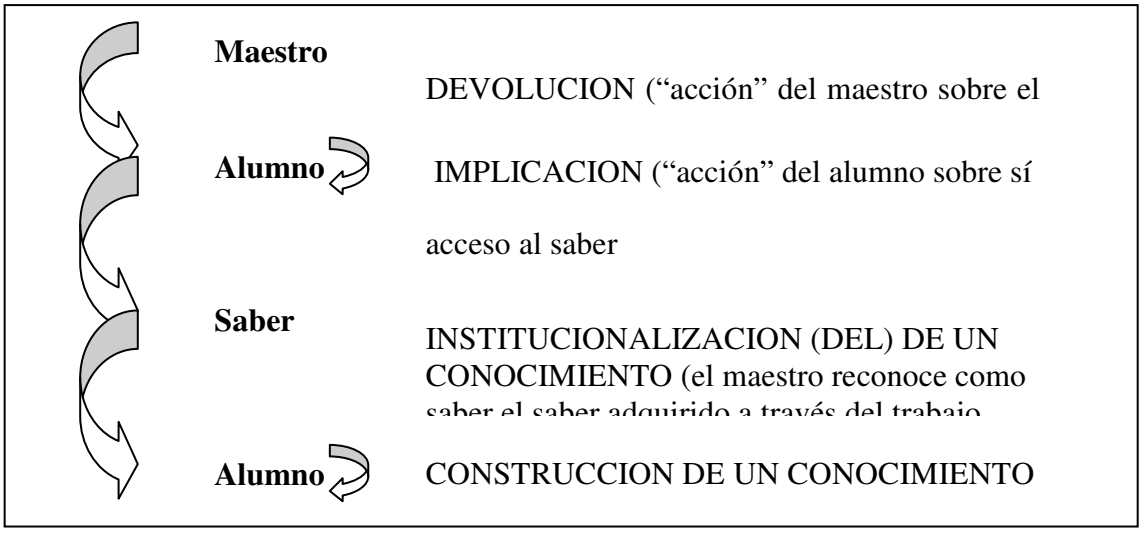
el lado *maestro - alumno* es en ocasiones resumido en el verbo "animar" (esto porque en tal relación asimétrica se tiende a ver sólo la relación del maestro sobre el alumno) pero preferimos poner el acento sobre la pareja:

- devolución (acción del maestro sobre el alumno: el maestro "empuja" al alumno a implicarse en el proyecto didáctico que le atañe)
- implicación (acción del alumno sobre sí mismo: el alumno acepta la devolución, aceptando hacerse cargo personal de la construcción del propio conocimiento).

Tenemos que distinguir aquí, por lo menos, tres categorías que entran en juego:

- *elementos* (que podemos identificar con los "polos" del esquema precedente)
- *relaciones* entre los elementos (que podemos identificar con los "lados")
- *procesos,* que identifican la modalidad de funcionamiento del sistema (por ejemplo: devolución, contrato didáctico, transposición, etc, los cuales están ligados al funcionamiento del sistema).

Recurrimos al siguiente esquema para ilustrar la situación didáctica según la teoría de las situaciones didácticas (Brousseau, 1986); naturalmente usamos los elementos del "triángulo".



El "momento" de la institucionalización es importante y requiere profundizar en este, para lo cual una vez más, recurrimos a un esquema [usando, de manera bastante libre, Chevallard (1992)]:

UN SABER PERSONAL

adquirido gracias

- a la acción de enseñar, a la cual contribuye el maestro (transposición didáctica, ingeniería didáctica) y la noosfera[28] o
- a la acción de competencias externas a la escuela

viene: **INSTITUCIONALIZADO**

es decir viene reconocido por el maestro (representante de la institución y del saber institucional) como saber legítimo y utilizable en el contexto escolar como otros saberes legítimos	CONTRATO PEDAGOGICO (el maestro al alumno: «*puedes usarlo*»)

se constituye entonces en: **SABER INSTITUCIONALIZADO PRIVADO**

pero después viene aceptado, discutido, compartido y se afianza con un *nombre* que se comunica quedando aquello socialmente establecido en la estricta comunidad adulta que tiene el derecho al acceso al saber	CONTRATO SOCIAL (el maestro a todos los alumnos: «*se llama así*»)

se constituye entonces en: **SABER INSTITUCIONAL**

La construcción del conocimiento pasa a través de los puntos precedentes, en un continuo "juego" entre saber personal y saber institucional.

Ejemplo:

adquisición de un saber personal:	El alumno al maestro: «He descubierto que 3+5 es igual a 5+3» o expresiones análogas
institucionalización:	El maestro al alumno y a todos los alumnos: «Pueden usarlo;
nominación:	se llama propiedad conmutativa y forma parte de los saberes que cuentan»
construcción de un saber institucionalizado	

No podemos ir más allá, sin incluir consideraciones sobre el *milieu*,[29] dado que ya hemos hecho referencia a éste, es nuestra intención volver sobre este mismo argumento, pero desde otro punto; a este propósito dedicamos el próximo apartado.

[28] Noosfera es el conjunto de todo aquello que gira en torno al mundo de la escuela pero que no forma parte, explícitamente, del modelo sistémico del "triángulo de la didáctica", y que, sin embargo, tiene influencia sobre éste. Por ejemplo: padres, burocracia escolar, directivas ministeriales, expectativas de la sociedad etc. (D'Amore, 1999b, 2002 b).

[29] Con *milieu,* palabra que dejamos sin traducir y que mas o menos tiene el significado de *ambiente*, se indican todos los recursos materiales o no, utilizados en el curso de un proceso de enseñanza y de aprendizaje de un determinado objeto del saber. El estudiante debe "estructurar" los elementos del *milieu*

2. El *milieu*

En el ámbito de la *teoría de las situaciones didácticas,* Brousseau, también con la intención de delinear el carácter sistémico de su acercamiento, introduce la noción de *milieu*: «una modelización, para el investigador, del ambiente y de sus respuestas pertinentes para el aprendizaje en curso. Es solamente una parte de la situación didáctica (…). Este juega (…) un papel central en el aprendizaje, como causa de las adaptaciones, y en la enseñanza, como referencia y objeto epistemológico» (Brousseau, 1989, p. 132).
Se requiere decir exactamente qué cosa es este "ambiente didáctico" de Brousseau, para lo cual nos servimos de Martini (2000, apar. 2.1).
El sistema didáctico se entenderá como el conjunto de situaciones didácticas que se dan entre:

- alumno (individuo, grupo o clase)
- *milieu* (comprende instrumentos y objetos materiales o no)
- maestro

en relación con un saber específico, aquello que se pone en juego en la actividad ("en juego" significa la "apuesta" que se quiere ganar, el "premio" de la actividad didáctica).
El alumno tiene como objetivo final aprender un cierto saber; para lograr esto, el maestro construye las condiciones, no construye el *milieu*; éste es preexistente a toda la situación y es conocido (al menos en la parte objetiva, visible y disponible) por todos los actores humanos inmersos en el proceso: no forma parte de ellos ni de sus construcciones simplemente *está.*
El alumno:

- interactúa con el *milieu* que, de cualquier forma, le es antagonista;
- progresivamente se va adaptando al *milieu* por sí mismo transformándolo con la interacción, aprendiendo.

El maestro

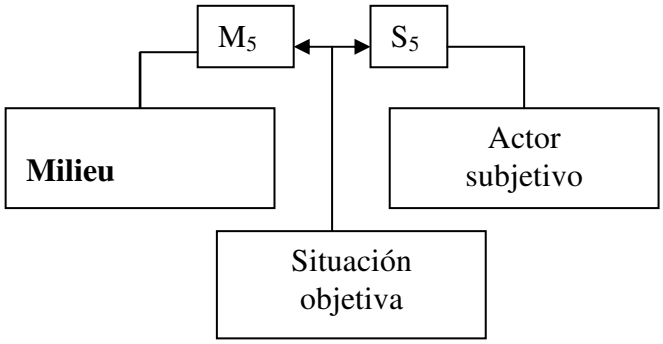
- provoca sabiamente tales adaptaciones: su tarea debe ser la de crear situaciones favorables a fin de lograr esta adaptación.

El maestro diseña situaciones didácticas pensadas exactamente con el fin de llevar al alumno al aprendizaje de una determinado conocimiento, es claro que enfrentar al alumno con la situación no garantiza de hecho la adquisición, a menos que ésta no prevea, en su interior, una confrontación entre alumno y una situación a-didáctica (situación privada de la intención de enseñar, pero sí cargada de la intención de llevar a la construcción de un conocimiento): «El alumno sabe que el problema ha sido seleccionado [por el maestro] para llevarlo a adquirir un nuevo conocimiento, pero debe saber también que este conocimiento está enteramente justificado desde la lógica interna de la situación y que puede construir el saber esperado sin hacer referencia a las razones didácticas. No sólo él puede, pero tiene que [construirlo], porque él no habrá adquirido verdaderamente el conocimiento si no hasta cuando él no sea capaz por sí mismo de ponerlo en acción en situaciones que encontrará fuera de todo contexto de enseñanza y

---

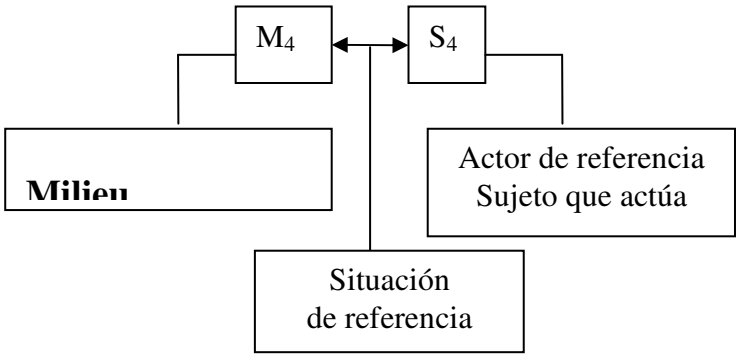
para reconocer el objeto del saber y conquistarlo haciéndolo propio. Es en este sentido que se suele decir que el *milieu* puede constituirse en un obstáculo para el aprendizaje, obstáculo que es deseado por el maestro que lo utiliza explícitamente para hacer que el alumno alcance el resultado por él esperado. Del *milieu* forman parte también los mismos actores del proceso de enseñanza y de aprendizaje, sus observaciones, sus roles y sus tareas. En su acepción mas general, la idea de *milieu* es explicada en este mismo artículo más adelante desde un punto de vista muy general. (D'Amore, 1999b, 2002b)

en ausencia de toda indicación intencional» (Brousseau,1986, p.49; también está bien ver el análisis crítico de Margolinas, 1995).
Se puede decir que cuando, en la situación, el sistema didáctico se disuelve para permitirle al alumno construir un conocimiento afrontando un problema cognitivo propuesto, se tiene una situación a-didáctica: «las situaciones a-didácticas son las situaciones de aprendizaje en las cuales el maestro alcanzó a ocultar su propia voluntad, su intervención (...). El maestro está allí para hacer funcionar la máquina, mas su intervención en el conocimiento esta prácticamente anulada» (Brousseau, 1987; Margolinas, 1995).
Es como si se interrumpiese la relación maestro - alumno y en su lugar se crease la relación alumno-situación. El alumno no responde más a la demandas del maestro, pero sí a las del *milieu.* El maestro disimula el propio fin didáctico, esconde la propia voluntad de enseñar, con la intención de hacer que el estudiante acepte la situación cognitiva como una carga personal.
Además: el objetivo del maestro es también el de hacer que él mismo, como maestro, no sea el vínculo del aprendizaje: que la situación cognitiva sea conocimiento *inmediato,* desligada de la intención del maestro, esto es, de condicionamientos o presupuestos de carácter personal o ligados al ambiente escolar de aprendizaje.
Es claro y conocido que todo esto, entra en la compleja trama que existe entre *devolución* e *implicación,*[30] para decirlo mas brevemente: situación a-didáctica es aquella situación en la cual se realiza el "pasaje" entre devolución e implicación.
Las dinámicas interaccionales que sobre esto se han diseñado son mas bien complejas y nos llevan, dentro de poco, a la descripción explícita de éstas, lo que nos interesa evidenciar inmediatamente es cómo todas éstas conllevan a la problemática de la institucionalización del conocimiento, de lo cual estábamos hablando al final de párrafo 1. Esto explica por qué era necesario interrumpir el discurso en ese punto para retomarlo ahora con otra perspectiva. Exactamente este continuo ir y venir explica la complejidad sistémica de la cuestión.
Ahora bien, debemos entender a fondo la idea de *milieu* y de *situación* junto con las relaciones que se dan entre estos dos conceptos, recurriendo siempre a esquemas gráficos cuya función, básicamente, es ilustrativa.
Comencemos con el tratamiento de la idea de *milieu* materiales M_5 que constituye el nivel inferior de *milieu*: es el *milieu* objetivo, al cual se ve confrontado un sujeto (actor subjetivo) S_5 empeñado en un problema cognitivo (Margolinas, 1995):

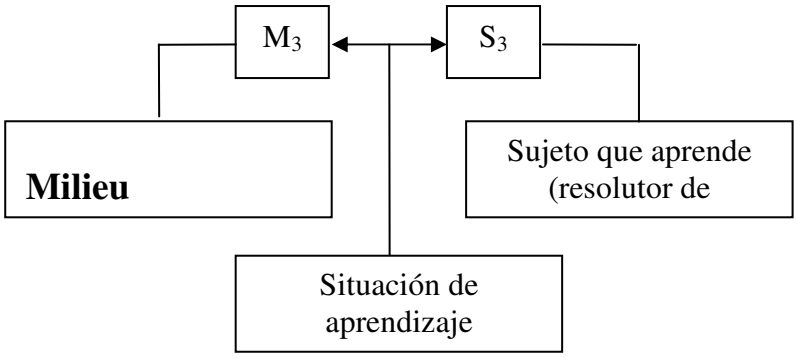


[30] Se llama proceso de *devolución* el acto con el cual el maestro intenta de llevar al alumno a que asuma personalmente la responsabilidad de la construcción del propio aprendizaje. Se llama *implicación* el acto con el cual el estudiante, aceptada la devolución, se empeña personalmente en la tarea propuesta del maestro, mas o menos consciente de que lo que está en juego es la construcción de un saber. (D'Amore, 1999b, 2002b)

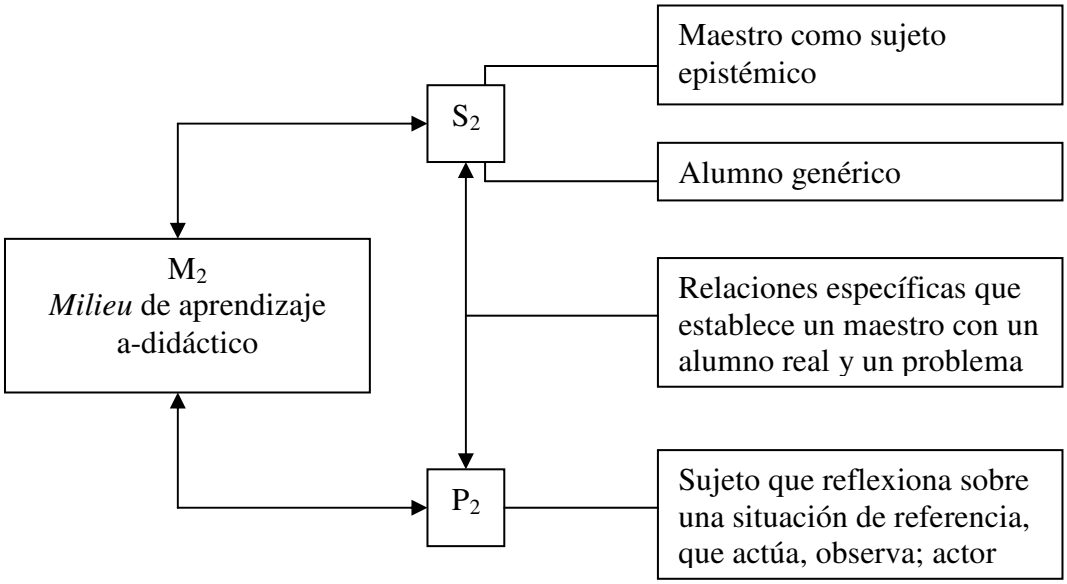
De ahora en adelante llamaremos a este esquema *milieu* objetivo M_4: esto es la pareja (M_5, S_5); el alumno S_4 se encuentra de frente a M_4 e interactúa en una situación de acción con el *milieu* material M_5 y un oponente S_5 con el cual interactúa. S_4 es pues un sujeto que conoce y actúa: puede imaginar y representar S_5, identificarse con él y entender sus puntos de vista:



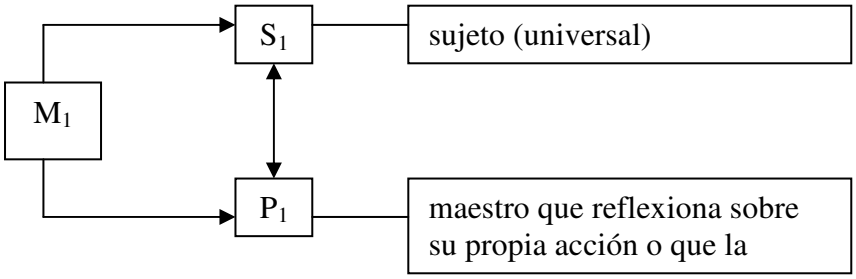
A partir de este momento llamaremos a este esquema *milieu* de referencia M_3; podemos así hacer ampliar el esquema como sigue y con las especificaciones indicadas:



El esquema anterior describe el *milieu* (o situación) de aprendizaje a-didáctico M_2 que es la pareja (M_3, S_3):



Este esquema describe una situación de aprendizaje que sirve sin embargo para un proyecto de enseñanza explícito.
Lo indicaremos con M_1 y lo denominaremos, finalmente, *situación didáctica.*
Este pasaje nos permite llegar al esquema mas complejo, aquel que describe la *relación didáctica*, aquella en el cual se observa, como desde el exterior, qué es lo que sucede:



El maestro prepara su propia acción de enseñar o reflexiona sobre ésta, como desde el exterior, previendo lo que sucederá: su posición P_1 es reflexiva en relación a la situación precedente que constituye para él el *milieu* M_1. (P_1 es similar a lo que llamamos S_3 para el alumno).
Estamos aquí frente a una nueva situación, de carácter meta; y que en efecto llamaremos *situación metadidáctica*, visto que lo que se realiza es un análisis de una situación didáctica: se estudian las relaciones entre M_1, S_1 y P_1 de parte de un observador externo S_0 o de parte de los mismos actores de la relación didáctica.[31]

3. Otras aclaraciones sobre los "elementos" del "triángulo"

Después que hemos profundizado, también desde el punto de vista del desarrollo histórico-crítico, la idea de *milieu,* podemos entrar un poco más en detalle en el estudio de los "elementos" del "triángulo". En este parágrafo pediremos al lector dejar a un lado términos como "teorías de aprendizajes", "epistemología genética", "concepciones" etc., dado que nuestro análisis NO requiere de posiciones en estos campos; esto, de hecho, es también aplicable sucesivamente a elecciones *diversas* en cada uno de los campos. Es obvio que como autores de este artículo tenemos nuestras propias elecciones personales, pero reiteramos que nuestro actual discurso se desarrolla en un ámbito mucho más amplio. Más aún: en estos casos, NO haremos citaciones a fin de evitar direccionar al lector hacia posiciones orientadas y dejar así amplia libertad de referencias.
Para simplificar evitaremos, de ahora en adelante, el uso excesivo de las comillas: es claro que vértice, lado y triángulo son solamente formas de decir.
Por brevedad, sea: S = saber, M = maestro, A = alumno.

■Los vértices

S

[31] En relación con esta exposición y que representa sintéticamente el trabajo de Brousseau en los años 1986-1989, tenemos que decir que en trabajos sucesivos del mismo autor se considera S_2 como "alumno genérico", los niveles S_5 y S_2 son considerados no didácticos, la situación S_3 es llamada "de aprendizaje", sin mas referencias al carácter no didáctico (Margolinas, 1995).

S se caracteriza en un "espacio" de referencias externas (al cual el *milieu* se refiere, por ejemplo en las "fuentes" que caracterizan las elecciones del maestro) que son:

- el histórico
- el epistemológico
- el conceptual (en las diferentes acepciones posibles).

S es entonces una especie de polo de atracción de referencias ontológicas y epistemológicas. No debemos olvidar, sin embargo, las referencias de carácter epistemológico en el sentido psicológico (Moreno Armella, 1999).
Es alrededor de este polo que se sitúa la teoría de los obstáculos epistemológicos.[32]

A
A hace referencia a proyectos culturales o cognitivos personales, pero filtrados por la relación (institucional) de escolarización;[33] pues, su cúmulo de experiencias personales (su "historia de sujeto que aprendió") no está libre de vínculos. El estudio de la situación personal de A en el interior de la situación didáctica fundamental (institucional), implica un análisis de tipo genético y psicológico.
Es alrededor de este polo que se sitúa la teoría de los obstáculos ontogenéticos.
A es pues una especie de polo de atracción de referencia genética y psicológica.
Elementos de fuerte significado parecen ser los estudios relativos a:

- competencia real del alumno (esfera cognitiva y metacognitiva, casos de dificultad) (Ashman, Conway, 1991; Borkowski, 1994; Cornoldi, Caponi, Falco etc., 1995)
- convicciones personales del alumno (esfera motivacional y afectiva) (Cobb, 1985; Nicholls, Cobb, Wood etc., 1990)
- expectativas del alumno (Elliott, Dweck, 1988)
- estilo cognitivo personal del alumno (Gardner, 1993; Sternberg, 1996)

...
De otra parte, aceptando la "ingeniería" como metáfora, es obvio que los siguientes son los verdaderos "pilares" del saber:

- construir el saber sobre la competencia real del alumno y no únicamente sobre lo que se presume

---

[32] Se llama obstáculo todo hecho que se opone al aprendizaje. El estudio de tales obstáculos ha llevado en la década del 80 a distinguir diversas tipologías según la referencia causal. Se llaman "obstáculos ontogenéticos" aquellos cuya causa reside en el alumno (por ejemplo: inmadurez para aprender un determinado concepto, deficiencia, condiciones personales,…); se llaman "obstáculos didácticos" a aquellos cuya causa reside en la elección del maestro (por ejemplo: metodología y didáctica, explicaciones precedentes, materiales usados,…); los "obstáculos epistemológicos" son aquellos cuya causa está en la misma matemática, esto es en el concepto matemático que en ese momento es objeto de aprendizaje. Es ampliamente reconocido que algunos argumentos matemáticos esconden, mas que otros, este tipo de obstáculo; para reconocerlos se puede estudiar la historia de la matemática y la praxis didáctica en el siguiente sentido: un concepto que, en la historia de la matemática, ha causado trauma, revolución o largas discusiones es sin más un obstáculo epistemológico; un argumento que en vasta escala y en modo reiterado lleva a los alumnos a cometer errores similares o repetitivos contiene un obstáculo epistemológico. (D'Amore, 1999b, 2002b)

[33] «Con el término "escolarización del saber" hago referencia a aquel acto, en gran medida inconsciente, a través del cual el alumno, en un cierto punto de su vida social y escolar (casi siempre en el curso de los primeros años de la escuela), delega a la escuela (como institución) y al maestro (como representante de la institución) la tarea de *seleccionar para él los saberes significativos* (aquellos que le son socialmente, por status reconocido o legitimados por la noosfera), renunciando a hacerse cargo directo de esta selección sobre la base de cualquier forma de criterio personal (gusto, interés, motivación,...)». (D'Amore, 1999a)

- construir el saber teniendo en cuenta las convicciones del alumno y no actuando en contra de éstas (pero sí ayudando al estudiante a modificarlas)
- construir el saber respetando las expectativas del alumno o ayudándole a revelarlas
- construir el saber sin contrastar el estilo cognitivo de cada uno, mas aún, se requiere de la caracterización de este mismo.

Si, en el pasaje entre S y el saber a enseñar, el maestro no valora la real "carga" de este "pilar", corre el riesgo de equivocar su previsión sobre la posible aceptación de la devolución (en la espera de implicarse por parte de cada alumno) y como consecuencia condena a sí mismo y al estudiante al fracaso.

M

M hace referencia a proyectos culturales y cognitivos

- personales (basadas sobre la propia experiencia de sujeto que aprendió, que ha tenido acceso a S
- profesionales (basadas sobre experiencias precedentes de sujeto que otorga el saber)
- relativos a convicciones profesionales basados sobre modelos precedentes (por ejemplos construidos como estudiante).

Sobre esto influye de manera notable, aunque a menudo inconscientes, el conjunto de las expectativas pedagógicas implícitas frecuentemente, pero también de las creencias relativas al saber y al conjunto de filosofías implícitas (Speranza, 1992).

M es pues una especie de polo de atracción de referencias funcionales y pedagógicos.

De los estudios sobre el polo M (Arsac, Balacheff, Mante, 1992; Baldini, Santini, 1997; Clark, Peterson, 1986; Cooper, 1991; Fennema, Carpenter, Peterson, 1989; Peterson, 1988; Thompson, 1992; Zan, 2000) se puede evidenciar las siguientes características:

- el rol que asume el maestro en el aula
- el lenguaje del cual hace uso (con varias quimeras influenciadas por las expectativas y del proyecto educativo) (Maier, 1993)
- la conciencia reflexiva sobre su propio "trabajo"
- las propias convicciones
- el análisis personal de la realidad social escolar (no desligada de la noosfera)
- la influencia de estudios y de investigaciónes sobre su propio trabajo y sobre sus propias convicciones.

…..

Es alrededor de este polo que se sitúa la teoría de los obstáculos didácticos.

■Los lados

SA

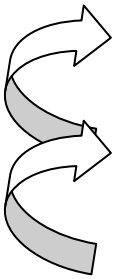
El verbo que domina este lado es: *aprender*. La actividad que domina este lado es: *devolución*.

Los elementos que caracterizan este lado son:

- las diversas teorías de aprendizaje
- la epistemología genética
- el rol y la naturaleza de las concepciones
- la teoría de los obstáculos epistemológicos

...

Al lado SA [desde el punto de vista del maestro, por cuanto es a él quien le atañe, desde una perspectiva profesional, identificar los modos de funcionamiento del sistema] le corresponde las cuestiones de la transposición didáctica y de la ingeniería didáctica, con toda clase de problemáticas comunes que involucra el pasaje de S al saber a enseñar:[34]



A

ingeniería didáctica

saber a enseñar

transposición didáctica

S

Naturalmente, en las decisiones determinantes, sobre todo por cuanto concierne que parte de S tiene que llegar a convertirse en saber a enseñar, tienen un peso notable el currículo y las convicciones del maestro (como lo afirmamos en las citaciones precedentes). Y esto llama en causa la noosfera: las expectativas de la sociedad, sea en sentido general, sea en sentido específico.
Ahora, es claro que no es el maestro quien decide S, como tampoco el saber a enseñar; pero es claro que el maestro es un *interprete* sea de S sea de la decisión en cuestión: su filtro crítico, basado sobre convicciones personales y culturales (aunque implícitas), influencia fuertemente sobre lo que surge como producto final, al A.
El "pasaje":

saber ⟶ saber a enseñar ⟶ saber enseñado

esta condicionado por la misma idea que, a menudo implícitamente, el maestro tiene de transposición didáctica y de ingeniería didáctica y dirige el currículo oficial en dos sentidos contradictorios: como excusa para una falta de responsabilidad en su labor docente o como objeto de análisis.

SM

El verbo que domina este lado es: *enseñar*. La actividad que domina este lado es: *transposición didáctica.*
Los elementos que caracterizan este lado son:

- la transposición didáctica
- las creencias del maestro relativas a:
- alumnos
- saberes
- aprendizaje
- idea de escuela
- objetivos de la educación (en general; matemática en particular)

...

El estudio mas complejo implicado en este lado es aquel relativo a la "epistemología del maestro" [entendida como el conjunto de expectativas, convicciones, saberes etc. que el maestro tiene relacionados con el saber, la escuela, el aprendizaje, la función y el rol de la escuela y de la educación etc. (Speranza, 1997; D'Amore, 2001, 2002a)].

[34] Entre tantas, ésta es una posible interpretación de la "ingeniería didáctica" (D'Amore, 1999b, 2002b).

MA
El verbo que domina este lado es: *animar* (con consecuencias del tipo: *motivar* etc.); lo podemos interpretar como: explicar las implicaciones personales, favorables a la devolución. La ingeniería didáctica tiene un rol determinante también aquí.
Los elementos característicos de este lado son:

- relaciones pedagógicas
- contrato didáctico
- obstáculos didácticos
- evaluación (valorización)
- escolarización
- devolución o falta de devolución

.....
con todas la teorías y las hipótesis teóricas que le acompañan (ver citaciones precedentes).

Sobre todo el triángulo "pesa" la noosfera con sus expectativas, sus presiones, sus elecciones.

4. Conclusiones

Un análisis moderno de esta problemática, en la cual se tienen en cuenta los resultados de los estudios y de las investigaciones en el contexto internacional, de los cuales hasta aquí han sido citados solamente algunos, no podemos prescindir de ulteriores análisis sobre sus polos, sus lados y la estructura misma del triángulo.
En lo concerniente a los *polos*, tienen gran importancia cuestiones relativas a la dialéctica entre motivación[35] y volición[36] en A; las imágenes de la escuela, de las figuras en juego, del saber, de sí.
En lo concerniente a los *lados*, tienen gran importancia cuestiones relativas a la metacognición (que crea expectativas y que influye en la transposición);[37] en particular, todo cuanto concierne a conceptos, estrategias, algoritmos, autoregulación y control; además los juegos del lenguaje en una microsociedad bien determinada y con aprendizaje situado.
En lo concerniente a la *estructura global* misma, tienen gran importancia cuestiones relativas al complejo de las relaciones, a los contratos instaurados, a las expectativas externas, a las teorías de aprendizaje, al sentido dado al término "comprender", al sentido dado al término "saber".
En la microsociedad-clase, según los ámbitos, la problemática de los contextos, puede haber una máxima o mínima relevancia; por ejemplo el pasaje de la tarea y la forma de abordarla, hacia los productos, pasando por los procesos (D'Amore, Zan, 1996).

[35] "Motivación" es la condición para poder realizar algo.
[36] "Volición" es la determinación para hacer algo. La volición es la que transforma una motivación en una acción.
[37] Con el término "metacognición" entendemos aquí su sentido más amplio, el de ser conscientes de sus propias competencias y de tener bajo control sus propias decisiones.

Es importante recalcar, para concluir, que el "acercamiento analítico" sobre los componentes del sistema, sugeridos en estas páginas, no buscan, en caso alguno, no reconocer o intentar reducir la complejidad del problema, la complejidad sistémica del problema, es decir del modelo didáctico. Lo que deseamos mostrar es que es posible un análisis sistemático y minucioso de cada elemento del modelo sistémico con el único objetivo de aislar sus componentes, a fin de poder conocerlas mejor en su especificidad para después restituir a una visión holística los resultados alcanzados de manera tan específica.

Referencias bibliográficas

Arsac G., Balacheff N., Mante M. (1992). Teacher's role and reproducibility of didactical situations. *Educational Studies in Mathematics*, 23.

Artigue M. (1992). Didactic engineering. En: Douady R., Mercier A. (eds.), Research in *didactique* of mathematics: Selected papers (Special issue). *Recherches en didactique des mathématiques*, 12, 41-65.

Ashman A., Conway R. (1991). *Guida alla didattica metacognitiva per le difficoltà di apprendimento*. Trento: Centro Studi Erickson.

Baldini I., Santini S. (1997). Le teorie del successo degli insegnanti di matematica. En: Aschieri I., Pertichino M., Sandri P., Vighi P. (eds.)(1997), *Matematica e affettività. Chi ha paura della matematica?* Bologna: Pitagora.

Borkowski J.G., Muthukrishna N. (1994). Lo sviluppo nel bambino: un modello utile per introdurre l'insegnamento metacognitivo in classe. *Insegnare all'handicappato*, 8, 3.

Brousseau G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques*, 7, 2, 33-115.

Brousseau G. (1987). Les differents rôles du maitre. Conference des P.E.N., Angers.

Brousseau G. (1989). Le contrat didactique: le milieu. *Recherches en didactique des mathématiques*, 9, 3.

Chevallard Y. (1985). *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble: La Pensée Sauvage.

Chevallard Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche antropologique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 12, 1, 73-112.

Chevallard Y., Joshua M.A. (1982). Un exemple d'analyse de la transposition didactique: la notion de distance. *Recherches en didactique des mathématiques*, 3, 1, 159-239.

Clark C.M., Peterson P.L. (1986). Teachers' thought processes. En: Wittrock M.C. (ed.) (1986). *Handbook of research on teaching*. London: MacMillan.

Cobb P. (1985). Two children's anticipations, beliefs and motivations. *Educational Studies in Mathematics*, 16.

Cooper J.M. (1991). Insegnante: un agente decisionale. *Psicologia e Scuola*, 57.

Cornoldi C., Caponi B., Falco G., Focchiato A., Lucangeli D., Todeschini M. (1995). *Matematica e metacognizione*. Trento: Centro Studi Erickson.

D'Amore B. (1999a). Scolarizzazione del sapere e delle relazioni: effetti sull'apprendimento della matematica. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 22A, 3, 247-276.

D'Amore B. (1999b). *Elementi di Didattica della Matematica*. Bologna: Pitagora.

D'Amore B. (2001). *Scritti di Epistemologia matematica. 1980-2001*. Bologna: Pitagora.

D'Amore B. (2002a). *Artículos sobre la investigación en Didáctica de la Matemática.* México D.F.: Grupo Editorial Iberoamérica.

D'Amore B. (2002b). *Elementos de Didáctica de las Matemáticas*. México D.F.: Grupo Editorial Iberoamérica.

D'Amore B., Zan R. (1996). Mathematical Problem Solving. En: Malara N., Menghini M., Reggiani M. (eds.) (1996). *Italian Research in Mathematics Education* 1988-1995. Seminario Nazionale di Ricerca in Didattica della Matematica – CNR. Roma. 136-150. [Una version más amplia en lengua italiana: Contributi italiani sul tema "Problemi" (1988-1995). *La Matematica e la sua didattica*, 3, 1996, 300-321].

Elliot E.S., Dweck C.S. (1988). Goals: an approach to motivation and achievement. *Journal of Personality and Social Psychology*, 54, 1.

Fennema E., Carpenter T.P., Peterson P.L. (1989). Teachers' decision making and cognitively guided instruction: a new paradigm for curriculum development. En: Clements K., Ellerton N.F. (1989). *Facilitating change in mathematics education*. Deakin: Deakin Univ. Press.

Henry M. (1991). *Didactique des Mathématiques*. IREM de Besançon, Besançon.

Gardner H. (1993). *Educare al comprendere. Stereotipi infantili e apprendimento scolastico*. Milano: Feltrinelli.

Maier H. (1993). Problemi di lingua e di comunicazione durante le ore di matematica. *La Matematica e la sua didattica*, 1, 69-80.

Margolinas C. (1995). La structuration du milieu et ses apports dans l'analyse a posteriori des situations. En: Margolinas C. (ed.) (1995). *Les débats de didactique des mathématiques*. Grenoble: La pensée sauvage.

Martini B. (2000). *Le didattiche disciplinari*. Bologna: Pitagora.

Moreno Armella L. (1999). Epistemologia ed educazione matematica. *La Matematica e la sua didattica*, 1, 43 - 59.

Nicholls J., Cobb P., Wood T., Yackel E., Patashnick M. (1990). Assessing student's theories of success in mathematics: individual and classroom differences. *Journal of Research in Mathematics Education*, 21, 2.

Peterson P.L. (1988). Teachers' and students' cognitional knowledge for classroom teaching and learning. *Educational Researcher*, 17, 5.

Speranza F. (1992). Tendenze empiriste nella Matematica. *Quaderni di Epistemologia della Matematica*, CNR, Progetto TID-FAIM, 10, 77-88. [Reeditado en: Speranza F. (1997). *Scritti di Epistemologia della Matematica*. Bologna: Pitagora, 57-64].

Speranza F. (1997). *Scritti di Epistemologia della Matematica*. Bologna: Pitagora.

Sternberg R. (1996). Stili di pensiero. En: Vianello R., Cornoldi C. (eds.) (1996). *Metacognizione, disturbi di apprendimento e handicap*. Hillsdale: L.E.A.

Thompson A. (1992). Researchers' beliefs and conceptions: a synthesis of the research. En: Grows D. (ed.) (1992). *Handbook of research on mathematics learning and teaching*. London: MacMillan.

Zan R. (2000). L'insegnante come solutore di problemi. *La Matematica e la sua didattica*, 1, 48-71.

Agradecemos el amigo y colega Juan D. Godino por una lectura crítica de este trabajo.

Questo articolo è stato pubblicato:
- in portoghese: 455. D'Amore B. (2003). Matemática em algumas culturas da America do Sul: Uma contribuição à Etnomatemática. *Bolema. Boletim de Educação Matemática* (Rio Claro, SP, Brasile). 73-89.
- in italiano: 431. D'Amore B. (2002). Matematica in alcune culture sudamericane. Un contributo all'Etnomatematica. *Bollettino dei docenti di matematica* (Bellinzona, Svizzera). 44, 39-46.

in spagnolo: 476. D'Amore B. (2003). Matemática en algunas culturas suramericanas. Una contribución a la Etnomatemática. *Relime*. México D.F., México. 6, 3, 279-290.

Matemática em algumas culturas da América do Sul
Uma contribuição à Etnomatemática

Bruno D'Amore

Núcleo de Pesquisa em Didática da Matemática
Departamento de Matemática – Universidade de Bologna - Italia

Premisas

Alguns anos atrás, através de um convite do amigo e colega, o Prof. Mario Ferrari, da Universidade de Pavia, ministrei algumas disciplinas junto ao Curso de Graduação em Matemática no Instituto Politécnico de Chimborazo, na cidade de Riobamba, no Equador, com recursos disponibilizados pelo Ministério dos Negócios do Exterior da Itália.
A cidade de Riobamba é a capital do Chimborazo, um dos estados que constituem a Federação do Equador. É uma cidade historicamente famosa, pois ali, em 1830, foi proclamada a independência do Equador. O nome Chimborazo aparece com freqüência na região, pois nela se situa o vulcão do mesmo nome, que é o mais alto da parte norte da cordilheira dos Andes (6267 m). A cidade se encontra num vale entre vários vulcões, sendo Altair o mais ativo dentre todos. Ela foi inteiramente reconstruída após um violento terremoto. Os tremores de terra são muito comuns durante o dia ou à noite, sem que isso cause preocupação alguma. O vulcão Chimborazo aparece em muitas lendas a respeito da criação do homem, à colheita do milho, à preservação dos rebanhos etc., sendo um elemento às vezes masculino, às vezes feminino. Ele é de tal modo visível que foi, inclusive, tomado como referência no trânsito de Riobamba: uma vez que todos os cruzamentos são ortogonais, estabeleceu-se que a preferência é do motorista que, no cruzamento, vê o Chimborazo. Funciona!

O número de aulas que assumi não era muito grande e, além disso, os meus cursos aconteciam nos primeiros dias da semana. Dessa forma, tive a oportunidade de viajar pelo Equador, ainda mais por ter meios de locomoção muito eficientes à minha disposição.
Isto me permitiu entrar em contato durante meses com os habitantes de pequenos vilarejos construídos em altitudes de até 4000 m: Cuatro Esquinas, San Francisco,... Também pude visitar escolas de língua quéchua (do tronco andino, não da costa, o que é

muito diferente), visitar comunidades de língua *shuar*, subir o rio Napo, em plena Amazônia.

Subir o rio Napo não é uma coisa tão banal como poderia acreditar um turista europeu acostumado a todas as comodidades, até mesmo a de subir nas montanhas somente se existir um teleférico seguro. Pode-se ir de Riobamba até Penipe, Puyo e depois Tena, de automóvel ou de ônibus. Entretanto, as "estradas" são tais que todos me desaconselharam a ir de automóvel; aliás, todos me desaconselharam a ir. São regiões sujeitas a grandes e freqüentes desmoronamentos, onde há precipícios incríveis, e não existe qualquer tipo assistência ou recurso. Não há delinqüência, mas inúmeras dificuldades objetivas. Acrescente-se ainda, que não há nenhuma placa indicativa para auxiliar o motorista. Encontrar um mapa no Equador não é uma coisa trivial. Os mapas são vendidos somente nos Institutos Geográficos Militares e, conseguir um deles – obviamente pagando – apesar de ser um turista estrangeiro, não é automático. Consegui realmente um mapa, após muito insistir, mas tive que ir a Quito e ser submetido a um longo interrogatório. No mapa oficial da Federação, existem duas fronteiras com o Peru, aquela estabelecida pelo assim chamado Tratado do Rio de Janeiro de 1942 e aquela reivindicada pelo Equador, que foi palco de uma verdadeira guerra em 1946, pela conquista de uma vasta região de florestas onde há petróleo com certeza. Existem aí populações indígenas misteriosas, certamente indiferentes a ambos os beligerantes e ao petróleo.

Voltemos à viagem de Riobamba ao rio Napo. Ir de Riobamba a Tena significa trocar de ônibus em cada estação, viajando centenas de quilômetros entre uma e outra. Algumas "estações" são incríveis: pequenas, muito coloridas e frenéticas, pululantes de uma humanidade multicor e multiforme. O ônibus vai se tornando cada vez menor, mais precário e mais... cheio, mas não apenas de seres humanos: frutas, verduras, pães, tecidos, mercadorias diversas e animais em quantidade, galinhas, porcos, cachorrinhos,... Um animalzinho um pouco maior que um *hamster* era talvez o mais comum; era chamado por um som parecido com "cuí", mas não sei como se escreve; bastava mencioná-lo para ver meus companheiros de viagem ficar com água na boca. (Eu mesmo o comi assado, por duas vezes, após algumas semanas, em jantares festivos).
Em Tena não há mais qualquer tipo de "estrada", apenas trilhas, que podem ser percorridas em pequenos "bus" muito interessantes, aparentemente em péssimas condições, mas muito velozes. Chega-se então a Puerto Misuhallí, último reduto onde existam casas, estalagens e... lugares públicos para jogos de apostas sobre partidas de futebol do campeonato italiano. Pouco depois de Puerto Misuhallí existe um posto policial onde é preciso entregar o passaporte e uma declaração, por escrito, contendo a relação dos parentes a serem avisados em caso de não voltar. Ali você é avisado de que pode prosseguir, mas por sua conta e risco. Perguntei-me várias vezes se não é um achado turístico, uma vez que, em momento algum, tive a impressão de correr algum sério perigo.
Em um certo ponto terminam também as trilhas porque a floresta se torna impenetrável. Através do rio Napo, pode-se continuar em canoas motorizadas, com um guia (nesse meio tempo mudamos de estado e entramos no estado do Napo, que é muito grande, embora com uma densidade populacional incrivelmente baixa). Ao longo das margens do rio pude encontrar tribos dedicadas à busca de fragmentos de ouro (a lama do rio é

cheia deles), à colheita de frutas e também desocupados: a natureza é tão rica que permite viver em tranqüilidade absoluta sem muitas preocupações. Encontrei também várias latas vazias de nafta, muitas de coca-cola, mas não muitos outros vestígios de "civilização". Pode ser interessante saber que alguns membros de uma tribo vivem completamente nus em um ambiente que possui um teor de umidade completamente inacreditável. Toda a região vive num barulho contínuo e ensurdecedor, produzido pelas águas tumultuosas do rio Napo que corre velozmente por muitas centenas de quilômetros, antes de desaguar no rio Amazonas. A esse ruído, entretanto, qualquer um acaba por se acostumar bastante rápido. O rio Napo é enorme: é tão imenso que, em alguns pontos, quase não se vê a margem oposta. Chegando a um vilarejo, situado numa ilha bastante grande, onde crianças me presentearam com frutas desconhecidas – flocos como de neve muito doces, envolvidos por uma dura casca marrom – indaguei a respeito da razão pela qual vivessem em cabanas altíssimas com relação ao solo e, portanto, incômodas (de fato, os anciãos, por exemplo, precisam fazer uma difícil escalada para entrar em casa). A resposta que obtive foi a seguinte: "Mas senhor esta ilha se chama anaconda", sem nenhum comentário adicional. A partir daí, comecei a caminhar olhando constantemente para o chão.

Os meus contatos aconteceram então tanto com indígenas analfabetos de etnias muito variadas, como com professores bilíngües (de língua quéchua e espanhola), e também com intelectuais (Quéchua e *Shuar*) realmente preocupados com o difícil problema da preservação das respectivas culturas.

Naturalmente, ocupei-me principalmente com questões relacionadas à matemática, muito embora naqueles ambientes e naquelas circunstâncias, fosse muito difícil separar a matemática da vida quotidiana e de interesses culturais mais amplos.

Fiquei prometendo-me relatar tal experiência, como contribuição a uma disciplina com a qual não trabalho enquanto pesquisador, mas que me atrai enquanto leigo e curioso: a Etnomatemática (D´Ambrosio, 1990, 1996, 1999). Como sempre ocorre, os anos foram passando e o tempo disponível para essas reflexões parecia, ano após ano, cada vez mais reduzido. Mas...

Nos primeiros dias de maio de 2001, em Chivilcoy, Argentina, conheci pessoalmente Ubiratan D´Ambrosio, o "pai da Etnomatemática", sendo que éramos ambos presidentes honorários em duas sessões de um Congresso internacional, cujo tema geral era a Didática da Matemática. A simpatia e a convergência das idéias foram instantâneas, tanto que logo nasceu uma colaboração com visitas recíprocas. Durante um passeio, tomando um café num lugar freqüentado por Italianos, contei-lhe minha experiência no Equador e do meu intento, mais cedo ou mais tarde, de escrever a respeito das minhas impressões sobre a viagem. Gentilmente, mas com muita convicção, estimulou-me a fazê-lo o quanto antes, convencendo-me por completo.

Eis, portanto, o contexto no qual me proponho a escrever as minhas impressões, que estão muito vivas na lembrança, inclusive devido ao grande número de anotações feitas naqueles dias.

Entretanto, o leitor, buscando pura matemática, ficará um tanto decepcionado, uma vez que não consigo eximir-me de fazer considerações de caráter pessoal, comentários sociais, antropológicos, geográficos etc. Por outro lado, o próprio Ubi D´Ambrosio nos explicou que *essa* é uma das características da Etnomatemática, uma mistura constante de fatos matemáticos ligados à vida quotidiana, vivenciados e emaranhados com

experiências pessoais; é *também* isso que torna a matemática um fato social, humano, diário.

Antes de começar, quero registrar uma pequena observação a respeito do nome próprio "quéchua".
A ignorância geográfica e histórica dos Europeus relativamente àquela parte da América, que está ao sul dos USA, é imensa e inacreditável aos olhos de um americano (e aos meus). Ao falar sobre um dos Países que vão de Honduras até a Argentina, o europeu demonstra não conhecer a imensa vastidão do território, as fronteiras, os oceanos... E o que dizer sobre as cidades! Até mesmo as capitais são confundidas e trocadas de país – muitas vezes, ouvi colocar Bogotá na Bolívia; seria como colocar Paris na Grécia. É pior, muito pior, quando se fala de cidades que não são capitais e de povos nativos, cujos nomes são vagamente conhecidos na Europa: os Astecas e os Incas são atropelados, trocados ou misturados, os pobres Maias que... estão no meio, têm papéis históricos incrivelmente variáveis. Fazer confusão entre a história cultural ou social asteca e inca, em termos de distâncias históricas e geográficas, é análogo a confundir os Romanos com os Vikings. Aliás, é pior.
Entretanto, quem viajou pela parte norte da América do Sul geralmente, no final, sabe que os Incas foram os dominadores de um império muito grande que subjugou nações inteiras, entre elas a dos Quéchuas (que deveria ser escrito "Qichwa" ou mesmo "Qeshwa", a fim de tornar o som mais parecido com o correto). Mesmo na Itália, quem viajou pelo norte da América do Sul sabe que a palavra "quéchua" denomina uma população nativa, anterior à dominação inca, que, hoje em dia, se encontra mais presente entre a Venezuela e a Bolívia; tal palavra indica também a língua daquela população, respeitadas as diferenças regionais, sobretudo entre regiões andinas e litorâneas.
São muito poucos os que sabem que "quéchua" em língua quéchua indica tão somente uma região temperada da Sierra, isto é, da parte montanhosa, compreendida entre as altitudes de 800 a 2000 m. Quando os rudes invasores espanhóis – que vieram para a matar e depredar aquelas populações – ouviram falar daquelas regiões, acreditaram que os nativos se referiam a si próprios e à sua língua. Assim, "quéchua", como referência a uma população e a uma língua é, mais uma vez, o resultado da ignorância do povo bárbaro que conseguiu impor com a força e a violência o próprio poder obtuso. Esses povos, que viviam no Tawantinsuyu – o território das quatro regiões – se autodefiniam como "runa", isto é, "homens" – como se encontra em diversas civilizações – e denominavam sua língua "runasimi", isto é, "linguagem dos homens".
A violência, entretanto, foi tamanha que, hoje em dia, os próprios *runa* não conhecem esse nome e se denominam eles próprios "Quéchuas", bem como à própria língua. Apenas em casos especiais e raros, encontrei intelectuais que sabiam a história desses antigos nomes, sem terem, entretanto, nenhuma esperança, motivação ou vontade, de restaurá-los. Em outras regiões do mundo, a situação é um pouco diferente, quando examinamos questões análogas. Os atuais Inuik, por exemplo, recusam, indignados e aborrecidos, a denominação "esquimós" que consideram – com propriedade – ofensiva. Existem muitos outros casos análogos no mundo.

Números quéchua e musicalidade

Observei mais de uma vez que quando um quéchua conta uma história em sua língua, ele tem tendência a ... cantá-la. Ele não se limita a fazer uma narração, mas acrescenta uma sonoridade que eu não hesitaria em chamar "música". E não é apenas isso: ele faz o acompanhamento dessa narração musical com lentos movimentos do corpo, sem nenhuma vergonha, mesmo andando pela rua. O fato interessante é que o mesmo ocorre se o quéchua pronuncia a sucessão dos números: ele acrescenta uma sonoridade que parece ter a função de uma ladainha e/ou um fio condutor favorecendo a memória.
A numeração quéchua não tem qualquer exceção lingüística, como acontece em italiano, espanhol ou português.[38] A fim de mostrar isso claramente, apresento uma tabela com quatro colunas com os primeiros vinte numerais, a partir de um, nas quatro línguas mencionadas.

italiano	**espanhol**	**português**	**quéchua dos Andes**
uno	uno	um	shuc
due	dos	dois	ishcai
tre	tres	três	quimsa
quattro	cuatro	quatro	chuscu
cinque	cinco	cinco	pichca
sei	seis	seis	sucta
sette	siete	sete	canchis
otto	ocho	oito	pusac
nove	nueve	nove	iscun
dieci	diez	dez	chunca
undici	once	onze	chunca shuc
dodici	doce	doze	chuanca ishcai
tredici	trece	treze	chunca quimsa
quattordici	catorce	quatorze	chunca chuscu
quindici	quince	quinze	chunca pichca
sedici	dieciseis *	**dezesseis ***	chunca sucta
diciassette *	diecisiete	dezessete	chunca canchis
diciotto	dieciocho	dezoito	chunca pusac
diciannove	diecinueve	dezenove	chunca iscun
venti	veinte	vinte	ischcai chunca

Note-se a regularidade lingüística da formação dos nomes dos números entre 11 e 19 que, em português e espanhol ocorre a partir do número 16, enquanto que, em italiano, a partir do 17; na língua quéchua não há irregularidade alguma, o que simplifica a ladainha e algumas questões aritméticas, como vou mostrar adiante.
Quero também lembrar que na língua quéchua se o nome de um algarismo está antes do 10 é uma multiplicação. Por exemplo, *pusac chunca* é oito (vezes) dez, ou seja, 80; se vem depois, é uma adição; no mesmo exemplo, *chunca pusac* é dez (mais) oito, ou seja, 18.

[38] Acrescentamos a língua portuguesa, onde o ocorre o mesmo fenômeno. (N.T.)

Operações aritméticas realizadas mentalmente

Escrevi nas premissas que, em algumas ocasiões, encontrei analfabetos quéchuas.
Eu tinha a proibição explícita de transportar quem quer que fosse no carro colocado à disposição pela embaixada italiana. Entretanto, por lá é muito freqüente o sistema de "pedir carona", mediante pagamento, visto a escassez dos meios públicos de transporte nas zonas rurais, que estão sempre a mais de 3000 m de altitude, uma vez que Riobamba situa-se num amplo vale. Assim sendo, era normal para mim, ignorando a proibição, levar até mesmo famílias inteiras, transportando-as para lugares distantes, para grande surpresa delas, por um *sucre*, a moeda local que, na época, equivalia a 9 liras italianas.[39] Recusar totalmente o pagamento teria sido ofensivo; normalmente, o preço era combinado entre as partes, muitas vezes após longas discussões.
Isso me permitiu visitar vilarejos de contos de fada, literalmente fora do mundo, sem eletricidade, água corrente, mas com uma dignidade que, para muitos de nós, seria totalmente auspiciosa. Dessa forma, fui convidado à inauguração de um pequeno canal de irrigação cavado a mão e de um banheiro público primitivo; à discussão sobre a instalação dos postes para a energia elétrica (que depois foi suspensa devido à morte inesperada de uma jovem senhora do vilarejo: o desespero foi celebrado com uma bebedeira coletiva, homens e mulheres, que durou dois dias pelo menos); participei do funeral de um recém-nascido; na confecção de um tapete (sobre isso voltarei de maneira mais explícita adiante); fui, por duas vezes, convidado para o ritual de troca de presentes, ganhando em ambas alguns ovos... Numa dessas ocasiões, a troca ocorreu numa habitação muita limpa, feita de ramos e folhas, firmados entre si com esterco de animais; o espaço útil era dividido em duas partes, sendo uma delas reservada aos seres humanos e, a outra, aos seus animais. O ritual da troca com ovos era razoavelmente complexo, mas por sorte eu havia sido advertido antes. Os ovos que me eram dados deviam ser recusados pelo menos uma vez, para depois serem aceitos. Entretanto, um pouco antes do final da troca devia-se ficar com somente um ou dois e devolver os outros. Essa restituição era muito apreciada e não era ofensiva. Por outro lado, aqueles ovos constituíam a base do sustento da família inteira para vários dias. Presentes apreciados em troca de um ou dois ovos eram: farinha de trigo ou de milho, açúcar branco ou mascavo, arroz, canetas esferográficas (algumas canetas com tampa dourada tiveram um grande sucesso).
Poderia contar muito sobre essas aventuras, mas quero me restringir preferencialmente aos aspectos matemáticos.
Uma vez então, levei a um vilarejo, situado a mais de 4000 m de altitude, uma família que havia levado para a cidade (Riobamba) seus produtos manufaturados de lã e estava voltando para casa, após três dias (haviam dormido duas noites pelo caminho), com um pouco de dinheiro, um pouco de provisões e muito material não vendido. O chefe da família, brilhante conversador, e eu simpatizamos logo e assim foi fácil começar a conversar sobre a matemática, ou melhor, sobre a aritmética. O homem era evidentemente analfabeto, mas isso não significa que não soubesse fazer contas. A aritmética estava presente de mil maneiras em seu trabalho e ele não possuía instrumentos para fazer cálculos e, mesmo que tivesse papel e lápis, não os saberia usar.

[39] Uma lira italiana corresponde a R$0,00101 - setembro de 2001. (N.T.)

Simplesmente, ele fazia as contas mentalmente, através de uma espécie de ladainha incompreensível e musical, ao final da qual fornecia o resultado, com exatidão, como pude verificar, utilizando, porém, papel e caneta.
É justamente a estrutura nominal dos numerais que ajuda os quéchuas nessa habilidade, através de truques que são transmitidos de uma geração para a outra e que têm a ver com as propriedades da aritmética posicional.
Por exemplo, a adição 37+48 é decomposta em *quimsa chunca canchis* mais *chuscu chunca pusac*, o que significa *canchis chunca* (70) mais (*canchis* mais *pusac*) que resulta 70 mais outro *chunca* e um *picha* (portanto 85). Observe-se que, como tentei colocar aqui, o jogo acontece todo baseado na linguagem e não sobre um insistente formalismo. Naturalmente, é preciso lembrar resultados de cabeça.
Ainda é claro que a coisa fica mais complicada quando os números são maiores do que cem, mas trata-se apenas de nomes e não de relações complicadas.
Se se quer multiplicar 85 por 13, quebra-se o 13 em 10 e 3 e utiliza-se a propriedade distributiva; para fazer 85 vezes 10 é fácil, mas, para fazer 85 vezes 3, reparte-se o 85 em 80+5 e continua-se. Naturalmente, isso necessita da memorização do que seriam as "tabuadas para todas as operações". Como disse uma professora de uma escola de zona rural (os alunos de todas as séries iniciais juntos numa mesma classe), que visitei nas margens de um lago (46 crianças!), as tabuadas são fundamentais na própria cultura quéchua e não opcionais como em outras culturas. Essa professora, muito jovem, me disse que muitas crianças, ao final da escola básica, continuarão analfabetas, e voltarão aos seus vilarejos de origem, situados em altitudes impossíveis, para viver como criadores, camponeses, pequenos artesãos. A memorização das tabuadas e dos nomes dos números será para eles fundamental, para toda a vida, mais do que saber ler ou escrever. (Lembro ainda a doçura daqueles rostinhos sorridentes).

Novos nomes aos números Shuar

Durante uma das minhas incursões tive a grande sorte de conhecer um grupo de intelectuais *Shuar* aos quais o governo federal havia dado a incumbência de tentar salvar o que ainda restava de uma cultura em declínio. Esse declínio é tão evidente que já não existem pessoas idosas que lembrem os números além do 5. [Algo semelhante me aconteceu com nômades de origem *Ron*, acampados perto de Bologna, quando confiei a um estudante de Pedagogia, alguns anos atrás, a tarefa de reconstruir a cultura aritmética do grupo, como trabalho final de graduação. Ninguém na tribo lembrava os nomes dos números além do 3; conseguimos apenas estabelecer que "três" significava também "vários" e que "mil" era algo como "quase infinitos"].
Esses *Shuar* contaram-me uma coisa que me pareceu inacreditável; espero conseguir registrar aqui o sentido de minha emoção intelectual. Os nomes *shuar* de 1 a 5 são então:

1 chikchik
2 jimiar
3 menaint
4 aintiuk
5 ewej

É preciso esclarecer que essas palavras *escritas* são apenas o resultado de uma tentativa de mostrar os *sons* correspondentes em espanhol dos nomes *shuar* dados aos números de 1 a 5, uma vez que não existe língua *shuar* escrita.
Nesse ponto, deve-se decidir nomear os números sucessivos, de 6 em diante. Os amigos *Shuar* me contaram que, justamente alguns meses antes, fora decidido que seriam utilizados os mesmos sinais aceitos quase que universalmente, os algarismos hindu-arábicos, como fizeram os quéchuas. Mas e os nomes, quais seriam?
Decidiu-se então colocar nomes extraídos da linguagem quotidiana *shuar*, mas de maneira tal que fosse possível lembrar o *formato* dos algarismos:

- eis pois, que seis, 6, se torna: *ujuk*, ou seja, rabo de macaco, já que o formato do algarismo 6 lembra, com efeito, o rabo erguido de um macaco;
- sete, 7, se torna *tsenken*, que é o nome que os camponeses dão a um gancho especial utilizado para colher frutas e que tem o formato de um 7;
- oito, 8, se torna *yarush*, ou seja formiga rainha, uma vez que o formato do 8 lembra a forma do seu corpo, sem as pernas;
- nove, 9, é *usumtai*, ou seja indicador da mão direita; de fato, talvez nem todos os Europeus saibam que, em alguns países da América, quando se recita a ladainha dos números de 1 em diante com movimento dos dedos, não se começa como na Europa pelo polegar da mão direita, mas pelo mínimo da mão esquerda, assim que, ao chegar ao 9, levanta-se justamente o indicador da mão direita; outra interpretação *shuar* é que o algarismo 9 lembra um indicador (o arco inferior do 9) que sai da mão fechada (a bolinha do 9).

Fiquei me perguntando se essa maneira de atribuir nomes aos números já não tivesse sido utilizada por populações mais antigas das quais não temos mais pistas. Dessa forma, a palavra "quatro" significou sabe-se lá o que na língua fenícia ou em alguma língua hindu-européia!

Mais por curiosidade do que por qualquer outra coisa, pode ser interessante saber que:

- 10 se diz *nawe*, ou seja, pé; com efeito, para contar além do dez, uma vez que os dedos das mãos não são mais suficientes, precisa-se utilizar os dedos do pés;
- 100 se diz *washim*, ou seja armadilha para peixes: com referência mais ao conteúdo esperado do que à forma;
- 1000 se diz *nupanti*, ou seja muito, como esperado que antes ou depois acontecesse;
- e, finalmente, um milhão é *amuchat*, ou seja, quase impossível de contar.

Sistemas posicionais em diferentes bases

Tanto a numeração quéchua dos Andes, bem como a da Amazônia ou a do litoral são em base dez. Assim também as numerações *aymara* e várias outras são em base dez. Entretanto, não faltam tradições de base cinco ou dois, ou melhor, de uma mistura das duas.
Na língua *chachi*, observe-se a função do 5 como base:

1 main

2	pallu
3	pema
4	taapallu
5	manda
6	manchismain
7	manchispallu
8	manchispema
9	manchistaapallu
10	paitya

O análogo em língua *wao* é o seguinte:

1	aruke (1)
2	mea (2)
3	mea go aruke (2 e 1)
4	mea go mea (2 e 2)
5	emenpuke (5)
6	emenpuke go aruke (5 e 1)
7	emenpuke go mea (5 e 2)
8	emenpuke mea go aruke (5 e 2 e 1)
9	emenpuke mea go mea (5 e 2 e 2)
10	tipempuke

Na língua *wao* percebe-se a mistura entre as bases 2 e 5.

Calculadoras mais ou menos portáteis

Cañar é um estado no centro do Equador com uma capital homônima extraordinária, em um local arqueológico inca, Ingapinca, realmente fantástico, pouco freqüentado por turistas devido à real dificuldade de acesso.
O mundo das tribos do Equador está maravilhosamente repleto de calculadoras. Por outro lado, a *taptana cañari*, que é derivada de uma máquina mais antiga, que se tornou obsoleta, é utilizada na escola básica no estado do Cañar; a *yupana* parece ainda ser conhecida no Peru; o ábaco *nepohualtzeintzin*, que provém da civilização asteca, também é utilizado.

O tapete

Numa região situada relativamente a poucos quilômetros de Riobamba, no Planalto do Guano (o significado é óbvio) que tem como centro principal Guano, há uma grande concentração de artesãos têxteis que confeccionam tapetes com diferentes tipos de lãs (de animais muito diferentes que nós, Europeus, chamamos todos da mesma maneira: llamas, pronunciando inclusive mal, como se tivesse um único "l"). Os tapetes não estão à venda para pessoas, uma vez que existem compradores fixos: são exportados e

vendidos nos USA. Sei que ninguém irá acreditar, mas os desenhos de tais tapetes são extremamente pobres, evidentemente aqueles escolhidos pelos futuros compradores. É a tremenda lei do mercado. As figuras mais comuns são: imagens do dólar (um S com dois riscos verticais), o Pato Donald e outros personagens, entre os quais rostos de presidentes dos USA. Fiquei surpreso e toda a minha fantasia cultural em favor de imagens autóctones foi derrubada quando descobri que a situação era a mesma junto a todos os artesãos. O mesmo, aliás, pode ser dito com relação à confecção de jóias em ouro, que é tradicional em algumas cidades dos Andes.

Poucas semanas antes, eu havia visitado o Museu de arte pré-colombiana, que é privado, junto ao Banco Nacional em Quito, e tinha visto, pelo contrário, como uma desforra dos luxos estéticos de um passado glorioso, destruído primeiro pela ganância européia, agora dos americanos, com imagens estupendas do deus serpente, imagens muito belas, muito coloridas, fascinantes, misteriosas, mas também muito... matemáticas. Uma das serpentes divinas das tradições andinas pré-incas está enrolada sobre si mesma em espirais não concêntricas, numa forma elegante, cheia de fascínio. Por sorte havia feito um esboço que estava comigo.

Discuti com mais de um artesão a respeito de sua disponibilidade para fazer um tapete com aquela figura, mas todos me diziam que não era possível sem dizer exatamente porquê; a recusa era evidentemente de caráter econômico. Fazer um tapete com aquelas características, fora dos esquemas, era um desperdício de tempo e de energia, e em troca do que? Nenhum, mas nenhum mesmo dos artesãos, nem de seus familiares (que chegavam em grande número, assim que meu rosto europeu aparecia nas lojas, que também eram moradias) jamais havia visto aquela imagem e nenhum deles suspeitava que estivesse relacionada às populações indígenas nativas, a uma história fascinante do próprio passado.

Finalmente encontrei um artesão curioso que aceitou, desde que eu fizesse o desenho que seria confeccionado no tapete, em escala 1:1, no papel.

Foi assim, que nos dias seguintes, comprei em Riobamba várias folhas de papel quadriculado, unindo-as com fita adesiva até alcançar as dimensões desejadas para o meu tapete. (2 m × 1,2 m). Com uma paciência infinita e fazendo vários rascunhos, desenhei no papel o símbolo do poder pré-inca, a serpente enrolada sobre si mesma, escolhendo inclusive a cor das diferentes partes.

Feliz como nunca, voltei ao artesão que ficou apaixonado pela coisa, quis saber de tudo, fez cálculos mentalmente sobre os materiais necessários, o tempo a ser gasto, os custos, a respeito dos quais, todavia, não quis se manifestar. Quis também seguir o corpo da serpente enrolada, com o dedo, como se fosse um labirinto. Foi, sem dúvida, um momento mágico.

Trabalhando o tempo todo em duas pessoas, o tapete foi confeccionado em dois dias e custou tão pouco que fiquei na dúvida, que permanece até hoje, de que foi uma homenagem ao meu entusiasmo, não certamente uma verdadeira recompensa pelo trabalho realizado.

Buscando sempre a matemática, perguntei ao artesão, com todos os cuidados, por qual razão precisara do meu desenho em escala 1:1; insinuei delicadamente que talvez se eu o tivesse feito em menores dimensões, teria sido difícil para ele calcular as medidas finais com as devidas proporções... Tive uma resposta totalmente inesperada; ele me disse que se eu tivesse dado o meu desenho minúsculo, ele teria conseguido igualmente realizar o trabalho, mas que havia pedido o desenho em tamanho natural somente para me tranqüilizar, achando que eu não teria confiado nele se assim não fosse. Afinal, para

passar de 10 cm para 1,2 m, basta multiplicar cada "linha" (assim disse ele) por 12, não é mesmo? A minha preocupação, devida às inúmeras recusas anteriores, havia sido interpretada como receio e desconfiança em relação a ele. Em lugar de irritá-lo, essa minha atitude o havia deixado comovido... A fim de que eu não ficasse muito ansioso, e não por ignorância em matemática, me pedira o desenho em escala 1:1... Não é necessário dizer que naquela noite jantamos juntos, bebendo *cerveza* além de qualquer limite suportável. Contei-lhe que sou matemático e confessei-lhe que nunca havia desconfiado de sua habilidade em meu campo, uma vez que já havia tido a oportunidade de verificar e apreciar a prontidão e a competência matemática das pessoas. Receio que não acreditou.

Futuro dos meus quatro alunos após a graduação

Duas das disciplinas que eu ministrava eram para apenas 4 estudantes, inscritos no quarto ano do curso de graduação em Matemática e que portanto depois de dois anos estariam graduados (o curso de graduação em Matemática em Chimborazo tem 5 anos de duração).
Um dos quatro, o mais velho, era cantor de profissão; cantava em *peñas*, em festas, etc., a fim de ganhar algum dinheiro, sendo que tinha família (mulher, filhas etc.).
Dois outros, os mais jovens, com evidente ascendência indígena, eram apenas estudantes, e realizavam pequenos trabalhos eventuais.
O último, de idade indefinida, muito taciturno, era um verdadeiro indígena: vivia na tribo, distante da cidade, ninguém sabia onde dormia; vestia sempre uma túnica curta branca, tinha os cabelos muito compridos, presos num rabo de cavalo, e sempre usava chapéu. Isso lhe era permitido, mesmo nas aulas, uma vez que era um costume da tribo.
Todos eram muito curiosos, ansiosos por particularidades, com disponibilidade para realizar tarefas em casa; faziam anotações e estudavam para a aula seguinte, estando sempre presentes. Um sonho para um professor.
Todos eram muito bons e já haviam planejado ser professores em Chimborazo, após um período de especialização, possivelmente na Itália.
Assim aconteceu com os dois mais jovens que estiveram na Itália mais de uma vez, em Pisa e em Pavia, até mesmo por longos períodos e que atualmente são docentes no Instituto Politécnico.
O cantor, após a formatura, decidiu seguir a profissão de cantor e abandonou a matemática.
O índio desapareceu literalmente. Após a formatura ninguém soube mais nada a seu respeito. Apesar das inúmeras tentativas para estabelecer algum contato com ele, o resultado foi sempre o mesmo: nada! Há rumores no Chimborazo de que ele tenha voltado para sua tribo e que esteja vivendo do cultivo de um pedacinho de terra, mas ninguém conseguiu confirmar.

Bibliografia

D'Ambrosio U. (1990). *Etnomatemática*. São Paulo (SP): Ática ed. IV edição: 1998.
D'Ambrosio U. (1996). *Educação matemática*. Campinas (SP): Papirus. VII edição: 2000.

D'Ambrosio U. (1999). *Educação para uma sociedade em transição*. Campinas (SP): Papirus.

Tradução: Maria Cristina Bonomi Barufi

D'Amore B. (2003). La complexité de la noétique en mathématiques ou les raisons de la dévolution manquée. *For the learning of mathematics*. 23, 1, 47-51.

La complexité de la noétique en mathématiques ou les raisons de la dévolution manquée [40]

Bruno D'Amore

N.R.D.
Nucleo di Ricerca in Didattica della Matematica
Dipartimento di Matematica
Università di Bologna
Italia

Facoltà di Scienze della Formazione
Libera Università di Bolzano
Freie Universität Bozen
Bressanone - Brixen (Bz)
Italia

Resumé. Ce travail s'inspire aux études dont Raymond Duval (1988a,b,c, 1993) a été indiscutablement le pionnier, et il se situe dans le filon des recherches du NRD de Bologne, ces dernières visant à retracer et à mettre en évidence les différentes hypothèses visant à expliquer la dévolution manquée (Perrin Glorian, 1994), et donc les processus en jeu dans la scolarisation du savoir mathématique (D'Amore, 1999a). Ce travail s'inscrit dans la ligne des recherches sur les notions de "concept" et "d'objet" en mathématiques (D'Amore, 2001).

Summary. This study derives inspiration from the original discussions of Raymond Duval (1988a,b,c, 1993), and forms part of the research being done by the NRD of Bologna University. It attempts to draw out and to substantiate the diverse hypotheses that lie at the foundations of unsuccessful devolution (Perrin Glorian, 1994), and therefore also at the foundations of the schooling of mathematical awareness (D'Amore, 1999a), exploting topics of research about "concepts" and "objects" in mathematics (D'Amore, 2001).

Sumario. Este trabajo se inspira en los estudios en los que ha sido pionero indiscutible Raymond Duval (1988a,b,c, 1993), y se sitúa en la línea de investigación del NRD de Bolonia, que busca localizar y evidenciar las diferentes hipótesis que se hallan en la base de la falta de devolución (Perrin Glorian, 1994), y por lo tanto en la base de la escolarización del saber matemático (D'Amore, 1999a), aprovechando de temas de investigación sobre "conceptos" y "objetos" en matemática (D'Amore, 2001).

1. Concepts et objet en mathématique

Tout concept en mathématique:

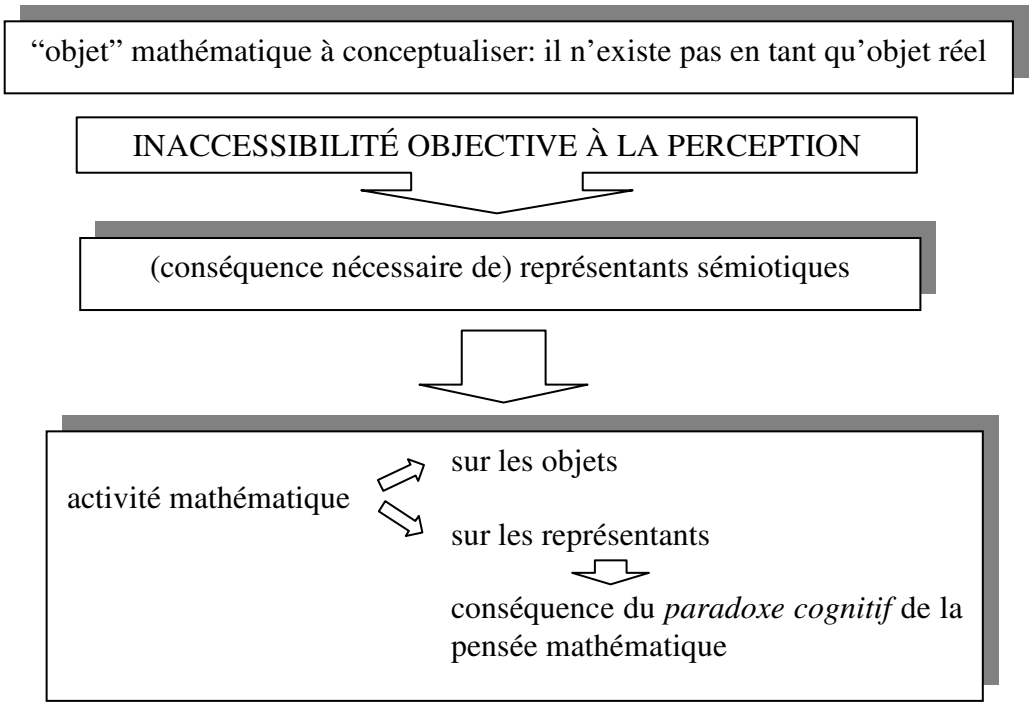
- se réfère à des "non-objets"; la conceptualisation n'est donc pas fondée sur des significations se réferant directement aux réalités concrètes et ne peut pas l'être; en d'autres mots, les références ostensibles ne sont pas possibles dans les mathématiques
- doit être rendu accessible par représentations sémiotiques variées; vu l'absence d' «objets réels» que l'on pourrait montrer, observer, manipuler ou évoquer, la

[40] Travail exécuté dans le cadre du Programme de recherche locale de l'Unité de Bologna (ex 40%) financié par l'Université de Bologna et par le Ministère de l'Université et de la recherche: *Recherches sur le fonctionnement du système élève-enseignant-savoir: motivations de la dévolution manquée*.

conceptualisation doit donc nécessairement passer par la coordination de plusieurs registres de représentation qui, pour différentes raisons, ne peuvent pas être de même nature, par exemple seulement linguistiques, seulement visuel ou seulement formel[41]

- en mathématique on parle plus souvent d' "objets mathématiques" que de concepts mathématiques, car la mathématique étudie de préférence des objets plutôt que des concepts (Duval, 1998).

En Duval la notion de concept, préliminaire, ou prioritaire chez la plupart des Auteurs, devient secondaire, tandis que ce qui acquiert un caractère prioritaire est le couple: *système de signe - objet*, comme je le mettrai en evidence dans le paraghaphe prochaine à propos du *paradoxe cognitif de la pensée mathématique* qui a été mis en évidence justement par Duval (1993, page 38).
Le schéma suivant me semble beaucoup plus efficace qu'un long discours:



2. Le paradoxe cognitive de la pensée mathématique

Voici comment ce paradoxe est presenté (Duval, 1993, page 38):

«(...) d'une part, l'appréhension des objets mathématiques ne peut être qu'une appréhension conceptuelle et, d'autre part, c'est seulement par le moyen de

[41] Ici on entend "objet réel" dans le sens intuitif de "chose". Dans la *Métaphysique*, Aristote exprime bien ce que cela signifie quand il affirme que la "chose", en tant que partie du réel, est ce qui présente les trois caractéristiques suivantes:

- tridimensionalité
- accessibilité sensorielle multiple (c'est à dire simultanément par plusieurs sens) indépendamment des représentations sémiotique
- possibilié de séparation matérielle des autres "choses".

représentations sémiotiques qu'une activité sur des objets mathématiques est possible. Ce paradoxe peut constituer un véritable cercle pour l'apprentissage. Comment des sujets en phase d'apprentissage pourraient-ils ne pas confondre les objets mathématiques avec leurs représentations sémiotiques s'ils ne peuvent avoir affaire qu'aux seules représentations sémiotiques? L'impossibilité d'un accès direct aux objets mathématiques, en dehors de toute représentation sémiotique, rend la confusion presqu'inévitable. Et, à l'inverse, comment peuvent-ils acquérir la maîtrise des traitements mathématiques nécessairement liés aux représentations sémiotiques, s'ils n'ont pas déjà une appréhension conceptuelle des objets représentés? Ce paradoxe est d'autant plus fort que l'on identifie activité mathématique et activité conceptuelle et que l'on considère les représentations sémiotiques comme secondaires ou extrinsèques».

Je vais expliciter les significations de ces termes qui n'ont pas toujours été utilisés dans le même sens. Je n'aurai là aucune prétention exhaustive:

sémiotique $=_{df}$ formation d'une représentation par association ou combinaison de signes

noétique $=_{df}$ appréhension conceptuelle d'un objet

J'entendrai, désormais:

$r^m =_{df}$ registre sémiotique (m = l, 2, 3, ...)

$R^m{}_i(A) =_{df}$ représentation sémiotique i-ème (i = 1, 2, 3, …) d'un contenu A dans le registre sémiotique r^m

On peut remarquer que si le registre sémiotique change, la représentation sémiotique change nécessairement aussi, tandis que l'inverse n'est pas toujours vrai: la représentation sémiotique peut changer dans le maintien du même registre sémiotique.[42]

3. Exemple de répresentations sémiotiques d'un concept C

concept C

registre sémiotique r^1: *la langue commune*
- représentation sémiotique $R^1{}_1$: le milieu
- représentation sémiotique $R^1{}_2$: la moitié
- etc.

registre sémiotique r^2: *l'arithmétique*
- représentation sémiotique $R^2{}_1$: ½ (écriture fractionnaire)
- représentation sémiotique $R^2{}_2$: 0.5 (écriture décimale)
- représentation sémiotique $R^2{}_3$: $5 \cdot 10^{-1}$ (écriture exponentielle)
- etc.

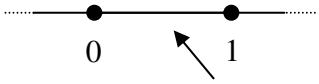
registre sémiotique r^3: *l'algèbre*
- représentation sémiotique $R^3{}_1$: $\{x \in Q^+/2x-1=0\}$(écriture par ensembles)
- représentation sémiotique $R^3{}_2$: $y= f(x): \longrightarrow x \quad x/2$ (écriture fonctionnelle)

[42] C'est en cela que 1'on distingue les traitements et les conversions.

etc.

registre sémiotique r^4: *le langage figuratif*

représentation sémiotique R^4_1:



etc.

registre sémiotique r^5: *schémas pictographiques*

représentation sémiotique R^5_1: 

représentation sémiotique R^5_2: 

représentation sémiotique R^5_3: 

etc.

D'autres exemples peuvent être tirés de la théorie des ensembles élémentaire ou naïve, dans laquelle 1e même ensemble peut être représenté dans des différents registres sémiotiques et, à l'intérieur de chacun de ces registres, en utilisant différentes représentations sémiotiques.

4. Le paradoxe de Duval et les causes de dévolution manquée

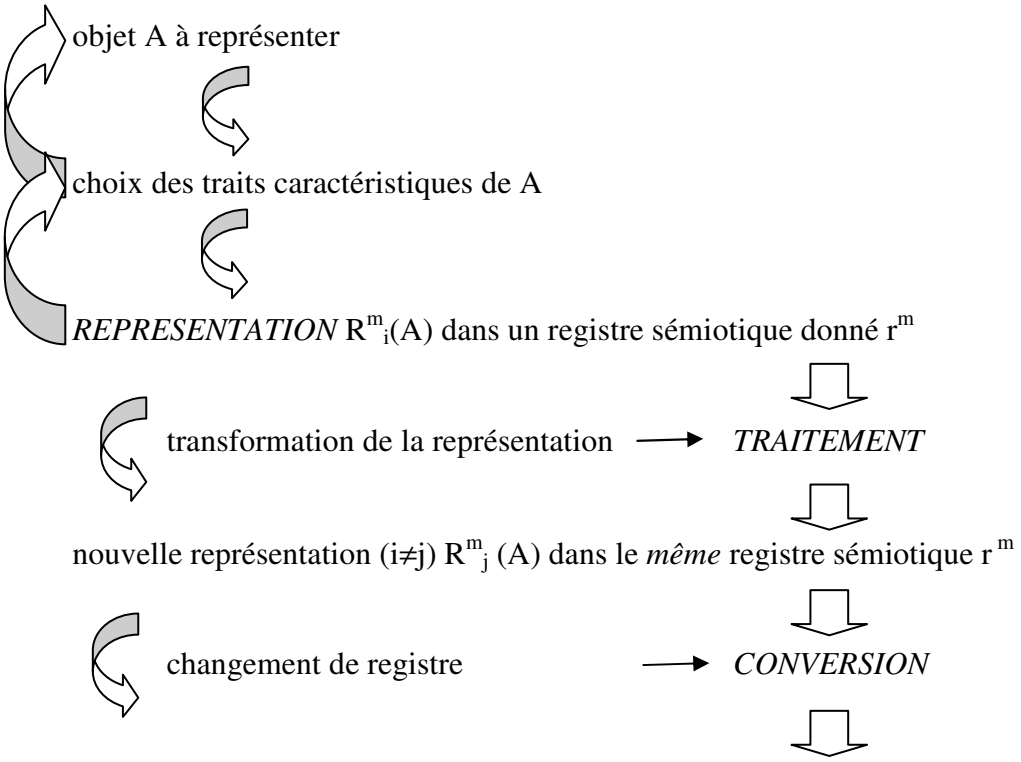
Dans ce paradoxe, que Raymond Duval met bien en évidence ici, peut-il y avoir une cause potentielle de dévolutions manquées?
Prenons l'exemple d'une activité proposée aux élèves et pour laquelle, tant du point de vue de l'enseignant, de celui de la noosphère et même celui des élèves, chacun dispose des connaissances requises pour effectuer l'activité. Mais de manière surprenante, il se trouve dans une situation de blocage pour mobiliser les connaissances dont il dispose, ou pour même se risquer à essayer quelque chose. Disposer d'une connaissance cela veut dire, d'un point de vue cognitif, avoir acquis le ou les concepts mathématiques, ou encore avoir l'accès aux objets mathématiques à utiliser dans le contexte de la tâche ou du problème. Comment expliquer alors un tel blocage? Le plus souvent la raison en est la réduction par l'étudiant de l'objet mathématique à l'une des représentations sémiotiques particulières, confusion normale pour l'élève, étant donné le caractère très particulier de l'accès aux objets mathématiques. Et cela se manifeste par l'impossibilité de convertir les données de la consigne ou d'un premier résultat obtenu en une autre représentation qui permet de voir et d'avancer. Mais cette confusion risque de s'institutionnaliser si l'enseignant ou l'organisation des programmes ignorent pourquoi la compréhension en mathématiques fonctionne de manière totalement différente de la compréhension dans les autres domaines de connaissance. La tendance serait plutôt de faire comme si l'acquisition des connaissances se faisait selon un modèle commun pour tous les types de connaissance. Devant ce constat de blocage de l'élève, l'enseignant et les représentants de la noosphère ne peuvent que porter ce jugement: il n'avait pas encore acquis ce qu'il devait avoir acquis et que l'on croyait donc qu'il avait acquis. Sans savoir comment d'ailleurs comment remédier réellement à la situation. Et cette

histoire se répète en boucle jusqu'à ce que les élèves soient enfin dans des filières où il n'y a plus de mathématiques.
En réalité, dans ce type de situation paradoxale, personne ne comprend plus ce qui est en train de se passer, dans la mesure où chacun des acteurs de cette aventure a une perception différente de ce que sont les objets ou le concepts mathématiques.

5. Sémiotique et noétique dans l'apprentissage des mathématiques

Dans le domaine mathématique, l'acquisition conceptuelle d'un objet passe nécessairement par l'acquisition d'une ou plusieurs représentations sémiotiques (Duval, 1988a, b, c, 1989, 1993; Chevallard, 1991; Godino, Batanero, 1994).
J'utiliserai encore une fois un schéma pour illustrer Ia question car il me semble plus incisif et efficace:

caractéristiques de la sémiotique { *représentation*, *traitement*, *conversion* } { ces trois sont des activités cognitives différentes }



Il faut remarquer les flèches qui, dans la première partie du schéma vont du bas en haut. Leur raison d'être est la suivante: les traits distinctifs de A (les propriétés de l'objet A) qui sont explicités ou présentés par la représentation dépendent des capacités

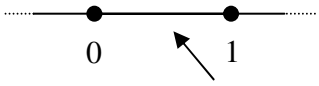
sémiotiques du registre choisi. En choisissant un registre différent on rende accessible d'autres traits de A. Cela dépend du fait que deux représentations du même objet dans des registres différents ont des contenus différents.

6. Exemples de traitement et conversion

½ → [transformation de traitement en r^2] → 0.5

0.5 → [transformation de traitement en r^2] → $5 \cdot 10^{-1}$

Elles rendent possible d'autres transformations de traitement.

½ → [transformation de conversion de r^2 à r^4] → 

Elles rendent possible d'autres transformations de conversion.

7. Caractéristiques de la noétique

L'acquisition conceptuelle d'un objet mathématique se fonde sur deux caractéristiques "fortes" de celui (Duval, 1993):

1. l'utilisation de plusieurs registres de représentation sémiotique est typique de la pensée humaine
2. la création et le développement de nouveaux systèmes sémiotiques est le symbole (historique) du développement des connaissance mathématiques.

Ces considérations montrent l'étroite interdépendance entre noétique et sémiotique, dès qu'on passe de l'une à l'autre: non seulement donc *il n'y a pas de noétique sans sémiotique*, mais la sémiotique est assumée comme une caractéristique nécessaire à garantir le premier pas vers la noétique.

À ce point, une précision concernant la théorie que Raymond Duval est en train de développer depuis des années est nécessaire.

Dans cette théorie on accorde à la conversion une place centrale par rapport aux autres fonctions, et en particulier par rapport à celle de traitement qui est considérée par la plupart comme étant décisive du point de vue mathématique.

8. Une tentative de "définition" de *construction*

La construction des concepts mathématiques dépend donc étroitement de la capacité d'utiliser *plusieurs* registres de représentations sémiotiques de ces concepts, c'est-à-dire:

1. d'en expliciter ou d'en reconnaître une représentation dans un registre donné
2. de *traiter* ces représentations à l'intérieur d'un même registre
3. de *convertir* ces représentations d'un registre donné à un autre

L'ensemble de ces trois éléments et les considérations faites aux paragraphes **2** et **3** mettent en évidence le profond lien entre noétique et constructivisme: cette "construction de la connaissance en mathématique" n'est-elle pas justement l'union de ces trois "actions" relatives aux concepts, c'est à dire l'expression même de la capacité de *représenter* les concepts, de *traiter* les représentations obtenues à l'intérieur d'un registre établi et de *convertir* les représentations d'un registre à un autre?
C'est comme si on était en train de spécifier les opérations de base qui dans leur ensemble définissent cette "construction", laquelle autrement resterait un terme mystérieux et ambigu, ouvert à toute sorte d'interprétations, même philosophiques.

9. Le phénomène de la "scolarisation" et la noétique manquée

Le renoncement (naturellement inconscient) de l'étudiant à la dévolution, l'incapacité de l'étudiant à s'investir (ce qui est souvent la conséquence d'essais infructueux), et à assumer directement et personnellement la responsabilité de la construction de la connaissance, dans le milieu scolaire, sont liées à l'absence d'une appropriation et d'une coordination de la diversité des registres de représentation utilisée en mathématiques en raison. Cette absence résulte d'une déficience didactique spécifique originelle. L'enseignant pourrait en effet ne pas mettre en oeuvre chacune des composantes de la construction en supposant à la fois l'homogénéité des fonctionnement sémiotique et la transparence du noétique dans la diversité des représentations sémiotiques (Duval, 1993) (il s'agit là d'une double identification très répandue parmi les enseignants, spécialement parmi ceux qui n'ont jamais eu l'occasion de réfléchir à l'aspect spécifique des difficultés rencontrées en mathématiques, ou qui considèrent cela superflu). Cela pourrait amener l'étudiant au désintérêt pour des mathématiques dont les démarches intellectuelles échappent et donc à la scolarisation des connaissances (D'Amore, 1999a): «J'entends ici me référer avec l'expression "scolarisation du savoir" à cet acte largement inconscient par lequel l'élève à un certain moment de sa vie sociale et scolaire (mais presque toujours au cours de l'école primaire) délègue à l'école (en tant qu'institution) et à l'enseignant (en tant que représentant de l'institution) la tâche de *sélectionner pour lui les connaissances significatives* (celles qui le sont d'un point de vue social, par un statut reconnu et légitimé par la noosphère) en renonçant à assumer directement leur choix sur la base d'une forme quelconque de critère personnel (goût, intérêt, motivation,...). À partir du moment où cette scolarisation comporte la reconnaissance de l'enseignant comme dépositaire des connaissances, du savoir socialement valables, il est évident qu'il y aura, plus ou moins en même temps, une scolarisation des rapports interpersonnels (entre l'étudiant et l'enseignant et entre l'étudiant et ses copains) et du rapport entre l'étudiant et le savoir: c'est ce qui [...] s'appelle "scolarisation des relations".»
À renforcer le "jeu des triades" (représentation, traitement, conversion), on peut voir quelle est l'issue de la recherche décrite dans D'Amore (1998). Dans cette recherche le même message concernant une situation relative à un simple exemple de relation binaire (on donnait des noms de villes et des noms d'états et la relation binaire était: "est en")

était proposé à des élèves de différents niveaux scolaires, dans des différents registres sémiotiques, et avec des différentes représentations sémiotiques, et ce qu'on demandait était justement de reconnaître qu'il s'agissait du *même message*, de la *même information*.
Le résultat de cette recherche montre justement les difficultés rencontrées par les étudiants

- pour remonter du contenu d'une représentation au contenu représenté
- pour verifier que entre deux représentations dans un registre sémiotique donné il y a été simplement une transformation de type traitement
- pour verifier que entre deux representations sémiotiques de deux registres sémiotiques différents il y a été une transformation de representation du type conversion.

Faute de clés de lecture et ayant des difficultés à discriminer ce qui est pertinent dans les situations qui leur sont présentées, les étudiants donnet un "sens" au message en créant des informations de types différents (que dans certains cas j'ai appelé "informations parasites") parfois éloignées de toute intention communicative de l'auteur; et ils cherchent des "prises" de traitement ou de conversion dans des aspects tout à fait marginaux, tels: la forme des graphiques, le type d'images par hasard présentes etc., ce qui est non pertinent pour l'expert en mathématiques.

10. La dévolution manquée, la cessation de l'implication

Dans le cas d'un échec dans la gestion de cette énorme quantité de représentations et de transformations il serait trop banal et simpliste de se limiter à une constatation, comme parfois l'enseignant dèçu par l'apprentissage manqué de ses élèves semble faire. Où réside le *motif* de cet échec?
Cette question est déjà plus intéressante qu'une analyse, toujours particulière et contextualisée, des différents échecs et elle peut nous révéler beaucoup sur certaines impasses de l'enseignement.
Mais ici c'est la problématique de la dévolution manquée, de la cessation d'une implication personnelle de l'élève qui m'intéresse.
Je pense à un étudiant même doué, même conscient, même sensible, qui, peut-être justement à cause de cette sensibilité qu'il n'arrive pas à satisfaire, ou à cause d'une incapacité d'introspection dont il n'est pas responsable, se borne à observer et à constater son propre échec dans sa tentative de faire face à la complexité de la "citation" de la triade "représentation, traitement, conversion". L'étudiant pourrait décider (fut-ce de manière tout à fait inconsciente) de ...limiter les dégâts en acceptant le formalisme, la surface de ce qu'on lui demande, en s'adaptant à scolariser son savoir et son comportement c'est à dire en adoptant la médiation totale de l'enseignant par rapport à l'objet de connaissance, en adoptant ses choix et même ses goûts (D'Amore, 1999a).
Une analyse très précise des différentes composantes, et donc de la capacité à faire le point des différents aspects dans lesquels se représente la construction de la connaissance (dans notre cas spécifique, dans l'exemple donné en **3**., le concept ayant ½ comme un de ses nombreux représentants), pourrait aider l'enseignant à comprendre à quel moment commencent la résignation, la dévolution manquée, la dés-implication personnelle de l'étudiant dans cette construction.

Il existe une énorme différence entre d'un côté, l'institutionnalisation de la connaissance de la part de l'enseignant en tant que représentant de l'institution qui a décidé quel est le savoir qui compte; et de l'autre la scolarisation, l'acceptation passive des choix de l'enseignant.
Dans le premier cas l'enseignant joue le rôle de médiateur entre l'élève et le savoir et il veut, ou pense, rendre actif le premier: il sélectionne et valorise les choix et les "découvertes" de l'élève en leur reconnaissant un statut institutionnel d'employabilité et un permis officiel d'emploi. Le fondement de tout cela réside dans le principe pédagogiques et didactique, sans cesse répété de manière générale, que c'est l'élève qui construit ses connaissances.
Dans le deuxième cas l'enseignant joue le rôle de médiateur totalisant et il rend l'élève un sujet passif: il lui demande une confiance aveugle, il lui demande une confiance aveugle dans l'institution en échange de promesses sur des capacités et des compétences futures qui n'arriveront pas forcément ou qui pourraient aussi n'être pas forcément utiles. Là l'élève cesse là de construire, en cessant donc d'apprendre.
Je crois que l'étude détaillée de la triade (représentation, traitement, conversion) peut s'appliquer à l'analyse des situations de dés-implication personnelle, pour mettre en évidence les véritables raisons qui conduisent à renoncer à comprendre en mathématiques et donc à la "scolarisation".

Bibliographie

Chevallard Y. (1991). Dimension instrumentale, dimension sémiotique de l'activité mathématique. *Séminaire de Didactique des Mathématiques et de l'Informatique de Grenoble.* Année 1990-1991, LSD2, IMAG, Université J. Fourier, Grenoble, 103- 117.

D'Amore B. (1998). Oggetti relazionali e diversi registri rappresentativi: difficoltà cognitive ed ostacoli. *L'educazione matematica*, 1, 7-28 [texte bilingue, en italien et en anglais) En espagnol: *Uno*, 15, 1998, 63- 76.

D'Amore B. (1999). Scolarizzazione del sapere e delle relazioni: effetti sull'apprendimento della matematica. *L'insegnamento della Matematica e delle scienze integrate*. 22A, 3, 247-276.

D'Amore B. (2001). *Scritti di Epistemologia della Matematica. 1980-2001.* Bologna: Pitagora.

Duval R. (1988a). Ecarts sémantiques et cohérence mathématique. *Annales de Didactique et de Sciences cognitives*. 1, 7-25.

Duval R. (1988b). Approche cognitive des problèmes de géométrie en termes de congruence. *Annales de Didactique et de Sciences cognitives.* 1, 57-74.

Duval R. (1988c). Graphiques et équations. *Annales de Didactique et de Sciences cognitives.* 1, 235-253.

Duval R. (1993). Registres de représentation sémiotiques et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives,* ULP, IREM Strasbourg. 5, 37- 65.

Duval R. (1998). Signe et objet (I). Trois grandes étapes dans la problématique des rapports entre représentation et objet. *Annales de Didactique et ed Sciences Cognitives*. 6, 139-163.

Godino J.D., Batanero C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 3, 325-355.
Porlán R., Riviero A., Martin R. (1997). Conocimiento profesional y epistemológico de los profesores. *Enseñanza de las Ciencias*. 15-2, 155-171.
Speranza F. (1997). *Scritti di Epistemologia della Matematica.* Bologna: Pitagora.

J'exprime ma sincère gratitude à Raymond Duval, lecteur patient des versions précédentes de cet article, qui m'à suggéré de modifications et intégrations.

D'Amore B. (2003). The noetic in mathematics. *Scientia Pedagogica Experimentalis*. (Gent, Belgio). XXXIX, 1, 75-82.

The noetic in Mathematics

Bruno D'Amore

Research Group in Mathematical Education
Departement of Mathematics - University of Bologna

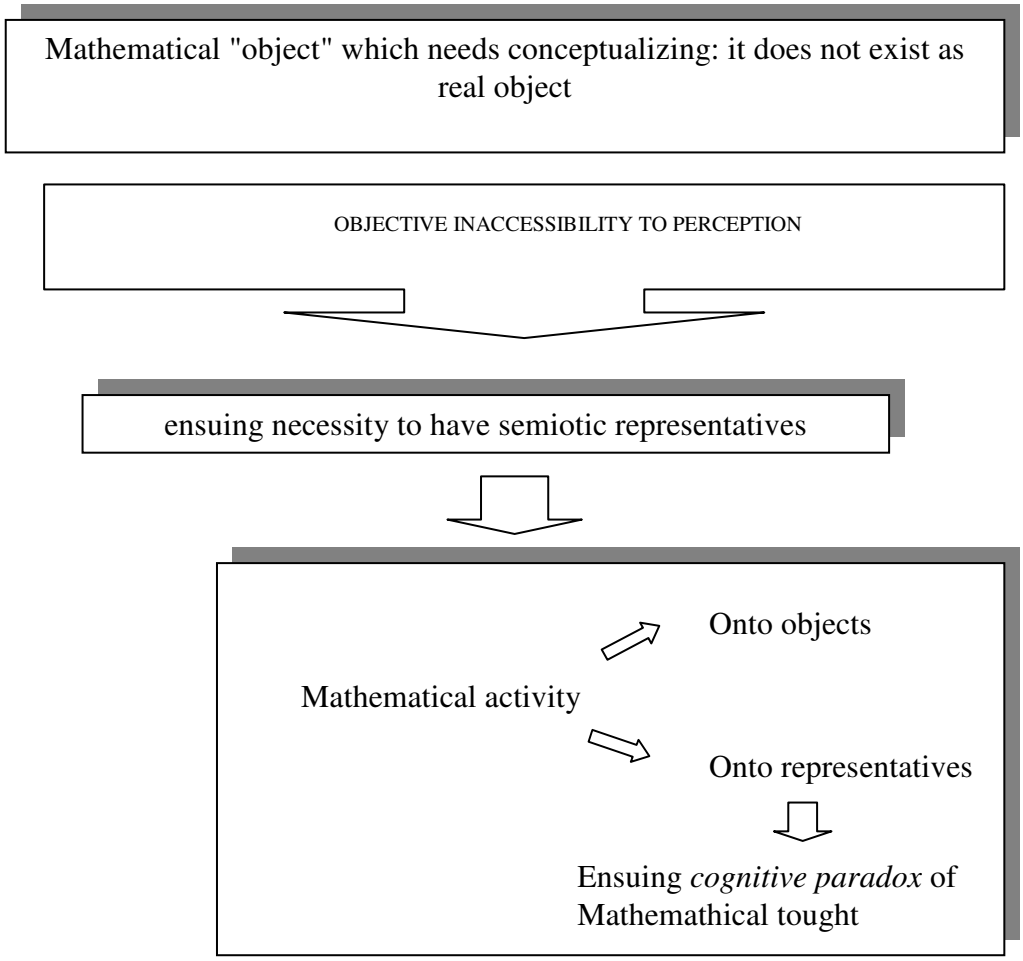
1. Concepts and objects in Mathematics

Each and every concept in Mathematics:

- refers to "non-objects", what follows from this is that conceptualization is not and can not be based on meanings resting on tangible reality; in other words, Mathematics does not allow ostensive referrals
- is compelled to make use of representations, as there are no "real objects" that can be shown in stead or as recall; therefore conceptualization, of necessity, has to go through representation patterns. These patterns for various reasons, and particularly so if they are of a linguistic type can not be univocal. [In this paper "real object" is meant in the intuitive aspect of "thing". The exact meaning is well shown by Aristotle in his *Metaphysics* where he claims that "a thing" so far as is part of the reality, offers the following features:
    - it is tridimensional
    - it is accessible (approachable) through more than one sense at a time, independent of semiotic representations
    - it is possible to separate it materially from other parts of reality, from other "things"]
- more often than not the Mathematical discourse refers to "Mathematical objects" rather than Mathematical concepts. This is because objects have become the focus of research more than concepts have. (Duval, 1998).

The notion of concept, which most Authors consider preliminary or, at any rate, of prime importance, in Duval acquires a secondary place, while what becomes the prime focus is the couple: *sign system - object*, as will be shown here when I refer to the *cognitive paradox of Mathematical thought*, pointed out by Duval himself (1993, p. 38).

The following outline seems to be more effective than words:



2. The *cognitive paradox* in Mathematical thought

Let us consider this *paradox* as expressed by Duval (Duval, 1993, p. 38; translation by the writer in agreement with the Author):
"(…) on the one hand, learning Mathematical objects can only be a conceptual learning, and, on the other hand, any activity on Mathematical objects is made possible merely by means of semiotic representations. This paradox could become a concrete vicious circle as far as learning is concerned. How would it be possible for learners not to get Mathematical objects mixed up with their own semiotic representations if the one and only relation they have is with semiotic representations? (Learners are bound to confuse Mathematical objects with their semiotic representations because they can relate only to these representations).
Being unable to build up a direct access to Mathematical objects, which can only happen through a semiotic representation leads to an unavoidable confusion, or nearly unavoidable. And, on the other side, how can learners master Mathematical procedures,

if they do not already possess a conceptual learning of the objects represented? This paradox becomes further intriguing if Mathematical activity is identified with conceptual activity and if semiotic representations are seen as secondary or extrinsic".
For a clear definition of terms, without however any claim at completeness, as these terms are not always used with an identical meaning, I prefer to state the meanings and symbols I will use hereafter:

semiotics $=_{df}$ acquisition of a representation realized by means of signs
noetic $=_{df}$ conceptual acquisition of an object.

From now on:

r^m $=_{df}$ is intended to mean semiotic register (m = 1, 2, 3, …)
$R^m{}_i(A) =_{df}$ semiotic representation i-nth (i = 1,2, 3, …) of an object A within the semiotic register r^m.

One may notice that if the semiotic register changes, the semiotic representation will also by necessity change, whilst the opposite is not always true; i. e. the semiotic representation may change even when we keep the same semiotic register.

3. Semiotic and noetic in the learning of Mathematics

In Mathematics, the conceptual acquisition of any object has to go through the acquisition of one or more semiotic representations. (Duval 1988a,b,c; 1993; 1998; Chevallard, 1991; Godino, Batanero, 1994).
Once more, I will use a graphic to illustrate the issue under consideration, as it results in being more effective and more incisive.

characteristics of semiotics { representation, treatment, conversion } these three cognitive activities are all different

object A to be represented

choice of special features of A

REPRESENTATION R^m_1 (A) in a given semiotic register r^m

transformation of representation → TREATMENT

new representation (i ≠j) $R^m{}_1$ (A) in the same semiotic register

tranformation of register → CONVERSION

new representation (h≠i, h≠j) R^n_h(A) in a *different* semiotic register r^n
(n ≠ m)

(m, n, i, j, h = 1, 2, 3, …)

I would like to draw your attention to the arrows which, in the first part of the graph,. point upwards.
Here is why this is so. The distinctive features of the object A depend upon the semiotic ability of representation in the chosen register. If we chose a different register, other features of A would be considered. This is due to the fact that two representations of the same object, though in different registers, will have different contents.

4. Characteristics of noetic

The conceptual acquisition of Mathematical object is based upon two of its "strong" features (Duval, 1993):

- the use of more than one register of semiotic representation is typical of the human thought
- the creation and development of new semiotic systems is symbol (historical) of the progress of knowledge.

These considerations underline the tight interdependence between noetic and semiotics, as we proceed from one to the other. It is not just that there is no noetic without semiotics, but that semiotics is taken as a necessary feature to allow the first step towards noetic.

More in depth information is now needed about the theory that R. Duval has been developing in the past few years.
In his theory, a central place is given to conversion as opposed to all other functions, and in particular to treatment, which is considered by most as crucial from the point of view of the process of learning in Mathematics.

5. An attempt at "defining" construction

The construction of mathematical concepts is, of consequence, tightly dependent on the ability to use *more* registers of semiotic representations of those concepts:

- To represent them in a given register
- To treat such representations within the one and same register
- To convert such representation from a given register to a different one.

These three elements taken together and the previous considerations point out the tight link to be found between noetic and constructivism. What we mean by "construction of knowledge in Mathematics" is in actual facts the combination of these three "actions" on concepts. We mean by it the very expression of the ability to *represent* concepts (choosing their specific traits); to *treat* the representation thus obtained within a given register, to *convert* these representations from one register to another.
It is as if we were defining the base operations, which, taken together, clarify that "construction" which, otherwise, will remain a mysterious and ambiguous term, subject to all sorts of interpretation, even a metaphysical one.

REFERENCES

Chevallard Y. (1991). Dimension instrumentale, dimension sémiotique de l'acitivité mathématique. *Séminaire de Didactique des Mathématiques et de l'Informatique de Grenoble.* LSD2, IMAG, Université J. Fourier, Grenoble.

D'Amore B. (1998). Oggetti relazionali e diversi registri rappresentativi: difficoltà cognitive ed ostacoli. *L'educazione matematica*, 1, 7-28 [in italian and english]. Spanish version: *Uno,* 15, 1998, 63-76.

D'Amore B. (1999). Scolarizzazione del sapere e delle relazioni: effetti sull'apprendimento della matematica. *L'insegnamento della Matematica e delle scienze integrate.* 22A, 3, 247-276.

D'Amore B. (2002). La complexité de la noétique en mathématiques ou les raisons de la dévolution manquée. *For the learning of mathematics*. In print, November 2002.

Duval R. (1988a). Ecarts sémantiques et cohérence mathématique. *Annales de Didactique et de Sciences cognitives*. 1, 7-25.

Duval R. (1988b). Approche cognitive des problèmes de géométrie en termes de congruence. *Annales de Didactique et de Sciences cognitives*. 1, 57-74.

Duval R. (1988c). Graphiques et équations. *Annales de Didactique et de Sciences cognitives*. 1, 235-253.

Duval R. (1993). Registres de représentations sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives,* ULP, IREM Strasbourg. 5, 37-65.

Duval R. (1998). Signe et object (I). Trois grandes étapes dans la problématique des rapports entre répresentation et objet. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives.* 6, 139-163.

Godino J.D., Batanero C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique desMathématiques.* 3, 325-355.

Porlán R., Rivero A., Martin R. (1997). Conocimiento profesional y epistemológico de los profesores. *Enseñanza de las Ciencias*. 15-2, 155-171.

Speranza F. (1997). *Scritti di Epistemologia della Matematica.* Bologna: Pitagora.

D'Amore B., Maier H. (2003). Producciones escritas de los estudiantes sobre argumentos de matemáticas. *Espsilon*. (Cádiz, Spagna). 18(2), 53, 243-262.

Producciónes escritas de los estudiantes sobre argumentos de matemáticas (TEPs)

Bruno D'Amore [43]
Departamento de Matemática
Universidad de Bologna
Italia

Hermann Maier
Departamento de Didáctica de la Matemática
Universidad de Regensburg
Alemania

Summary. In a research, carried out in German and Italian classes of secundary level, textual eigenproduction (TEP) – a term which we have derived from Selter (1994) – as a pupils' activity in mathematics classroom and teachers interpretation of their pupils' texts have been investigated. The investigation is methodologically designed according to the rules of an interpretative research paradigm and qualitative research methods (Beck, Maier, 1993, 1994, 1996; Glaser, Strauss, 1967), and we report about it elsewhere (D'Amore, Maier, 1999, 2002). But, subsequently we can give more detailed information about our own and the teachers' interpretation of a lot of pupils' TEPs on the topic of heights in a triangle, resulting in a classification of pupils' concepts about triangle and heights.

Resumen. En una investigación realizada en clases alemanas e italianas de escuela secundaria, se analizaron los TEPs [término que tomamos de Selter (1994) y que explicaremos en detalle sucesivamente; por ahora nos limitamos a definirlo como: actividad escrita de los estudiantes durante la clase de matemáticas] y las interpretaciones dadas por los profesores de los trabajos hechos por sus propios alumnos. La investigación se proyectó metodológicamente siguiendo los principios de un paradigma de investigación interpretativa y los métodos de una investigación cualitativa (Beck, Maier, 1993, 1994, 1996, Glaser, Strauss, 1967) y ya fue objeto de dos publicaciones resumidas (D'Amore, Maier, 1999, 2002). En este artículo retomamos las dos precedentes y las ampliamos, dando información mucho mas detallada ya sea sobre nuestras interpretaciones como sobre aquellas de los profesores respecto a los muchos TEPs de los estudiantes sobre el argumento "alturas de un triángulo", dando como resultado una clasificación de los conceptos que los estudiantes tienen a propósito del propio triángulo y de sus alturas

[43] Trabajo desarrollado en el ámbito del Programa de Investigación de la Unidad de Bologna: *Ricerche sul funzionamento del sistema* allievo-insegnante-sapere*: motivazioni della mancata devoluzione*, dentro en el Programa de Investigación Nacional: *Difficoltà in matematica: strumenti per osservare, interpretare, intervenire*, financiado con fondos del MIUR (Ministerio de la Instrucción, de la Universidad y de la Investigación).

1. Los TEPs y su función didáctica

Entendemos con TEPs [literalmente: producciones textuales autónomas de los alumnos] (Selter, 1994) los textos elaborados en modo autónomo por los estudiantes y teniendo como argumento cuestiones matemáticas. Estos no deben coincidir con otras producciones escritas en modo no autónomo (tareas en clase, apuntes, descripciones de procedimientos etc.). Las producciones de estos últimos textos, de hecho, no son autónomas, sino que están sujetas a vínculos más o menos explícitamente establecidos y en general son objeto de evaluación (directa o indirecta).

Digamos que se consideran TEPs aquellas producciones en las cuales el estudiante, puesto en la condición de *desear* expresarse en forma comprensible y usando un lenguaje personal, acepta de liberarse de condicionamientos lingüísticos y hace uso de expresiones espontaneas.

Ejemplos de TEPs son por tanto: protocolos comentados de solución de problemas [es más, el origen de los estudios sobre los TEPs se remonta a "protocolos comentados de solución de problemas" (Powell, Ramnauth, 1992)]; resúmenes lo más posible espontáneos de investigaciones de tipo matemático (tentativos, pasajes, medidas, resultados,…); descripciones detalladas y explicaciones de conceptos o de algoritmos matemáticos; textos introducidos para una situación específica que exige comunicar hechos y relaciones matemáticas en forma escrita, mejor si se enriquece con comentarios personales; textos que definen conceptos matemáticos, que formulan hipótesis, argumentaciones o pruebas en relación a un teorema matemático o a cualquier otra situación matemática;…

Escribir TEPs puede llegar a ser una actividad regular de los estudiantes. Waywood (1992), por ejemplo, cuenta la experiencia de la composición de un periódico; Gallin, Ruf (1993) llaman los textos que sus estudiantes producen regularmente "diario de viaje"; Locatello, Meloni (2002) enfrentan el problema desde anchas miradas.

Hemos visto como entender los TEPs y de que tipo pueden ser; ahora nos preguntamos: ¿cúal es su posible función didáctica?.

Para nosotros, existen diversas razones por las cuales los TEPs deberían ser considerados entre las actividades a desarrollar durante las clases de matemática.

La producción de TEPs estimula al estudiante a analizar y a reflexionar sobre conceptos matemáticos, relaciones, operaciones y procedimientos, investigaciones y procesos en la solución de problemas con los cuales tiene que ver. De esta forma todo alumno puede alcanzar una mayor conciencia y una mayor profundidad en la comprensión matemática.

Los TEPs pueden mejorar las competencias y el rendimiento del estudiante en el uso del lenguaje específico, dado que le dejan el tiempo para una atenta y reflexiva elección de los significados lingüísticos, no como sucede por el contrario, en ocasiones, durante una discusión o durante una interrogación, cuando a veces hay evolución del díalogo demasiado rápida y caracterizada por relaciones demasiado pre-establecidas o demasiado condicionada por el contrato didáctico; el TEP impulsa a un uso activo de los términos técnicos y de los símbolos (Maier, 1989a, 1989b, 1993; Maier, Schweiger, 1999).

Los TEPs dan al estudiante la oportunidad de tener continuamente bajo control su propia comprensión de cuestiones matemáticas, gracias a una razonada y reflexiva confrontación con el profesor y con los compañeros de clase.

Los TEPs permiten al profesor evaluar en modo efectivo el conocimiento construido personalmente y la comprensión de las ideas matemáticas, de manera más detallada y

profunda de cuanto sea posible sobre la base de comunes textos escritos, normalmente exigidos como protocolos de la actividad de solución de problemas no comentados.
Obviamente, el simple uso de los TEPs en aula no asegura, por si solo, un efecto positivo sobre la evaluación en el proceso de aprendizaje. Existen algunas condiciones para garantizar el suceso; nos limitamos a mencionar, en este caso, dos que nos parecen de gran importancia.

- Si se propone a los estudiantes de producir textos que puedan dar una visión profunda de su forma de hacer, de pensar y de comprender la matemática, se necesita estar seguros que ellos dirigen sus TEPs a alguien que en verdad tiene *necesidad* de toda la información relativa a la cuestión sobre la cual se escribe; este destinatario, por cuanto ficticio, no debe coincidir con el vacío ni con el mismo profesor(Locatello, Meloni, 2002). Con frecuencia los alumnos tienden a imaginar como único destinatario de sus escritos el profesor, el cual, según ellos, conoce todo aquello que deben comunicar y por tanto el único objetivo es simplemente el de examinar su habilidad con un fin evaluativo. De esta forma no reconocen de hecho la necesidad de dar descripciones y explicaciones detalladas y explícitas, y en particular no aceptan expresarse con un propio lenguaje coloquial, sino que por el contrario intentan de todo para "forzar" la lengua natural en una dirección escolástica, aquella que ellos reconocen como la que espera el profesor (y que en D'Amore, 1996, es llamada *matematiquese*). Motivaciones apropiadas para cambiar la actitud de quien escribe desde la posición de alumno, por ejemplo, podría ser aquella usada con invitaciones del tipo: «Imagina que eres una papá/mamá, un profesor, ...» (D'Amore, Sandri, 1996; D'Amore, Giovannoni, 1997), que se han revelado increíblemente coenvolventes, si se usan en modo oportuno. Otra podría ser aquella de escribir (una carta) a un niño más pequeño o a un compañero de clase que ha perdido algunas lecciones a causa de alguna enfermedad y que desea ser informado sobre lo que se ha hecho en su ausencia (Locatello, Meloni, 2002); escribir un diario; diseñar un póster para una muestra; componer un artículo sobre un cierto tema matemático; etc. O bien, el profesor puede organizar una particular situación comunicativa en la cual, por ejemplo, un estudiante debe describir un diseño geométrico de forma tal que su compañero de clase este en grado de reconstruir la figura solo sobre la base de su descripción. A veces puede ser de ayuda alejarse de las comunes situaciones de solución de problemas proponiendo preguntas abierta o incompletas (D'Amore, Sandri, 1998).
- El profesor debe buscar buenas ideas no solo para dar estímulos significativos a los alumnos, sino también para trabajar, después, de forma adecuada con los textos producidos. Básicamente él debe estar en grado de interpretar y de analizar los TEPs atentamente y en forma exhaustiva. En realidad no es casi nunca una cosa simple el individuar los conceptos, los pensamientos y las ideas matemáticas que están a la base de los textos producidos por los alumnos. Existe la necesidad no solo de mucha atención, sino también de gran experiencia y de un verdadero y propio entrenamiento específico.

El interés principal del proyecto de investigación, del cual proporcionaremos en seguida organización, metodología y resultados, hace referencia a la segunda condición: ¿en qué medida hacen uso de los TEPs los profesores y qué tanta experiencia tienen en su análisis e interpretación?. ¿Están convencidos que los TEPs pueden ser una ayuda en la enseñanza de la matemática, en particular en la evaluación del conocimiento y de las competencias matemáticas de cada uno de sus alumnos?.

En detalle, nuestras preguntas de investigación son las siguientes:
1. ¿Qué instrumentos usan cotidianamente los profesores para evaluar la actividad matemática de los alumnos?. ¿Qué existe al centro de su evaluación (conocimiento o habilidad?) y ¿en qué dirección y en qué modo esta orientada su evaluación (individual o colectiva)?.
2. ¿Están dispuestos a conocer otros instrumentos de evaluación (nunca antes usados)?, y ¿cuál es su actitud en relación con estos?. En particular, ¿reconocen los TEPs como un posible instrumento de evaluación?, y ¿cuál es su actitud en relación con estos?.
3. ¿Cómo interpretan y analizan un TEP?, ¿Cuál es su punto de vista y cuál es su eficacia y competencia en la interpretación de estos?.
4. ¿Es posible orientar la actitud de los profesores hacia los TEPS como instrumentos de evaluación en sentido positivo?.

2. TEPs: su clasificación e interpretación

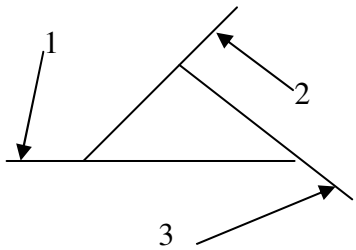
Estudiantes italianos y alemanes entre 12 y 15 años produjeron TEPs motivados por la siguiente solicitud (dada por escrito en la versión masculina para los hombres y en la versión femenina para las mujeres): «*Imagina que eres un papá [una mamá]…Tu hijo de 7 años ha sentido decir de alguien que todo triángulo tiene tres alturas y te pide: "Papá [mamá] ¿qué quiere decir?". No existe nada mas negativo que eludir las preguntas de un niño, por lo tanto, decides responderle*».[44]
Como se explicó brevemente en D'Amore, Maier (1999), intentamos desarrollar nuestra interpretación de los textos producidos por los estudiantes siguiendo cuatro criterios:

- nuestra interpretación es en todo lo posible *descriptiva,* esto significa volver a entender aquello que realmente piensa quien escribe, que conceptos y que imágenes ha construido, más que evaluar que ha escrito de matemáticamente correcto o adecuado;
- nuestra interpretación intenta ser *completa* e *detallada*, es decir no desea inducir conclusiones de ejemplos o afirmaciones, pretende considerar importantes todas las partes del texto, en forma completa, global, más que superficial o local;
- nuestra interpretación intenta ser *abierta*; es decir, no obstante busque coherencia y evidencia, no pretende obtener conclusiones inequívocas a cualquier costo, desea por el contrario admitir la posibilidad de diversas interpretaciones coexistentes en un mismo tiempo;
- nuestra interpretación privilegia aspectos por así decir *complementarios* a aquellos que surgen por escrito, lo que significa que, al contrario de lo que sucede en la transcripción de una comunicación oral, tiende a considerar las omisiones en el texto como indicadores de "déficit", puesto que el estudiante ha sido estimulado de una instrucción considerada (por admisión de los mismos estudiantes) "clara" y "bien formulada" y han tenido suficiente tiempo para alcanzar a dar una explicación completa de todo aquello que el estudiante - autor sabe o que debe/quiere decir a propósito del tema matemático contenido en la solicitud.

[44] El texto-estímulo ya fue utilizado en (D'Amore, Sandri, 1996) con objetivos de investigación diferentes.

En D'Amore, Maier (2002) presentamos una clasificación de los TEPs de los estudiantes para entender que piensan ellos de los triángulos y de las respectivas alturas. Reenviamos a dicho trabajo para tal clasificación.
En algunos casos, pero, es verdaderamente difícil identificar la idea que el estudiante tiene de altura, incluso cuando parece indicar una.
Por ejemplo un estudiante de 12 años declara lacónicamente que *En un triángulo hay tres alturas* pero agrega a esta frase el diseño reportado en seguida:

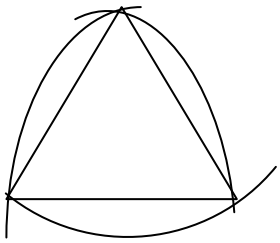
TEP (6):



En un triángulos hay tres alturas.

Otro estudiante escribe: *Un triángulo tiene tres alturas* y agrega el siguiente diseño:

TEP (20):



El texto que servía de estímulo para los TEPs sobre las alturas requería una respuesta a la cuestión de atribuir sentido al hecho que todo triángulo tiene tres alturas. Muchos estudiantes han advertido la necesidad de encontrar argumentos que verificaran la verdad de tal afirmación, otros se limitaron solo a describir tal hecho. En consecuencia, habíamos clasificado los TEPs en las categorías *descriptivas* o *argumentativa.*
De otra parte el texto – estímulo pedía explicar la existencia de las tres alturas de un triángulo *a un niño de siete años.* De hecho, solo una parte de los estudiantes intentaron hacerlo y han dirigido verdaderamente el propio texto a un niño. La mayor parte de los alumnos por el contrario respondieron como si se tratase de una tarea en clase y dirigieron sus TEPs a un adulto (identificado con el maestro) cuyo objetivo era el de evaluar que saben ellos con respecto a dicho argumento [de otra parte, esta actitud coincide con aquella ya señalada de Schubauer Leoni (1988, 1989) y de Schubauer Leoni, Ntamakiliro (1994)]. Esto nos llevo a clasificar nuevamente los TEPs como *dirigidos a un niño y dirigidos al profesor.*

3. Las interpretaciones de los TEPs por parte de los profesores

En este párrafo describiremos el proyecto de nuestra investigación antes de reportar algunos resultados, algunos de los cuales dados ya en precedencia. Este trabajo se proyectó metodológicamente siguiendo los principios de un paradigma de investigación interpretativa y los métodos de investigación cualitativa (Beck, Maier, 1993, 1994, 1996; Glaser, Strauss, 1967). El número de profesores entrevistados fue de 16.

3.1. Estructura del proyecto de investigación

Seguimos una secuencia de 3 entrevistas rigurosamente individuales con cada uno de los 16 profesores de matemáticas, 8 en Alemania y 8 en Italia.

En la *primera entrevista individual* se les pidió a los profesores que evidenciaran los aspectos que están al centro de su atención cuando evalúan en clase las competencia de sus alumnos y de indicar cuáles son los métodos que usan generalmente cuando evalúan. Además se les pidió hablar de sus propios conocimientos con respecto a procedimientos de evaluación que en general no aplican y de evidenciar las eventuales razones por las cuales no hacen uso de estos. En el caso en el cual el método de los TEPs no hubiese sido nombrado espontáneamente a este punto, se pedía a los profesores si los conocían, cuáles eran sus experiencias con estos y si alguna vez habían considerado de introducirlos en sus clases. Los entrevistadores han puesto las preguntas en manera abierta, para dar la posibilidad de que los profesores respondieran en forma coloquial y para poder por tanto proponer ulteriores preguntas más precisas en caso de respuestas no claras o insuficientemente motivadas o circunstanciales.
Sucesivamente, pero siempre en el curso de la primera entrevista, se les presentó a todos los profesores algunos de los TEPs producidos por los estudiantes (en el idioma original o traducido dependiendo del caso), en respuesta a la solicitud recordada en precedencia. Para tener un amplio panorama de los TEPs producidos, véase D'Amore, Maier (2002).
Además de algunos de los TEPs, a los profesores se les propuso textos producidos por estudiantes y publicados en D'Amore, Sandri (1996, 1998), en particular aquel de Simona (2° año de Escuela Media, es decir de 12 a 13 años de edad) que dice: «*Hijo mío, tu aún no conoces la geometría, pero te explicaré que quiere decir la palabra altura. Como tu, yo y papá tenemos una altura que se mide de la cabeza a los pies; así también los triángulos tienen una altura, pero su altura se mide del vértice, que es un pequeño punto, hasta la base, que son como nuestros pies, Dado que los triángulos tienen tres pequeños puntos (vértices), tienen tres alturas porque tienen tres pares de nuestros pies. Y dado que nosotros tenemos solo una cabeza y un par de pies, tenemos una sola altura*».
Después de haber recibido en consignación estos TEPs, se les pidió a los profesores de leerlos y analizarlos atentamente por cuenta propia, para obtener la máxima información posible acerca de los conocimientos y de las competencias matemáticas de los autores en relación con dicho argumento.

En la *segunda entrevista individual,* de 2 a 5 días después, cada uno de los profesores dio la interpretación de los TEPs que le habían sido consignados. Se pedía a cada uno de

comentar en que medida los estudiantes habían entendido la solicitud y de dar un juicio sobre dicha respuesta, de describir eventuales estrategias erradas o razonamientos no correctos dados por los estudiantes, y por último de expresar un juicio sobre las habilidades de los alumnos. Seguidamente se pidió a los profesores de consentir el desenvolvimiento de una prueba análoga en sus clases, a la cual fueran sometidos sus propios alumnos, es decir la redacción de TEPs bajo estímulos idénticos a aquellos dados a los estudiantes italianos en precedencia.
Todos los 16 profesores involucrados en el trabajo aceptaron.

Algunos días después, los 16 profesores hicieron las pruebas en aula y consignaban los protocolos obtenidos sin absolutamente mirarlos. Tales protocolos eran examinados por los dos autores de la investigación.
80 TEPs, 5 por cada una de las clases, cuidadosamente seleccionados entre todos aquellos producidos, según criterios de diversidad, fueron transcritos en computador, de forma tal que en la sucesiva entrevista los profesores no pudieran reconocer la grafía.

En la *tercera entrevista individual,* se consignaron a cada uno de los profesores las transcripciones de los 5 TEPs elegidos entre aquellos producidos en su clase; se invitaba al profesor a expresar espontáneamente las propias impresiones generales observando los TEPs de los alumnos, antes de entrar en detalle en la interpretación de estos. Generalmente, al inicio el profesor no lograba estar seguro de los respectivos autores y así ha podido hacer un análisis sin recurrir a prejuicios sobre los conocimientos y las habilidades del respectivo alumno. En seguida, analizaron los TEPs uno por uno y se les invito a adivinar el nombre de cada uno de los autores. Una vez declarado el presunto autor se les reveló el verdadero nombre (casi nunca acertado). Conociendo el nombre, el respectivo profesor ha podido hacer ulteriores comentarios, y fue invitado particularmente a expresar si había descubierto algo nuevo sobre el estado cognitivo del respectivo estudiante y a especificar que aspecto.
Durante la misma tercera entrevista, se tornó a una discusión general sobre los TEPs. Si el proyecto había representado para el profesor la primera ocasión de usarlos, el entrevistador pedía que pensaba de estos como método para obtener información sobre la competencia y la habilidad de cada uno de los estudiantes. En el caso en el cual el profesor conocía ya los TEPs (lo que no sucedió en ningún caso en Italia y solo dos casos en Alemania), las preguntas fueron dirigidas hacia la posibilidad de modificar su actitud con relación a estos. Los entrevistadores pidieron después si los profesores estarían dispuestos ha hacer uso de los TEPs en su futura acción didáctica en matemática.

Todas las tres entrevistas con cada uno de los profesores fueron registradas y transcriptas para un análisis detallado. Todas juntas formaron la base para un estudio sobre las respuestas a las preguntas de investigación puestas en precedencia. La investigación partió con 2 casos que fueron inmediatamente analizados para formular, con el método de comparación, hipótesis y teorías. En seguida fueron elegidos y analizados otros 2 casos sobre la base de comparación y desarrollo posterior de la teoría (técnica del *campionamento teoretico* en el sentido de Glaser, Strauss, 1967). De esta forma, fueron estudiados 16 casos distribuidos de la siguiente forma:

- 8 profesores de la escuela secundaria alemana, 2 de grado 6 (estudiantes de 12 años), 1 de grado 7 (estudiantes de 13 años), 2 de grado 8 (estudiantes de 14 años) y 3 de grado 9 (estudiantes de 15 años)
- 8 profesores italianos, 1 del bienio superior (estudiantes de 14 a 16 años), 5 de escuela media (estudiantes de 11 a 14 años) y 2 de escuela elemental (estudiantes de 6 a 11 años) (ninguno de los protocolos relativos a estos 2 últimos aparece en este artículo).

El estudio analítico comparativo de tales documentos se realizó en unas ocasiones en Bologna y en otras en Regensburg.

3.2. Algunos resultados

En primer lugar presentamos las descripciones que los profesores dieron de los criterios y de los instrumentos que usaban en el proceso de evaluación obtenidos en la primera entrevista y las interpretaciones dadas acerca del TEP de Simona en la segunda entrevista. En segundo lugar damos a conocer las interpretaciones que los profesores dieron sobre los TEPs de sus propios estudiantes obtenidos en la tercera entrevista y sus comentarios conclusivos sobre los TEPs como instrumento de evaluación en sus clases. Naturalmente nos limitamos a algunos ejemplos, reenviando a D'Amore, Maier (2002) para un panorama más amplio.

3.2.1. Criterios y métodos de evaluación

Un vez que se les pidió a los profesores de indicar los métodos y criterios que utilizan en el momento en el cual evalúan las competencias matemáticas individuales de sus estudiantes, muchos profesores evidenciaron genéricamente la existencia de diversos método, pero la mayor parte de ellos, tanto italianos como alemanes, se refirieron a las mismas modalidades:

- preguntas directas o interrogaciones orales en clase;
- breves textos escritos (referidos a una pequeña gama de argumentos), en la mayor parte de las veces sin previo aviso;
- largos textos escritos (referidos a una amplia gama de argumentos) para desarrollar al menos en una hora, pero regularmente en dos, avisando a los estudiantes con mucho tiempo de anticipación.

Estos métodos comunes de evaluación, así difundidos universalmente, pueden ser catalogados como "formales". En muchos casos los estudiantes deben responder preguntas directas o a problemas estándar. Sus respuestas y sus resultados parciales o finales pueden ser valorados como correctos o no tan correctos, sobre la base de reglas establecidas por el profesor. Así el resultado de la evaluación puede ser usado para una supuesta y posible jerarquización de los estudiantes sobre la base del nivel de competencia individual. El orden puede ser dividido en pocas categorías, representadas por evaluaciones numéricas o por adjetivos. Se trata, para decirlo brevemente, de una evaluación normativa de las competencias de los estudiantes, cuyo principal criterio parece ser una correcta y clara reproducción de definiciones y algoritmos memorizados.

Existen algunas excepciones. El profesor alemán K., por ejemplo, hace notar como su principal instrumento de evaluación es la observación de cada uno de sus alumnos, situación que parece le permite ser capaz de "*indicar rápidamente evidentes puntos débiles, y de realizar esto en forma individual*". Sin embargo sus observaciones están

restringidas a contribuciones verbales y a resultados individuales, de trabajos hechos entre compañeros o en grupo en ambiente aula.

La pregunta en la cual se pedía a los profesores si conocían instrumentos de evaluación que, por cualquier razón, no usan, aportó pocas respuestas concretas. Algunos profesores confesaron simplemente de no conocer otras. Otros se limitaron a afirmar que existen muchos, pero que "*no son todos aplicables*". De hecho ninguno mencionó o describió algún otro instrumento de evaluación. El profesor alemán (S.) mencionó los TEPs espontáneamente. El definía los TEPs como "*una composición matemática*". Existen algunas razones por las cuales él no aplica tal técnica, "*principalmente a causa de los muchos estudiantes provenientes de países extranjeros que tienen una gran dificultad con el uso del idioma; no puedo esperar de ellos resultados satisfacientes. Además este tipo de evaluación requiere de una enorme cantidad de tiempo, no solo en clase, sino también para la revisión*". No obstante esto, él considera significativo el uso "*en una clase que posea una competencia lingüística suficiente*".
Cuando les pedimos directamente si conocían los TEPs, también el profesor alemán We afirmo de haber tenido alguna experiencia con estos y consideraba que se trata de "*un adecuado instrumento de evaluación*", pero que por lo que a él respecta lo considera válido solo sobre el argumento de las ecuaciones. En este caso el uso de los TEPs le parece *"particularmente adecuado, porque para producir un texto el estudiante debe construir la lógica de lo que se le pide y necesita de una profunda comprensión"*. Sin embargo él desea distinguir entre evaluar en el sentido de dar una nota y evaluar en el sentido de reconocer las competencias de los estudiantes, y no esperaría nunca que los TEPs fueran usado con el primer objetivo.

3.2.2. Interpretaciones de los profesores con respecto al texto de Simona

De dos profesores alemanes recibimos análisis por demás interesantes del TEP de Simona. Presentamos sin ninguna omisión la interpretación de Gr.:
Creo que este punto no esta mal:… porque la altura se mide partiendo de los vértices y porque un triángulo tiene tres vértices, hay una altura posible de cada vértice a la base, hasta la afirmación sobre los tres pares de pies. De este punto en adelante no logro seguirla… Bien, habría podido decir que la altura es perpendicular a la base o cualquier otra cosa por el estilo, pero pienso que esto podía ser clarificado oralmente. No piensan en todo, mientras deben formularlo. Sin embargo creo que se podría afirmar que ha entendido un poco… Incluso he pensado en como yo habría dado respuesta a la pregunta, yo mismo no sabría como explicar a un niño de 7 años en forma tal que él hubiera estado en grado de entender. Ciertamente hubiera podido explicarlo matemáticamente pero de otra forma probablemente con la ayuda de un modelo o algo por el estilo. Se podría explicar mejor en forma manual, de otra forma un niño de 7 años no entiende. Por decir algo podría ser presentado un triángulo real y hacer caer un peso hacia abajo, girar el triángulo y hacer caer de nuevo el peso y continuar así … De este modo se puede ver que cae siempre verticalmente. Pero ciertamente no puede ser entendido con la palabra "perpendicular". Te puedo decir seriamente que yo mismo he tenido alguna dificultad con esta tarea. De todas formas pienso que muchos estudiantes deberían replantear lo que han aprendido en clase más que pedirse como podrían explicarlo a un niño.
Este tipo de análisis es interesante al menos por las dos razones siguientes:

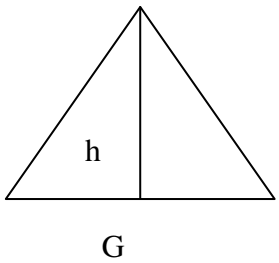
- entrando en detalle en el texto de Simona, el análisis intenta dar una descripción completa del concepto y de las ideas con respecto a la altura contenidas en el texto, y lo comparan con sus mismos conocimientos matemáticos sobre el argumento;
- en el momento en el cual evalúan el texto, lo hacen en forma por demás diferenciado.

Es diverso en el caso del siguiente análisis de la profesora italiana B.:
Oh si, estoy asombrada. Esta respuesta centra bien el argumento, una respuesta de alto nivel, desde el momento que está en grado de explicar esto a un niño de siete años, esto significa que en su cabeza ella ha entendido perfectamente que son las alturas de un triángulo… Es necesario ver incluso como intenta de explicarlo lo mejor posible.

3.2.3. Interpretaciones de los profesores de los TEPs de sus alumnos

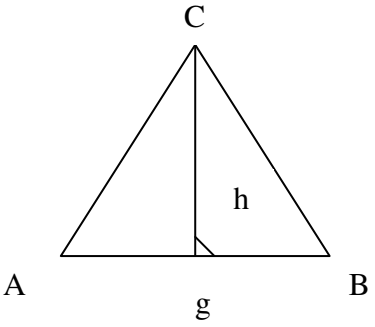
Las interpretaciones típicamente proporcionada por casi todos los profesores sobre el TEP de Simona y sobre los TEPs de sus propios estudiantes, en el caso de los profesores italianos así como en el caso de los alemanes, son muy diferentes entre ellos.
Tales TEPs, son caracterizables gracias a los cinco ejemplos que siguen:

I.



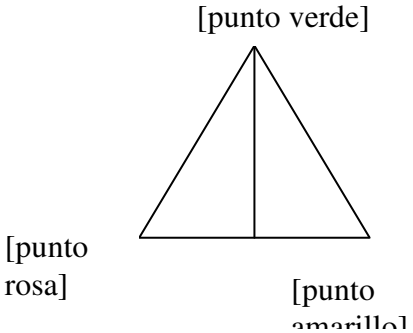
El triángulo tiene una única base y una sola altura con las cuales se puede calcular el área y la circunferencia. No se nada de la tercera altura.

II.



Un triángulo tiene siempre una altura y esta va de la base al punto C. La altura parte siempre perpendicularmente de la base al punto C.

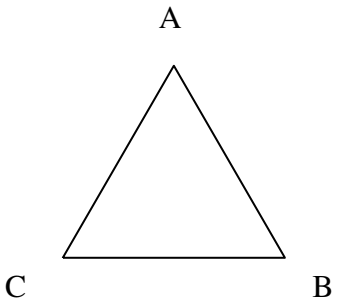
III.



Aquí he diseñado un triángulo y cuando ahora trazo una línea del ángulo verde hasta la línea derecha esta se llama altura. Si dibujo una línea del ángulo amarillo dirigido hacia arriba y del ángulo verde trazo una línea dirigida hacia el lado la línea en alto es también llamada altura. Si hago lo mismo del ángulo rojo y del ángulo verde, la línea en alto se llama aún altura..

IV. *El triángulo es una figura plana; este triángulo tiene una altura, y dado que el triángulo puede ser girado entonces tiene tres alturas.*

V.



La primera altura pasa a través del vértice C. Esa va derecha hasta el segmento opuesto. La segunda altura pasa a través del vértice B. Esa llega derecha al segmento opuesto. La tercera altura pasa a través del vértice A. Esa llega hasta el segmento opuesto.

a. Evaluaciones, interpretaciones no descriptivas. Casi todas las interpretaciones de los profesores están fuertemente caracterizadas de una evaluación más que de expresiones descriptivas. Los profesores no parecen interesados en lo que *realmente* piensa el estudiante a propósito del argumento en cuestión, es decir en los conceptos matemáticos ni en los conocimientos matemáticos alcanzados indicados en el texto. Por lo general formulaban conclusiones sobre el nivel general de competencia de los estudiantes. Algunos profesores alemanes (y también italianos) se sintieron incluso en grado de determinar tal nivel atribuyendo un puntuación (una calificación) a los autores del texto. Por ejemplo el TEP (I) fue comentado por el profesor del autor de la siguiente manera: *Diría que tal vez se trata de un estudiante de nivel medio. Aquello sobre la base y la altura para el cálculo del área es correcto, pero no se necesita para la circunferencia.*

Aquí ha confundido alguna cosa. Después de conocer el nombre del alumno, cambia posición: *Si, se acerca realmente mucho a los mejores, diría que tiende al siete.*

Lo que el profesor no parece haber comprendido es que el estudiante que ha redactado el TEP (I) no considera las líneas del triángulo como objetos (geométricos) autónomos. Las palabras "base" y "altura" representan en su mente magnitudes (tal vez solo numéricas) de las cuales se sirve si tiene necesidad de calcular alguna cosa relativa al triángulo (área y circunferencia). Esto significa que las interpreta *funcionalmente.* El triángulo posee una base y una altura solo por esta razón, para poder usarlas despues con objetivos de cálculo. Así, en la interpretación del autor del TEP (I), se necesita tal vez ver la base y la altura sin hacer diferencia entre estos dos objetos: en el calculo ambas tiene la misma función, por tanto no existe la necesidad de diferenciarlas. El estudiante usa tal vez los nombres "base" y "altura" casi como sinónimos, considera la base como la "segunda altura" y se refiere a una "tercera altura" en esta misma dirección. Todo esto evidentemente evoca en la mente del estudiante una imaginación algebraica más que geométrica. Aún más, la palabra "triángulo" es usada por él más como estímulo para la elección de un cierto procedimiento algebraico que como objeto geométrico en si, dejando de lado un "uso" escolástico.

Es un poco diverso expresivamente el caso del texto (IV), en la aproximación conceptual en donde el autor llama triángulo una "figura plana", es decir lo inserta conceptualmente en la categoría de las figuras planas (polígonos). El estudiante muestra incluso una imagen conceptual de altura bastante clara; según él se trata de una línea que existe solo respecto a un lado del triángulo que es aquel horizontal, entendido como el lado paralelo a las márgenes superior e inferior de la hoja. Esto porque la altura *debe* ser vertical, es decir paralela a las márgenes de la derecha y de la izquierda de la hoja. Contrariamente a lo que se pensaría con este restringido concepto de altura, el autor del texto logra dar una explicación personal de las tres alturas de un triángulo. Imagina de girar el triángulo sobre el plano de forma tal que uno después del otro todos los lados del triángulo queden en posición horizontal. Así obtiene una altura por cada uno de los lados, lo que significa en total tres alturas. (Es interesante como en este caso una línea pueda perder su propiedad de ser altura cuando su posición cambia. De otra parte la misma línea recupera esta propiedad cada vez que toma una oportuna y particular posición). Pero esto es suficiente, de hecho, para demostrar la existencia de tres alturas.

En todas las circunstancias los profesores siguieron su tendencia a usar los textos escritos de los alumnos para confirmar su competencia matemática en coherencia con las reglas internas de la clase. En esta dirección buscaron de evaluar el texto (en realidad al estudiante) en una forma fuertemente dicotómica. Estos textos, como lo hemos ya afirmado, les pareció o totalmente buenos o absolutamente inadecuados o incorrectos.
Los criterios sobre los cuales los profesores basaron su valoración se refieren principalmente a:

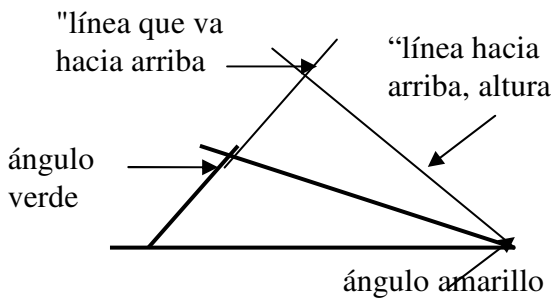
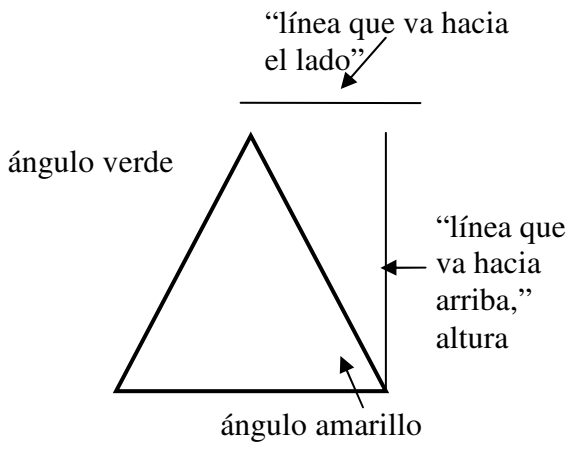
- cuando un estudiante usa reglas del lenguaje matemático formal (en muchos casos, afirmaciones matemáticas correctas dadas por los alumnos en un lenguaje informal no fueron aceptadas);
- cuando las argumentaciones de los estudiantes se acercan a aquellas de los profesores y por tanto a la presentación hecha en clase; los TEPs (y de esta forma los

estudiantes) fueron considerados más positivamente en el caso en el cual mostraban puntos símiles con los contenidos presentados o con el lenguaje usado por los profesores; las ideas originales de parte del los estudiantes fueron consideradas "interesantes", pero no muy apreciadas.

Por lo que respecta al último criterio mencionado, la interpretacion del TEP (II) por parte del profesor de la clase del autor proporciona un interesante ejemplo: *Esta respuesta en todo caso tiene algo que ver con el Teorema de Pitágoras. Porque ya hemos empezado a estudiarlo, esto podría jugar un papel en la respuesta. Con la recta perpendicular donde habíamos calculado alguna vez la base. Es posible porque habíamos hecho partir regularmente la altura del punto C. Quisiera evaluarlo como un buen alumno.* Y, de forma confidencial, después de conocer el nombre del estudiante: *Si, Stefan esta sobre el siete.*

b. Interpretación inequívoca, no abierta. Para nuestra sorpresa, evidentemente los textos aparecen inequívocos a la mayor parte de los profesores. Ellos se sintieron capaces de decir exactamente que pensaban los estudiantes y han mostrado no tener dudas sobre el particular nivel de competencia de cada uno de los autores de los TEPs. Ningún profesor ha dado más de una interpretación posible sobre los conceptos o sobre las ideas matemáticas de los estudiantes.

Ejemplo.
En el TEP (III), la altura que va del punto verde a la "línea derecha" (es decir a la base horizontal) es bastante clara de identificar. Pero ¿cómo se puede interpretar la siguiente afirmación: *Si dibujo una línea del ángulo amarillo dirigido hacia arriba y del ángulo verde trazo una línea dirigida hacia el lado la línea de arriba es también llamada altura?*. Existen al menos dos interpretaciones que tiene la misma probabilidad de ser aquella que alberga la mente del autor, y que pueden ser aclaradas con el análisis de los siguientes diseños.

El estudiante imagina una altura fuera del triángulo, perpendicular a la prolongación del lado opuesto.	
El estudiante tiene en mente la imagen de una altura paralela a lo largo de la hoja y que se dirige hacia una paralela (horizontal) a la base que pasa por el punto verde.	

El profesor sin embargo ha dado un análisis demasiado simplista (parece más una autocomplacencia de su propia elección didáctica) del tipo: *De la formulación podría ser Johann B. Esta entre el siete y el ocho, pero tiende a cometer errores de desatención. Ha formulado el problema de forma completa, estoy muy contenta por esto, porque he trabajado mucho con las tizas de colores en el tablero.* [Resulta así explicado el origen de la elección cromática para indicar los vértices hecha por el autor del TEP]. *El dibujo lo hace más comprensible, puede ver mejor las relaciones. Verdaderamente, me gusta.*

c. Interpretación global, no detallada. Se podría pensar que los profesores no tienden a analizar el texto palabra por palabra, frase por frase, en forma detallada. Dan la impresión de que no están interesados ni en diferenciar su evaluación referida a un contenido matemático, ni en describir en detalle y con suficiente exactitud los procesos mentales de los estudiantes evidenciados en sus textos. En la mayor parte de los casos, los análisis de los profesores pueden ser considerados superficiales e incompletos. El TEP (V), por ejemplo, fue interpretado así: *Creo que el estudiante ha entendido el problema de la altura. Ha tomado la altura exactamente del vértice C al lado opuesto;*

las otras dos del mismo modo. Cierto no dijo que deben ser perpendiculares ala base. Pero lo respuesta no esta mal.
En el análisis de este TEP, el profesor no señala el hecho que el estudiante no dice *"hasta el lado opuesto"* pero afirma que cada altura *"se alarga derecha hasta el segmento opuesto"*. Esto puede ser considerado equivalente en el lenguaje cotidiano a la expresión matemática "*es perpendicular al lado opuesto"*. Además el autor del texto habla de *"la primera*", de "*la segunda*" y de "*la tercera altura*". Esta es su forma particular de demostrar indirectamente la afirmación: *El triángulo tiene tres alturas.*

3.3. Las interpretaciones de los profesores

Los TEPs podrían ser usados como instrumentos para obtener información detallada sobre los conocimientos y sobre la comprensión de los conceptos matemáticos, de los teoremas y de los procedimientos construidos por cada alumno. En nuestro proyecto de investigación hemos buscado de entender en qué medida y/o cómo los profesores de matemáticas que han aceptado de participar pudiesen hacer uso de los TEPs para darse cuenta del nivel de conocimiento y de comprensión de los estudiantes de su propio curso.
Pero: ¿qué tipo de experiencia tiene los profesores en el análisis de textos de este tipo (que no sean banalmente "tareas en clase") y por tanto en su interpretación?. ¿Están convencidos que el análisis de los TEPs puede ser una ayuda en su proceso de enseñanza de la matemática, en particular para evaluar los conocimientos y las competencias matemáticas de cada uno de los estudiantes?.
Nosotros deseábamos ver como los profesores podían realmente trabajar con los TEPs de los estudiantes y de consecuencia nos parecía oportuno y preliminar observar como se hubieran comportado cuando nosotros les hubieramos pedido de interpretarlos.
A continuación presentamos algunos ejemplos de cómo los profesores interpretaron los TEPs de los propios estudiantes *antes* de darles a conocer el nombre de los autores y de cómo comentaron su propia interpretación *después* de ser informados sobre el nombre de los autores (Esta información esta aquí indicada con el nombre de los estudiantes entre paréntesis).
Cuando el profesor evalúa el texto sometiendo a juicio y asignando una calificación, eso viene aquí reportado en la categoría numérica ascendente que va 1 a 10. (Obviamente, nosotros no pedíamos de hecho esta valoración numérica y por tanto, cuando esta aparece es dada espontáneamente del profesor).
Los textos de los TEPs una vez comentados están reportados entre paréntesis cuadrado (pero sin figuras) para comodidad del lector.

Profesor K:
Sobre el TEP (17)[*Un triángulo puede ser girado como se quiera. Una vez ésta es la altura* (lado 1) *otra vez ésta* (lado 2) *y otra vez ésta* (lado 3). *Por eso tiene tres alturas*]: *El estudiante gira el triángulo. Si bien no sepa trazar la altura en las diversas posiciones, por el resto va bastante bien. Se trata probablemente de una explicación demasiado simple, pero, no obstante esto, bastante lógica. Posiblemente debería explicarla en el tablero. Ahora empiezo a estar confundida. Debe tratarse de alguno que ha entendido. "Puede ser girado como se quiera". Podría ser Sabin o Tim* (Stephanie). *Oh, si, si, esta bien.*

Profesor Ga:
Sobre el TEP (25)[*Si cada triángulo tiene tres alturas, entonces cada una debe partir de un vértice así que resulta un ángulo recto*]. *Yo creo que este estudiante ha pensado en modo correcto, pero se ha expresado en forma inadecuada. Esta girando al rededor de las cosas. Logra poner algo correcto en su respuesta, que la altura parte de un vértice, el ángulo recto… Pero la correcta relación lógica la perdió. Parece ser además un estudiante que no ha comprendido del todo la tarea, que no puede. Pero no se en realidad quien podría ser. (Benjamin P). Esto me sorprende. Porque no es un mal estudiante ni en matemáticas ni en alemán. Bien, esta es la forma en la cual nos podemos equivocar.*

Profesor We:
Sobre el TEP (10)[*Todos los triángulos tienen una estatura del cuerpo* [inmediatamente cancelado]. *Los triángulos tienen dos piernas y una altura del cuerpo, que es perpendicular a la base. Por consecuencia:* $2\times piernas+h_k=3$ *alturas*]. *El calculo es totalmente sin sentido; mezcló las piernas que serían los lados con la altura. Si bien es cierto que la altura es correcta. Pero parece nunca haber escuchado nada a propósito de las otras dos. Debe ser un estudiante que va mal. Creo sea Tobia G. Esta sobre el cuatro* (Nadine D). *Realmente, esta fuera de todo en este caso. Verdad?. Es una de las estudiantes buenas. Loca!. "Un triángulo que tiene una estatura y dos piernas". Debo hacer con más frecuencia algo por el estilo para controlar lo que están pensando. Beh! Esta vez estoy verdaderamente desconcertada.*

Profesor Wö:
Sobre el TEP (29) [*El triángulo tiene tres lados. Cada lado puede ser llamado base. Opuesto a cada base esta el punto. Si tu unes el punto a la base. Esta es la altura. Y esto, de hecho puede ser tres veces por cada triángulo*]. *El problema* [quiere decir: el TEP], *para mi, esta expuesto en modo indiscutible. Debe tratarse de uno de los mejores. Si, las dificultades en esto caso existen siempre, además porque entre otras cosas la competencia del lenguaje juega su propio rol. Algunas personas están en grado de expresarse mejor, otras peor. Y es por esto que no se puede siempre decir si depende de la habilidad matemática o lingüística. Se necesita saber separar las dos cosas. Pero la explicación es correcta y relativamente simple e incluso formulada visiblemente.* (Gaby L). *Es emigrante de Rusia y este pueblo acostumbra a mirar a través de las cosas.*

Profesor D:
Sobre el TEP (2) [*Si haces estar a las personas en pie con la cabeza en los vértices y los pies sobre la base, cada una de ellas es una altura. Aquella es su altura (CADA UNO TIENE UNA ALTURA PROPIA). Eso es verdad, existen tres alturas. Si quieres, mi querido niño, puedo dibujar un buen triángulo y tres personas dentro: UNO, DOS y TRES. Tres alturas*]. *Oh, este es bonito. Parece exactamente a aquel nos habías dado.*

[Se refiere al hecho que habíamos discutido en un momento anterior otros TEPs no realizados en su clase; y uno de estos tenía como autora la estudiante con nombre Simona]. *Muy parecido. Es una lástima que no haya hecho ninguna figura.* [Se le pidió si podía identificar el autor del texto]. *No, no lo se, pero tal vez si, tal vez si. Tal vez se trata de… pero no lo se, no, pienso que no estoy en grado*. [Se le pide si desea saber el nombre del estudiante; responde que si. Se le dice el nombre del estudiante]. *No, ¿realmente?. ¿Pero cómo?. Pero si este estudiante esta siempre mentalmente ausente, siempre fuera, parece siempre fuera. Pero, mira, no me hubiera esperado nunca. Ves?. Es verdaderamente útil.* [Hace referimento evidentemente a la función de los TEPs]. *Es verdaderamente una cosa muy útil. Todo esto lo podrían traer los libros de texto;¿si tienes presente?.*

Recordamos que habiamos entrevistado a 16 profesores, 8 italianos y 8 alemanes; a cada uno de ellos le fueron propuestos 5 TEPs entre aquellos realizados por los alumnos de su misma clase; disponemos entonces de la interpretación de 80 TEPs.
¿Qué se puede decir a propósito de las interpretaciones de los profesores (de las cuales, las reportadas en precedencia son solo una parte)?. ¿Cómo pueden ser clasificadas?.
Como ya habíamos puesto en evidencia precedentemente, en general, los profesores no parecen muy interesados en lo que realmente piensan los estudiantes a propósito del argumento tratado, ni sobre los conceptos ni sobre los conocimientos matemáticos adquiridos, o por lo menos de como estos resultan en los TEPs. En ocasiones saltan directamente a conclusiones sobre el nivel general de competencia de los alumnos. Algunos profesores (no pocos) se sienten hasta en grado de determinar este nivel atribuyendo una calificación al autor (desconocido) del texto. Buscan por tanto de evaluar el texto (en realidad al estudiante) en forma fuertemente dicotómica: estos textos, en general, les han parecido o totalmente buenos o totalmente inadecuados o incorrectos

4. Respuestas a las preguntas de investigación y conclusiones

Si la función didáctica de los TEPs, descrita también en nuestros trabajos precedentes (D'Amore, Maier, 1999, 2002) se revelase convincente, parece absolutamente necesario que el profesor haga uso de estos en forma adecuada. Esto significa que él debería propiciar un regular entrenamiento a los estudiantes en el escribir textos que después debe estar preparado y ser capaz de interpretar y de analizar en modo descriptivo mas que evaluativo, de manera detallada y completa y no general y selectiva, consciente del hecho que cada texto es abierto a diversas interpretaciones. Evidentemente poseer esta habilidad no es un problema por si misma; pero debe ser adquirida y objeto de entrenamiento, en los dos sentidos: producción (por parte de los estudiantes) y análisis (por parte del profesor).
Además el profesor debe estar convencido que su acción de enseñanza y de organización del proceso de aprendizaje puede tener y, normalmente tiene, diversos efectos sobre cada uno de los alumnos. Estas diferencias no son solo cuantitativas, es decir relativas al hecho que alumnos diversos obtengan más o menos de la oferta del profesor, sino incluso, en el mismo tiempo, de tipo profundamente cualitativo. Esto

significa que los estudiantes construyen cualitativamente conceptos, conocimientos y razonamientos matemáticos *diversos* el uno del otro.
El profesor, una vez conocida la existencia de los TEPs y una vez que aprendió a hacer de estos un uso evaluativo sobre la situación cognitiva real alcanzada por cada estudiante, debería estar impaciente por conocer estas diferencias individuales, para poder proyectar de consecuencia el programa para su clase.
Muchos profesores quedaron sorprendidos en el momento en el cual confrontaron la evaluación de los TEPs con sus precedentes convicciones sobre los autores. Muchos se encontraron sorprendidos por los "buenos estudiantes" que escribieron textos "no buenos" y por los "estudiantes no tan buenos" que escribieron "buenos" textos; pero muchos no se dieron cuenta que el sistema de los TEPs puede ayudarles a aprender mucho sobre las competencias y los razonamientos de cada uno de sus alumnos. Pocos, de hecho, han concluido con esta convicción, incluso si alguno ha dejado entrever la posibilidad de usar este instrumento regularmente en futuro

Bibliografía

Beck C., Maier H. (1993). Das interview en der mathematikdidaktischen forschung. *Journal für mathematikdidaktik*. 13, 2, 147–179.

Beck C., Maier H. (1994). Zu methoden der textinterpretation in der empirischen mathematikdidaktischen forschung. En: Maier H., Voigt J. (eds.) (1994). *Verstehen und verständigung im mathematikunterricht – arbeiten zur interpretativen unterrichtsforschung*. Köln: Aulis. 43–76.

Beck C., Maier H. (1996). Interpretation of text as a methodological paradigm for empirical research in mathematics education. En: Gagatsis A., Rogers L. (eds.) (1996). *Didactics and history of mathematics*. Thessaloniki: Erasmus Project. 3–34.

D'Amore B. (1996). Schülersprache beim Lösen mathematischer Probleme, *Journal für Mathematik Didaktik*. 17, 2, 81-97.

D'Amore B., Giovannoni L. (1997). Coinvolgere gli allievi nella costruzione del sapere matematico. un'esperienza didattica nella scuola media. *La matematica e la sua didattica*. 4, 360–399.

D'Amore B., Maier H. (1999). Investigating teachers' work with pupil' textual eingenproductions. Schwank I. (ed) (1999). *European research in mathematics education*. I, II, Osnabrück. 261-278.

D'Amore B., Maier H. (2002). Produzioni scritte degli studenti su argomenti di matematica (TEPs) e loro utilizzazione didattica. *La Matematica e la sua didattica*. 2, 144-189.

D'Amore B., Sandri P. (1996). "Fa' finta di essere...". Indagine sull'uso della lingua comune in contesto matematico nella scuola media. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*. 19A, 3, 223–246. Version en español: D'Amore B., Sandri P. (1999). Imagina que eres… Indagación sobre el uso de la lengua común en contexto matemático en la escuela media. *Revista EMA, Investigación e innovación en educación matemática (Bogotà, Colombia).* 4, 3, 207-231.

D'Amore B., Sandri P. (1998). Risposte degli allievi a problemi di tipo scolastico standard con un dato mancante. *La matematica e la sua didattica*. 1, 4–18.

Davidson D. M., Pearce D. L. (1983). Using writing activities to reinforce mathematics instruction. *Arithmetic teacher*. 35, 8, 42–45.

Gallin P., Ruf U. (1993). Sprache und mathematik in der schüle. Ein bericht aus der praxis. *Journal für didaktik der mathematik*. 14, 1, 3–33.

Glaser B.G., Strauss A.L. (1967). *The discovery of grounded theory. Strategies for qualitative research*. New York: Aldine.

Kasper H., Lipowsky F. (1997). Das lerntagebuch als schülerbezogene evaluationsform in einem aktiv-entdeckenden grundschulunterricht − beispiel aus einem geometrie-projekt. Schönbeck J. (ed.) (1997). *Facetten der mathematikdidaktik*. Weinheim: Dt. Studienverlag. 83–103.

Locatello S., Meloni G. (2002). . Educazione e Matematica. Cinque anni di esperienze matematiche in collaborazione, corrispondenza, conferenze e continuità. *En prensa*.

Maier H. (1989a). Problems of language and communication. Pehkonen E. (ed.) (1989). *Geometry − geometrieunterricht*. Helsinki: University. 23–36.

Maier H. (1989b). Conflit entre langage mathématique et langue quotidienne pour les elèves. *Cahiers de didactique des mathématiques*. 3, 86–118.

Maier H. (1993). Domande che si evolvono durante le lezioni di matematica. *La matematica e la sua didattica*. 2, 175–191.

Maier H., Schweiger F. (1999). *Mathematik und sprache. Zum verstehen und verwenden von fachsprache im mathematikunterricht*. Wien: Hölder-Piechler-Tempsky.

Miller L.D. (1992). Teacher benefits from using impromptu writing prompts in algebra classes. *Journal for research in mathematics education*. 23, 4, 329–340.

Phillips E., Crespo S. (1996). Developing written communication in mathematics through math penpal letters. *For the learning of mathematics*. 16, 1, 15–22.

Powell A. B., Ramnauth M. (1992). Beyond questions and answers: prompting reflections and deepening understandings of mathematics using multiple-entry logs. *For the learning of mathematics*. 12, 2, 12–18.

Schubauer Leoni M. L. (1988). L'interaction expérimentateur-sujet à propos d'un savoir mathématique: la situation de test revisitée. En: Perret-Clermont A. N., Nicolet M. (eds.) (1988). *Interagir et connaître*. Cousset: Delval. 251-264.

Schubauer Leoni M. L. (1989). Problématisation des notions d'obstacle épistémologique et de conflit socio-cognitif dans le champ pédagogique. En: Bednarz N., Garnier C. (eds.) (1989). *Construction des savoirs: obstacles et conflits*. Ottawa: Agence d'Arc. 350-363.

Schubauer Leoni M. L., Ntamakiliro L. (1994). La construction de réponses à des problèmes impossibles. *Revue des sciences de d'éducation*. XX, 1, 87-113.

Selter Ch. (1994). *Eigenproduktionen im arithmetikunterricht der primarstufe*. Wiesbaden: Dt. Universitätsverlag.

Waywood A. (1992). Journal writing and learning mathematics. *For the learning of mathematics*. 12, 2, 34-43.

Traducción de Martha Isabel Fandiño Pinilla

471. D'Amore B., Fandiño Pinilla M.I. (2003). La formazione iniziale degli insegnanti di matematica in Italia. *La matematica e la sua didattica*. 4, 413-440.

La formazione iniziale degli insegnanti di Matematica [45] [46]

Bruno D'Amore – Martha Isabel Fandiño Pinilla

Nucleo di Ricerca in Didattica della Matemática
Dipartimento di Matematica – Università di Bologna [47]

1. *Culture* per la formazione

La problematica della formazione culturale iniziale degli insegnanti di "Matematica" ha almeno due risvolti di grande interesse preliminare, per chi si occupa di Didattica della Matematica:

- stabilire di quale cultura *matematica* hanno davvero bisogno gli insegnanti di "Matematica";
- stabilire di quale cultura *didattica* hanno davvero bisogno gli insegnanti di "Matematica".

Questi temi si intrecciano in maniera complessa con:

- le attese della società, quanto a competenze matematiche da parte degli studenti in uscita dai singoli corsi di studio (Scuola Primaria e Scuole Secondarie, diversamente organizzate nei vari Paesi del mondo);
- le convinzioni degli insegnanti "a monte", per quanto concerne la Matematica, la sua didattica, il suo apprendimento, i suoi scopi, i suoi usi, le sue applicazioni.

Assai diverso è parlare di insegnanti in servizio o di insegnanti in formazione:

- i primi hanno solitamente già elaborato proprie teorie basate spesso soprattutto sull'esperienza personale;
- i secondi, in mancanza di una formazione specifica attenta, non possono far altro che crearsi attese e modelli basati sulla loro precedente esperienza come allievi, assumendo a modello (in positivo o in negativo) i precedenti loro insegnanti, come afferma addirittura Felix Klein (Loria, 1933).

2. Un quadro teorico di riferimento

È ben noto che, su ciascuno dei temi più o meno esplicitamente sottolineati in **1**, esiste una vasta bibliografia. Noi ci limiteremo solo a citare i lavori che riteniamo essenziali per chiarire la nostra prospettiva.

---

[45] Il presente lavoro è svolto nell'àmbito del Progetto di Ricerca dell'Unità di Bologna: «*Ricerche sul funzionamento del sistema: allievo-insegnante-sapere*», inserito nel Programma di Ricerca Nazionale: «*Difficoltà in matematica: strumenti per osservare, interpretare, intervenire*», cofinanziato con fondi M.I.U.R.

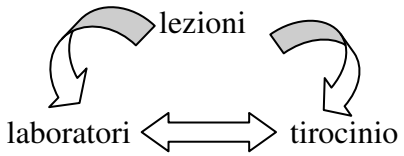
[46] Il presente lavoro è l'ampliamento di uno precedentemente pubblicato (D'Amore, 2002b), facendo uso dello studio Fandiño Pinilla (2001) e del più vasto Fandiño Pinilla (2002).

[47] Dipartimento di Matematica dell'Università di Bologna, piazza di porta san Donato 5, 40126 Bologna. Indirizzo e-mail degli autori: damore@dm.unibo.it

Ricordiamo i lavori di Furinghetti (2001) e di Carrillo e Contreras (1995) sulle convinzioni e quello di Porlàn e altri (1996) per quanto riguarda le attese della società. Le convinzioni degli insegnanti determinano strettamente la loro azione, talvolta inconsapevolmente; mentre le attese della società influenzano, più o meno palesemente, le convinzioni.
Sulle differenti aspettative degli studenti e degli insegnanti circa il rapporto tra Matematica insegnata ed appresa in aula e sue applicazioni "esterne", si veda D'Amore e Fandiño Pinilla (2001). Questo tipo di problematica, stupidamente banalizzata e dunque disattesa, si inserisce molto bene nel vasto campo della riflessione *etnomatematica*, alla quale faremo riferimento ancora tra breve (D'Ambrosio, 2002).
Quanto alla complessa problematica della preparazione degli insegnanti ed alla sua relazione con diversi quadri teorici di riferimento, rimandiamo a Fandiño Pinilla (2001, 2002) per un panorama vasto e tuttavia (per forza di cose) non esaustivo, fortemente connesso anche con le problematiche del curricolo e della valutazione; ed a Blanco (1991) per la sua specificità *ante litteram.* In questi lavori si mostra come il tema che stiamo qui trattando sia studiato in tutto il mondo, assumendo oggi un rilievo addirittura di ricerca specifica da parte dei didatti della Matematica, come rileva anche Portugais (1995). Di fatto, poiché questa formazione è essa stessa intesa legislativamente come un insieme di insegnamenti, non la si può pensare come un processo esente dai ben noti "fenomeni didattici" descritti nella "didattica fondamentale" (contratto didattico, teoria delle situazioni, teoria degli ostacoli etc.). Ne nasce una epistemologia complessa che potrebbe portare ad una vera e propria "perdita di senso". Riflettere su questo punto è *essenziale* per chi si occupa di formazione iniziale degli insegnanti di "Matematica", il che comporta una seria preparazione in Didattica della Matematica in chi si occupa di formazione iniziale degli insegnanti di "Matematica", anche se le discipline insegnate sono diverse dalla specifica "Didattica della Matematica".
Ancora, lo studio di Houdement e Kuzniak (1996) mette in evidenza le "strategie" che si possono/devono mettere in campo nella formazione iniziale degli insegnanti di "Matematica":

- strategie culturali che hanno come scopo di aumentare le conoscenze dell'insegnante in formazione;
- strategie basate sul *mostrare come fare*, nelle quali si invita ad osservare quel che succede in un'aula reale, suggerendo l'imitazione di pratiche che hanno successo;
- strategie basate sulla ripetizione di modalità, nelle quali lo stesso formatore si comporta come intende suggerire al formando;
- strategie basate sulla trasposizione, nelle quali si ha una sorta di riflessione critica sui singoli comportamenti; essenzialmente:
    - evidenziazione della trasposizione didattica (Chevallard, 1985, come testo storico di partenza; D'Amore, 1999, per una presentazione riassunta) nell'azione del formatore sul formando;
    - la stessa cosa nel passaggio formativo, nell'azione del formando come futuro docente sulla sua futura aula.

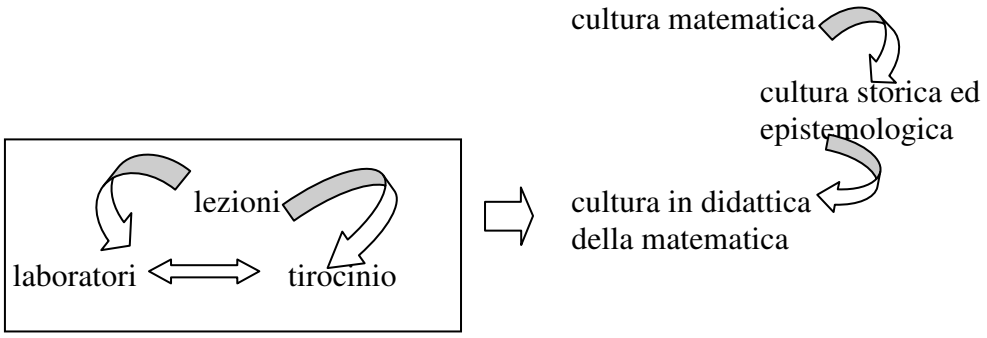
Proprio questa analisi, suggerisce che il modello "tripolare": lezioni, laboratori, tirocinio, scelto in molti Paesi del mondo, potrebbe funzionare, se vi fosse davvero una integrazione critica fra i tre "poli":



ed in particolare un'interazione forte tra i due "poli" più tipicamente prasseologici.
Bisogna non perdere mai l'occasione di porre in evidenza il fatto che l'insegnante (in servizio o in formazione) metterà sempre in campo sé stesso e le proprie convinzioni, sociali, didattiche e filosofiche. Riflettendo sulla messa in campo di convinzioni di carattere epistemologico, Francesco Speranza (1997) aveva forse per primo usato la dizione di "filosofie implicite" riferendosi a quelle di quegli insegnanti di "Matematica" che, non essendo mai stati indotti a riflettere sull'Epistemologia della Matematica, affrettatamente concludevano di non averne bisogno, o, ingenuamente, di non farne uso affatto.
Trasversale a tutti gli àmbiti precedenti, è lo studio di D'Ambrosio (2002) che lancia l'idea di "Etnomatematica" come insieme di strumenti in grado di interagire con un certo ambiente, con uno scopo determinato, all'interno di un gruppo o di una società; dunque, molte delle problematiche didattiche rientrano come caso particolare in quelle dell'etnomatematica; tale disciplina permette di vedere vari problemi trasversalmente, secondo ottiche più vaste.

3. Matematica e Didattica della Matematica

Tenuto conto di tutto ciò, crediamo che si possa restringere il nostro campo di riflessioni solo sulla prima coppia di problematiche, ritornando a:
1. stabilire di quale cultura *matematica* hanno davvero bisogno gli insegnanti di Matemática;
2. stabilire di quale cultura *didattica* hanno davvero bisogno gli insegnanti di Matematica;
includendo, in almeno una delle due, ma sarebbe forse più produttivo in entrambe, la cultura *storica* ed *epistemologica* sia in chiave matematica, sia in chiave didattica;
ed inserendo nella seconda la preparazione professionale (il *che fare in aula*) anche se in contesto non teorico, ma praxeologico (sotto la forma, per esempio, di attività di laboratorio, di tirocinio, di riflessioni sulle due pratiche e di riflessioni sulle relazioni tra le due pratiche).



1. Siamo dell'avviso, sulla base della nostra (lunga) esperienza, di eliminare ogni dibattito sul primo punto, affermando che un insegnante di "Matematica" ha bisogno estremo di forte competenza matematica e che quindi il primo nostro compito è quello di fornirgliela e di esigerla. Questo non significa però "cultura" ottenuta per banale accumulazione, bensì per approfondimento anche e soprattutto personale. Chiederemmo insomma all'insegnante di "Matematica" di sapere la Matematica non solo grazie a corsi seguiti e ad esami superati all'Università, ma per ripensamento personale, per ricostruzione critica, per analisi. Ad un insegnante chiederemmo non tanto di poter dominare vasti campi della Matematica o di essere padrone di tante tecniche raffinate, ma di padroneggiarne le basi stesse, di saper e *voler* apprendere quotidianamente la Matematica, altra Matematica, sempre più Matematica, e di sentirsi sicuro e forte nel suo dominio.
È per questo che vorremmo includere nella cultura matematica sia la sua storia sia la sua visione epistemologica, non tanto come ulteriori conoscenze aggregate, ma come occasioni per riflettere, per paragonare, per rendersi conto, per analizzare.
Crediamo che sarebbe bene che un insegnante sapesse non solo la Matematica, e che la sapesse bene, ma che sapesse organizzare il pensiero matematico dai punti di vista epistemologico e storico.
Questa posizione è oltremodo condivisa; lo vediamo dalla letteratura internazionale, tant'è vero che non insistiamo più di tanto, perché ci preme correre subito al punto 2, quello che poc'anzi abbiamo indicato con:

2. stabilire di quale cultura *didattica* hanno bisogno gli insegnanti di "Matematica".
Fino a poco tempo fa, diciamo 20 anni, essendo inesistente una disciplina di ricerca e di insegnamento universitario ufficiale con la denominazione "Didattica della Matematica", la necessità di questa cultura non era avvertita. Il neo insegnante (effettuata la preparazione disciplinare in Matematica) doveva semplicemente avere od acquisire esperienza, buon senso, disponibilità umana, servirsi di esempi positivi proposti dalla prassi o dall'esperienza di colleghi anziani. Al più, in molti Paesi del mondo (Fandiño Pinilla, 2001), si facevano seguire all'insegnante in formazione o al primo anno di servizio corsi rapidissimi di "Pedagogia", "Sociologia" e/o "Psicologia". Di solito questo miscuglio dava risultati negativi, a detta degli insegnanti stessi, e l'accusa più diffusa nel mondo era relativa alla genericità ed all'astrattezza delle nozioni apprese in questi corsi rapidissimi.
Ora, però, la disciplina "Didattica della Matematica" esiste; è possibile farne a meno?
Poiché si tratta di disciplina nuova, ancora tra i Colleghi (non solo universitari) essa è poco conosciuta ed è confusa con la "Pedagogia", con la "Didattica generale", con la "Scienza dell'Educazione" ecc.
Va detto, in due parole, che la Didattica della Matematica come disciplina di ricerca studia le condizioni dell'apprendimento in situazioni *reali* d'aula, a qualsivoglia livello scolastico o d'Università, quando il traguardo cognitivo in gioco è specifico della Matematica (Arzarello, Bartolini Bussi, 1998; D'Amore, 1999; Artigue, 2000; Schoenfeld, 2000).
Quel *reali* che abbiamo voluto evidenziare significa che:

- la Didattica della Matematica NON è la Matematica, pur essendo specifica per la Matemática;
- la Didattica della Matematica NON è la Pedagogia, né la Didattica generale, né la Psicologia, anche se sfrutta alcuni risultati concreti e teorici di queste discipline;

- la Didattica della Matematica NON è la divulgazione della Matematica; e questa deleteria confusione è tra le più diffuse (su questa distinzione si veda Eugeni, 1999);
- la Didattica della Matematica teorizza sui fatti reali che caratterizzano l'azione in aula, dai due diversi punti di vista, l'insegnare e l'apprendere; quindi non è affatto astratta o generica, ma assolutamente concreta e circostanziata; si tratta dunque di una scienza empirica;
- la pratica in Didattica della Matematica dà per scontata una (forte) competenza in Matematica, proprio perché chi la agisce deve farlo in maniera costruttiva, analitica e critica; ciò porta di conseguenza che il didatta della Matematica è necessariamente un matematico.

Crediamo che si debba arrivare prima o poi a poter dare per scontato che l'Università prepari in Matematica (il che è considerato dubbio da molti, troppi Colleghi docenti): a questo si potrebbe giungere realizzando *davvero* corsi di laurea per futuri insegnanti, corsi davvero specifici; non basta infatti la denominazione "Indirizzo didattico" a garantire la preparazione specifica necessaria (stiamo parlando solo di preparazione specifica in Matematica). Le cose sono analoghe in vari Paesi del mondo, mentre in altri esistono corsi di laurea *specificamente* pensati per futuri insegnanti di "Matematica"; ci si può laureare, perciò, in "Matematica per l'insegnamento" (e poi, di solito, ci sono corsi di Specializzazione o Master per la Didattica della Matematica). In questi corsi specifici di laurea, ci si preoccupa, di solito, più della preparazione in Matematica, dato che le discipline di tipo "Didattica della Matematica" sono situate nel postlaurea. Tuttavia, sembrano meglio organizzati quei Paesi nei quali almeno i primi elementi di Didattica della Matematica sono già forniti lungo il corso di laurea, anche a conferma della scelta.

Prima della decisione legislativa di pretendere per i futuri insegnanti di "Matematica" una specifica preparazione (laurea o specializzazione) professionale, la preparazione culturale in Matematica di fatto terminava; per entrare nel mondo della scuola si sottoponeva il candidato ad una prova d'esame (a carattere generale per la Scuola dell'Infanzia o Primaria; a carattere matematico per la Scuola Secondaria) e null'altro. Dunque, si dava per scontato che la preparazione matematica specifica terminasse lì. Non si capisce dunque perché ORA che c'è una richiesta professionalizzante generalizzata in tutto il mondo, se ne voglia approfittare per gridare allo scandalo circa l'impreparazione culturale dei futuri insegnanti e si voglia in fondo banalizzare ogni sforzo legislativo teso ad una più decisa professionalità docente. Non è detto affatto che ulteriori anni di preparazione disciplinare (per esempio una specializzazione in "Matematica" o un dottorato di ricerca in "Matematica") rendano più professionisti nell'attività di insegnamento-apprendimento della "Matematica", rispetto a chi ha *solo* una laurea. Crediamo che la differenza la faccia, invece, proprio una specifica preparazione professionale.

Supponendo di poter dare per scontato che l'Università prepari in Matematica, allora la successiva preparazione specifica per i futuri aspiranti docenti DEVE, a nostro avviso, vertere essenzialmente ed esclusivamente sulla Didattica della Matematica, per quel che è oggi, non banale buon senso misto ad esperienza (a volte neppure diretta), ma disciplina autonoma, scienza a sé stante.

4. La Didattica della Matematica

Crediamo che, attualmente, uno dei compiti principali della Didattica della Matematica, nell'àmbito che qui stiamo discutendo, sia quello di preparare professionalmente il futuro insegnante, fornirgli le chiavi di lettura per interpretare quel che succede in aula, quando i "poli" della terna «insegnante – allievo - sapere» interagiscono tra loro in modalità talmente complesse che nessuna competenza puramente matematica (né ovviamente puramente pedagogica), né tanto meno l'esperienza ed il buon senso, possono spiegare.
Tali chiavi di lettura oggi sono chiarissime e ben note a chi si occupa di Didattica della Matematica, ed hanno nomi condivisi che, nel contesto degli studi specifici, si identificano, per esempio, con:

- contratto didattico
- teoria delle situazioni
- ostacoli all'apprendimento
- immagini e modelli
- concetti figurali
- ingegneria didattica
- trasposizione didattica
- …

tanto per fare solo alcuni esempi (per i quali rimandiamo a D'Amore, 1999).
Chi non ha dimestichezza con tali termini o chi crede che si tratti di parole di senso comune e non specifiche o chi crede di non aver bisogno di fare lo sforzo di studiarle o chi crede che "sono tutte sciocchezze" e che "basta e avanza una solida preparazione matematica", a nostro avviso non può arrogarsi il diritto di potersi dichiarare esperto di una disciplina il cui vocabolario è diffuso e condiviso internazionalmente e che ha oramai raggiunto risultati concreti e tangibili, di grande efficacia.
In altre parole, per la preparazione dei futuri docenti non basta predisporre corsi post-laurea che abbiano la *denominazione* "Didattica della Matematica", ma dei corsi i cui *contenuti* siano specifici e realmente significativi per la preparazione professionale.
Due aspetti riteniamo spesso dimenticati ed invece di grande importanza, l'ingegneria didattica e l'osservazione.
In Douady (1993) troviamo: «Il termine ingegneria didattica indica un insieme di sequenze di classe concepite, organizzate ed articolate nel trascorrere del tempo in forma coerente da parte dell'insegnante-ingegnere allo scopo di realizzare un progetto di apprendimento per una certa popolazione di allievi» (si veda anche D'Amore, 1999, con ampia bibliografia). Il che comporta distinte fasi metodologiche in ingegneria didattica (Artigue, 1990): un'analisi previa; una concezione ed analisi a priori che metta in relazione le situazioni didattiche con l'ingegneria stessa; la sperimentazione delle situazioni didattiche in aula; l'analisi a posteriori che comprende ovviamente anche la valutazione. Solo per dare l'idea della complessità e della profondità cui siamo di fronte, basti dire che la sola analisi previa consta di molti punti: fissare l'oggetto di apprendimento che diventa oggetto di ingegneria; farne un'analisi epistemologica allo scopo di conoscerlo; fare l'analisi delle modalità usuali di insegnamento di quell'oggetto con discussione dei risultati apprenditivi con quelle modalità; fare l'analisi delle concezione degli allievi, le difficoltà e gli ostacoli connessi con la sua evoluzione; fare l'analisi dei limiti e condizionamenti dell'àmbito nei quali si sta per

realizzare in modo concreto l'azione didattica, facendo riferimento alla dimensione epistemologica di quel sapere, alla dimensione cognitiva (tipica dei destinatari dell'azione), alla dimensione didattica (relativa al funzionamento del sistema); la determinazione degli obiettivi dell'azione.
L'ingegneria è necessaria ma complessa; essa, inoltre, non è affatto banale risultato dell'esperienza; come tale, deve rientrare nel curricolo del futuro insegnante di "Matematica" come insegnamento specifico, probabilmente, con maggior opportunità, nell'àmbito che sta tra attività di laboratorio e di tirocinio, ma con ovvii ed espliciti riferimenti alla "Didattica della Matematica".
Molto legata alla pratica d'aula e dunque all'ingegneria, è la osservazione d'aula. Troppi sedicenti didatti sottovalutano questo aspetto, la cui complessità è invece ben stata messa in evidenza già decenni fa da Droz (1980). Osservare l'aula ed il comportamento degli allievi è da più Autori ritenuto essenziale per una significativa azione didattica e dunque diventa fondamentale formare i futuri insegnanti a questa pratica (Douady, Robert, 1992). Si insiste sempre sull'analisi dei protocolli, ma questa attività rientra, si integra ed ha bisogno dell'osservazione in aula [in una loro classificazione, Brun, Conne (1990) mescolano ed integrano le due azioni].
Anche questo aspetto, a nostro avviso, deve rientrare tra le competenze che si vogliono far costruire ai futuri docenti, dunque deve diventare esplicita parte delle attività di formazione iniziale degli insegnanti di "Matematica"; anche per questo, crediamo che la sistemazione ottimale sia all'interno della coppia laboratorio – tirocinio, con ovvii e forti legami con la "Didattica della Matematica".

5. Come la competenza in Didattica della Matematica modifica l'atteggiamento degli insegnanti

Non tutti i risultati dell'attività di ricerca, in qualsiasi campo, hanno diretta e concreta ricaduta nella vita quotidiana: ciò a volte fa sembrare lontana, al cittadino comune, l'attività dei ricercatori.
Per esempio, nel campo della medicina, è ufficialmente riconosciuto che solo una minima parte della ricerca ha risvolti apprezzabili concretamente nell'immediato.
Si pensi, ancora per esempio, alla oggi tanto diffusa pila; Alessandro Volta (1745-1827) la concepì tra l'anno 1796 ed il 1800, ma solo dopo il 1865 si trovò il modo di rendere applicabile, concreta, conveniente nella pratica quotidiana tale geniale idea.

Lo stesso accade dunque ovviamente nella ricerca in Didattica della Matematica. In essa si possono individuare tre tendenze, tre filoni (Godino, Batanero, 1998; Bartolini Bussi, 1994):

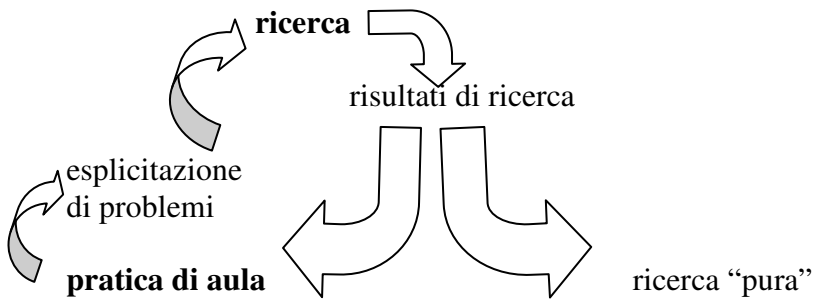
- azione pratica riflessiva sui processi di insegnamento ed apprendimento della "Matematica";
- tecnologia didattica: lo scopo è di mettere a punto materiali per un'istruzione matematica più efficace, sfruttando le conoscenze acquisite;
- ricerca scientifica: il suo scopo è di comprendere il funzionamento del complesso sistemico: insegnante – allievo – sapere, il "triangolo della didattica" (D'Amore, Fandiño Pinilla, 2002).

Si tratta di un'analisi a carattere espistemologico a livello globale (si potrebbe dire: di ecologia dei saperi istituzionali). Secondo Godino e Batanero, anche se questi tre campi si interessano di uno stesso oggetto, essi sono intrinsecamente distinti:

- nel primo sembra evidenziata la problematica "pratica", "quotidiana", "professionale" dell'insegnante di fronte ad allievi ai quali deve far apprendere qualche cosa in modo efficace (c'è chi la chiama *microdidattica*, ma non in senso riduttivo);
- nel secondo sembra evidenziarsi il campo d'azione di chi elabora curricoli e di chi scrive manuali o materiali didattici vari;
- nel terzo sembra focalizzata l'attenzione di chi elabora teorie didattiche, soprattutto all'interno delle istituzioni universitarie, di vera e propria ricerca *per il Sapere*.

Seguendo anche le suggestioni di Bartolini Bussi (1994), Godino e Batanero (1998) finiscono con il concludere che le prime due componenti dell'Educazione Matematica potrebbero «essere tra loro legate come "ricerca per l'azione", mentre la terza componente è equivalente alla "ricerca per la conoscenza"».

Se si è ricercatori, occorre fare preliminarmente una scelta di campo, dunque, per decidere *per che cosa si fa ricerca*; se tale scelta prevede un *ritorno* all'aula, una volta ottenuti risultati, diventa importante rendersi conto ed accettare che solo una parte di questi risultati della ricerca *possono* davvero essere trasformati in oggetti di studio da parte dell'ingegneria didattica o, per lo meno, avere influenze sulla pratica docente.



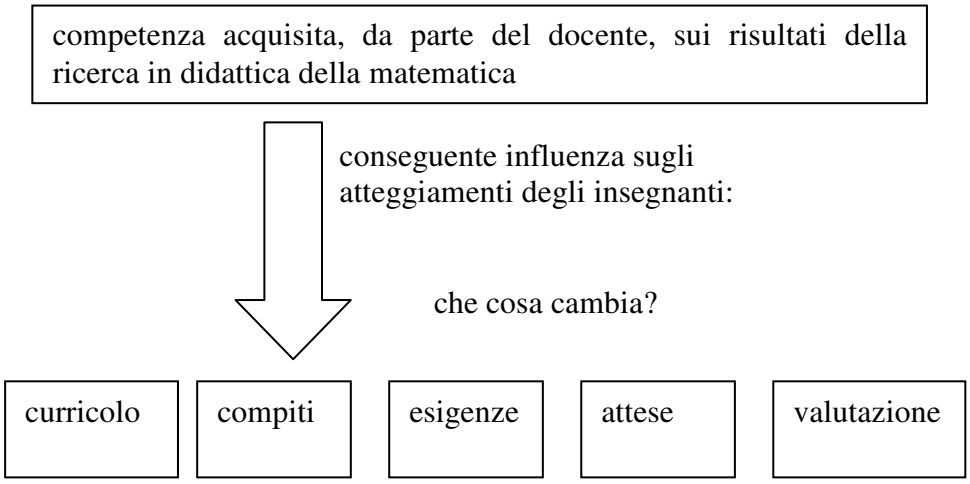
La disciplina Didattica della Matematica ha oramai almeno due decenni di storia, molti ricercatori attivi in tutto il mondo, un linguaggio ampiamente condiviso, proprie riviste (sia di ricerca, sia di divulgazione dei risultati, sia "miste"), propri seminari, convegni,…; dunque la sua diffusione reale è sempre più massiccia.

Che cosa succede, dal punto di vista professionale, al docente che fa ricerca o al docente che, più semplicemente, viene a sapere dei risultati della ricerca?

Grazie alla detta diffusione, la comunità degli studiosi di Didattica della Matematica ha finalmente la possibilità di rispondere alla precedente domanda; lo faremo qui nel modo meno complicato possibile: il docente - ricercatore ed il docente, una volta conosciuti i risultati della ricerca, *cambiano*. Cambiano radicalmente il proprio atteggiamento che si fa più attento, più critico, meno disponibile a dare per scontato che vi siano attività vincenti solo perché suggerite da qualcuno ad alto livello accademico o perché vi è di tali attività una pratica oramai tradizionale.

Per esempio, si veda come la cosiddetta "insiemistica", messa in crisi da tanti seri studi nell'àmbito della ricerca in epistemologia dell'apprendimento, sia stata lentamente abbandonata nella pratica didattica anche dai suoi più convinti sostenitori; per lo meno, è stata ridimensionata la cieca fiducia in essa riposta negli anni '70 ed '80: da disciplina

- panacea onnivora, è diventata comodo linguaggio da usarsi solo quando conviene davvero (Pellerey, 1989).
Per esempio, si veda come l'uso di strumenti didattici pre-confezionati, la cui utilità didattica era incondizionatamente accettata da molti insegnanti, è oggi meno a-critico (D'Amore, 2002a).
Per esempio, si veda come si è modificata l'attesa degli insegnanti delle scuole secondarie superiori di tutto il mondo, dopo gli studi sull'apprendimento delle dimostrazioni; mentre fino a qualche decennio fa si dava per scontata la competenza linguistico – logica degli studenti di 14 anni a prendere possesso dell'idea di dimostrazione, almeno in geometria, oggi si considera che tale idea necessita di una pratica didattica esplicita (e non più certo a 14 anni, ma ben oltre) (Duval, 1991, 1992-93; Hoyles, 1997).
Cambiano, dicevamo, gli atteggiamenti: fatalmente, l'insegnante che entra a contatto con certi risultati di ricerca non può più ignorarli, dopo; vede, riconosce nel comportamento dei propri studenti in aula e nel proprio agire professionale, la conferma di quei risultati e di conseguenza la propria interpretazione delle condotte subisce una modifica:



Esamineremo in dettaglio queste "modifiche" di atteggiamento.
Questa modifica riguarda il curricolo.
L'insegnante diventa più attento alla congruità delle proprie scelte didattiche; consapevole che esistono, per esempio, ostacoli ontogenetici, ostacoli didattici ed ostacoli epistemologici, o che esiste, per esempio, il contratto didattico; non si accontenta più di accettare l'apparente congruità, nel senso di consecutività, degli argomenti, che prima lo appagava e lo tranquillizzava, ma comincia a porsi problemi di analisi del curricolo sulla base dei risultati cognitivi dei propri studenti, sulla base dei risultati della propria azione didattica, accettandone dunque contemporaneamente una revisione critica e metodologica (Fandiño Pinilla, 2002).
Questa modifica riguarda la definizione dei compiti del docente e dell'allievo.
L'insegnante che entra in contatto con i risultati della ricerca, mette in discussione, in modo efficace e significativo:

- i propri compiti, le proprie attese;

- i compiti dello studente, le sue aspettative, le sue immagini della disciplina e del suo insegnamento.

Diventa dunque, più in generale ed in ogni caso, attento a quel che succede sul fronte di colui che potremmo definire l'attore impegnato nell'azione di costruire conoscenza, il suo allievo (troppo spesso, in precedenza, ignorato come attore).

Questa modifica riguarda le esigenze nuove che l'insegnante chiede alla propria preparazione professionale.

Abbiamo la prova dei fatti che:

- l'insegnante in servizio, chiede all'Università sempre meno attività cosiddette di aggiornamento, testi, seminari, convegni… sui contenuti matematici e si rivolge invece a specialisti della Didattica, consapevole del fatto che più risultati di ricerca didattica conoscerà e maggiore sarà, dapprima la capacità critica di analisi della situazione aula, e poi la propria professionalità;
- l'insegnante in formazione iniziale non lo sa, appunto perché è in formazione iniziale, ma la scelta vincente della società contemporanea di tutti i Paesi del mondo è di centrare la formazione dei docenti di "Matematica" sulla "Didattica della Matematica", ovviamente dopo una preliminare e salda preparazione disciplinare che resta in ogni caso alla base.

Questa modifica riguarda le attese che la pratica docente ha sulla società e viceversa.

Sembra inutile che la società esprima una propria attesa generale nei riguardi della scuola, se questa attesa non è conforme ai risultati della ricerca didattica. La professionalità nuova e più attenta dell'insegnante informato lo porta a ridefinire anche questo rapporto e, soprattutto, a ridisegnare il suo ruolo come efficiente esecutore dei piani educativi che la società gli ha affidato.

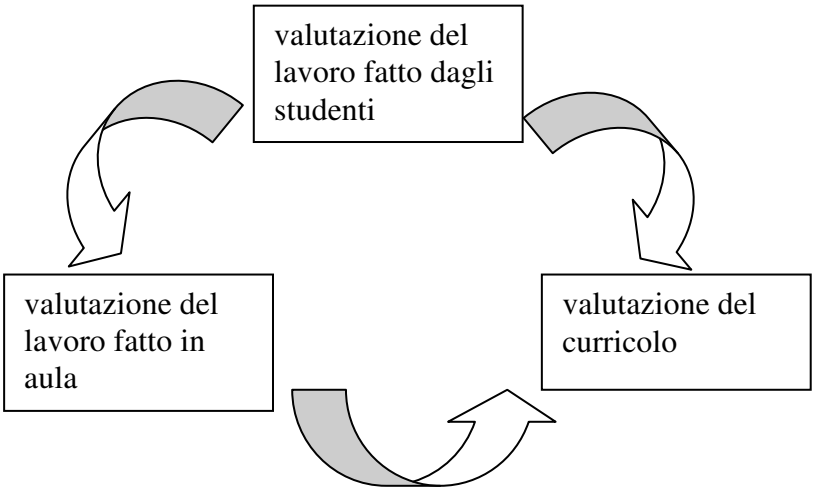
Questa modifica riguarda la valutazione (ed è questo il punto sul quale vogliamo qui riflettere di più):

- la valutazione del lavoro fatto dallo studente:

  l'insegnante informato dei risultati della ricerca in Didattica guarda con occhio diverso, più analitico, critico, osservativo, al lavoro di costruzione della conoscenza di ciascuno dei propri allievi; perfino la valutazione più banale, intesa come misurazione di conoscenza, come "voto" da dare allo studente sulla base di risultato ed impegno, ne risente parecchio;
- la valutazione del proprio lavoro fatto in aula:

  conformemente ai risultati di apprendimento ottenuti dai propri allievi, l'insegnante informato dei risultati della ricerca in Didattica è in grado di analizzare criticamente il proprio operato all'interno dell'aula, ridisegnando le proprie strategie metodologiche e le proprie scelte;
- la valutazione del curricolo:

  l'insegnante informato della ricerca in didattica è in grado di ripensare allo sviluppo curricolare in ogni suo aspetto, facendosi carico in prima persona di una critica a tale sviluppo e creando condizioni costruttive opportune per una seria e talvolta profonda modifica.



Ma non tutti gli insegnanti di "Matematica" sono informati dei risultati della ricerca in Didattica della Matematica: alcuni preferiscono non vedere, non sapere, non sentire… Per questo sparuto gruppo di professionisti recalcitranti, la Società prende provvedimenti diversi:

- si va da Paesi che li accettano senza condizioni, dato che non esistono legislazioni opportune;
- a Paesi nei quali sono previste sospensioni parziali o definitive per quegli insegnanti che non dimostrano una professionalità adeguata alla natura del compito.

Che fare, che decisioni prendere? Bisogna prima di tutto capire bene il problema, almeno da un punto di vista sociale.

L'esempio che viene più spontaneo è, ancora una volta, quello medico. Oggigiorno si interviene per rimuovere un'ernia del disco nella zona lombo sacrale in chirurgia per nulla invasiva, con effetti per nulla devastanti, permettendo al paziente di alzarsi sulle proprie gambe poche ore dopo l'intervento e di tornarsene a casa. Fino a 20 anni fa, o anche meno, l'intervento aveva effetti terribili, lunghe ospedalizzazioni, ingessature per decine di giorni con conseguenti attività terapeutiche di riabilitazione fisioterapica.

Analoghi esempi si possono fare nel campo della oftalmologia: si pensi solo a che cos'è oggi ed a che cosa era 20 anni fa la rimozione della cosiddetta cateratta.

Nessuno può vietare ad un paziente di affidarsi alle mani di un chirurgo che preferisce pratiche superate e desuete, devastanti, a pratiche più moderne sicure e non devastanti. Ma: chi affiderebbe il proprio figlio a chi usa queste tecniche superate, sapendo che cosa offre in alternativa la chirurgia attuale?

Per analogia: perché affidare i propri figli (dal punto di vista familiare) o i futuri cittadini (dal punto di vista sociale) a mani non colte, ma solo esperte, che certo non faranno danni, risolveranno comunque il problema, ma in maniera macchinosa, pericolosa e, oramai, disumana?

Torniamo dunque all'inizio; se questi sono gli effetti professionali benefici di cambiamento che un'acquisita competenza in Didattica della Matematica provoca sugli insegnanti di "Matematica" già in servizio, perché non approfittarne per formare fin dall'inizio i futuri insegnanti? Sarebbe quanto meno ridicolo avviarli nel mondo del

lavoro, competenti in Matematica, nella speranza che, prima o poi, vengano formati o meglio informati in Didattica: tanto vale approfittare dell'occasione, della presenza di esperti, della circostanza legale, e formarli subito.

6. La *realtà* della preparazione iniziale degli insegnanti di "Matematica"

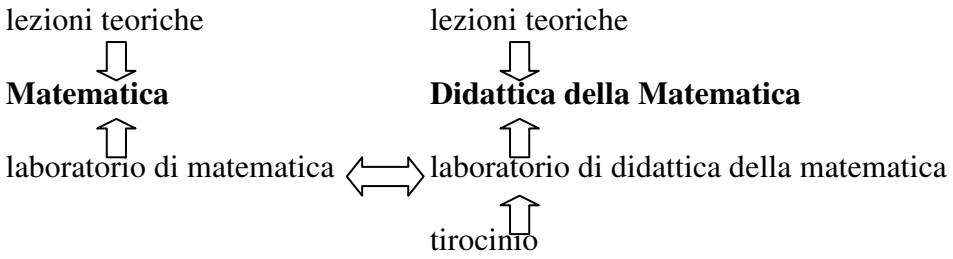
Le domande concrete che spesso vengono poste a chi si occupa della formazione degli insegnanti sono fin che si vuole ingenue o ovvie e, di conseguenza, tali saranno le risposte; ma non se ne può prescinderne, se si vuol avviare un ampio significativo dibattito. Dunque, di seguito, porremo per iscritto le problematiche che *sempre*, a volte sotto forma di domande, vengono rivolte ai docenti dei corsi di formazione degli insegnanti e, in modo congruo rispetto alle precedenti posizioni, azzarderemo proposte. Faremo esplicito riferimento all'attuale situazione italiana; ma questo riferimento è solo locale e si può facilmente generalizzare. Chi scrive ha esperienza concreta (professionale) di formazione insegnanti in Italia, Svizzera, Cipro, Spagna, Colombia, Messico, Guatemala e Bolivia.

6. 1. I futuri insegnanti di Scuola dell'Infanzia.

Troppo banalmente si liquida questo problema, pensando alla funzione considerata bassamente cognitiva di questi docenti. Noi non la pensiamo così. Quasi trent'anni di impegno didattico in questo settore da parte di uno dei due autori (D'Amore, 1998) ci confortano in quanto stiamo per affermare: è possibile già nella Scuola dell'Infanzia avviare una didattica specifica di profondo ed importante livello. Questa convinzione è confermata, oltre che dalla lunga pratica di ricerca su campo, anche dalla lunga militanza didattica, nonché dalle continue richieste che giungono dagli insegnanti di quel livello scolastico. In Colombia, l'ultimo anno della Scuola dell'Infanzia è, da parecchi anni, a frequenza obbligatoria e questo fatto ha già ampiamente mostrato un forte risvolto positivo.
Riteniamo dunque positiva la scelta operata in vari Paesi del mondo, in Italia dal 1997, in Colombia da almeno 30 anni, di richiedere una preparazione universitaria (una vera e propria laurea) ai futuri docenti di quel livello.
Tutto ciò ci spinge alle seguenti tre considerazioni, la prima sulla Matematica, la seconda sulla Didattica della Matematica, la terza sul tirocinio.
L'esperienza didattica che ci vede lavorare sulla Matematica con gli studenti del corso di laurea in Scienze della Formazione indirizzo Scuola dell'Infanzia mostra ampiamente che questi giovani non hanno preparazione matematica neppure sufficiente a garantire loro una competenza tale da giustificare a sé stessi o alla noosfera le attività (ludiche) tipiche della Scuola dell'Infanzia. Nei confronti della Matematica teorica c'è un netto rifiuto purtroppo generalizzato. Un corso di "Matematica" dovrebbe loro garantire soprattutto un *recupero di motivazione*; NON ci si può basare sulle competenze acquisite prima dell'ingresso all'Università, cioè nella Scuola Secondaria Superiore perché, nella stragrande maggioranza dei casi, è proprio qui che è avvenuta la frattura affettiva e motivazionale che stiamo denunciando. Ciò porta di conseguenza che c'è bisogno di un nuovo approccio alla Matematica, lento, concretamente molto vicino a quello che costituirà la garanzia culturale per poter lavorare a proprio agio con i

bambini, loro futuri allievi. Non bastano certo poche ore di lezione accademica e soprattutto non bastano tipologie di lezione frontale che ripercorrono metodologia e contenuto che hanno già creato i danni di cui sopra. Sembrano essere importanti laboratori specifici di Matematica, molto attivi ed orientati.
Per quanto concerne la Didattica della Matematica, l'attività internazionale che ha avuto successo in questo campo mostra ampiamente che essa è *specifica* in un livello scolastico nel quale non scattano certi condizionamenti legati alla valutazione (per esempio, il contratto didattico è qualche cosa di diverso da quello considerato classico). Dunque il corso di "Didattica della Matematica" deve essere specifico per questo livello e deve avere lunghi tempi di gestione; poche ore di lezione, il più delle volte frontale, non lasciano neppure il segno. Si potrebbe aggiungere a tale corso uno parallelo di ricostruzione degli aspetti teorici e pratici attraverso laboratori specifici; proponiamo dunque laboratori di Didattica della Matematica, oltre a quelli di Matematica.
Infine, l'attività di tirocinio, praticamente sempre appannaggio delle educazioni, dovrebbe invece prevedere, almeno per le discipline "portanti", alcune ore specifiche.
Riassumendo:

- proponiamo di dare ampio spazio al corso di "Matematica", introducendo un vero e proprio Laboratorio di Matematica, strettamente coordinato con il corso di "Matematica";
- proponiamo di consolidare con molta enfasi il corso di "Didattica della Matematica", attivando Laboratori di Didattica della Matematica; ovviamente il corso ed i laboratori devono essere coordinati tra loro e con i precedenti;
- proponiamo di rendere obbligatoria una parte di tirocinio da dedicare alla Didattica della Matematica, con relazione scritta, anche solo schematica, da presentare al coordinatore.



Quel che certo è fondamentale è il coordinamento tra queste attività, che non siano o appaiano isolate e che invece costituiscano come un unico polo di formazione integrata, in stretto contatto tra loro. È all'interno del bipolo laboratorio-tirocinio che si deve discutere di ingegneria didattica e di osservazione in aula, sempre in esplicito riferimento a quel che accade nel corso di "Didattica della Matematica". Ci pare fondamentale che lo studente riconosca in modo esplicito, ed apprezzi, questo sforzo di coordinamento, anche perché potrebbe essere per lui, nel suo futuro professionale, un modello di comportamento.

6. 2. I futuri insegnanti di Scuola Primaria.

Eviteremo ogni banale commento sulla preparazione che stiamo riscontrando tra gli studenti in entrata nei corsi di laurea destinati ai futuri insegnanti di Scuola Primaria, giacché ripercorre ciò che abbiamo già evidenziato nel punto precedente. Qui la cosa si

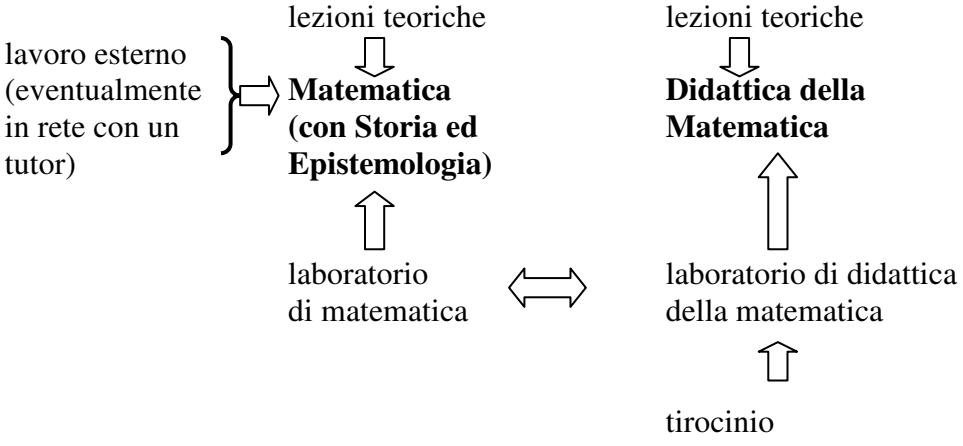
fa più tragica, però, giacché vi sono addirittura temi di "Matematica" che costituiscono usuale e diffuso oggetto di insegnamento nella Scuola Primaria che NON sono posseduti dagli studenti che aspirano a svolgere il ruolo di docenti di Scuola Primaria. Sappiamo per esperienza che questa affermazione stenta ad essere creduta dalla maggior parte dei Colleghi, ma possiamo invece affermare, sicuri del conforto della eventuale prova, che moltissimi degli studenti universitari che entrano in questo corso di laurea e che aspirano a diventare maestri elementari, non sanno trattare le frazioni neppure da un punto di vista elementare, non sanno gestire la virgola nella scrittura dei numeri cosiddetti decimali, non hanno idea di moltissime questioni geometriche (non solo di quelle più sofisticate, come la natura di punto, linea, retta, piano,… che pure utilizzano diffusamente nella terminologia, ma addirittura di questioni come la definizione o almeno la descrizione di quadrilateri, perimetri, aree etc.). Moltissimi studenti non hanno alcuna idea dell'uso lessicale corretto dei termini della Matematica elementare e non ne capiscono l'esigenza; moltissimi non sono in grado di effettuare operazioni aritmetiche scelte tra le più semplici.[48] E così via di questo passo. Poiché abbiamo in Italia, così come in quasi tutti i Paesi del mondo, la pretesa, sancìta dalla Legge, che queste abilità (e non usiamo il più complesso termine "competenza" apposta, per evitare ulteriori complicazioni; su questo si veda D'Amore, 2000) siano possedute dai bambini in uscita dalla Scuola Primaria ed in ingresso nella Scuola Secondaria, possiamo ingenuamente chiederci com'è possibile anche solo supporre che chi non sa, possa e sappia insegnare quel che non sa.
Detto ciò, qui la situazione è complicata assai… Seppure noi si ritenga che corsi di "Sociologia", "Antropologia", Educazioni varie… siano importantissimi per la formazione culturale e professionale di un docente di Scuola Primaria, dobbiamo altresì dichiarare che riteniamo che chi è destinato ad insegnare una disciplina debba conoscerla *almeno* al livello cui si chiede che venga da questi insegnata. (*Almeno*… L'esempio degli ultimi anni è frustrante).
Seguiremo quindi la stessa falsariga del paragrafo precedente, facendo proposte concrete e sui "soliti" punti: "Matematica", "Didattica della Matematica", come discipline; sulle modalità lezioni, laboratori e tirocinio, nell'ordine.
Riteniamo che un corso di "Matematica" di poche ore sia un provvedimento ridicolo, se quel che si auspica è di qualificare culturalmente un futuro docente di Scuola Primaria; temiamo che si debba tentare un'altra strada, molto più moderna e matura: un corso molto più lungo e complesso, semmai diviso sul primo biennio, che abbia la modalità della lezione, sì, ma supportato da uno studio privato, semmai in rete, con un tutor che controlla i progressi; a questo corso dovrebbe essere affiancato un corso sul *senso* della Matematica, per esempio "Elementi di storia e filosofia della Matematica per maestri elementari", dunque molto specifico, anche breve, che dovrebbe avere lo scopo essenziale di far riflettere sul *senso* della Matematica, se non altro. Ed infine bisognerebbe creare un Laboratorio di Matematica che renda attiva e concreta l'acquisizione di tale disciplina. Siccome, però, non viviamo in Utopia e conosciamo bene la realtà, proponiamo che almeno vi sia un secondo corso di "Matematica" nel quale si affrontino problemi di carattere epistemologico, ferma restando la necessità di un Laboratorio.

[48] Pochissimi studenti sanno la differenza tra definizione, assioma o postulato, dimostrazione… Spesso questi termini sono tra loro scambiati come se si trattasse di sinonimi; ma almeno questi termini non sono direttamente richiesti come competenze degli allievi della scuola primaria… Magra consolazione!

Passando alla “Didattica della Matematica”, riteniamo che sia necessario un corso serio e consistente, per poter far apprendere anche solo quel minimo che la disciplina ha creato dal momento della sua fondazione. Siccome lo studio della Didattica allarga gli orizzonti professionali, non solo proponiamo di renderlo quantitativamente significativo, ma pure di dare ampi spazi e significatività al laboratorio di Didattica della Matematica.
Infine, crediamo che il momento del tirocinio sia quello più adatto a compiere verifiche sulla qualità degli apprendimenti di tipo professionale; qui proponiamo che vi sia, per gli studenti che in qualche modo compiono l’opzione matematica, la possibilità di centrare tutto l’interesse sulla disciplina; questo non sempre viene fatto e non sempre è possibile. Riteniamo estremamente utile, a questo proposito, il confronto con il coordinatore; sarebbe anche opportuno avere occasioni di confronto e colloquio tra il tutor, cui viene affidato il futuro maestro in formazione, ed il docente di “Didattica della Matematica”, onde verificare le reciproche posizioni e renderle esplicite allo studente.
Riassumendo:

- proponiamo un significativo e consistente corso di “Matematica”, diviso in due anni, in modo tale che il secondo contenga riflessioni storiche ed epistemologiche; questo corso deve essere arricchito da studi personali, semmai verificabili, per esempio in rete, sotto la guida di un apposito tutor;
- proponiamo anche un Laboratorio di Matematica, molto attivo;
- proponiamo un corso decisamente importante di “Didattica della Matematica”, potenziando contemporaneamente i laboratori di Didattica della Matematica; ovviamente il corso ed i laboratori devono essere coordinati tra loro e con i precedenti.

Anche in questo caso, vogliamo rilevare come sarebbe importante un modello formativo che sia il risultato del coordinamento strettissimo tra i tre poli (Matematica, Didattica della Matematica, attività di tirocinio) e tra le tre modalità (insegnamento, laboratorio, esperienza pratica). Anzi, questa ci sembra l’unica via d’uscita.



Nel caso del futuro docente di Scuola Primaria, ancora più è essenziale mettere in evidenza tre punti fondamentali: la trasposizione didattica, la ingegneria didattica e l’osservazione in aula. Tutte e tre queste attività dovrebbero essere esplicitate in ciascuna delle occasioni, sia nel corso di “Didattica della Matematica”, sia nelle attività di laboratorio di Didattica della Matematica, sia nelle riflessioni delle esperienze di

tirocinio; i legami tra queste tre attività e queste tre occasioni di riflessioni sono notevoli ed evidenti ed è importante la loro funzione nella formazione di un insegnante.

6. 3. I futuri insegnanti di Scuola Secondaria.

In questo àmbito, riteniamo che l'Università tutta, in tutti i Paesi del mondo, si debba attivare con più efficacia. Non è possibile, corretto, giusto che gli stessi docenti universitari ammettano il proprio fallimento, quando dichiarano che gli aspiranti docenti di Scuola Secondaria non conoscono la Matematica (e, con tale affermazione, giustificano il fatto che l'oggetto del proprio insegnamento nei corsi di formazione iniziale per l'insegnamento sia ancora di tipo contenutistico). Se questa denunciata ignoranza è vera, bisogna allora organizzare corsi *specifici* di laurea in Matematica per futuri insegnanti; si eviterebbe così di puntare l'attenzione su argomenti tanto lontani dal mondo della Scuola, con i rischi denunciati da Felix Klein, da noi già citato all'inizio. Lo studente che esce laureato in Matematica dall'Università e che sfrutterà questa sua preparazione sia per completare la propria cultura personale e dunque studiando Matematica con gusto, amore e passione per tutta la vita, sia, più concretamente, per superare le prove d'ingresso ai corsi di formazione iniziale, deve finalmente potersi dedicare, all'interno di tali corsi, alla propria formazione professionale, e non aver bisogno di ritornare sugli studi disciplinari, se non per esigenze e spinte personali, qualora avvertisse lacune.

È anche vero, però, che, nel caso di corsi compositi cui si può accedere con una laurea specifica, vi sono vuoti culturali; è proprio per questo che si è pensato ai "debiti", un sistema di recupero culturale (la cui concreta funzionalità è però, in tutta Italia, molto in discussione).

Noi crediamo che, tra laurea specifica ed un buon sistema di assoluzione di debiti, la preparazione specifica debba concludersi al momento dell'ingresso nei corsi di formazione iniziale: questi NON sono, non devono essere, non possono essere delle Scuole di Specializzazione nella quali *ancora* si propongano corsi disciplinari. Altrimenti la formazione culturale di base non termina mai e dunque quella professionale non comincia mai *sul serio*.

All'interno di corsi di formazione iniziale, deve iniziare la formazione della parte professionale del futuro docente. In essa, è bene che vi siano corsi di "Didattica della Matematica", corsi di "Laboratorio di Didattica della Matematica" e corsi di "Storia ed Epistemologia della Matematica", necessari alla formazione. Ma è utile anche che vi siano corsi più generali, per esempio di "Pedagogia", "Psicologia", "Didattica Generale", il più possibile specifici per i bisogni di un futuro insegnante di "Matematica" che dovrà convivere in aula con degli adolescenti. Ed è importante anche che vi sia un tirocinio guidato e profondo, veramente concreto, legato alla tesi finale di specializzazione. Tali attività di tirocinio sono, in tutti i Paesi del mondo, affidate ad insegnanti della Scuola Secondaria, esperti e competenti.

Tuttavia, c'è un rilievo antipatico e doveroso da fare. Noi docenti universitari, chiamati a questo delicato compito, non sempre siamo preparati ad assolverlo. Ed ecco così improvvisati corsi di "Didattica della Matematica" affidati a non esperti che credono di poter impunemente identificare tale disciplina con le Matematiche Elementari, con la Storia, con la divulgazione o con altre discipline o attività; o addirittura ecco non esperti che non sanno neppure che esiste la Didattica della Matematica e la identificano o con la Matematica stessa o con esempi di esperienze didattiche. Lo stesso capita, a volte, nei

Laboratori; idem nei corsi di "Storia ed Epistemologia". Questo pasticcio è certo causato dal numero bassissimo di veri esperti in Didattica della Matematica, docenti universitari che facciano *davvero* ricerca in questo settore; e questo a sua volta capita in quanto fino a pochi anni fa tale disciplina era snobbata o invisa. Oggi si paga, a nostro avviso, questo atteggiamento negativo. La nostra speranza è che, proprio grazie alla esperienza acquisita nei corsi di formazione iniziale per futuri docenti di Scuola Superiore, i Colleghi universitari sempre più capiscano che la Didattica della Matematica è una disciplina autonoma, con una sua ricerca specifica, che non s'improvvisa da un giorno all'altro, così come capita d'altra parte, per tutte le altre branche della Matematica. Noi docenti universitari dobbiamo avere l'umiltà di capire quali siano le esigenze professionali dei futuri docenti, non inventandole… sulla base delle nostre competenze culturali… Nel corso di "Storia ed Epistemologia della Matematica", per esempio, o nel corso di "Laboratorio di Didattica della Matematica", dovremmo fare lo sforzo di trattare e proporre argomenti aventi reale e genuino interesse per la professionalità di coloro ai quali stiamo insegnando, non dar sfogo all'esplicitazione delle nostre competenze o dei nostri interessi, a volte marginali rispetto alla ricerca scientifica che coltiviamo.
Vale qui il solito discorso, tripolare in due sensi; tripolare in azioni didattiche nelle quali rendere esperti i futuri insegnanti (trasposizione didattica, ingegneria didattica, osservazione d'aula); tripolare in quanto alle modalità di questo "rendere esperti" (che deve mettere in moto sia il corso di "Didattica della Matematica", sia le attività di laboratorio, sia quelle di tirocinio, in una sorta di coordinamento reale, concreto e continuo).
Ci pare poi essenziale, irrinunciabile, doveroso che le tesi di specializzazione siano tutte effettuate in àmbito didattico, fondate sia sull'esperienza di tirocinio, sia sugli apprendimenti avvenuti nei corsi di "Didattica della Matematica" e di "Laboratorio di Didattica della Matematica"; il futuro docente di Scuola Secondaria deve cioè approfittare di questa occasione per mettere in campo le competenze acquisite (teoriche e pratiche).

7. Il problema di "curricolo e valutazione"

All'interno del corso di "Didattica della Matematica" o di "Laboratorio di Didattica della Matematica", devono trovare spazi tematiche che sembrano essere secondarie e che invece costituiscono l'ossatura stessa della professionalità. Se è vero, com'è vero, che un insegnante sceglie o segue un curricolo e che passa la maggior parte del suo tempo ad osservare la vita d'aula per valutare (almeno nelle due accezioni di *assessment* ed *evaluation*) (Fandiño Pinilla, 2002), allora egli deve essere messo in grado di apprezzare e conoscere le problematiche teoriche e le conseguenze pratiche della sua scelta e della sua azione.
Questa riflessione apre una ferita profonda, tipica del nostro Paese, assai meno dolorosa in altri Paesi che da tempo hanno posto rimedio ai guai provocati dall'indifferenza verso questi temi. Difficilmente i Matematici prima e gli specialisti in Didattica della Matematica poi hanno dedicato tempo allo studio ed alla teorizzazione in questo campo; essa è stata delegata a studiosi più generici, quasi sempre in àmbito pedagogico prima e di Didattica Generale, poi. Dunque, attualmente, le competenze in questo specifico campo sono molto ridotte. Auspichiamo, dunque, nell'interesse di una qualità

significativa nell'àmbito della formazione iniziale degli insegnanti, che più d'un collega decida di dedicarsi a questo genere di studi teorici, naturalmente ritenendo che l'interesse preciso stia nella specifico della Didattica della Matematica, come già succede in vari altri Paesi del mondo.
Sia lo studio del curricolo, sia quello legato alla valutazione, ben si prestano ad un altro esempio a carico dell'azione astratta e culturale (nel corso di "Didattica della Matematica") sia dell'azione concreta e critica, di osservazione ed analisi (nei laboratori e nella riflessione sull'attività di tirocinio).
In questo stesso paragrafo, dato che stiamo trattando di curricolo, trova spazio infine un invito a tutti i Colleghi a cercare di trovare non tanto un'unica lista di contenuti per i corsi di "Didattica della Matematica" ai vari livelli, ma almeno tale che da essa si rilevi un unico spirito, il più possibile condiviso.

Riferimenti bibliografici

Artigue M. (1990). Ingégnerie didactique. *Recherches en Didactiques des Mathématiques*. 9.3, 281-307.

Artigue M. (2000). L'insegnamento e l'apprendimento della Matematica a livello universitario. *La matematica nella società e nella cultura. Bollettino dell'U.M.I.* S. VIII, vol. III-A, 81-103.

Arzarello F., Bartolini Bussi M. (1998). Italian trends in research in Mathematics Education: a national case study in the international perspective. In: Kilpatrick J., Sierpinska A. (eds.) (1998). *Education as research domain: a search far identity.* Vol. 2, 243-262. London: Kluwer Ac. Publ. [Un sunto di questo articolo fu il tema di una conferenza di Ferdinando Arzarello nel Convegno U.M.I. di Padova nel 1995 e dunque appare in quegli Atti].

Bartolini Bussi M. (1994). Theoretical and empirical approaches to classroom interation. In: Biehler R., Scholz R.W., Strässer R., Winkelmann B. (eds.) (1994). *Didactics of mathematics as a scientific discipline*. Dordrecht, Kluwer. 121-132.

Blanco L. (1991). Interacciòn didàctica en la enseñanza de las maternàticas con estudiantes de magisterio. *Revista Jnteruniversitaria de Formaciàn del Profesorado.* 57-68.

Brun J., Conne F. (1990). Analyses didactiques des protocoles d'observation du déroulement de situations. *Education et recherche*. 3, 261-285.

Carrillo J., Contreras L. (1995). Un modelo de categorias e indicadores para el anàlisis de las concepciones del profesor sobre la matemàtica y su enseñanza. *Educación Matemática.* 7, 3, 79-92.

Chevallard Y. (1985). *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble: La Pensée Sauvage.

D'Ambrosio U. (2002). *Etnomatematica*. Bologna: Pitagora.

D'Amore B. (1998). Venti anni, o poco più, di didattica matematica nella scuola dell'infanzia. Che cosa è cambiato? *Infanzia*. 1, 7-11.

D'Amore B. (1999). *Elementi di Didattica della Matematica.* Bologna: Pitagora.

D'Amore B. (2000). La complessità dell'educazione e della costruzione dei saperi. *Riforma e didattica*. 4, 35-40.

D'Amore B. (2002a). Basta. *La Vita Scolastica*. 8, 1° gennaio 2002, 14-18.

D'Amore B. (2002b). Il problema della formazione degli insegnanti di matematica. In: Lucchini G., Mercanti F., Tallini L. (eds.) (2002). *Per una nuova scuola: programmi, formazione e tecnologie innovative per l'insegnamento della matematica*. Atti del Congresso nazionale della Mathesis, 23-25 novembre 2001, Mantova. 71-76. Una successiva versione, ampliata decisamente, ma con lo stesso titolo, appare sulla rivista *Rassegna*, in corso di stampa.

D'Amore B., Fandiño Pinilla M. I. (2001). La "matematica del quotidiano". *La Matematica e la sua didattica.* 3, 256-263.

D'Amore B., Fandiño Pinilla M. I. (2002). Un acercamiento analitico al "triángulo de la didáctica". Educación Matemática (México DF). 1, vol. 4, 48-62.

Douady R. (1993). *L'ingégnerie didactique*. Cahier de DIDIREM, 19. Paris: Université Paris VII.

Douady R., Robert A. (1992). Quelques réflexions sur l'observation en classe en formation professionelle initiale des futures enseignants. *Actes de la COPIRELEM*. Pau-Nice.

Droz R. (1980). *Observations sur l'observation*. Avignon: Groupe Dupont.

Duval R. (1991). Structure du raisonnement deductif et apprentissage de la demonstration. *Educational studies in mathematics*. 22, 233-261. [Esiste una traduzione in lingua italiana: *La Matematica e la sua didattica*. 4, 1996, 370-393].

Duval R. (1992-1993). Argumenter, demontrer, expliquer: continuité ou rupture cognitive? *Petit x*. 31, 37-61. [Esiste una traduzione italiana: *La Matematica e la sua didattica*. 2, 1996, 130-152; appare anche come Volume 1 nella Collana: Bologna-Querétaro (1998). Bologna: Pitagora].

F. Eugeni (1999). Divulgazione e didattica della Matematica. Testo di una conferenza tenuta il 4 maggio 1999 presso il Politecnico di Milano, sede di Mantova, nell'àmbito dei Convegno nazionale: *«Ricerca, divulgazione e didattica in Matematica»,* a cura di F. Mercanti. Gli Atti, non pubblicati, sono tuttavia disponibili presso la sede del Convegno o via e-mail.

Fandiño Pinilla M. I. (2001). La formazione degli insegnanti di matematica. Alcuni riferimenti ad un quadro teorico. *La Matematica e la sua didattica.* 4, 352-373.

Fandiño Pinilla M. I. (2002). *Valutazione e curricolo*. Bologna: Pitagora.

Furinghetti F. (2001). Credenze/convinzioni in classe su matematica e dintorni. In: D'Amore B. (ed.) (2001). *Didattica della Matematica e rinnovamento curricolare.* Atti del Convegno nazionale omonimo "Incontri con la Matematica" n. 15, Castel San Pietro Terme, 9-11 novembre 2001. Bologna: Pitagora. 59-70.

Godino J.D., Batanero C. (1998). The dialectic relationships among theory, development and practice in Mathematics Education: a meta analysis of three investigations. In: Malara N. (ed.) (1998). *Proceedings of Working Group 25 – ICME 8, Sevilla July 1996. An international view on Didactics of Mathematics as a scientific discipline*. Modena: CNR. 13-22. [Esiste una traduzione in lingua italiana: *La Matematica e la sua didattica*. 4, 1998, 402-422].

Houdement C., Kuzniak A. (1996). Autour des strategies utilisées pour former les maîtres du premier degré en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 16.3.

Hoyles C. (1997). The curricolar shaping of student's approaches to proof. *For the learning of mathematics*. 17, 1, 7-15. [Esiste una traduzione in lingua italiana:

La Matematica e la sua didattica. 1998, 3, 248-270. Appare anche come Volume 5 nella Collana: Bologna-Querétaro (1998). Bologna: Pitagora].

Loria G. (1933). Commission internationale de l'enseignement mathématique. La préparation théorique et pratique des professeurs de mathématique de l'enseignement secondaire dans les diverses pays. I. *Rapport général. L'enseignement mathématique*. XXXII, 5-20.

Pellerey M. (1989). *Oltre gli insiemi*. Napoli: Tecnodid.

Porlàn R. e altri (1996). Conocimiento profesional deseable y profesores inovadores. *Investigación en la Escuela.* 29, 23-37.

Portugais J. (1995). *Didactique des mathématiques et formation des enseignants*. Berne: Peter Lang.

Schoenfeld H. (2000). Obiettivi e metodi di ricerca in Didattica della Matematica. *La matematica nella società e nella cultura. Bollettino dell'U.M.I.* S. VIII, vol. III-A, N. 2, 81-103.

Speranza F. (1997). *Scritti di Epistemologia della Matematica.* Bologna: Pitagora.

D'Amore B. (2004). Die Mathematikdidaktische forschung als Epistemologie des Mathematiklernens. In: AA. VV. (2004). *Didaktik der Mathematik in der Primärschule*. Lussemburgo: Ministère de l'Éducation nationale de la Formation professionelle et des Sports. ISBN 2 – 87995 – 108 –9. 65-98.

Die Forschungen zur Didaktik der Mathematik
als
Epistemologie des Erlernens der Mathematik

Bruno D'Amore

Fachbereich Mathematik - Universität Bologna, Italien
Fakultät für Bildungswissenschaften, Universität Bozen, Italien

0. Vorbemerkungen

Die derzeitigen Forschungen im Bereich der Fachdidaktik scheinen ausschließlich darauf ausgerichtet zu sein, die Aufmerksamkeit auf das Phänomen des Lernvorgangs zu richten, jedoch unter einem grundlagenbezogenen Gesichtspunkt, und in keinem Falle in Form einer Konsensfindung zu einem einzigen Modell der Lerntheorie (auch wenn die kognitive Psychologie derzeit die einflussreichste Kandidatin für die Rolle einer grundlegenden Organisatorin vieler Forschungserfahrungen zu sein scheint).
Ich möchte die Fachdidaktik als Epistemologie des Lernvorgangs verstehen und dazu Beispiele aus einem Bereich vorführen, in dem ich kompetent bin, und zwar der Mathematik. Diskussionen mit Kollegen, Didaktikern aus anderen Fächern und gelegentliche Lektüren haben in mir jedoch die Überzeugung bestätigt, dass die allgemeinen Probleme stets die gleichen zu sein scheinen, wenn auch in unterschiedlicher Ausprägung. Obwohl ich meinen engen und oben skizzierten Bereich nicht verlassen will (oder kann), bin ich daher überzeugt, dass mögliche - und vergleichbare - kritische Berichte von Angehörigen anderer Forschungssektoren nicht viel anders ausfallen dürften.
Was ich an dieser Stelle unternehmen möchte, lässt sich schnell angeben. Ich werde einige Probleme analysieren, die sich in den letzten Jahren besonders intensiv auszuprägen scheinen, da sie sich als Forschungselemente der Didaktik der Mathematik konsolidieren konnten, und da ich glaube, dass sie feste und bedeutsame Ankerpunkte für eine mögliche Verallgemeinerung liefen könnten. Ich werde auf allzu fachliche Präsentationen verzichten und mich daher auf die Vorstellung einzelner Aufgaben beschränken, wobei ich in den nächsten Abschnitten einige Themen skizzieren möchte, die in der Welt der Forschung weit verbreitet sind und die Lehrenden[49] besonders interessieren könnten.

[49] Vielleicht besser als: Lehrerinnen und Lehrer, oder: LehrerInnen; Anm. d. Übers.

1. Der "Didaktische Vertrag"

In den siebziger Jahren tauchte in der Welt der Forschung zur Didaktik der Mathematik die Vorstellung des *didaktischen Vertrags* auf; diese Idee wurde durch Guy Brousseau (1986) eingeführt und erwies sich sofort als fruchtbar; sie wurde dann endgültig durch seine Forschungen zu Anfang der achtziger Jahre bestätigt. Anschließend gab es Untersuchungen in der zweiten Hälfte der achtziger Jahre, die in uneingeschränkter Form zum Triumph und zur Theoretisierung dieses Ansatzes führten; an diesen Untersuchungen beteiligten sich Forscher aus der ganzen Welt; die Idee wurde anerkannt und in die Sprache der gesamten internationalen Gemeinschaft aufgenommen.
Diese Vorstellung verdankt sich uneingeschränkt französischem Geist[50] und war nicht vollständig neu. 1973 führte Jeanine Filloux den Terminus *contrat pédagogique* ein, um einige Typen der Beziehungen zwischen Lehrenden und Lernenden[51] zu definieren. Filloux dachte an einen allgemeinen Vertrag, der eher sozialer als kognitiver Art sein sollte; demgegenüber berücksichtigt der *contrat didactique* auch die jeweils beteiligten Kenntnisse. Ein erster Versuch einer "Definition" des *contrat didactique* könnte wie folgt lauten: "In einer Unterrichtssituation, die durch einen Lehrenden vorbereitet und umgesetzt wird, besteht die Aufgabe des Lernenden im allgemeinen darin, eine ihm vorgelegte (Rechen-) Aufgabe zu lösen; der Zugang zu dieser Aufgabe erfolgt jedoch über eine Interpretation der vorgegebenen Fragen, der bereitgestellten Informationen und der auferlegten Pflichten, die als Konstanten der Lehrmethode des Lehrenden auftauchen. Diese (spezifischen) Gewohnheiten des Lehrenden, die der Lernende erwartet, und auf der anderen Seiten die Verhaltensweisen des Lernenden, die der Lehrende erwartet, bilden den *contrat didactique* (Brousseau, 1986).
Häufig gehen diese "Erwartungen" nicht auf spezifische Vereinbarungen zurück, die durch die Schule oder durch die Lehrenden vorgegeben oder mit den Lernenden abgesprochen würden, sondern auf das Vorverständnis von Schule und Mathematik sowie auf die Wiederholung bestimmter Modalitäten.

Einige Beispiele:

Beispiel 1 ('Vorverständnis von Schule'): Der Lernende geht davon aus, dass die Schule anleitend und bewertend ist; also auch dann, wenn der Lehrende den Lernenden dazu auffordert, *frei* das aufzuschreiben, was er denkt (zum Beispiel: zu den Höhen eines Dreiecks), wird der Lernende davon ausgehen, er müsse dies in einer möglichst strengen Sprache tun, denn er setzt voraus, dass hinter der Aufforderung des Lehrenden in welcher Form auch immer eine Prüfung und eine Kontrolle stecken müssen; er wird keineswegs "frei" schreiben, sondern er wird stattdessen versuchen, jene Definition anzugeben, die er als 'richtig"

---

[50] Ich denke an Jean-Jacques Rousseau und seinen *Contrat social* (1762).
Anmerkung des Übersetzers: das italienische Original hat: *contratto didattico.* Im Deutschen ist *didaktischer Vertrag / Unterrichtsvertrag* möglich; ich habe es jedoch vorgezogen, den französischen Originalterminus beizubehalten.
[51] Vielleicht besser als: Schülerinnen und Schüler, oder: SchülerInnen; Anm d. Übers.

ansieht, also die Definition, die er als die vom Lehrenden erwartete Antwort betrachtet.
Beispiel 2 ('Verständnis von Mathematik'): Der Lernende setzt voraus, dass in der Mathematik *gerechnet* werden muss; auch wenn die Antwort auf die in einer Aufgabe enthaltene Frage lediglich mit Worten gegeben werden kann, wird sich daher der Lernende unwohl fühlen und dazu neigen, Zahlenangaben zu verwenden, um in jedem Falle eine formale Antwort zu bieten.
Beispiel 3 ('Wiederholung von Modalitäten'): An drei aufeinander folgenden Montagen lässt der Lehrende Übungen an der Tafel durchführen; dann weiß der Lernende, dass es jeden Montag so sein wird; eine Änderung des erwarteten Programms wird Überraschungen auslösen. Gleiches gilt z.B. auch für die Erwartungen zu möglichen Themen einer mündlichen Überprüfung; wenn der Lehrende stets und ausschließlich Fragen zu den Themen der letzten Unterrichtsstunden gestellt hat, kann und darf er - so der Lernende - keine Fragen zu Themen stellen, die in der Vergangenheit den Stoff von Schulstunden dargestellt hatten ...

Die Untersuchung der verschiedenen Erscheinungsformen des Verhaltens der Lernenden unter diesem Blickwinkel hat reiche und überaus interessante Früchte gezeitigt. Inzwischen konnten viele Verhaltensweisen, die bis vor kurzem als unerklärbar galten oder dem mangelnden Interesse, der Unwissenheit oder der Unreife zugeschrieben wurden, geklärt werden.
Eine der bekanntesten Untersuchungen ist unter dem Namen *Das Alter des Kapitäns* bekannt und wurde in einem Buch unter diesem Titel von der französischen Psychologin Stella Baruk 1985 veröffentlicht. Ich werde dieses Beispiel so wiedergeben, wie ich es persönlich erlebt habe (und habe erleben lassen) (D'Amore, 1993a). In einer vierten Grundschulklasse (Alter der Lernenden: 9 bis 10 Jahre) einer bedeutenden landwirtschaftlichen Kleinstadt stellte ich diese berühmte Aufgabe (in der der "Kapitän" zum "Schäfer" wird): "Ein Schäfer hat 12 Schafe und 6 Ziegen. Wie alt ist der Schäfer?"
Im Chor, absolut sicher und ohne Ausnahmen oder Vorbehalte, gaben *alle* Kinder die erwartete Antwort: "18". Der entsetzten Lehrerin konnte ich erklären, dass dieses Ergebnis auf den didaktischen Kontext zurückzuführen ist: sie hatte niemals Aufgaben ohne Lösung oder unmögliche (entsprechend einer der vielen Formen der Unmöglichkeit) Aufgaben gestellt (D'Amore, Sandri 1993). Daher hatten die Lernenden in den *contrat didactique* eine Klausel eingefügt, die ungefähr folgendes besagt: "Wenn unsere Lehrerin uns eine Aufgabe stellt, dann ist sie bestimmt zu lösen". Und da es eine *tödliche* Vertragsklausel gibt, derzufolge die in einem Text auftauchenden Zahlenangaben ausnahmslos (einmal und nur ein einziges Mal) zu verwenden sind, und möglichst auch noch in jener Reihenfolge, in der sie auftauchen, hatten die Kinder dieser Klasse keine andere Möglichkeit und keinen Ausweg: sie *mussten* unter Verwendung der Zahlendaten 12 und 6 antworten. Die einzige Unsicherheit bestand, wenn überhaupt, in der Auswahl des durchzuführenden Rechenvorgangs. Es ist natürlich denkbar, dass die Auswahl zufällig auf die Addition gefallen ist; ich hatte jedoch einen besonders lebhaften blonden Jungen gefragt, wieso er nicht zum Beispiel eine Division vorgenommen hatte;

nach kurzer Überlegung erklärte er mir: "Nein, dann ist es zu klein!" und bezog sich damit natürlich auf das Alter des Schäfers ...

[An dieser Stelle ließe sich eine Anmerkung zur Didaktik und zur Schullaufbahn einfügen. Die Ministerialprogramme für die italienischen Grundschulen enthalten eine ausdrückliche Aufforderung an die Lehrenden, den Lernenden Aufgaben mit fehlenden Daten, mit zu vielen Daten und mit widersprüchlichen Daten zu stellen. Es handelt sich hierbei nicht um eine Bösartigkeit, die durch einen engstirnigen und unsensiblen Bürokraten ausgeheckt worden wäre, sondern um eine Anregung zu einem Versuch, genau diese schädlichen Klauseln aus dem *contrat didactique* zu entfernen; es ist bekannt, dass Kinder im allgemeinen den Text einer Aufgabe nur flüchtig lesen: sie beschränken sich darauf, die Aufgabe kurz zu überfliegen; sie konzentrieren sich dann auf die Zahlenangaben und versuchen, 'intuitiv' die Art des benötigten Rechenvorgangs zu erahnen. Aber wenn sich die Lernenden so verhalten, dann muss es etwas oder jemanden geben, der sie zu dieser Verhaltensweise veranlasst hat; es ist unnütz, nach Rechtfertigungen zu suchen, die (vermeintlich) mit der vielen Zeit zusammenhängen, die die Kinder vor dem Fernsehen verbringen, oder mit der Auflösung der Familien, mit fehlender Lektüre, mit dem Verlust an Interesse usw. Es handelt sich vielmehr um Klauseln des *contrat didactique*, die sich der kritischen Kontrolle der Erwachsenen entzogen haben, und die sogar manchmal explizit vorzuliegen scheinen.
Es gibt zwei Beweise für die Tatsache, dass es nicht angeht, in vereinfachender Form den "Zeiten" die Schuld zuweisen zu wollen ...
<u>Erster Beweis</u>: Die *gleichen* Kinder geben in einem Umfeld, das nicht mehr dem Klassenumfeld entspricht, auf die gleiche Aufgabenstellung hin nicht mehr die oben besprochene Antwort, sondern sie erkennen die Unvereinbarkeit zwischen den Daten und der Aufgabe.
<u>Zweiter Beweis:</u> Die Lernenden einer *anderen* Klasse, in der der Lehrende schon mehrfach derartige Aufgaben gestellt hatte, sind daran gewöhnt, aufzupassen; wenn der Lehrende eine Aufgabe stellt, dann muss man den Text genau analysieren; im Falle der "Schäfer - Aufgabe" hatten diese Kinder nach einigem Gelächter und verstohlenen Blicken, die sie sich gegenseitig zuwarfen, in ironischer Form geantwortet und darauf hingewiesen, dass man die Aufgabe in der gestellten Art und Weise nicht lösen kann.]

Der Ausdruck *"Alter des Kapitäns" - Effekt* bezeichnet heute das Verhalten eines Lernenden, der die Antwort auf eine Aufgabe so berechnet, dass er einen Teil oder die Gesamtmenge der Zahlen benutzt, die im Text vorkommen, auch wenn die Aufgabe überhaupt keine zahlenmäßige Lösung aufweist.
Natürlich beschränkt sich dieser "Fall" nicht auf die Grundschule, sondern er betrifft - mit den erforderlichen Veränderungen - jeden Schultyp.
Dieser Effekt fällt unter die so genannten 'Brüche' des *contrat didactique*: auch wenn der Lernende die Absurdität der gestellten Aufgabe einsieht, muss er persönlich einen Bruch des *contrat didactique* auf sich nehmen, um antworten zu können, dass die Aufgabe nicht lösbar ist. Denn diese neue Situation widerspricht allen seinen Erwartungen, allen seinen Gewohnheiten und allen

Klauseln, die bislang im Rahmen der Unterrichtssituationen zur Anwendung gekommen waren. Aber der Lernende hat nicht die Kraft - da man ihn niemals daran gewöhnt hat - , den Vertrag aufzulösen, und er zieht es vor, die dem Vertrag zu Grunde liegenden Klauseln zu respektieren, um kein Risiko eingehen zu müssen, und um nicht in der ersten Person etwas zu wagen.

Eingehende Untersuchungen zum *contrat didactique* haben es gestattet, zu zeigen, dass Kinder und Jugendliche ganz besondere Erwartungen, allgemeine Schemata und Verhaltensweisen mitbringen, die im engeren Sinne nichts mit Mathematik zu tun haben, sondern die von dem im Unterricht eingerichteten *contrat didactique* abhängen.

Zum Beispiel gibt es in einer Untersuchung zu Aufgaben mit fehlenden Daten und zum Verhalten der Lernenden bei derartigen Aufgaben (D'Amore, Sandri, 1998) einen Text, der in der dritten Grundschulklasse (8 bis 9 Jahre) und in der zweiten Klasse der Mittelschule[52] (Alter: 12 bis 13 Jahre) gestellt worden war:

"Giovanna und Paola gehen einkaufen; Giovanna gibt 10.000 Lire aus, und Paola 20.000 Lire. Wer hat am Schluss mehr Geld übrig, Giovanna oder Paola?"

Und hier nun der Grundtyp der Antworten, die in der dritten Klasse im allgemeinen gegeben werden; ich wähle das Antwortprotokoll von Stefania und gebe es genauso wieder, wie die Schülerin es abgefasst hatte:

Stefania:
In der Geldbörse bleibt mehr Geld übrig bei: Giovanna
$30 - 10 = 20$
$10 \times 10 = 100$

Die Antwort "Giovanna" (58,4 Prozent der Antworten in der dritten Grundschulklasse; Alter der Lernenden: 8 bis 9 Jahre) ist dadurch zu erklären, dass - dies ist die Klausel zur Festlegung der Erwartungen und des konstanten Verhaltens - der Lernende davon ausgeht, dass dann, wenn der Lehrende eine Aufgabe gibt, diese *gelöst werden kann*; auch wenn der Lernende merkt, dass die Angabe der Anfangssumme fehlt, so wird er diese Antwort implizit mehr oder weniger wie folgt erfinden: "Diese Aufgabe *muss* gelöst werden; vielleicht hatten Giovanna und Paolo am Anfang den gleichen Betrag". Anschließend *ist die Antwort richtig*: Giovanna gibt weniger aus, und es bleibt ihr natürlich mehr Geld übrig. Und dadurch erklärt sich der schriftliche Teil der Antwort von Stefania. Anschließend startet jedoch ein anderer Mechanismus, in Verbindung mit einer anderen Klausel - vom Typ: Bild der Mathematik; oder: dem Lehrenden zugeschobene Erwartungen - : "Das kann nicht alles sein; in der Mathematik muss man rechnen; unsere Lehrerin erwartet das ganz bestimmt". Nun bricht die kritische Kontrolle zusammen und jede Berechnung wird richtig.

[52] Die italienische Mittelschule umfasst die Klassen 6 bis 8; Anm. d. Übers.

In unserer Arbeit (D'Amore, Sandri 1998) haben wir diese Klausel des *contrat didactique* wie folgt benannt: "Forderung nach einer formalen Rechtfertigung und Begründung" (esigenza della giustificazione formale, EGF) und sie in allen Einzelheiten untersucht. Diese EGF-Klausel ist auch in der Mittelschule weit verbreitet (Alter der Lernenden: 11 bis 14 Jahre). [Der Prozentsatz der Antworten "Giovanna" sinkt von 58,4 Prozent in der dritten Grundschulklasse (8 bis 9 Jahre) auf 24,4 Prozent in der zweiten Mittelschulklasse ab (12 bis 13 Jahre); aber nur 63,5 Prozent der Lernenden der zweiten Mittelschulklasse weisen - in welcher Form auch immer - auf die Unmöglichkeit hin, eine Antwort zu geben; dies bedeutet, dass 36,5 Prozent eine Antwort geben: mehr als ein Drittel jeder Klasse!]

Nun der Grundtyp einer Antwort auf die gleiche Aufgabe in der zweiten Mittelschulklasse; ich habe das Antwortprotokoll einer Schülerin ausgewählt und es genau so wiedergegeben, wie sie es schriftlich formuliert hatte:

Silvia:
Ich glaube, dass Giovanna [dann verbessert in: Paola] mehr Geld übrig behält, denn:
Giovanna gibt 10.000 aus, während Paola 20.000 ausgibt.
10.000 20.00
Giovanna Paola
20.000 - 10.000 = 10.000 (Geld von Giovanna)
10.000 + 10.000 = 20.000 (Geld von Paola).

Das Protokoll von Silvia zeigt die Wirkungen der gleichen Klauseln des *contrat didactique*, die schon bei Stefania zum Zuge gekommen waren; eine Analyse ist jedoch schwieriger. Zunächst ist ein aufwendigerer Versuch zur Durchführung einer logischen und formalen Organisation zu sehen. Silvia schreibt zunächst "Giovanna", denn sie hat wie Stefania gedacht; dann jedoch - auf Grund der EGF-Klausel - meint sie, Berechnungen anstellen zu *müssen*. Es ist wahrscheinlich, dass sie - wenn auch nur undeutlich - bemerkt, dass ihre Rechenvorgänge von der Aufgabe abgelöst sind; sie rechnet nur deshalb, weil sie meint, einige Berechnungen *vornehmen zu müssen*. Wie absurd sie auch immer sein mögen: letztendlich sieht sie sie als plausibel an; da diese unsinnigen Berechnungen zu einem Ergebnis führen, das jenem Ergebnis zuwiderläuft, das auf intuitivem Wege erhalten worden war, zieht sie es nämlich vor, ihrer eigenen Intuition Gewalt anzutun, und sie akzeptiert eher die Lösung, die sie auf formalem Wege erhalten hatte; die Berechnungen führen zur Antwort "Paola" und nicht zu "Giovanna", wie sie jedoch zunächst vermutet hatte; sie streicht daher "Giovanna" durch und schreibt "Paola" hin. Der *contrat didactique* wurde dieses Mal durch ein formales (leeres, zerstörerisches) Bild der Mathematik vorgegeben und hat die Vernunft besiegt ...

In (D'Amore 1993b) berichte ich über einen merkwürdigen Versuch auf der Grundlage folgender Textaufgabe, die in einer Grundschule in verschiedenen Klassen gestellt wurde:

"Die 18 Lernenden der zweiten Klasse wollen einen Tagesausflug von Bologna nach Verona machen.
Sie müssen folgende Umstände berücksichtigen:
- Zwei von ihnen können nicht zahlen
- Von Bologna bis Verona sind es 120 Kilometer
- Ein Minibus mit 20 Plätzen kostet 200.000 Lire pro Tag plus 500 Lire pro Kilometer (einschließlich der Autobahngebühren).
Wieviel muss jeder ausgeben?"

Es ist überflüssig, anzumerken, dass die Aufgabe komplex ist, dass tatsächlich ein Ausflug geplant werden sollte, dass die Lernenden in Gruppenarbeit die Aufgabe hätten diskutieren und eine Lösung finden sollen, usw.
De fakto begeht die überwältigende Mehrheit der Lernenden bei der Lösung dieser Aufgabe einen häufigen Fehler: die Rückfahrt wird nicht berücksichtigt; daher werden die Gesamtkosten über den falschen Ausdruck 500 x 120 + 20.000 berechnet.
Zu diesem Punkt gibt es eine umfassende Bibliographie zur Rechtfertigung dieses Umstandes. Eine der häufigsten Begründungen betrifft eine Art ... strategischen oder affektiven Vergessens: die Hinfahrt stellt bei einem Ausflug einen emotional betonten Zeitraum dar, die Rückfahrt aber nicht.
Um diese Frage genauer verstehen zu können, teilte ich die Aufgabe in verschiedene Komponenten oder Phasen auf, mit vielen partiellen und spezifischen "Klein-Fragen"; der Fehler wurde jedoch weiterhin gemacht. Ich schlug dann einigen Lehrenden vor, die Szenen der Hin- und der Rückfahrt mimisch darstellen und die verschiedenen Momente des Ausflugs zeichnen zu lassen. Der unglaubliche Fall, vor dem ich stand, und den ich in (D'Amore 1993b) beschrieb, bezieht sich auf ein Kind, das den Bus unter einem Doppelpfeil gezeichnet hatte: in einem der Pfeile steht: "Bologna -> Verona 120 Kilometer"; im anderen Pfeil steht: "Verona -> Bologna 120 Kilometer"; dem Kind ist einwandfrei die Tatsache bewusst, dass es bei einem Ausflug eine Hinfahrt und eine Rückfahrt gibt; das gleiche Kind benutzt aber für die Lösung wieder nur die Daten für die Hinfahrt!
Eine der Begründungen, die die Kinder selbst im Rahmen der Befragungen am häufigsten gaben, ist darin zu sehen, dass sie sich nicht trauten, eine Angabe zu verwenden, die im Text nicht ausdrücklich auftaucht. Der Sinn der in den Mathe-Aufgaben enthaltenen Fragen ist offenbar kaum bedeutend; was demgegenüber wichtig ist, ist die Verwendung der Zahlenangaben, die ausdrücklich als solche präsentiert werden. Eines der Kinder antwortete auf Befragen: "Wenn du auch die Rückfahrt berechnen wolltest, dann hättest du es sagen müssen"; die vom Kind erfasste Lücke ist offensichtlich: bei keiner der Zahlenangaben scheint es zulässig zu sein, die Aufwendungen für die Kilometerstrecke zu verdoppeln.

Ebenfalls im Zusammenhang mit dem *contrat didactique* ist von äußerstem Interesse die Haltung der Lernenden angesichts der folgenden berühmten Aufgabe von Alan Schoenfeld (1987a):

"Ein Bus der Streitkräfte befördert 36 Soldaten. Wenn 1128 Soldaten per Bus zum Trainingslager gefahren werden sollen, wie viele Busse braucht man dann?"

Von den 45.000 fünfzehnjährigen Lernenden, die in den USA durch Schoenfeld untersucht wurden, gelang es weniger als einem Viertel (23%), die erwartete Antwort zu geben: 32 [53]. Der USA-Forscher behauptet daher, dass nur wenige Lernende in der Lage sind, den Sinn der Aufgabe zu entnehmen und es wagen, 32 hinzuschreiben, da diese Angabe nicht formal im Rahmen des Rechenvorgangs gewonnen worden ist; daher schlägt er als Begründung für dieses Verhalten bestimmte Fragen vor, die sich auf metakognitive Umstände beziehen.
Einige Jahre später wollten wir die gleiche Situation erneut analysieren (D'Amore, Martini, 1997), und wir konnten dabei einiges an Neuem ausfindig machen. Die Aufgabe wurde Lernenden verschiedener Schulniveaus gestellt, wobei die Kinder dahingehend frei waren, einen Taschenrechner zu benutzen oder nicht. Wir erhielten viele Antworten vom Typ: 31,333333, vor allem von Seiten der Lernenden, die einen Taschenrechner benutzten; andere Antworten lauteten:
$31{,}3^{-}$ und 31,3.
Die Bedeutungskontrolle führt dann, wenn sie überhaupt vorgenommen wird, dazu, dass einige Lernende 31 schreiben (die Busse "kann man nicht aufteilen"); jedoch fühlen sich nur wenige Lernende dazu *ermächtigt*, 32 anzugeben. Unter den Lernenden, die den Taschenrechner benutzten, gibt es kein einziges Mal die Antwort "32".
Der Lernende fühlt sich nicht dazu befugt, etwas hinzuschreiben, was nicht auftaucht; auch wenn er eine semantische Überprüfung vornimmt, die dazu führt, dass Busse nicht in Tortenstücke aufzuteilen sind, so berechtigt ihn das offensichtlich nicht dazu, die Zahl 32 hinzuschreiben. Es gibt sogar einige Lernende, die sich noch nicht einmal dazu befugt sahen, 31 anzugeben; man kann dabei nicht einfach von einem "Fehler" auf Seiten des Lernenden sprechen, wenn man nicht als Fehler die Unfähigkeit ansehen wollte, nach Erhalt der Antwort zu überprüfen, ob sie semantische Kohärenz mit der gestellten Frage aufweist; danach kommt jedoch ein anderer Mechanismus zum Tragen. Der Lernende ist nicht bereit, zuzugestehen, dass er einen Fehler gemacht hat, und er spricht eher von einem "Trick" oder von einer "Falle"; für den Lernenden ist ein mathematischer Fehler oder ein Fehler in der Mathematik immer ein Rechenfehler oder ein Fehler, der einem Rechenfehler gleichzusetzen ist, jedoch niemals ein Fehler semantischer Art.
Eine lange und systematische Untersuchung dieser Aufgabe, die auch in Form zahlreicher Befragungen der Lernenden vorgenommen wurde, hat offenbart, dass für diese Verhaltensweise eine bestimmte Klausel des *contrat didactique* "verantwortlich" zu machen ist, die wir wie folgt bezeichnet haben: "Klausel der formalen Weiterdelegierung (= Abtretung von Verantwortung)". Der Lernende liest den Text; er beschließt, welcher Rechenvorgang durchzuführen ist, und er entscheidet, mit welchen Zahlen vorgegangen werden muss; nun

[53] Anmerkung des Übersetzers: Hier scheint der Autor in seinen eigenen *contrat* getappt zu sein, denn wenn genügend Zeit zur Verfügung steht, reicht natürlich ein einziger Bus ... !

kommt die Klausel der formalen Weiterdelegierung zum Tragen: der Lernende braucht nicht mehr zu überlegen oder etwas zu kontrollieren. Unabhängig davon, ob er im Kopf rechnet - jedoch umso ausgeprägter, wenn er den Taschenrechner einsetzt - : stets gerät er unter jene Klausel, die... zum Verlust der rationalen und kritischen Fähigkeiten sowie der Kontrollfähigkeiten führt: die Verpflichtung und Aufgabe des Lernenden ist zu Ende, und nun braucht nur noch der Algorithmus - oder besser: die Maschine - für ihn zu arbeiten. Die nachfolgende Aufgabe des Lernenden besteht dann wieder darin, das Ergebnis einzutragen, wie auch immer es aussehen möge, und unabhängig davon, was dieses Ergebnis im Gesamtkomplex der Aufgabe bedeuten mag.

Die Untersuchungen zum *contrat didactique*, die praktisch weltweit durchgeführt werden, erweisen sich als äußerst fruchtbar und haben schon in wenigen Jahren Ergebnisse von großem Interesse mit sich gebracht, die ein immer besseres Verständnis der Epistemologie des Erlernens der Mathematik ermöglichen.

2. Konflikte und Misskonzepte

Ein weiterer Untersuchungsgegenstand im Bereich der Didaktik der Mathematik, der sich derzeit als äußerst stark und aussagekräftig darstellt, betrifft die so genannten *kognitiven Konflikte*. Es geht um folgendes: der Lernende kann sich im Laufe der Zeit eine bestimmte Vorstellung gebildet und eine Bildvorstellung angenommen haben; dieses Bild mag im Laufe der Zeit durch wiederholte Überprüfungen und Erfahrungen verstärkt worden sein. Aber es kann auch vorkommen, dass sich dieses Bild früher oder später als unangemessen erweist, wenn man es mit einem anderen Bild des gleichen Begriffs oder der gleichen Konzeption vergleicht, wie es z. B. durch den Lehrenden selbst oder durch andere Personen angeboten wird, und das nicht erwartet wurde und daher zum früheren Bild in Kontrast steht.
Auf diese Weise entsteht ein *Konflikt* zwischen dem früheren Bild, das der Lernende als endgültig ansah und sich auf den fraglichen Begriff bezog, und dem neuen Bild; dies geschieht vor allem dann, wenn das neue Bild die Grenzen der Anwendbarkeit des Begriffs erweitert oder eine umfassendere Darstellung des Begriffs bietet.

In Verbindung mit den Vorstellungen des "Bildes eines Begriffs" und eines "Konflikts" gibt es eine bedeutende Frage, die die *Fehlverständnisse / Missverständnisse* betrifft. Ein Fehlverständnis ist ein falscher Begriff und stellt daher ganz allgemein ein zu vermeidendes Ereignis dar; es wird jedoch nicht immer als eine Situation angesehen, die vollständig oder zweifelsfrei negativ ist; es ist nicht ausgeschlossen, dass es - um einen neuen Begriff / eine neue Konzeption konstruieren zu können - *erforderlich* wird, vorübergehend das Stadium eines Fehlverständnisses zu durchlaufen, sofern es einer richtigen Neuorientierung unterliegt.

Es ist darauf hinzuweisen, dass zumindest in einigen Fällen bestimmte Bilder Fehlverständnisse im eigentlichen Sinne darstellen können, also falsche Interpretationen der erhaltenen Informationen.
An dieser Stelle taucht das umfassende und interessante Problem des so genannten 'verborgenen Curriculums' auf. Der Lernende stößt auf seine eigenen Fehlverständnisse, wenn er *in korrekter Form unkorrekte* Regeln anwendet. Häufig liegt einem derartigen Umstand ein Nichtverständnis oder eine falsche Auslegung zu Grunde. Wenn der Lehrende dies nicht bemerkt, so werden seine Anregungen ins Leere fallen, denn der Lernende hat ja schon in sein eigenes Curriculum jene Regeln mit aufgenommen, die er als richtig ansieht, und die in bestimmten Fällen schon funktioniert haben.
So gab es zum Beispiel in einer dritten Grundschulklasse einen Lernenden, der in Form von einzelnen Spalten folgende Subtraktionsvorgänge durchführte:

37-	89-	26-	56-
24=	67=	18=	43=
13	22	12	13

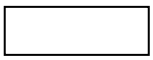
Der Lehrende wies darauf hin, dass drei Subtraktionsvorgänge von insgesamt 4 korrekt gelöst worden waren, und er gab daher eine insgesamt positive Bewertung ab; soweit es die dritte Subtraktion betrifft, forderte er den Lernenden dazu auf, "sich einen Zehner zu leihen". Der Lernende verstand nicht, um welchen Zehner es gehen sollte, denn er dachte an eine andere persönliche Regel: um Subtraktionen in Form von Spalten durchzuführen, geht man von rechts nach links vor, und in jeder Spalte wird von der größeren Zahl jeweils die kleinere Zahl abgezogen. Diese Regel hatte sich in vielen Fällen bewährt; die Kommunikation, die sich auf Fälle wie die dritte Aufgabe bezog, war aus welchem Grunde auch immer bei ihm nicht angekommen, und er hatte daher in sein eigenes Schulprogramm diese "Regel" fest aufgenommen. Sie funktionierte *fast* immer, und in jenen Fällen, in denen sie nicht funktionierte, verstand er nicht, warum dies so war; denn er wandte ja *korrekt* eine Regel an, von der er nicht wusste, dass sie unrichtig ist. Genau dies ist ein Fehlverständnis.

Hierzu einige Beispiele:

Beispiel 1: Der Lernende hat immer Bilder von Rechtecken gesehen, deren Seiten (Basis und Höhe) jeweils unterschiedliche Längen aufweisen (auch wenn im Rahmen der gebotenen Definition lediglich Parallelogramme mit rechten Winkeln auftauchen). Dies hat dazu geführt, dass er als Urbild des Rechtecks eine Figur zugrundelegt, bei der die Basis und die Höhe unterschiedlich sein *müssen*:

Eines Tages analysiert der Lehrende etwas eingehender in logischer Hinsicht die Definition des Rechtecks und geht dabei von einem Parallelogramm aus; er zeigt, dass die Vorgabe lediglich den Öffnungsgrad der vier inneren Winkel betrifft (bei denen es sich ausnahmslos um rechte Winkel handeln muss), so dass der Fall eines Quadrats nicht ausgeschlossen ist, wenn man es als ein Rechteck ansieht, bei dem die Basis und die Höhe jeweils gleich lang sind. Nun entsteht ein kognitiver Konflikt - oder genauer: er kann entstehen - , in Verbindung mit dem Prototyp der erwarteten Figur (die durch die Erfahrung bestätigt worden ist), und zwar zwischen dem Bild des Rechtecks, das das Quadrat ausschließt, und dem neuen angebotenen Bild.

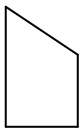
Beispiel 2: Ein Schüler der ersten Grundschulklasse hatte immer gesehen, dass ein Rechteck so gezeichnet wird, dass es auf der waagerechten Grundseite "aufruht", wobei die senkrecht gezeichnete Höhe kürzer ausfällt; daher hatte sich ein solches Bild des Begriffs "Rechteck" bei ihm festgesetzt, und dieses Bild wurde stets durch die Erfahrung bestätigt:



Eines Tages wurde ihm das Bild eines Rechtecks angeboten, dessen Basis zwar waagerecht verläuft, so dass die Höhe senkrecht ausfällt; in diesem Falle war jedoch die Basis kürzer als die Höhe:

Bedeutsam ist nun die Bezeichnung, die das Kind spontan vornahm, um den schon bestehenden Begriff an das neue Bild anzupassen, denn er definierte diese "neue Form" als "stehendes Rechteck".
Bei dieser spontanen Bezeichnungsgebung erkennt man den glücklichen Ausgang eines kognitiven Konflikts zwischen einem Fehlverständnis (dem scheinbar stabilen Bild eines "Rechtecks", das jedoch noch einer endgültigen Systematisierung bedurfte) und dem neuen Bild, das der Lehrende bewusst und richtig vorgeschlagen hatte.

[Einmal ist mir etwas ähnliches bei Lehrenden der Mittelschule passiert (jedoch nicht in Italien).
Als ich folgende Figur als "Trapez" bezeichnete:



erhielt ich zunächst ausgeprägte Reaktionen in Form einer Nichtzustimmung, die natürlich sofort korrigiert wurden. Die stereotype Position des Trapezes hatte zunächst (natürlich nur einige Sekunden lang) eine durch Unbehagen geprägte Situation erzeugt.]

Man könnte noch viele Beispiele liefern, aber ich glaube, dass die aufgeführten Beispiele reichen müssten.

Der kognitive Konflikt ist daher ein "interner" Konflikt; er beruht auf der Nichtübereinstimmung zwischen zwei Begriffen oder zwischen zwei Bildern oder schließlich zwischen einem Bild und einem Begriff.
Der Konflikt kann jedoch auch sozialer Art sein. Nehmen wir an, dass der Lernende über ein Bild oder einen Begriff zu einem bestimmten Thema verfügt und davon ausgeht, dass dieses Bild oder dieser Begriff durch die gesamte Klasse geteilt werden (bzw., allgemeiner: durch die gesamte Gesellschaft); eines schönen Tages entsteht zwischen diesem Bild oder diesem Begriff ein Konflikt zu jenem Bild oder jenem Begriff, das/der durch die Lehrenden und/oder durch eine neue Situation angeboten wird; bei dieser Gelegenheit merkt der Lernende, dass sein eigenes Bild / sein eigener Begriff überhaupt nicht durch die Klasse geteilt wird, sondern ganz im Gegenteil nur ihn selbst betrifft, so dass er nun isoliert dasteht; z. B. staunen seine Mitschüler überhaupt nicht über einen Vorschlag, den er seinerseits jedoch nicht akzeptieren kann. Nur ein einziges Beispiel: ein Quadrat wird stets so gezeichnet und durch die Lehrbücher immer so dargestellt, dass die Seiten horizontal und vertikal verlaufen; ein Rhombus wird sehr häufig mit horizontalen und vertikalen Diagonalen dargestellt. Der kleine Michel hat daher die Vorstellung, dass die Quadrate so und nicht anders sein und die Rhomben demgegenüber so und nicht anders ausfallen *müssen*; er ist überzeugt, dass seine Auffassung von allen Klassenkameraden geteilt wird; er glaubt daher implizit, dass es sich um eine Vorstellung handelt, die in breitem Maße oder sogar uneingeschränkt geteilt wird. Einige Zeit danach zeichnet nun der Lehrende ein Quadrat mit horizontalen und vertikalen Diagonalen, bezeichnet es aber nicht als "Rhombus", wie durch Michel erwartet, sondern als "Quadrat".
Michel merkt auf: hat der Lehrende sich geirrt? Aber er bemerkt stattdessen, dass der Rest der Klasse diese Benennung akzeptiert; es handelt sich nun um einen kognitiven Konflikt nicht nur auf der individuellen und "internen" Ebene, sondern sogar auf der sozialen Ebene, denn der kleine Michel steht nun im Konflikt zu einem Begriff, den er als allgemein geteilt angesehen hatte.

Die Grundlage für Konflikte stellen daher die *Fehlverständnisse* dar, also Vorstellungen, die vorübergehend nicht richtig sind und noch eine stärker ausgearbeitete und kritischere kognitive Neuordnung und Systematisierung benötigen. Nun ist aber darauf zu achten, dass der Lernende dies nicht weiß und daher davon ausgeht, dass seine Vorstellungen, die dem Forscher als Fehlverständnisse auffallen werden, jeweils richtige und wahrheitsgetreue Vorstellungen sind! Daher ist es der Erwachsene, der darum weiß, dass die von den Kindern erarbeiteten und übernommenen Vorstellungen jeweils

Missverständnisse sind. Sie einfach als *Fehler* zu bezeichnen, wäre zu vereinfachend und banal; es geht nicht darum, zu bestrafen oder negativ zu bewerten; es geht demgegenüber darum, Hilfsmittel für eine kritische Ausarbeitung an die Hand zu geben. In einem gewissen Sinne könnte man sogar - da auch sehr kleine Kinder (3 bis 6 Jahre) über naive, jedoch profunde mathematische Vorstellungen verfügen (Agli, D'Amore, 1995), die empirisch oder auf dem Wege des sozialen Austausches gewonnen werden - davon ausgehen, dass die gesamte Schullaufbahn einer Person, soweit es die Mathematik betrifft, aus dem Übergang von Fehlverständnissen zu richtigen Vorstellungen besteht.
In einem gewissen Sinne können die Fehlverständnisse, wenn man sie wie vorstehend versteht (als vorübergehend nicht richtige Vorstellungen, die nur auf eine stärker ausgearbeitete und kritischere kognitive Neuregelung und Systematisierung warten), nicht beseitigt werden, und sie stellen keineswegs einen Schaden dar. Sie scheinen eher einen delikaten - jedoch notwendigen - Zeitpunkt des Übergangs darzustellen, und zwar von einer ersten elementaren Vorstellung (naiv, spontan, primitiv, ...) zu einer stärker ausgearbeiteten und richtigeren Vorstellung.
Die Grundlage für derartige Probleme scheinen offenbar in einigen Untersuchungen von Piaget-Inhelder zu liegen, auch wenn inzwischen eine erhebliche Weiterentwicklung der Forschungen auf diesem Bereich festzustellen ist. Sie betreffen auch die funktionale Starre, den Einstellungs-Effekt, die parasitären Kognitionen, usw. Um mich kurz zu halten, verweise ich auf (D'Amore 1993b).

3. Bilder und Modelle

Lediglich ein rascher Blick auf dieses komplexe Thema. Da ich weiter oben auf Termini wie "Bild" und "Modell" Bezug genommen habe, wäre es gut, zu klären, dass ich folgende Terminologie akzeptiere (sie jedoch nicht uneingeschränkt teile):
Das geistige / mentale Bild ist das figurative oder propositionale Ergebnis, das durch einen (inneren oder äußeren) Reiz erzeugt wird. Das geistige (mentale) Bild wird durch kulturelle Einflüsse und persönliche Stile geprägt; anders gesagt: es ist ein typisches Produkt des Individuums, jedoch mit Konstanten und Konnotationen, die zwischen verschiedenen Personen gemeinsam auftreten. Das mentale Bild kann mehr oder weniger bewusst ausgearbeitet sein (auch diese Fähigkeit zur Ausarbeitung hängt jedoch von der Einzelperson ab). Das mentale Bild ist jedoch intern und zumindest zunächst unwillkürlich.
Die Gesamtmenge der (mehr oder weniger bewusst) ausgearbeiteten mentalen Bilder, die sich alle auf einen bestimmten Begriff beziehen, stellt das mentale (innere) Modell dieses Begriffs dar.
Anders gesagt: der Lernende konstruiert sich ein Bild I_1 eines Begriffs C; er hält dieses Bild für stabil und endgültig. Aber zu einem gewissen Zeitpunkt seines kognitiven Werdeganges erhält er Informationen zum Begriff C, die nicht unter das Bild I_1 fallen, über das er bisher verfügte. Er muss dann (und

das kann auf einen kognitiven Konflikt zurückzuführen sein, den der Lehrende erzeugen *will*) sein "altes" Bild an ein neues und umfassenderes Bild anpassen, das nicht nur die früheren Informationen aufgreifen muss, sondern das auch die neuen Informationen in sich aufnehmen wird. De fakto wird ein neues Bild I_2 von C konstruiert. Diese Situation kann sich mehrfach während der Schullaufbahn eines Lernenden wiederholen.
Viele der mathematischen Begriffe werden dadurch erhalten, dass im Laufe der Monate oder der Jahre jeweils Übergänge von einem Bild zu einem anderen und mächtigeren Bild erfolgen; man könnte sich daher diese Aufeinanderfolge von Konstruktionen der Begriffe, also die aufeinanderfolgenden Bilder I_1 I_2 ... I_n I_{n+1} ... als eine Art Treppe vorstellen, auf der man sich dem Begriff C "annähert".
Zu einem bestimmten Zeitpunkt während dieser Aufeinanderfolge von Bildern gibt es einen Augenblick, in dem das Bild, zu dem man nach verschiedenen derartigen Durchgängen gelangt ist, unterschiedlichen Belastungen "widersteht" und sich als ausreichend "stark" erweist, um sämtliche neuen Argumente oder Informationen mit aufzunehmen, die im Zusammenhang mit dem durch das Bild repräsentierten Begriff C eintreffen. Ein derartiges Bild, das stabil und nicht mehr veränderbar ist, könnte man als "Modell" M des Begriffs C bezeichnen.
Sich ein Modell eines Begriffs zu erarbeiten, bedeutet daher, nacheinander Bilder schwacher und nicht stabiler Art weiter auszuarbeiten, um zu einem starken und stabilen Bild zu gelangen.
Es gibt nun zwei Möglichkeiten:
* Das Modell M bildet sich zum richtigen Zeitpunkt, in dem Sinne, dass es sich tatsächlich um das richtige Modell handelt, also genau um jenes Modell, das sich der Lehrende für C wünschte; die didaktischen Maßnahmen haben funktioniert, und der Lernende hat das richtige Modell M konstruiert (also das vom Lehrenden gewollte Modell), als Darstellung des Begriffs C;
* Das Modell M bildet sich zu früh heraus, also dann, wenn es erst durch ein Bild wiedergegeben wird, das nachfolgend hätte erweitert werden müssen; es ist dann nicht einfach, zum Begriff C zu gelangen, denn die Stabilität von M stellt an und für sich ein Hindernis für zukünftige Lernvorgänge dar.

Führen wir nun die Analyse der Modelle und ihrer Rolle im Rahmen der Lernvorgänge weiter fort.

Wenn ein Lehrender von einem Begriff C ein starkes und überzeugendes Bild anbietet, das dauerhaft ist und durch ständige Beispiele und Erfahrungen bestätigt wird, so verwandelt sich das Bild in ein *intuitives Modell.*
Kurz gesagt: es besteht eine direkte Übereinstimmung zwischen der vorgegebenen Situation und dem mathematischen Begriff, der gerade benutzt wird; dieses Modell könnte jedoch noch nicht jenes Modell des Begriffs C sein, das innerhalb des mathematischen Wissens erwartet wird.
Dies bedeutet folgendes: im Rahmen der Modelle bleibt die Bezeichnung "intuitives Modell" jenen Modellen vorbehalten, die uneingeschränkt den intuitivem Anregungen und Reizen entsprechen und daher unmittelbar und stark akzeptiert werden.
Manchmal spricht man auch von *parasitären Modellen*.

Nachdem z. B. das intuitive Modell der Multiplikation natürlicher Zahlen akzeptiert wurde, und wenn man es fälschlich auf sämtliche Multiplikationen ausweitet, und sofern darüber hinaus noch dieses intuitive Modell durch schematische Darstellungen (in Form von *Gruppen- oder Scharbildungen*) bestätigt wird, so entsteht ein parasitäres Modell, das sich wie folgt darlegen lässt: eine Multiplikation führt immer dazu, dass das Ergebnis größer wird; es *muss* immer größer werden.
Analog hierzu ist das parasitäre Modell der Division zu sehen. Unabhängig davon, ob man sich diesem Problem in Form des "Enthaltenseins" oder in Form der "Aufteilung" stellt: wenn man nicht ein wenig von Mathematikdidaktik versteht, kann man Gefahr laufen, dem Lernenden ein intuitives Modell zu vermitteln, das dazu führt, dass letztendlich ein parasitäres Modell entstehen wird: bei einer Division A durch B *muss* die Zahl B immer kleiner als die Zahl A sein.

Didaktisch ist es sinnvoll, noch instabile Bilder, die darauf warten, geeignete und aussagekräftige Modelle zu erzeugen, in einer Form zu hinterlassen, in der sie sich möglichst weitgehend dem mathematischen Wissen annähern, das man erreichen möchte.
Je "stärker" das intuitive Modell ist, umso schwieriger ist es, dieses Modell aufzubrechen, um es an ein neues Bild *anzupassen*. Dies bedeutet folgendes: das Bild als Fehlverständnis darf nicht zu einem Modell werden, da es auf Grund seiner eigentlichen Natur noch auf eine endgültige Regelung und Systematisierung wartet.
Es geht also darum, keine schiefen oder falschen Informationen zu geben; nicht nur darf man derartige Informationen nicht explizit weitergeben, sondern man muss vermeiden, dass sie sich automatisch bilden, um das Entstehen von parasitären Modellen nicht zu begünstigen.
Hierzu einige Beispiele im einzelnen.

Beispiel 1: Der Lernende hat jahrelang überprüfen können, dass der Multiplikationsvorgang "zu einer Zunahme des Wertes der Faktoren" führt; anders gesagt: das Produkt beider Faktoren ist größer als jeder Faktor für sich genommen (12 ist viel größer als 3 und als 4; 60 ist viel größer als 12 und 5, usw.). Auch die figurativen Bilder (von darstellenden und operativen Schemata), die dem Lernenden angeboten werden, um den Vorgang der Multiplikation akzeptabel und intuitiv erfassbar werden zu lassen, bestätigen diese intuitive Erwartung (dies gilt z. B. für einen ungeschickten Einsatz der so genannten "Reihenbildung", die im Rahmen der didaktischen Realität der Primarschule äußerst verbreitet ist). So besteht schon in der ersten Grundschulklasse das figurative Bild der Multiplikation (Beispiel: 3 x 4) aus 4 Reihen mit jeweils 3 Gegenständen:

•••

•••

•••

•••

Es versteht sich, dass eine derartige Figur *genau jenes* Bild des Begriffs verstärkt. Fatalerweise wird aber nun der Tag eintreten, an dem man 3 nicht mehr mit 4 multiplizieren muss, sondern mit 0,5; dann funktioniert das (inzwischen entstandene) Modell nicht mehr, und die durch das Modell vorausgesetzte allgemeine Regel der Zunahme wird hinfällig; somit entsteht der Konflikt (Fischbein, 1985, 1992).
Zu diesem Zeitpunkt ist es nicht einfach, sich die neue Situation anzueignen, um das frühere Modell an ein neues Modell anzupassen (denn das Merkmal der Modelle - im Vergleich zu den Bildern - besteht gerade in ihrer Stabilität).
Auf Grund dessen entsteht die didaktische Notwendigkeit, ein derartiges Bild nicht zu schnell zu einem stabilen Bild werden zu lassen, damit man es später noch erweitern kann, und zwar im Rahmen des Versuchs, in optimaler Form ein Modell für einen Begriff der Multiplikation zu konstruieren, der die nachfolgenden Ausweitungen auf die nicht natürlichen Zahlen berücksichtigen kann.
Es ist kein Zufall, wenn viele fortgeschrittene Lernende (auch an der Universität!) ihr Erstaunen in Anbetracht des Umstandes bekunden, dass bei einem Vergleich zwischen den beiden Rechenvorgängen 18 x 0,25 und 18 : 0,25 der erste Rechenvorgang zu einem kleineren Ergebnis führt. Sie behalten das falsche Modell bei, das auf der Grundschule entstanden ist, und auf dessen Grundlage "die Multiplikation zur Erhöhung der Werte führt".

Beispiel 2: Der Lernende hat stets eine große Zahl durch eine kleinere Zahl geteilt; anders gesagt: es ist in ihm das Bild entstanden, dass der Dividend stets größer als der Divisor sein *muss.* Er wird hierzu durch die Art und Weise veranlasst, in der die Division dargeboten wird: es handelt sich immer darum, viele Gegenstände auf wenige Schachteln aufzuteilen, oder Dinge dieser Art (Division in Form einer Aufteilung); oder es handelt sich immer um Behälter, die jeweils unterschiedliche Gegenstände in sich aufnehmen werden (Division als Fassungsvermögen). Aber dies führt dazu, dass der Lernende in Anbetracht einer Aufgabe folgenden Typs:
"15 Freunde teilen sich 5 Kilogramm Kekse. Wie viele Kekse bekommt jeder von ihnen?" [54] (Deri, Sainati Nello, Sciolis Marino, 1983; D'Amore, 1993b)

[54] Dies ist eine der Aufgabe aus einer Reihe von 42 Aufgaben, die in Deri, Sainati Nello und Sciolis Marino (1983) geboten werden; dieser Artikel wird von mir umfassend diskutiert, unter Vergleich seiner Ergebnisse mit den Ergebnissen, die ich selbst in der Romagna erhalten hatte: D'Amore (1993b), Seite 168 - 185.

auch dann, wenn er schon die höhere Schule besucht (Alter: 14 bis 19 Jahre), spontan dazu bewogen wird, die Division 15 durch 5 durchzuführen [er berechnet dann nicht, wie viele Kekse auf jeden Freund entfallen, sondern "wie viele Freunde auf jedes Kilo Kekse entfallen", entsprechend dem ironischen Kommentar eines Lernenden der ersten Klasse einer naturwissenschaftlichen Oberschule in Lugo (Provinz Ravenna) (Alter: 14 - 15 Jahre) aus Anlass der Befragung, als man ihn darum bat, über seine Teilung 15 durch 5 nachzudenken]. Es besteht ein Konflikt zwischen dem intuitiven Bild des Rechenvorgangs und jenem Bild, das anschließend in einer raffinierteren und eingehenderen Art und Weise konstruiert wird.
Jene Situationen, bei denen keine explizite Inanspruchnahme einer starken kognitiven Kompetenz vorliegt, hebt das intuitive Modell des Rechenvorgangs stets energisch seinen Kopf! In der Tat kann man davon ausgehen, dass auch dann, wenn der fortgeschrittene Lernende sich (mühsam) ein korrektes Modell eines Begriffs C konstruiert hat, das den mathematischen Kenntnissen ziemlich gut entspricht, unter normalen Bedingungen das intuitive Modell stets als Erstes hervorlugen wird und dadurch seine Hartnäckigkeit nachweist.
Um dies besser zu verstehen, wollen wir uns noch einmal die Frage jenes Lernenden aus der ersten Oberschulklasse ansehen, den wir soeben erwähnt hatten. In einer Routinesituation "fällt" der Lernende in die Falle, die sein eigenes intuitives Modell ihm bietet; wenn ich ihn jedoch während der Befragung entsprechend hinweise und ihm seine Aufgabe zurückgebe, so verursacht diese neue Situation eine andersartige und bewusstere Aufmerksamkeit sowie eine Inanspruchnahme stärkerer kognitiver Tatsachen; jetzt beherrscht nicht mehr das intuitive Modell die Szene, sondern das raffiniertere Modell, das kognitiv ausgearbeitet worden ist. Gerade die überraschte und amüsierte Reaktion des Lernenden beweist, dass er selbst nicht die Tatsache bemerkt hatte, ein intuitives Modell an Stelle eines raffinierteren Modells benutzt zu haben.

Beispiel 3 - Immer noch die Division. Im gleichen Artikel von Efraim Fischbein aus dem Jahre 1985, den wir soeben zitiert hatten, taucht ein weiterer sehr interessanter Test auf, den ich persönlich sehr häufig benutzt habe, vor allem aus Anlass von Treffen mit Lehrenden.
In Wirklichkeit besteht dieser Test aus 2 Übungen; ich habe die erste Übung vollständig unverändert beibehalten, während ich etwas den Wortlaut der zweiten Aufgabe überarbeitet habe, um dafür zu sorgen, dass sie, soweit es den Wortanteil betrifft, genau mit dem ersten Wortlaut übereinstimmt:

Aufgabe P1 - Eine Flasche Limonade enthält 0,75 Liter und kostet 2 Dollar. Wie viel kostet 1 Liter?
Aufgabe P2 - Eine Flasche Limonade enthält 2 Liter und kostet 6 Dollar. Wie viel kostet 1 Liter?

Wenn man lediglich die Aufgabe P1 zu lösen gibt und zunächst die Aufgabe P2 verdeckt hält, so wird man bei den Anwesenden stets einen mehr oder weniger langen Zeitraum der Unsicherheit feststellen. Wenn man auch P2 kurze Zeit danach vorlegt, und nach Entdeckung der Tatsache, dass es sich um das *gleiche*

Problem handelt, werden viele Testpersonen bereit sein, freimütig zuzugestehen, dass, während die zweite Aufgabe unverzüglich durch die Division 6 durch 2 zu lösen ist, die Lösung der ersten Aufgabe mit der *analogen* Division 2 durch 0,75 zu etlichen Verwirrungen führt.

Sehen wir uns nun den Kommentar an, in dessen Rahmen ich einen Auszug benutzen werde, der durch Fischbein selbst zitiert wird:

"Auf Grund dessen lässt sich davon ausgehen, dass es gerade die Zahlen und die Beziehungen zwischen ihnen sind, die das Erkennen des Divisionsvorgangs als Lösungsverfahren blockieren oder aber erleichtern. Jeder Rechenvorgang weist zusätzlich zu seiner formalen Bedeutung auch eine oder mehrere intuitive Bedeutungen auf. Beide Ebenen können zusammenfallen oder aber nicht ".

Ich habe häufig versucht, die Lehrenden und die älteren Lernenden danach zu fragen, wie sie die Aufgabe P1 gelöst hatten. Einige haben zugegeben, 0,75 als 3/4 angesehen zu haben und so zum Bereich der Brüche übergegangen zu sein (wobei auch dies nicht immer einwandfrei gelungen ist). Andere haben demgegenüber zugestanden, dass sie die Aufgabe P1 durch die Proportion 0,75 : 2 = 1 : x gelöst und dann die bekannten Eigenschaften angewandt haben, um (erfolgreich) das Ergebnis zu erhalten. Nun ist darauf zu achten, dass im Laufe der Lösung dieser linearen Gleichung unter Auflösung auf die Unbekannte x hin ein Augenblick auftaucht, in dem man die Teilung 2 durch 0,75 durchführen *muss*, also scheinbar den gleichen Vorgang durchzuführen hat, der dann, wenn man ihn direkt anhand der Vorgaben der Aufgabe durchgeführt hätte, die Aufgabe P1 in einem kurzen Augenblick gelöst hätte. Aber es ist dennoch nicht dasselbe! Denn wenn es auf der einen Seite unzweifelhaft stimmt, dass bei vielen von uns ein sehr starker Widerstand dahingehend vorliegt, direkt die Division 2 durch 0,75 durchführen zu sollen (auf Grund des Widerspruchs zwischen der formalen Bedeutung und der intuitiven Bedeutung dieser Division), so besteht keinerlei Schwierigkeit mehr, sobald man die Regeln zum Bereich der Proportionen anwendet und *die einzelnen Schritte eines Algorithmus durchführt*, wenn dieser am Ende des Gesamtvorgangs auftaucht und von uns verlangt, *scheinbar den gleichen* Rechenvorgang auszuführen. Wie wir inzwischen wissen, kommt an dieser Stelle eine Klausel des *contrat didactique* zum Greifen, und zwar die Klausel der *formalen Delegierung*: in einem gewissen Sinne lassen wir uns nicht mehr direkt darauf ein, diesen merkwürdigen Vorgang durchzuführen; es geht nicht mehr um eine Wahl oder um eine persönliche Entscheidung. Wir befolgen dann nur noch eine Verfahrensvorschrift, die aus einer Reihe von automatischen Durchläufen besteht, zu denen wir über einen entsprechenden Konsens und eine Befugnisdelegierung verfügen, und zu denen wir uns nicht mehr in unserem Inneren um eine Schritt-für-Schritt-Rechtfertigung bemühen müssen.
Man muss zugestehen, dass diese Angelegenheit von ganz außerordentlichem Interesse ist.

Beispiel 4 - Die Addition. Auf der Grundlage einer Idee von Gérard Vergnaud (1982) [55] stellt Fischbein diesen Vorgang als ein weiteres Beispiel für die Nichtübereinstimmung zwischen der formalen Bedeutung und der intuitiven Bedeutung dar. Es handelt sich um 3 Additionsaufgaben mit jeweils einer Phase, die also mit einem einzigen Rechenvorgang zu lösen sind. Um dem Leser das Verständnis zu erleichtern, werde ich sie vollständig wiedergeben:

Aufgabe A - An einem Tisch sitzen 4 Jungen und 7 Mädchen. Wie viele sitzen da insgesamt?
Aufgabe B - Jean hat 4 Francs ausgegeben. Nun hat er noch 7 Francs in der Tasche. Wie viele Francs hatte er vorher?
Aufgabe C - Robert hat zwei Spiele gemacht. Im ersten Spiel hat er 4 Punkte verloren; aber am Ende des zweiten Spiels hat er einen Vorsprung von 7 Punkten. Was ist im zweiten Spiel passiert?

Alle 3 Aufgaben, dies ist sofort einsehbar, lassen sich durch den gleichen Vorgang 4+7 lösen; die Prozentsätze des Erfolgs unterscheiden sich jedoch voneinander auf eine unglaublich deutliche Art und Weise.
* Aufgabe A wird schon in der zweiten Grundschulklasse (Alter: 7 Jahre) gut gelöst: die richtigen Lösungen machen fast 100 Prozent aus. Diese Aufgabe weist eine nahezu perfekte *Übereinstimmung zwischen der formalen Bedeutung und der intuitiven Bedeutung* auf: die Addition ist jener Rechenvorgang, der zur Lösung von Aufgaben führt, die eine Vereinigung zwischen Sammlungen ohne gemeinsame Elemente betreffen. Aber fast keiner dieser Lernenden kann die Aufgabe B lösen, und die wenigen, die sie lösen, raten eher zufällig herum; schließlich gibt es nur 2 Zahlenangaben, die zur Verfügung stehen, 4 und 7 ...
* Aufgabe B wird - wenn auch mit Schwierigkeiten - in der vierten oder fünften Grundschulklasse (Alter: 9 oder 10 Jahre) gelöst; es lässt sich in jedem Fall darauf hinweisen, dass die korrekten Lösungen, die in bewusster Form gewonnen werden, einen erfreulichen Prozentsatz ausmachen.
* Aufgabe C führt zu einem so gut wie vollständigen Misserfolg. Sogar noch in der ersten und zweiten Mittelschulklasse (Alter: 11 oder 12 Jahre) weist die Aufgabe C Lösungsprozentsätze von lediglich 25% ca. auf, oder noch weniger, in Übereinstimmung mit den Untersuchungen von Vergnaud und Fischbein.

Es ist jedoch offensichtlich, dass es hierbei nicht nur um formale und intuitive Bedeutungen der Addition geht. An dieser Stelle handelt es sich auch - und vielleicht vorwiegend - um Schwierigkeiten, den Wortlaut in "erzählender" Form zu beherrschen [Und dies würde zu der wichtigen Frage nach der Abfassung des Wortlauts der Aufgaben überleiten, in deren Zusammenhang ich auf folgende Publikationen verweise: D'Amore (1993b); D'Amore, Franchini et alii (1995)].
Dieser Typ von Aufgaben zeigt unter einem didaktisch - anwendungsbezogenen Blickwinkel zumindest, dass das vermeintliche Kriterium der Schwierigkeit bei der Lösung von Aufgaben falsch ist, demzufolge die Zunahme der Anzahl der Rechenvorgänge, die für die Lösung durchzuführen sind, mit einer Zunahme der

[55] Es handelt sich um die Studie zu einer sehr berühmten Dreiergruppe von Aufgaben, die in sehr vielen Texten zitiert wird; sie wird auch in D'Amore (1993b) dargestellt und diskutiert.

Schwierigkeiten gleichbedeutend sei. Es lässt sich leicht nachweisen, dass es viele Aufgaben gibt, die zwei Rechenvorgänge benötigen, und die erheblich leichter als die Aufgabe B zu lösen sind; die Aufgabe C bleibt, obwohl sie lediglich einen einzigen Rechenvorgang benötigt, außerhalb der Reichweite der gesamten Grundschule.
Der Widerstand gegen den Einsatz der Addition in Situationen, in deren Zusammenhang davon auszugehen ist, dass keine Übereinstimmung zwischen der formalen und der intuitiven Bedeutung vorliegt, wird nicht nur in der Grundschule nachgewiesen, sondern auch für die gesamte Mittelschule. Siehe hierzu z. B. Billio et alii (1993); in diesem Rahmen werden auch bestimmte Situationen analysiert, auf die die Lernenden in geeigneten Befragungen explizit hingewiesen hatten.

Beispiel 5 - Die Subtraktion. Die Subtraktion bietet schon *auf Grund ihrer Wesensart* mindestens zwei verschiedene intuitive Bedeutungen, trotz einer einzigen formalen Bedeutung; diese beiden unterschiedlichen intuitiven Bedeutungen lassen sich herausstellen, wenn man zwei Aufgaben zu Rate zieht, auf die ebenfalls Fischbein hingewiesen hatte:

1. Wenn wir 3 Murmeln aus einer Gesamtmenge von 10 Murmeln wegnehmen, wie viele Murmeln bleiben dann übrig?
2. Ich habe 7 Murmeln, ich brauche aber 10 für ein Spiel. Wie viele muss ich noch zu den Murmeln hinzufügen, die ich schon habe, damit ich mit dem Spiel anfangen kann?

Es versteht sich, dass beide Aufgaben durch eine Subtraktion zu lösen sind; im ersten Fall ist jedoch das *Wegnehmen* (wie Fischbein es nennt) intuitiv vorgegeben, denn es liegt eine Übereinstimmung zwischen der formalen Bedeutung und der intuitiven Bedeutung vor; im zweiten Fall scheint die Benutzung additiver Strategien vom Typ 7 + ... = 10 naheliegender zu seien, wobei in welcher Form auch immer davon auszugehen sein wird, dass die Pünktchen ... gleich 3 zu setzen sind. Auf der anderen Seite ist jede Strategie additiv, die als "Ergänzung zu" funktioniert, wie z. B. der Vorgang, den Rest in einem Geschäft herauszugeben: der Kaufmann berechnet üblicherweise nicht die Differenz, sondern er nimmt schrittweise eine Ergänzung vor, ausgehend von der jeweiligen Kostenposition, bis die gezahlte Summe erreicht wird. Es gibt daher unter den Lernenden einen gewissen Prozentsatz von unrichtigen Antworten; an Stelle der Subtraktion gibt es einige, die die Addition 7+10 oder 10+7 vornehmen, auf Grund der Tatsache, dass hier das Wort *hinzufügen* auftaucht, das die Verwendung der Addition nahelegt.
Es gibt einen starken Kontrast zwischen dem naiven und spontanen Rechenvorgang, der de fakto in einer konkreten Situation eingesetzt würde (also die Berechnung 7 + 1 + 1 + 1, mit der Antwort: 3, in Verbindung mit der Anzahl der + 1, die erforderlich sind, um auf 10 zu kommen), und der formalen Bedeutung der Subtraktion. Wenn es einen spezifischen Rechenvorgang gäbe, der die Anzahl der +1 ausdrückt, die es ermöglichen, von 7 auf 10 zu kommen, so würde wahrscheinlich der Prozentsatz der erfolgreichen Antworten deutlich ansteigen; natürlich könnte jemand sagen, dass es genau diesen Rechenvorgang

schon gibt, und zwar die Subtraktion, die durch 10-7 ausgedrückt wird; die bislang durchgeführten Untersuchungen und angestellten Erwägungen zeigen jedoch, dass dies *nicht* jene intuitive Bedeutung ist, mit der die Lernenden für ihren kognitiven Bereich die Subtraktion konstruieren.

Und es gäbe noch viel zu sagen, soweit es eine Situation betrifft, die ich soeben weiter oben angedeutet habe, und die noch komplizierter ist, angesichts der *beiden intuitiven Bedeutungen* der Division, also der Aufteilung und des Enthaltenseins, die ja beide nur einer *einzigen formalen Bedeutung* entsprechen. Ich bin schon mehrfach auf Grundschullehrer gestoßen, die mir beichteten, sie würden diese beiden Bedeutungen getrennt voneinander behandeln, gewissermaßen wie zwei unterschiedliche Rechenvorgänge, um Unsicherheiten bei den Lernenden zu vermeiden.

4. Interne und externe Modelle: die "Übersetzung"

Das mentale Modell zu rekonstruieren, das eine Person von einem Begriff hat, ist ein schwieriges - vielleicht sogar unmögliches - Unterfangen; wenn die Person sich selbst gegenüber ihr eigenes mentales Modell kommentieren möchte, so wird sie es üblicherweise in einer internen Sprache tun, die absolut persönlich und frei von lexikalischen Regeln zu sein scheint. Aber wenn sie das eigene Modell extern mitteilen möchte, dann muss sie es in etwas "Externes" übersetzen [unabhängig von der Sprache, in der sie das Ergebnis übermitteln wird: verbal (mündlich oder schriftlich), nicht verbal (figurativ, mimisch, gestisch, usw.)].
Auf Grund dessen ist ein externes Modell eines Begriffs die Tatsache, dieses Modell in bewusster Form in einer wie auch immer gearteten Form von Sprache anzubieten, wobei dieses Angebot aus Notwendigkeit oder aus einem Kommunikationswunsch heraus erfolgt.

Ich habe das Verb "übersetzen" benutzt, denn es handelt sich um eine Übersetzung im eigentlichen Sinne, und viele der derzeitigen Forschungen beschäftigen sich mit den Modalitäten dieser Übersetzung und den Einflüssen, die durch Faktoren wie z. B. die Persönlichkeit, den kognitiven Stil, das Umfeld usw. auf einige Merkmale dieser Übersetzung ausgeübt werden (z. B. die interne Sprache und das stillschweigende Wissen).
Für die Didaktik der Mathematik weisen derartige Themen ein großes Interesse auf, denn die gesamte mathematische Kommunikation erfolgt über externe Modelle. Anders gesagt: wir werden niemals erfahren, wie das mentale Modell aussieht, das sich der kleine Michel z.B. im Hinblick auf die Höhen eines Dreiecks ausgedacht hat. Wenn wir ihn danach fragen, so würden wir lediglich das Ergebnis jener Übersetzung erhalten, von der ich oben schon gesprochen habe; danach ist es unmöglich, eine Übersetzung in umgekehrter Richtung vorzunehmen, um so zu dem mentalen Modell von Michel vorzustoßen .... Im Laufe von Gesprächen oder Überprüfungen wird Michel - auf Grund einiger Klauseln des *contrat didactique* - ganz im Gegenteil versuchen, externe

Modelle vorzulegen, die sich dem annähern werden, was er als Erwartungen des Lehrenden ansieht, und die sich weniger an sein eigenes internes Modell annähern! Es gibt jedoch raffiniertere Untersuchungstechniken, die es gestatten, dafür zu sorgen, dass sich der Lernende von der Beziehung zum Lehrenden und Bewerter löst, ebenso wie vom Bild der Klasse als Ort der Suche nach einem Konsens. Wenn der Lernende dahingehend einwilligt, sich in einer natürlichen Sprache auszudrücken, z. B. dann, wenn er sich an ein kleineres Kind wenden müsste, um ihm zu erklären, was denn nun die Höhen eines Dreiecks sind, dann erhält man Informationen, die man zwar nicht naiv als eine genaue Beschreibung des (internen) mentalen Modells ansehen kann, die jedoch ziemlich persönlich und eingehend ausfallen werden.
Dies gilt für das - *nicht* zufällig ausgewählte Beispiel - , in dem ein Mädchen aus der zweiten Mittelschulklasse (Alter: 12 - 13 Jahre) die erwachsene Mutter spielt und ihrem siebenjährigen "Sohn" erklärt, warum Dreiecke drei Höhen haben:
Simona:
Mein Sohn, du kennst die Geometrie nicht; ich möchte dir aber erklären, was Höhe heißt. Wie du haben auch ich und Papa eine Höhe; man misst sie vom Kopf bis zu den Füßen. Auch die Dreiecke haben eine Höhe; diese Höhe misst man aber vom Scheitelpunkt (einem kleinen Punkt an der Spitze) bis zur Basis, die wie unsere Füße ist. Da nun die Dreiecke 3 kleine Spitzenpunkte haben, haben sie auch drei Höhen, denn sie haben unsere 3 Paar Füße. Und da wir nur einen einzigen Kopf und nur ein einziges Paar Füße haben, haben wir auch nur eine Höhe.

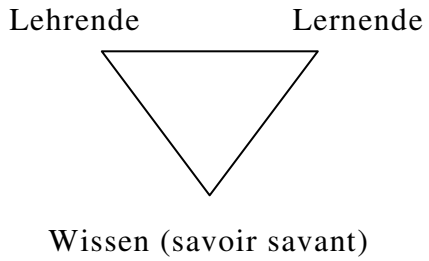
Nun ist keineswegs gesagt, dass das mentale Modell von Simona jenem Modell entspricht, das sie so gut mit Worten beschrieben hat; wenn man aber ein solches externes Modell in verbaler Form gewinnen will, dann erfordert das eine ganz erhebliche pädagogische Aufmerksamkeit und liefert uns viele Informationen zur Art und Weise, wie Simona sich eine kognitive Lösung vorgestellt hat, um dieses Modell zu akzeptieren (D'Amore, Sandri, 1996).
Zum Schluss werde ich mich darauf beschränken, die klassische Bibliografie anzugeben, denn es handelt sich um ein 'heißes', stark diskutiertes und sich weiterhin intensiv entwickelndes Thema.[56]

5. Das Dreieck: Lehrende, Lernende, Wissen

Die gesamte französische Lehrmeinung (und speziell Brousseau) betrachtet das Phänomen 'Lehren + Lernen' unter einem *systembezogenen* Aspekt und nicht als die gesonderte Untersuchung einer jeden seiner Komponenten. Unter diesem Blickwinkel wird in Arbeiten von Yves Chevallard seit 1982 ein Modell des *didaktischen Systems* zur Prüfung vorgestellt; es umfasst drei Komponenten:

[56] In meinem Buch *Problemi* (1993b) sind das gesamte Kapitel 12 und verschiedene Abschnitte in anderen Kapiteln diesen Themen gewidmet.

Lehrende, Lernende und Wissen (akademisches, offizielles, universitäres Wissen); man nennt es auch das *Dreieck der Didaktik*:



Es ist klar, dass der Lehrende in eine Reihe von extrem delikaten Beziehungen eingebunden ist. Auf der einen Seite *muss er eine didaktische Umsetzung des Wissens (das auf der Forschung beruht) in das vermittelte Wissen vornehmen (entsprechend der Praxis im Unterrichtsraum*, vom Lehrenden aus gesehen) (Chevallard, 1985).
In Wirklichkeit ist der Übergang erheblich komplexer, denn *er geht vom mathematischen Wissen über das zu lehrende Wissen bis zum vermittelten Wissen.*
Die didaktische Umsetzung besteht somit darin, ein Element des Wissens aus seinem (universitären, sozialen usw.) Kontext zu lösen und es in den stets einzigartigen und stets besonderen Kontext des eigenen Unterrichtsraums zu übertragen.
Bei dieser Arbeit steht der Lehrende niemals als isoliertes Individuum da. De fakto ist es das Kollektiv und die Institution, die das Schulwissen objektivieren und definieren, ebenso wie die zugehörigen Methoden und den rationalen Charakter.
Die didaktische Umsetzung erzeugt dann eine bestimmte Reihe von Wirkungen: Vereinfachung und Entdogmatisierung; Schaffung von Artefakten oder Erzeugung von völlig neuen Gegenständen.
In Wirklichkeit hat die Schule niemals reines Wissen gelehrt, sondern *Lehrinhalte*, also etwas, das es nur innerhalb der Schule gibt, und das üblicherweise weder im Produktionsbereich noch in der Kultur eine unmittelbare Entsprechung findet. Sobald ein Wissensbereich oder ein Begriff in einen Lehrplan Aufnahme finden, werden sie in massiver Weise umgeformt und ihrer Natur beraubt, um einen anderen Status zu finden; sie gehen zu einer anderen Logik und einer anderen Rationalität über.
Der Begriff der *didaktischen Umsetzung (transposition didactique)* scheint auch für die Zukunft sehr bedeutend zu sein, wenn man ihn als die Arbeit zur Angleichung und Umformung des Wissens zu einem Lehrgegenstand versteht, und zwar - wie ich schon sagte - entsprechend dem Ort, dem Publikum und den vorliegenden didaktischen Zielsetzungen.
Auf der anderen Seite muss der Lehrende jedoch das didaktische System sowie das soziale und kulturelle Umfeld berücksichtigen, also die *Noosphäre*, in der er zu handeln hat.
Als Noosphäre kann man den Ort der Diskussionen über bedeutende Vorstellungen zum Unterricht verstehen, sowie zu den Zielsetzungen der Schule, den Zwecken der Ausbildung, den Erwartungen der Gesellschaft im

Hinblick auf Schule und Kultur (Beispiel: die Lehrpläne); die Noosphäre ist die Vermittlerin zwischen dem Schulsystem (und den Entscheidungen des Lehrenden) und dem sozialen Umfeld im weitesten Sinne (außerhalb der Schule); man könnte die Noosphäre als den "äußeren Mantel bezeichnen, der sämtliche Personen beinhaltet, die in der Gesellschaft über die Inhalte und Methoden des Lehrens nachdenken" (Godino 1993).
Es gibt auch eine Beziehung zwischen der Noosphäre und dem *contrat didactique*, da einige Klauseln dieses Vertrags sicherlich in direkter Form durch das Umfeld beeinflusst werden, in dem man tätig ist.
Zu diesem wichtigen Thema möchte ich mich jedoch auf die vorstehenden kurzen Hinweise beschränken.

6. Kognitiver Stil und pädagogische Profile

In seinem berühmten Buch *Les profils pédagogiques* behauptet Antoine De La Garanderie (1980), dass es bei verschiedenen Personen unterschiedliche Formen der Evokation - durch die Erinnerung - im Hinblick auf eine Vorstellung oder ein mentales Bild gibt; einige sind "von ihrer Natur her" *visuell*, andere sind *auditiv*. Er bezeichnet dies als *pädagogische Muttersprache* und schlägt vor, *kognitive Gewohnheiten* zu definieren und Verwendungsfrequenzen zu messen (zum Beispiel im Klassenraum), um schließlich eine Typologie aufzustellen. Sodann unterscheidet er zwischen vier Parametern zur Charakterisierung der geistigen Vorgänge: zwei "einfache" [Evozieren von Dingen und Worten] und zwei "komplexe" [Evozieren von Beziehungen; Evozieren von Vorwegnahmen, oder erfinderisches Evozieren (visuell oder auditiv)]. Die Kombinationen dieser verschiedenen Parameter und der Grad der Beherrschung dieser Parameter gestatten es ihm, sechs kognitive Modelle zu definieren, die er als *kognitive Profile* bezeichnet.
Dies führt zur Vorstellung des *kognitiven Stils*, bei dem es sich meiner Meinung nach jedoch um eine erheblich umfassendere Frage handelt. Unbeschadet des Umstandes, dass es dabei um die Gesamtmenge der persönlichen Merkmale geht, über die jeder Mensch verfügt und die er im (bewussten oder nicht bewussten) Vorgang des Erlernens einsetzt, hängen sie nicht nur von "natürlichen" Gegebenheiten ab, sondern auch von vorübergehenden Befindlichkeiten, von der Bereitschaft, vom Interesse, der Motivation, usw.
Ich meine, dass nicht von ungefähr die Mathematik häufig unter den von De La Garanderie bevorzugten Analysebeispielen auftaucht. Die Modalitäten des Erlernens der Mathematik sind sicherlich stark an individuelle Faktoren gebunden, aber auch an die Stabilität und Labilität des Augenblicks, da unser Fach - vielleicht noch stärker als andere Fächer - Aufmerksamkeit und Konzentration erfordert.
Aber ich möchte hier auf eine weitere Vertiefung verzichten, denn man würde dadurch unvermeidbar zu tiefreichenden Problemen gelangen, die die didaktischen Modelle, die Modellbildungen der Lernvorgänge und daher die Typologie der geistigen Vorgänge betreffen (Meirieu, 1987).

7. Hindernisse

Es ist nicht einfach, Begriffe zu bilden; denn jeder Begriff - auch wenn er einfach zu sein scheint - wird von einem fluktuierenden und komplexen Umfeld aus assoziativen Darstellungen umgeben, die zu vielfältigen Ebenem der Formulierung und unterschiedlichen Niveaus einer Einbindung des Begriffs führen (Giordan, De Vecchi, 1987).
Das erste Problem besteht also darin, den Begriff von diesem 'Halo' zu säubern, der die eigentliche Bedeutung zu verbergen scheint. Und dann ist an die *Hindernisse* zu denken, die sich vor den Lernvorgang schieben; dieser Gedanke wurde zum ersten Male durch G. Brousseau im Jahre 1983 vorgeschlagen, wobei er den entsprechenden Begriff aus philosophischen Untersuchungen von Gaston Bachelard entliehen hatte.
Wir wollen sehen, worum es hier geht: ein Hindernis ist eine Vorstellung, die zum Zeitpunkt der Herausbildung des Begriffs effizient gewesen war, um frühere Probleme (auch rein kognitiver Art) und Aufgaben zu lösen, der sich jedoch dann als Katastrophe erweist, wenn man versucht, ihn auf eine neue Problemstellung[57] anzuwenden. Auf Grund des eingetretenen Erfolgs (oder sogar: in noch stärkerem Maße auf Grund des Erfolgs) neigt man dazu, die schon erworbene und gefestigte Vorstellung beizubehalten, und man versucht, sie trotz des Fehlschlags zu retten; dadurch entsteht jedoch eine Barriere, die nachfolgende Lernvorgänge behindert.
Der Verfaser unterscheidet drei Typen von Hindernissen:
- Hindernisse ontogenetischer Art
- Hindernisse didaktischer Art
- Hindernisse epistemologischer Art.

Jede lernende Person entwickelt Fähigkeiten und Kenntnisse, die ihrem geistigen Alter angemessen sind (wobei sich das geistige Alter vom chronologischen Alter unterscheiden kann), die also für Mittel und Ziele des jeweiligen Alters angemessen sind; im Hinblick auf den Erwerb bestimmter Begriffe können diese Fähigkeiten und Kenntnisse unzureichend sein, und zwar in Anbetracht eines bestimmten didaktischen Projekts des Lehrenden, und sie können daher Hindernisse *ontogenetischer Art* darstellen (der Lernende könnte neurophysiologische Beschränkungen aufweisen, die z.B. nur auf sein chronologisches Alter zurückzuführen sind).
So zum Beispiel ist jeder Versuch zum Scheitern verurteilt, Beweise in der zweiten oder dritten Mittelschulklasse einzuführen (Alter der Lernenden: 12 bis 14 Jahre), wenn der Lehrsatz des Pythagoras vorgestellt wird; denn dies zwingt die Lehrenden dazu, den "Beweis in Form einer *demonstratio*" durch einen zuweilen konkreten "Nachweis" (ein Vorzeigen) zu ersetzen. Im allgemeinen wird davon ausgegangen, dass dieses Scheitern auf das Alter der Lernenden und auf ihre noch unreife Kritikfähigkeit zurückzuführen sei.

[57] Anm. d. Übers.: Das italienische Wort "problema" bedeutet sowohl 'Problem' wie auch 'Rechenaufgabe'.

Ein weiteres Beispiel: zum Scheitern ist der Versuch verurteilt, in der Grundschule das logische Bindeglied "Implikation" (wenn A, dann B) einzuführen, und zwar aus den gleichen Gründen.

Jeder Lehrende wählt ein Projekt, einen Lehrplan, eine Methode; er interpretiert in persönlicher Form die didaktische Umsetzung, gemäß seinen eigenen wissenschaftlichen und didaktischen Überzeugungen; er glaubt an seine Wahl und stellt sie der Klasse vor, weil er sie für effizient hält; aber das, was tatsächlich für einige Lernende effizient sein wird, ist es nicht unbedingt auch für den Rest der Klasse. Für diese *anderen Lernenden erweist sich die Wahl dieses Projekts als ein didaktisches Hindernis.*
Ein Beispiel für ein didaktisches Hindernis ist die Präsentation von Seiten einiger Lehrender der Grundschule, wenn die unendlichen Gegenstände vorgestellt werden: das Segment als unendlich viele Punkte, die Gerade als unbegrenzte Figur. In den Schulen ist jenes Modell am weitesten verbreitet, das das Segment als eine Perlenkette darstellt; auf Grund seiner Unmittelbarkeit wird dieses Modell von den Lernenden sofort akzeptiert und wird zu einem intuitiven Modell; natürlich stellt es ein didaktisches Hindernis dar, wenn die Idee der Dichte in der Grundschule und - noch ausgeprägter - in der Mittelschule eingeführt werden soll, oder wenn der Gedanke der Stetigkeit in der Höheren Schule auftaucht. Eingehende Untersuchungen haben umfassend nachgewiesen, dass die älteren Lernenden (letztes Jahr der Höheren Schule und Anfangsjahre der Universität) nicht in der Lage sind, den Begriff der Stetigkeit zu beherrschen, und zwar gerade wegen des weiterhin bestehenden intuitiven Modells des Segments als einer Perlenkette. Soweit es die Gerade als unbegrenzte Figur betrifft, so scheinen die Gerade selbst sowie die fortgesetzte Zählung der natürlichen Zahlen die Lernenden in die Lage zu versetzen, das Unendliche nur als Möglichkeit (*in potentia*) zu sehen, aber nicht als Wirklichkeit (*in actu*); auch dies führt zu schwerwiegenden didaktischen Hindernissen während des nachfolgenden Unterrichts.

Jedes Thema mit mathematischem Charakter weist einen eigenen epistemologischen Status auf, der von der Geschichte seiner Entwicklung innerhalb der Mathematik abhängt, ebenso wie von seiner kritischen Übernahme im Bereich der Mathematik, sowie von den Vorbehalten, die für das Thema spezifisch sind, von der Sprache, in der es ausgedrückt wird oder die es benötigt, um sich ausdrücken lassen zu
können.
Wenn innerhalb der Geschichte der Entwicklung eines Begriffs eine Unterbrechung der Kontinuität, ein Bruch oder radikale Änderungen der Auffassung auftreten, dann lässt sich vermuten, das dieser Begriff in seinem Inneren Hindernisse epistemologischer Art verbirgt, die das Erlernen behindern; dies äußert sich zum Beispiel in immer wiederkehrenden und typischen Fehlern verschiedener Lernender in verschiedenen Klassen, sofern sie über die Jahre jeweils Stabilität aufweisen.
So stellt das mathematisch Unendliche sicherlich ein epistemologisches Hindernis dar; man braucht nur die Geschichte dieses Begriffs im Rahmen der Mathematik nachzuzeichnen, um auf die Kämpfe, die Diskussionen und die

Brüche zu stoßen, die schließlich zur Akzeptierung dieses Begriffs führten, seit Zenon aus Elea (5. - 6. Jahrhundert vor Christus) seine berühmten *Paradoxa* einführte, bis zur durch Aristoteles aus Stagyra (3. Jahrhundert vor Christus) ausgesprochenen Verurteilung des Unendlichen *in actu*, und schließlich bis zu seiner vollständigen Übernahme dank des Wirkens von Georg Cantor (Wende vom 19. zum 20. Jhdt.). In didaktischer Hinsicht wurde diese Angelegenheit umfassend im internationalen Rahmen untersucht.
Auch die Zahl Null stellt ein epistemologisches Hindernis dar; sie fehlte bei fast allen Völkern der Antike, unter Einschluss der Griechen und Römer, und sie taucht erst im 6. Jahrhundert nach Christus in Indien auf; ihre Bekanntmachung erfolgte über die arabische Welt ab dem 9. Jahrhundert; die Präsenz dieses Begriffs in europäischen Werken aus dem 13. und 14. Jahrhundert wurde jedoch stark durch erbitterte Kämpfe behindert. Eine uneingeschränkte Zustimmung zur Null als einer Zahl im eigentlichen Sinne erfolgte erst spät, vielleicht erst im 16. Jahrhundert. In didaktischer Hinsicht ist bekannt, dass der Lernende die Null als eine "besondere" Zahl ansieht und sie nur schwer beherrscht.
Die ganzen Zahlen, die ein Vorzeichen aufweisen und in der Schule als "relativ" bezeichnet werden, tauchen erst im sechsten Jahrhundert nach Christus in Indien auf; ihre Geschichte ist mit dem Werdegang der Null vergleichbar, wird jedoch stärker behindert und führt noch später zum Erfolg. Es ist sicherlich überflüssig, daran zu erinnern, dass in didaktischer Hinsicht es auf Seiten der Lernenden viele Schwierigkeiten gibt, sich hinsichtlich der Funktionsweise dieser Zahlen Rechenschaft abzulegen. Ein klassisches Beispiel ist die merkwürdige Tatsache, dass das Produkt zweier negativer Zahlen positiv ist.

Um zusammenzufassen: das ontogenetische Hindernis hängt mit dem Lernenden und seiner Reife (in vielerlei Hinsicht) zusammen, das didaktische mit der strategischen Wahl des Lehrenden, und das epistemologische Hindernis mit der Art des Themas selbst.

Wann und aus Anlass welcher mathematischer Gedanken könnte mit Wahrscheinlichkeit ein epistemologisches Hindernis auftreten?

* Fast sicher wird ein epistemologisches Hindernis bei jenen Vorstellungen auftreten, bei denen die historische Analyse einen Bruch, einen plötzlichen Umschlag, eine Nicht-Kontinuität der historisch-kritischen Entwicklung dieser Vorstellung offenbart;
* Ein epistemologisches Hindernis wird im Zusammenhang mit einer Vorstellung vorliegen, wenn ein bestimmter Fehler mehr oder weniger in gleicher Art im Zusammenhang mit der Vorstellung wiederholt auftritt.
Die Suche nach Hindernissen ist jeweils gleichzeitig - und diese Verbindung ist äußerst interessant - durchzuführen, und zwar:
* in der Schule, in der didaktischen Praxis; und:
* bei der Untersuchung der Geschichte der Mathematik,
wobei beide Forschungen miteinander zu verbinden sind.

Von größtem Interesse ist die Position, derzufolge - siehe hierzu Federigo Enriques (1942) [58] - der Fehler "weder dem logischen Vermögen noch der Intuition angehört, [sondern] in dem schwierigen Augenblick ihrer Verbindung entsteht".
Der Fehler ist daher nicht notwendigerweise nur die Frucht der Unwissenheit, sondern er könnte auch das Ergebnis eines früheren Wissens sein, eines Wissens, das erfolgreich gewesen war, und das zu positiven Ergebnissen geführt hatte, das jedoch nicht mehr standhält, wenn man es mit triftigeren oder allgemeineren Umständen konfrontiert.
Daher geht es nicht immer um einen Fehler unbekannten Ursprungs - also um einen nicht vorherzusehenden Fehler - , sondern um das Offenbarwerden von Hindernissen in der weiter oben angesprochenen Bedeutung. Diese Erwägungen haben die Forschungen zur Didaktik der Mathematik dazu geführt, den Fehler und seine Rolle vollkommen anders als die übliche Praxis neu zu bewerten.

Derartige Untersuchungen sind äußerst faszinierend und haben schon zu interessanten Ergebnissen geführt; an dieser Stelle muss ich sie nun aber leider übergehen.

Bibliographie:

Aglì F. D'Amore B. (1955) *L'educazione matematica nella scuola dell'infanzia.* Milano, Juvenilia	*Die mathematische Erziehung in der Grundschule*
Baruk S. (1985) *L'âge du capitaine.* Paris, Seuil	*Das Alter des Kapitäns*
Billio R., Bortot S., Caccamo I. Giampieretti M., Lorenzoni C. Rubino R. Tripodi M. (1993) Sul problema degli ostacoli intuitivi nell'uso dell'addizione. *La matematica e la sua didattica.* 4, 368 - 386	Das Problem der intuitiven Hindernisse bei dem Gebrauch der Addition
Brousseau G. (1983). Obstacles Epistémologiqes en Mathématiques. *Recherches en Didactiques des*	Epistemologische Hindernisse in der Mathematik

[58] Um diesen Artikel in der Literatur zu finden, muss man nach dem Autor Adriano Giovannini suchen, also dem Pseudonym, das Enriques unter dem faschistischen Regime annehmen musste, um sich den Rassenverfolgungen zu entziehen, und vor allem, um weiterhin - entgegen dem Verbot - publizieren zu können. Man findet dann den entsprechenden Hinweis (Giovannini 1942).

Mathématiques Band 4.2, 165 - 198 Aber die philosophischen Grundlagen dieser Vorstellung lassen sich sicherlich auf G. Bachelard zurückführen: *La formation de l'esprit scientifique* 1938	*Die Entstehung des wissenschaftlichen Geistes*
Brousseau G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactiques des Mathématiques* 7, 2, 33 - 115	Grundlagen und Methoden der Didaktik der Mathematik
Chevallard Y. (1985) *La transposition didactique - du savoir savant au savoir enseigné* Grenoble, La Pensée Sauvage	*Die didaktische Umsetzung - vom gelehrten Wissen zu dem im Unterricht vermittelten Wissen*
Chevallard Y., Joshua M. - A. (1982) Un exemple d'analyse de la transposition didactique: la notion de distance. *Recherches en Didactiques des Mathématiques* 3, 1, 159 - 239	Ein Analysebeispiel für didaktische Umsetzungen: der Begriff des Abstandes
D'Amore B. (1993a) Il problema del pastore *La vita scolastica* 2, 14 - 16 Firenze: Giunti	Die Schäfer-Aufgabe
D'Amore B. (1993 b) *Problemi - Pedagogia e psicologia della matematica nell'attività di problem solving* Milano: Angeli Zweite italienische Auflage: 1996 [Ausgabe in spanischer Sprache: Madrid, Sintesis, 1996.]	*Probleme und Aufgaben - Pädagogik und Psychologie der Mathematik bei der Lösung von Aufgaben*
D'Amore B. (1999) *Elementi di Didattica della matematica* Bologna: Pitagora	*Elemente der Didaktik der Mathematik*
D'Amore B. (2001): *Didattica della matematica*	

Bologna: Pitagora	*Didaktik der Mathematik*
D'Amore B. Franchini D. Gabellini G. Mancini M., Masi F., Matteucci A., Pascucci N., Sandri P. (1995): La ri-formulazione dei testi dei problemi scolastici standard *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate* 18A - 2 - 131-146	Die Neuformulierung der Texte von Standard-Schulaufgaben
D'Amore B, Martini B. (1997): Contratto didattico, modelli mentali e modelli intuitivi nella risoluzione di problemi scolastici standard *La matematica e la sua didattica* 2, 150 - 175, Bologna: Pitagora	Contrat didactique, mentale Modelle und intuitive Modelle bei der Lösung von Standard-Schulaufgaben
D'Amore B., Sandri P. (1993). Una classificazione dei problemi cosiddetti impossibili. *La matematica e la sua didattica* 3, 348 - 353, Bologna: Pitagora Nachdruck in: A. Gagatsis (Herausgeber): *Didactiché ton Mathematicon* Erasmus ICP 93 G 2011/II Thessaloniki 1994. In griechischer Sprache: 247-252; in französischer Sprache: 579-584.	Eine Klassifizierung der so genannten unmöglichen Aufgaben
D'Amore B., Sandri P. (1998) Risposte degli allievi a problemi di tipo scolastico standard con un dato mancante. *La matematica e la sua didattica* 1, 4 - 18, Bologna: Pitagora Französische Übersetzung in: *Scientia Paedagogica Experimentalis* Belgien, XXXV, 1, 1999, 55-94.	Antworten der Lernenden auf Standard-Schulaufgaben mit einer fehlenden Angabe
D'Amore B., Sandri P. (1996) Fa' finta di essere ... Indagine sull'uso della lingua comune in contesto matematico nella scuola media. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate* 19A - 3 - 223-246	Stell dir vor, du wärst ... Untersuchung zur Verwendung der Gemeinsprache im mathematischen Kontext der Mittelschule
De La Garanderie A. (1980)	

Les profils pédagogiques Paris: Le Centurion	
Deri M., Sainati Nello M., Sciolis Marino M. (1983) Il ruolo dei modelli primitivi per la moltiplicazione e la divisione. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate* 6- 6 - 6-27	*Die pädagogischen Profile* Die Rolle der primitiven Modelle bei der Multiplikation und der Division
Filloux J. (1973) *Positions de l'enseignant et de l'enseigné* Paris: Dunod	
Fischbein E. (1985) Ostacoli intuitivi nella risoluzione di problemi aritmetici elementari. In: L. Chini Artusi (Herausgeber): *Numeri e operazioni nella scuola di base* Bologna: Zanichelli, 122-132	*Positionen des Lehrenden und des Lernenden* Intuitive Hindernisse bei der Lösung elementarer Rechenaufgaben
Fischbein E. (1992): Intuizione e dimostrazione In: E. Fischbein - G. Vergnaud *Matematica a scuola: teorie ed esperienze* A cura di B. D'Amore Bologna: Pitagora; 1-24	*Zahlen und Rechenoperationen in der Grundschule* Intuition und Beweis
Giordan A., De Vecchi G. (1987) *Les origines du savoir* Delachaux et Niestlé Seite 178	*Mathematik in der Schule: Theorien und Erfahrungen*
Giovannini A. (Enriques F.) (1942) L'errore nelle matematiche *Periodico di matematiche* IV, XXII	*Die Ursprünge des Wissens*
Godino J. D. (1993) La metafora ecologica en el estudio de la noosfera matematica *Quadrante 2, 2, 69-79*	Der Fehler in der Mathematik
Meirieu P. (1987) *Apprendre ... oui, mais comment?* Paris: ESF	Die Öko-Metapher bei der Untersuchung der mathematischen

Schoenfeld A. H. (1987a): What's all the fuss about metacognition? In: Schoenfeld A. H. (Herausgeber) (1987b) 189.215	Noosphäre *Lernen ... natürlich; aber wie?*
Schoenfeld A. H. (Herausgeber) (1987b) *Cognitive science and mathematics education* Hillsdale (N.J.): Lawrence Erlbaum Ass.	Was soll das ganze Gerede über die Metakognition?
Vergnaud G. (1982) A classification of cognitive tasks and operations of thought involved in addition and subtraction problems. In: Carpenter T. P., Moser J. M., Romberg T. A. (Herausgeber): 39.59.	*Kognitive Wissenschaft und Erziehung zur Mathematik* Eine Klassifizierung der kognitiven Aufgaben und Denkvorgänge bei Additions- und Subtraktionsaufgaben.

D'Amore B. (2005). Secondary school students' mathematical argumentation and Indian logic (nyaya). *For the learning of mathematics*. 25, 2, 26-32.

Secondary school students' Mathematical Argumentation and Indian Logic (*nyaya*)

Bruno D'Amore

This article is based on observations of young high school students' "failures" in demonstrative processes, at least with respect to the teacher's "expectations".

Recently various authors have made contributions to the study of the complex phenomenon of learning of demonstration (see Bachaleff, 2004 for an important presentation of the characteristics of various recent research studies in this field). The positions vary significantly, from more formalist (Duval, 1991, 1992-93; Duval, Egret, 1993) to quasi-empirical, at the manner of Lakatos (Hanna, Janke, 1996). The same terminology gives rise to different interpretations. "Proof" in English and "demonstration" in French express different meanings, such that some researchers prefer to call a demonstration a "mathematical proof". For a more detailed examination of the question, see Balacheff (2004) and the relevant bibliography.

Several other works have shown the huge difficulties that students encounter in using quantification, even solely in regard to geometry (e.g. Durand-Guerrier, 1999). Blaise Pascal (1656/1985), in referring to what we now would call quantification, also noticed that we tend to anchor reasoning to general examples in proofs. The common logical framework in these situations is the propositional calculus and the initial elements of first-order predicate calculus (Durand-Guerrier and Arsac, 2003)

Over a long period of time, I have been observing students involved in demonstrating theorems. These were intended as involving individual activity but were carried out within a classroom setting and were therefore able to be considered as a social activity. I noticed that, although there were many typologies of more or less spontaneous behaviour presented to satisfy the teacher's request (i.e. a pattern more or less bound to Aristotelian or Megarian–Stoic logic), some students' demonstrative modality could have been thought about in a different way from the one expected by the teacher. This modality highlights certain factors, such as the use of examples or the preliminary enunciation of the thesis, etc., and brought clearly to mind quite a different kind of logic. The *nyaya* approach described in this article shows that other cultures have produced intellectual mechanisms of "truth" generalization and predication different from Aristotle's logic. For references to nyaya see, for example, Needham (1959), D'Amore, Matteuzzi (1976) or, more recently, Sarma (2005), Sarukkai (2005).

In consequence, both the idea of collecting evidence of the unaware use of this logic, along with an analytic perspective, gave rise to this article. In section 1, I introduce the basic elements of this logic; in sections 2 – 4, I present three "cases" that I consider illustrative; in section 5, I present some remarks of a didactic character.

I explicitly want to emphasise that my purpose here is not to substitute one logical model for another in school education. From the explorations I have conducted and relate here, it emerges that, in order to reason properly, students have a strong tendency to use particular cases in order to "read" and "see" the general in them. There is

evidence of a dialectic between generalisation (or abstraction) and concretisation (or specialisation) that must necessarily be taken into account while teaching.
Even after this piece of research, I do not believe that these students think in exact accordance with *nyaya* logic. Nevertheless, having recourse to this logic for the analysis of students' mathematical reasoning highlights the fact that any didactic analysis presupposes, in one way or an another, a frame of reference: several logical frames are possible to account for the students' deductive behaviour. An interesting result of this work is that each interpretation of deduction presupposes a logical frame of reference and that deviant behaviour is so judged only relative to the particular frame of reference considered.

1. An outline of some characteristics of the *nyaya* philosophical school

Although European syllabi seldom take into account the study of oriental philosophies, I believe it is fairly well known that in India a philosophical doctrine called *nyaya* (in Sanskrit) opposed the classic Buddhist school. (*Nyaya* literally means "logic", so it is redundant to call the logic of that school nyaya.). Unlike Buddhist philosophy, *nyaya* considered rational speculation to comprise a fundamental basis for a coherent doctrine of knowledge, coming close to what we would now call deductive logic, relinquished by Buddhist philosophy.
The basis of the *nyaya* school was empiricism: as we shall see, such logic was consequently quite different from the Greek Aristotelian model that prevailed throughout the Western world at the time. Among other things, Aristotelian logic also shaped, in a form that still persists today, the way of handling mathematical demonstration. However, while this is certainly true at an academic level, it is not so for young students at school. [1]
By denying a transcendent principle of the universe (typical of many Indian doctrines), *nyaya* built an atomistic physics, within a realistic mould, that supported the existence of nine primordial substances and a system of sixteen objective categories immanent within the real. Its gnosiology was based on a unity between purely sensory knowledge (relative to the external world) and the conversational one (relative to no matter which communicative language). The *nyaya* doctrine thus acknowledged a form of existence where communicable concepts are also real entities.
The *nyaya* school claimed the hegemony of four means of gaining knowledge (*pramana*):

- witness/testimony;
- analogy;
- perception;
- inference.

I will examine each of these concepts in detail.
Witness (*sabda*) deals with what is reliable from handed-down communication, written or oral. This would include such things as God's revelations, handed-down history, prayers and sacred poems.
Analogy (*upamana*, also translated as "comparison" or "equivalence") is the way of reasoning that defines an object in terms of resemblance to others. Note that *nyaya* analogy classifies objects according to categories or classes of analogues, distinguishing

between two classes on the basis that they do not have analogous terms. Since an analogy between existing objects depends on considerations regarding the object itself (and therefore these are not abstract considerations but classificatory and experimental ones), this form of knowledge relates to some present-day concepts also found in mathematics. We could refer to geometry, with its closely related type and proximal genus and specific differences in definitions. Or we could mention more developed ones here, so-called analytic definitions that characterise a class of objects through the quotient construction: in other words, by means of an equivalence relation.

Perception (*pratyaska*) is the relation between the visible (that which we see with eyes) – or at least with the senses (a relation that is produced by the contact of the sensory organ with the object) – and the image we have of that object. I avoid considerations regarding the six senses that *nyaya* philosophers attributed to human beings, highlighting instead the importance ascribed to the sixth sense, the intellect (*manas*), because of the regulating and mediating function this "organ" has, with respect to the other five. According to *nyaya* philosophy, communicable concepts acquire their own reality in contrast with Buddhism that assigns them the role of a sheer mental image.

Finally, I consider inference (*anumana*) that in the *nyaya* school represents the sublime stage. The *nyaya syllogism* (so called because its form is apparently similar to the Aristotelian one) is not widely known. *Nyaya* distinguished five assertive elements in its syllogism (compared with three in an Aristotelian syllogism):

- the statement (*pratijna*) (not proved; the enunciation we want to prove);
- the reason (*hetu*);
- the general proposition or enunciation (*udaharana*), followed by an example;
- the application (*upanaya*), also called the second statement;
- the conclusion (*nigamana*)

The following example is a classic nyaya (as well as Socrates's pseudo-syllogism for Aristotelian logic):

1. object A moves (statement);
2. because of a force applied to it (reason);
3. whenever we apply a force to an object, the object moves (general proposition); for example: if oxen pull a cart, the cart moves (example);
4. a force is applied to object A (application);

therefore:

5. object A moves (conclusion).

It is relatively easy to put this reasoning into symbolic form, given here as an exercise. Before I proceed to do so, here is a convenient formalism.

Let A, B be given objects, and X a general object;

P(X): the open predicate statement, "X moves";

F(X): "a force is applied to X".

The open statement F(x) is always true if F(A) is experimentally verifiable whenever we replace the variable X with a constant A (this means that we experience its truth through our senses, at least according to *nyaya*'s empiricist interpretation).

Nyaya's syllogism can be formally interpreted as follows:

Statement:	1.	$P(A)$	unproved statement
Reason:	2.	$F(A)$	cause for P(A)
Thesis:	3.	$(\forall X)\ [F(X) \rightarrow P(X)]$	general proposition
		$F(B) \rightarrow P(B)$	example

Application: we	4.	F(A)	from the general case, we return to the case we are studying: a force exerts an action on A
Conclusion:	5.	P(A)	A moves

Classic Buddhist critics argues against the first and the second steps, because they do not belong to true reasoning but can nonetheless be included in the thesis. In any event, I would like to emphasise that this is frequently carried out in our common way of reasoning: for example, in didactic action. We point out the final object of the proof right from the beginning: otherwise, it would be impossible to organise exactly *that* kind of reasoning. I shall return to this issue later on.

Buddhists wrongly refused the fifth step, a sort of *modus ponens* extended to predicate calculus, a logically correct and essential operation for that type of syllogism. The relative formal linguistic expression is:

$\{(\forall X)\ [(F(X)\rightarrow P(X)]\ \wedge F(X)]\ \rightarrow\ P(X)\}\ \rightarrow\ \{[(F(A)\rightarrow P(A))\ \wedge\ F(A)]\ \rightarrow P(A)\}$

The logical analysis of language, related to the close connection assigned to the dichotomous language-object of thought, leads to an exact language criticism similar to that of rhetoric in modern times.

According to *nyaya*, the enemies of correct deduction and speaking are:

- ambiguity (*chala*), resulting from an improper use of a term (i.e. a wrong use of analogy);
- unfinished thinking (*jati*), looped speech without content;
- absurd arguments (*nigrahastama*), adopted by someone without logic: his fate is to be defeated dialectically by someone who operates with logic and rational arguments.

Nyaya philosophers studied the instances in which their syllogisms led to sophisms. Here are the principal cases of this harmful reduction:

- an incorrect correspondence between the syllogism's constituent parts, therefore there is no relationship between terms;
- an intrinsic absurdity that appears in a term stating the opposite that it should affirm;
- an explicit absurdity due to the contrast between two terms of the syllogism that exclude each other;
- the lack of a proof or a test of one of the terms supporting the reasoning;
- the falsity of the major term, the non-existence of the object [2] we are referring to or the attribution of false properties to it.

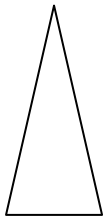
It is evident how *nyaya* differs from the Aristotelian logic, since its arguments are based upon empirical tests and on contact with the external world. [3] *Nyaya* regards as the external world not only objects and facts but also thoughts considered as real entities (I use the word "real" and not "existing" to avoid any comparison with Platonism).

The current distinction between propositional logic and predicate logic fails to acknowledge the actual historical development of the discipline. Propositional/enunciative logic was not as prominent in Aristotle's works as it is in those of contemporary logicians. It derives from the studies of Megarian and Stoic philosophers and, paradoxically, established itself later, whereas predicate logic is essential to the understanding of Aristotle's syllogistic from a modern point of view. In the classroom, in high school logic lessons, teachers mainly use propositional logic and

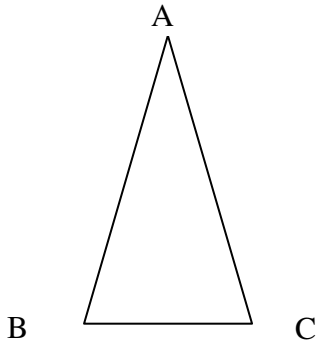
they try to apply it, as an illustation, to geometrical proofs, although it is not always nor completely suitable. For example, such proofs often require quantifying over variables, an action that does not make sense in propositional logic.
An in-depth analysis of the manners of reasoning and their logical modelling both by experts (mathematicians, university teachers) and by university students (first year) can be found in the work of Durand-Guerrier and Arsac (2003). Among others things, the authors indicate different conceptions of the use of and need for quantifiers in proofs, by both experts and students.

2. Classroom arguments and proofs: the case of Filippo

For various reasons the three examples I propose do not always correspond perfectly to the nyaya logic, although they are very similar. What in my opinion is particularly interesting is to study the logic that the students employ in the face of the demonstration, since this can often prove to be a logic quite different from that of Aristotle. Three examples of this follow.
I would like to highlight the role of reasoning in the case of Filippo, a fourteen-year-old student, faced with the following exercise (written on a sheet of paper given to him). Filippo's responses were videotaped: in the transcript, I add in square brackets what he did.
Prove that if a triangle has two congruent sides then it also has two congruent angles.
Filippo draws a scalene triangle and then erases it. After that, he draws an isosceles triangle with the side different from the other two as a base, i.e. parallel to the short side of the page nearest to him.

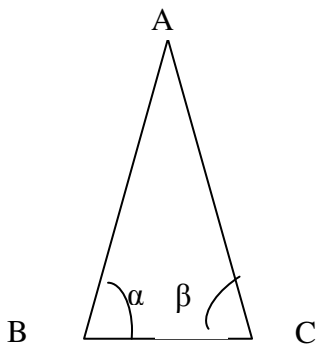


At this point, he puts letters on the vertices:



During this activity, he utters an unintelligible sound as if he were concentrating.

Then he looks at the researcher and asks him:
F: Do I have to I put in the angles?
R: What do you mean?
F: Do I have to write them?
It is clear what he is trying to say but I pretend not to understand.
R: Do what you consider correct.
Filippo then adds the names of the base angles to the drawing.



Filippo looks at the researcher satisfied, looking for approval.
R: Go ahead.
Filippo carefully reads the piece of paper where the text of the assignment is written, looking at his drawing now and then. Then he exclaims:
F: Alpha is equal to beta. Yes, alpha [he indicates it with the point of the pencil] is equal to beta [he indicates this second angle now with the point of the pencil].
Then he looks at the researcher.
R: Is it what you want to prove or where you start from?
Filippo remains silent. He reads the text again, looks at the drawing, reads the text again and says:
F: No, no, I don't start from here; this is what you are asking me.
R: So?
F: I know that AB is equal to AC; here [he points with the point of the pencil to the two sides on the drawing, sliding the pencil precisely over both sides]. These two are equal.
The researcher keeps quiet.
F: If these two are equal [he points to the sides, but only touching a single point on each of them with the pencil] and also these must be necessarily equal [similarly indicating a point inside each angle], well then the angles must be equal.
R: Ah, yes?
F: How can it not be so? It must be like this, if AB is 3 and AC is 3, then alpha and beta will be, let's say, 60.
R: Why 60 degrees? Couldn't they be 40 degrees?
F: Yes, I believe. 60 degrees just came out, but I believe it could be anything [he refers to the amplitude].
Filippo looks at the researcher as if he has concluded the exercise.
R: So? Can we conclude the exercise? What can you affirm?
F: I believe that whenever the sides are equal, also these two angles here, the ones on the bottom [he touches the two angles with the point of the pencil] must be equal. Therefore, I believe it is like this, what I said is correct. The two sides here of the

triangle [and he touches inside the triangle] are certainly equal and therefore also the angles, or not?

If we examine Filippo's argumentative-demonstrative behaviour, he follows almost exactly the steps outlined by *nyaya* philosophers:

1.	Alpha is equal to beta. Yes, alpha is equal to beta.	P(A)
2.	I know that AB is equal to AC; here, these two are equal.	F(A)
3.	If these two are equal, also these, well the angles must be equal.	$(\forall X)[F(X) \rightarrow P(X)]$
	If AB is 3 and AC is 3, then alpha and beta will be, let's say 60.	Example
4.	The two sides here of the triangle are certainly equal	F(A)
5.	and therefore also the angles [are equal].	P(A)

Indeed, Filippo did *not* prove the proposed theorem, but he argued as if the implication (AB = AC implies angle B = angle C) for granted. I am not examining here the correctness of the assignment's development: I am examining Filippo's *spontaneous* behaviour in coping with the task. His main concern was not to carry out the Euclidean proof, but to convince himself (or the researcher) that the assignment's written text corresponded to reality.

In truth, Filippo's argument is only one instance taken from about ten interviews verifying this idea: *that students' argumentative– demonstrative behaviour in spontaneous situations is sometimes empirically closer to nyaya rather than to Aristotelian or Stoic–Megarian logic*.

Among all the interviewed students (fifteen- and sixteen-year-old students), Filippo provides one of the clearest examples, because, in my opinion, he goes through all the *nyaya* steps. But many other students tend to behave in this way, even if the more academic (D'Amore, 1999) ones are less inclined to follow such spontaneous behaviour. They try, at least at the beginning, to extend sides AB and AC somehow or to draw segments, etc., according to what they remember having seen or done in the past. But, in a more or less evident and recognisable way, many students follow the *nyaya* steps, looking for an example at step 3 or being satisfied merely by a drawing without necessarily displaying measurements, as in Filippo's example.

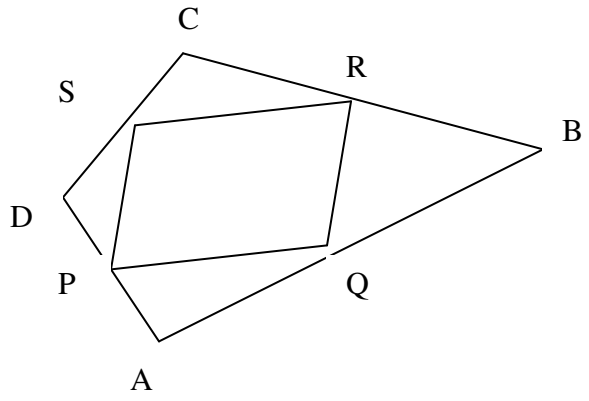
In the next two sections, I analyse two further examples.

3. Giada's "double" example

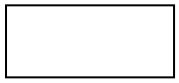
Giada, fifteen years old, is in ninth grade and considered to be "gifted" in mathematics by her teacher. I offer the following proof (taken from her textbook exercises):

Given the quadrilateral ABCD, PQRS are the mid-points of its sides; join these points; prove that the quadrilateral you obtain is a parallelogram.

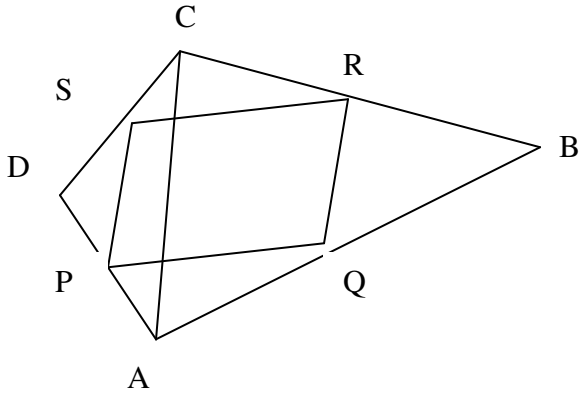
Giada makes the following drawing:



G: Here it is.
R: Yes?
G: I did it badly.
R: No, no, it is very clear like this.
Giada reads the text again.
G: Then PQRS must be a parallelogram …
A moment of silence.
G: -... yes, because [she writes on the page, speaking aloud at the same time] PQ//RS and PS//QR. Yes. [She looks at the interviewer]
R: Ah.
G: Yes, no, it's like this. When the two sides of a square [she means a quadrilateral] are two by two parallel, then the square [but she means quadrilateral] is a parallelogram. [Giada looks at the interviewer then at her drawing]
Giada puts the pencil into her mouth, and then she draws what follows:



saying at the same time:
G: See, this one, for example, has the sides two by two parallel [she touches two by two the opposite sides with the point of the pencil].
R: Here it is.
G: In our case, it works, because PS is parallel to QR and also PQ to PS, no to SR.
Silence.
G: Therefore it is true: PQRS is really a parallelogram. [Doubting, she looks at the interviewer]
R: OK, but how can you tell that PQ is parallel to RS?
Giada looks at the initial drawing.
G: Ah, oh, I have to show that PQ is parallel [she starts with an affirmative tone, later it changes to an interrogative one] ... to RS? Yes, parallel, PQ parallel to RS.
She reflects for a while.
G: Well, because I believe both are maybe parallel to AC [she draws AC on the first figure, the one at the beginning].



G: Yes. I remember. It is because there is the triangle ACD, and so S and P are those midpoints. One can see it.
R: Well. Therefore?
G: [It sounds like she is quoting a set phrase]. If two lines [she means straight lines] are both parallel to a same line then the two lines are parallel to each other. One can see it here also [with the tip of her pencil she draws over SP, RQ and CA again].
R: Ah.
G: -Yes [She reflects]. Well, it is the same for the other two [she means that analogous reasoning applies to RS and PQ with regard to BD].
R: Which ones?
Giada silently goes over the three segments RS, PQ and BD.
G: Yes, they are all parallel. SP, RQ, AC and then SR, PQ, BD. But also … I have it! This was the thesis, or not?

I called Giada's example "double" because, in my opinion, she uses the *nyaya* model twice.
In the first part:

1.	PQRS must be a parallelogram	P(A)
2.	because PQ//RS and PQ//QR. Yes.	F(A)
3.	When the sides of a square [quadrilateral] are two by two parallel then the square [quadrilateral] is a parallelogram.	$(\forall X)\ [F(X)\rightarrow P(X)]$
	Here, for example, [drawing of a rectangle, that should be a generic parallelogram]	Example
4.	In our case it works because PS is parallel to QR and also PQ to (...) SR	F(A)
5.	Therefore it is true: PQRS is indeed a parallelogram.	P(A)

The interviewer asks for a reason for the statement PQ//RS. Here starts the second part:

1.	I must show that PQ is parallel to RS; yes, parallel, PQ parallel to RS	P(A)
2.	because both maybe, because I think they are parallel to AC. Yes, [...] because there is the triangle ACD and so S and P are those mid-points.	F(A)
3.	If two lines [straight lines] are both parallel to the same line [straight line], then they are also parallel to each other.	$(\forall X)\ [F(X)\rightarrow P(X)]$

	I can see it here	Example
4.	the same for the other two. (...). Yes, they are all parallel, SP, RQ, AC and then SP, PQ, BD.	F(A)
5.	But also ... I have it! This was the thesis, or not?	P(A)

Without considering the improper use of terms, Giada shows a certain mastery of mathematics; it is well known that in language's oral form it is common to say one thing for another ("square" instead of "quadrilateral", "line" instead of "straight line"), but this does not compromise the judgment of her action: Giada fulfils well the assignment using a way of arguing easily ascribable to *nyaya* behaviour.

4. Pitto's example

"Pitto" is a nickname for Pietro that everybody in the classroom uses, including the teacher. This 15-year old is one of the most popular students in his ninth grade class. I proposed this assignment to the whole class:
The sum of three consecutive natural numbers is certainly divisible by three.
This is an easy, traditional exercise that requires various strategies.
Even though there are extremely interesting results, I will not give an account of this experience, since I have another specific purpose. Needless to say, as the well-known research literature on the subject confirms, most of the students only proposed examples. (There was also this curious one -1, 0, +1, which did not adhere to the requirement to use natural numbers; this example raises the obvious eternal question as to whether 0 is divisible by 3).
Of all of the interesting interviews, Pitto's stands out as most suitable for this case study.
Pitto starts by writing a + b + c and looks at the researcher.
P: I must perform the sum …
R: Of what?
P: Eh. Of three natural numbers.
R: Any?
P: Yes.
R: Are you sure? Read carefully.
P: Consecutive. As, for instance, it could be 5, 6, 7, like this? [He writes 5 6 7 spaced out]
R: Yes. How can you recognise three consecutive numbers? Think in general ... What would you call a number in general?
P: Ah, yes, n. It is like saying [meanwhile he writes]: n, then n+1 and then n+2.
He stops and writes the sum: n + (n+1) + (n+2), exactly in this way with the correct brackets.
R: Ah, yes like this it works out well. So?
P: [He reads the text again]. Therefore this [he indicates $n + (n+1) + (n+2)$] is divisible by 3. Well, 5 plus 6 plus 7 [and he puts the + signs between 5 and 6 and between 6 and 7 in the previous text] which yields 11 and 7, 18. [He continues writing = 18]. 18 is divisible by 3. Because there is a t such that $n + (n+1) + (n+2)$ is $3t$, like before with t equal to 6.

Pitto looks at the interviewer who nods.
P: If I always find t it would be [he writes from the beginning] $n + (n+1) + (n+2) = 3t$ and therefore it is always [he touches with the point of the pen the first side of this equality] n plus n+1 plus n+2 divisible by 3. For example 1 plus 2 plus 3 is with t equal to 2.
R: -Very well. How can you prove what you want?
Pitto writes one more time n + (n+1) + (n+2) and he tries next to perform semiotic transformations. Needless to say, he first writes n^2+1, but he corrects himself immediately pronouncing a resolute "no" and erasing precisely his attempt. He then writes 2n+1+n+2 and says:
P: … it yields 3n+3. I have it, here there is 3.
He writes =3(n+1)
While he is hitting the 3 with the point of his pen he looks at the interviewer.
R: Well we have it.
P: Eh, yes, yes.
On the sheet of paper, starting from the (n+1) that appears on the second side of the equality, he writes =t sideways.
Pitto is satisfied and he remarks:
P: Ah, cool, look at it [he touches with the point of the pen the equality and he says]. It is always 3 for the one in the middle.

Let us examine Pitto's work whose argumentation is undoubtedly appropriate to *nyaya* behaviour.

1.	$n + (n+1) + (n+2)$ is divisible by 3	P(A)
	5 + 6 + 7 yields (…)18. 18 divisible by 3	Example of P(A)
2.	Because there is a t such that $n + (n+1) + (n+2)$ is $3t$	F(A)
	Like before when t was 6	Example of F(A)
3.	If I always find t then it would be $n + (n+1) + (n+2) = 3t$	
	and therefore $n+(n+1)+(n+2)$ is always divisible by 3	$(\forall X)\ [F(X) \rightarrow P(X)]$
	For example 1+2+3 is with t=2	Example
4.	$[n+(n+1)+(n+2)]$ that yields $3n+3$ (…) $=3(n+1)$ $[=3t]$	F(A)
5.	It is always three for the one in the middle $[3(n+1)]$	P(A)

In this schematically summarised argument, it is evident how Pitto needs even more to "anchor" his reasoning. Examples, typical of *nyaya* reasoning and rejected by the Aristotelian and Megarian–Stoic one, are used to justify not only step 3 but also steps 1 and 2. This reassures Pitto and leads him to a correct start for his argument.

5. Conclusions

The aim of this work is to show how demonstrative behaviour or, in general, argumentative behaviour of sufficiently evolved students is not only bound to Aristotelian and Megarian–Stoic typologies, as historical and traditional approaches would suggest.
The use of a scheme followed by these students at least analogous *nyaya* to does not necessarily mean they simply do not carry out a proof, but rather that they fail to follow

the Aristotelian design. Some of them do perform a proof (Pitto), others not completely (Filippo), but it is interesting to point to the common existence of steps 1 and 2 that give meaning to the quantified general statement (thesis). One could ask if the role played by steps 1 and 2, among the students, is the same as in *nyaya* or whether it is solely a question of "anchorages" to examples, and therefore simply an application of the general statement to specific cases. Now that I have used this logical model to interpret behaviour that too often could be considered incorrect (because it does not adhere to another, more established model), I can proceed with my analysis.

For the time being, we can reflect on areas that seem to have some didactic interest. This investigation shows at least one feature, i.e. that the adherence to Aristotelian logic as a model for natural proof cannot be taken for granted and anyway is not unique. My purpose here is in no way to substitute one logical model for another: instead, I want to open the analysis of learning how to prove to other possible schemes.

In fact, I share Luis Radford's (1999, 2004) general idea that a culture's mode of thinking has to pay tribute to the activities shared by its elements, since it is the human activity that generates knowledge. Instead of establishing a specific logical method as a model for human thinking, it is preferable to analyse socio-cultural activities and observe how thinking takes shape as a reflection of what individuals do during such activities.

Moving in the framework of a typical methodological analysis drawn from the highlighted cases of the studied subjects, the shifts from several particular cases to universal quantification appear as an exaggerated interpretation and anyway it is not a spontaneous activity of the subject. For example, when Filippo talks about "these two" he certainly refers to two particular cases and the generalisation we see in his words stems from the fact that he analyses the possible cases and not from a process of generalisation. But this fact exactly strengthens the idea of a pragmatic adherence, more to *nyaya* rather than to first-order predicate logic.

Finally, in semiotic terms, there are transformations at the level of denotation (common to the behaviour of all the examined subjects) that the same subjects have not taken explicitly into account. The result is that expressing statements within predicate logic, using quantifiers, could take place without them being aware of this. This kind of reflection requires further study, for example involving students in the analysis of their own demonstrative strategy.

From a didactic point of view, on the one hand we are led to put back into perspective the idea that the only demonstrative model is the Aristotelian enunciative-predicative one; on the other, we are led to provide tools to analyse social and cultural activities shared in the classroom. Since the objective of the didactic action is the control of argumentative and demonstrative skills reached by students during high school, we cannot avoid taking into account the results discussed above.

Acknowledgements

The author acknowledges his colleagues and friends Giorgio Bagni, Colette Laborde, David Pimm and Luis Radford for critical reading of previous versions of this article and for their valuable suggestions. The translation from Italian was carried out by George Santi.

Notes

[1] For historical reference, prince Gautama (the Buddha, the awakened one, the enlightened one) lived in the sixth or fifth century B.C. Therefore the religion named after the name of its founder clearly developed before Aristotelianism in Greece (third century B.C.). By contrast, the first philosophical book on *nyaya* (Gautama's *Nyaya Sutra*) dates from the first century A.D. The philosophy developed in the following centuries with the renowned Vatsyayana's commentaries (fifth century A.D.), Uddoyotakare's commentaries in the sixth or seventh century A.D., up to what could be considered a new evolution of *nyaya*, headed by the philosopher Gangesa, in the thirteenth century A.D.

[2] Recall Aristotle's point of view regarding the empty set and Gergonne's solution to this issue (D'Amore, 2001, pp. 17-54).

[3] Triumphant Greek philosophy (Socrates – Plato - Aristotle) not only failed to recognise this, but also deeply rejected it. Greek philosophers continued to reject *doxa* ("opinions"), supporting instead Parmenides's *aletheia.* Sophists, subdued by Aristotle's triumph and Plato's previous dialogic arguments, deserve a different treatise.

Bibliography

Balacheff N. (2004). The researcher epistemology: a deadlock for educational research on proof. *Les cahiers du Laboratoire Leibniz.* 109. http://www-leibniz.imag.fr/LesCahiers.

D'Amore, B. and Matteuzzil, M. (1976) *Gli interessi matematici*, Venice: Marsilio.

D'Amore, B. (1999) 'Scolarizzazione del sapere e delle relazioni: effetti sull'apprendimento della matematica', *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate,* **22**A(3), 247-276.

D'Amore, B. (2001) *Scritti di Epistemologia Matematica: 1980-2001*, Bologna: Pitagora.

Durand-Guerrier, V. (1999) 'L'élève, le professeur et le labyrinthe', *Petit x* **50**, 57-79.

Durand-Guerrier, V. and Arsac, G. (2003) 'Méthodes de raisonnement et leur modélisations logiques – spécificité de l'analyse: quelles implications didactiques?', Recherches en Didactique des Mathématiques **23**(3), 295-342.

Duval, R. (1991) 'Structure du raisonnement déductif et apprentissage de la démonstration', *Educational Studies in Mathematics* **14**(**x**), 385-414.

Duval, R. (1993) 'Argumenter, démontrer, expliquer: continuité ou rupture cognitive?', *Petit x* **31**, 37-61.

Duval, R. and Egret, M. (1993) 'Introduction à la démonstration et apprentissage du raisonnement déductif', *Repère* **12**, 114-140.

Hanna G., Janke N. (1996). Proof and proving. In: Bishop A. et al. (eds.) (1996). *International handbook of mathematics education*. (877-908). Dordrecht: Kluwer.

Needham, J. (1959) *Science and Civilisation in China*, vol. 3, Cambridge: Cambridge University Press.

Pascal, B. (1656/1985) *De l'Esprit Géométrique*, A. Clair (ed.), Paris: Flammarion.

Radford, L. (1999) 'La razón desnaturalizada: ensayo de epistemología antropológica', *Relime* **2**(3), 47-68.

Radford, L. (2004) 'The anthropology of meaning', *Educational Studies in Mathematics*.

Sarma V.V.S. (2005). Indian Systems of Logic (*Nyaya*): a survey. IIT Bombay Logic Conference. VVSSarma_Tutorial.pdf.

Sarukkai S. (2005). Indian logic and philosophy of science: the logic-epistemology link. SundarSarukkay_PlenaryTalk.pdf.

D'Amore B. (2005). Pipas, caballos, triánguloy significados. Contribución a una teoría problemática del significado conceptual, de Frege y Manritte, hasta nuestros días. *Números*. [Tenerife, Spagna]. 61, 3-18.

Pipas, caballos, triángulos y significados.

Contribución a una teoría problemática del significado conceptual, de Frege y Magritte, hasta nuestros días

Bruno D'Amore

NRD - Departamento de Matemática – Universidad de Bologna – Italia
ASP – Alta Escuela Pedagógica – Locarno – Suiza
MESCUD – Universidad Distrital Fr. José de Caldas – Bogotá - Colombia

Trabajo desarrollado en el ámbito del programa de Investigación de la Unidad de Bologna: «*Aspectos metodológicos (teóricos y empíricos) de la formación inicial y en servicio de los maestros de matemáticas de todo nivel escolar*».

Summary. In this paper we describe a proposal for a problematic interpretation of the concept of signification, taken from conceptual signification theory, not only in the field of mathematics, but also presenting examples of analogous behaviour from another field of study, that of figurative art. The aim is to show how a totally satisfactory signification theory has still not been constructed, while other fields of study continue to rediscover the basic stages of the epistemological domain.

Sunto. In questo articolo si descrive una proposta di interpretazione problematica del concetto di significato, tratta dalla storia della teoria del significato concettuale, non solo nell'àmbito della matematica, ma offrendo esempi di comportamento analogo tratto da un altro dominio di studio, quello dell'arte figurativa. Lo scopo è quello di mostrare come una teoria del significato del tutto soddisfacente non sia ancora stata costruita, mentre in altri campi di studio si ripercorrono le tappe fondamentali del dominio epistemologico.

Resumen. En este artículo se describe una propuesta de interpretación problemática del concepto de significado, traída de la historia de la teoría del significado conceptual, no sólo en el ámbito de la matemática, sino también dando ejemplos de comportamiento análogo tomado de otro dominio de estudio, el del arte figurativo. La finalidad es la de mostrar como aún no se ha construido una teoría del significado del todo satisfactoria, mientras que en otros campos de estudio se recorren las etapas fundamentales del dominio epistemológico.

Résumé. Dans cet article on décrit une proposition concernente une interprétation problématique du concept de signification, tiré de l'histoire de la signification conceptuelle, non seulement des mathématiques, mais en donnant des exemples de comportement similaire pris dans un autre domaine d'étude, celui de l'art figuratif. Le but est de montrer qu'il n'existe pas encore une théorie de la signification totalement

satisfaisante, tandis que dans d'autres domaines d'étude on parcoure les étapes fondamentales du côté épistémologique.

1. Significado y su representación; el caso de la matemática

Cuando se habla de "teoría del significado", el pensamiento corre rápidamente hacia la psicología, la semiótica, la lingüística o a la matemática.
Pero no se debe pensar que este tipo de problemática interese sólo a estos sectores de investigación y de análisis. Toda disciplina que se respete, que desee poner en campo una reflexión sobre los objetos del propio conocimiento y del propio específico representar, antes o después se ve obligada a entrar en el meollo de la cuestión. Aún más si se sirve de "representaciones del significado" (locución que, por ahora, usamos de modo ingenuo), como se ve obligada a hacer la matemática (Duval, 1993; D'Amore, 2000, 2001a, b, 2002b, 2003a).
En matemática, en efecto, debido a que los "objetos" evocados no tienen naturaleza real (en un realismo ingenuo de carácter de cosa), [59] [60] no se tiene otra alternativa sino aquella de recurrir a *representaciones* de estos al interno de una semiótica oportuna; es así como el matemático, mientras nombra y habla de objetos en el dominio de la matemática, de hecho elige, manipula y transforma sus representaciones en registros semióticos.[61] [62]

---

[59] Aquí "objeto" se entiende en el sentido de "objeto real" o de "cosa", en el mismo sentido que Aristóteles en la *Metafísica* definió muy bien, donde afirma que la "cosa", en cuanto parte de lo real, es todo aquello que presenta las tres características siguientes: (1) tridimensionalidad, (2) accesibilidad sensorial múltiple (es decir, por más de un sentido a la vez) independiente de las representaciones semióticas y (3) posibilidad de separación material y de otras partes de la realidad, es decir de otras "cosas". Tal acepción se encierra en la palabra griega πράγμα que la expresa. Pero se necesitó esperar a Renato Descartes para una distinción entre "Cosas corporales" y "Cosas que piensan" (*Méd*., II), hasta Locke para tener el término "sustancia" (*An Essay Concerning Human Understanding*, 1690, II), 12, 6), acuñado y hecho propio de Berkeley con la acepción de "reales", para distinguirlas de aquellas "surgidas de la imaginación" a las cuales les espera el nombre de *ideas* «o imagenes de las Cosas que éstas copian o representan» (*Principles*, I, 33).

[60] Con "realismo ingenuo" (*Naiven Realismus*) entiendo lo así definido por G. Schuppe (*Grundriss der Erkenntnistheorie und Logik*, 1910), es decir aquello por lo cual se reconoce la independencia del objeto conocido del acto (psíquico) a través del cual este viene conocido. Esto tiene origen en un famoso artículo de G.E. Moore de 1903 (publicado en *Mind*, con el título: *La refutación del idealismo*) que se inspira en la posición de W. Hamilton (*Realismo Natural*) el cual atribuye este modo de pensar a la filosofía escocesa. Creo que todas estas posiciones son hijas del *Realismo empírico* de Kant.

[61] Estoy aquí haciendo referencia explícita a las tres "operaciones fundamentales de la semiótica" (Duval, 1993; D'Amore, 2002b, 2003a):

- elección de las características distintivas del objeto que se quiere representar;
- transformación de *tratamiento*, que permite transformar una representación semiótica en otra, al interno del mismo registro;
- transformación de conversión, que permite transformar una representación semiótica en otra, en un registro diverso.

[62] Nótese que, ya en la filosofía del Renacimiento, se evidenciaban tres sentidos de la representación: la idea misma en el sentido más general, la imagen de la idea y el objeto mismo al cual la idea alude o se refiere; esta tripartición que, en su origen, se atribuye a Ochkam (*Quodl*., IV, 3), está presente en la base de las especulaciones de Descartes sobre la noción de idea como "cuadro" o como "imagen" de la cosa (*Méd*., III), lo que llevó a Leibniz a su concepción de *monade* como representación del universo (*Mon*., 60).

2. El caso del arte figurativo: pipas y caballos

Una situación análoga a la matemática, para muchos tal vez inesperada, la constituye el arte figurativo. Incluso si no se quiere complicar la cuestión y se asume, en modo fuertemente a-crítico e históricamente superado, que el arte es el estudio de las interpretaciones de las representaciones figurales problemáticas de los objetos o de los fenómenos de la naturaleza, surge, de modo evidente, que cada representación en el mundo figural alude a un objeto o a un fenómeno, pero es distinto de estos. Al final, todo producto artístico es, él mismo, un objeto o un fenómeno de la naturaleza.

Así, aparece inmediatamente necesaria y reveladora la obra de reflexión sobre la naturaleza del lenguaje del arte y sobre el sentido de la relación entre significado y representación, del pintor surrealista René Magritte (1898-1967).

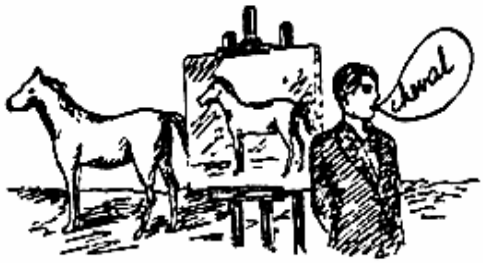
En ocasiones, sus reflexiones se constituían, a su vez, en verdaderas y auténticas obras de arte, como la muy conocida *Ceci n'est pas une pipe* (Esto no es una pipa), que Magritte realizó en diversas versiones entre 1929 y 1946.

Más allá del desconcierto que creó con la exposición de su obra, analizada con la mirada crítica y aguda de hoy, el sentido de esta obra, voluntariamente divulgada, es del todo evidente: lo que el observador ve NO es, de hecho, una pipa, sino una representación, una alusión, una evocación, no el objeto en sí.

En ocasiones, por el contrario, Magritte amaba elaborar verdaderos y propios estudios teóricos, como el igualmente famoso *Les mots et les images* (1929) que, aún siendo, como decía, un estudio teórico, también viene expuesto como obra.

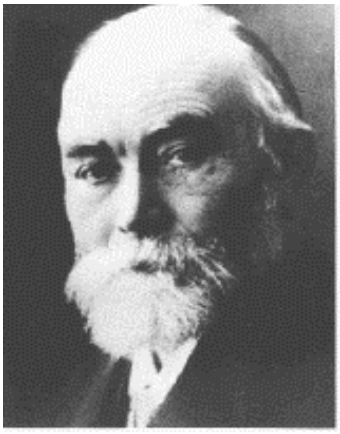
Analizando este estudio, tal vez el particular más famoso y discutido es el relativo a la imagen del caballo, cuya evidencia es total.

Aparece un caballo, su representación pictórica y su enunciación verbal (dentro del registro semiótico: "lenguaje oral"). Pero, no debemos olvidar que el caballo que aparece a la izquierda del recuadro es a su vez un dibujo …



3. Gottlob Frege y el significado en matemática

Este análisis del lenguaje pictórico llama a la obra del lógico y matemático alemán Gottlob Frege (1848- 1925).



Junto a otras obras inmortales, Frege escribió un artículo relativo a la naturaleza y al sentido de la matemática y de su lenguaje: *Über Sinn und Bedeutung* (publicado en 1891) que fue una verdadera bomba en el mundo de la reflexión matemática y contribuyó a abrir el camino al replanteamiento crítico de esta disciplina bajo el nombre de *Crisis de los fundamentos* y que llevó al modo actual de concebir la matemática (D'Amore, Matteuzzi, 1975).

En el citado artículo, que fue motivo después de una polémica durante años con G. Peano (1858-1932) (D'Amore, Matteuzzi, 1975), Frege proponía, de forma radical, una distinción entre "concepto" y "objeto", donde el primero es una expresión no completa con características únicamente funcionales, y el segundo tiene el papel de argumento. Por ejemplo, un número se identifica con el objeto denotado por un concepto, o sea con la extensión de dicho concepto.[63]

En otra de sus célebres obras, *Die Grundlagen der Arithmetik-Eine logisch-matematische Untersuchung über den Begriff der Zahl*, publicada en Breslavia en 1884, en la pag. 59, Frege afirma: «La atribución de un número contiene siempre una afirmación alrededor de un concepto. El hecho resulta particularmente claro con el número 0. Cuando se dice "el planeta Venus tiene 0 satélites", no es precisamente algún satélite o una unión de satélites acerca de lo que se pueda afirmar algo. Es en cambio al concepto "satélite de Venus" al que la acepción antes citada atribuye una propiedad (es decir, aquella de no comprender ningún objeto bajo de sí»[64]).

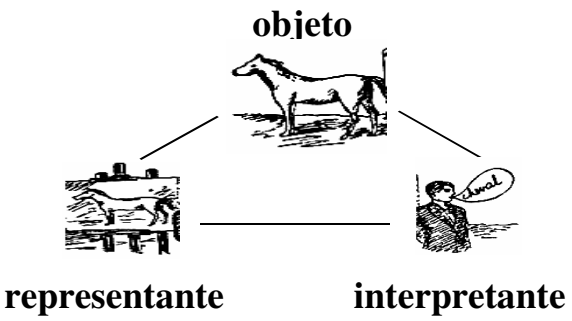
Esta posición, que no dudo en incluir dentro de aquellas que hoy se llaman "realistas", tuvo un gran éxito en los años setenta del siglo XX, pero, en la actualidad. se encuentra en crisis a favor de posiciones "pragmáticas" (D'Amore, 2001a, b; D'Amore, Fandiño Pinilla, 2001).

[63]La distinción y después la organización conceptual que tiene que ver con la dialéctica entre "intensión" y "extensión" fue lanzada en sentido moderno por G.W. Leibniz (1646-1716); Leibniz prefirió siempre la primera visión que no tuvo éxito en matemáticas (D'Amore, Matteuzzi, 1975. Véase también D'Amore, 2001b).

[64] La historia específica al rededor del significado del número es de gran interés, tanto para los matemáticos como para los filósofos, pero aquí la evito, dado que no la considero propia de este escrito; interesó a Henry Poincaré (1854-1912), Giuseppe Peano (1858-1932), Richard Dedekind (1831-1916), Bertrand Russell (1872-1970), sólo por citar algunos. En cierto sentido, la polémica sobre el sentido y sobre el significado del concepto de número, no ha sido jamás apaciguada.

4. Caballos y significados, antes y después de Frege

Desde 1883, por tanto *antes* de Frege, el matemático, físico y filósofo estadounidense Charles Sanders Peirce (1839 – 1914) había ya comenzado a servirse de esquemas de forma triangular para estudiar las relaciones entre los objetos y sus representaciones, usando la terna: interpretante – representante – objeto; parece interesante encontrar una descripción de la reflexión de Magritte según el esquema de Peirce:



Quien desee, puede crear una propia interpretación ternaria del "caballo" de Magritte, usando el triángulo de:

- Gottlob Frege: Sinn (sentido) – Zeichen (expresión) – Bedeutung (detonación), publicado en 1892, como ya lo había precisado,

o aquel más reciente de

- C.K. Ogden, I.A. Richards: referencia – símbolo – referente (publicado en 1923).

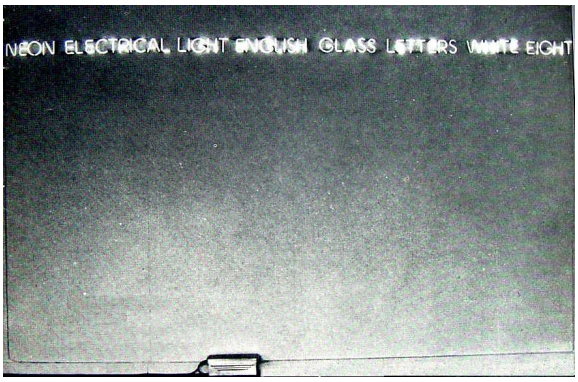
5. Arte y significado, después de Magritte

Deteniéndonos aún por un momento en el mundo del arte figurativo, hago mía la tesis sostenida por el gran crítico de arte Filiberto Menna (1975), para quien la "*línea analítica del arte moderno*" tuvo un gran artífice en los estudios y en las reflexiones de Magritte. «(…) Magritte propone un desprendimiento de la imagen y de la palabra, entre la definición visual (la imagen de la pipa) y la definición verbal (la leyenda "Ceci n'est pas une pipe", "Esto no es una pipa"), eliminando el papel afirmativo tradicionalmente atribuido al cuadro en virtud de la presencia (implícita o explícita) de una acotación (…). Del arte y del cuadro en particular, él nos dice que no es posible predicar la verdad o la falsedad y para demostrar este asunto afronta la cuestión de los fundamentos gnoseológicos establecidos por las leyes de la teoría de la identidad (…)» (Menna, 1975, pp. 58-59).

La idea de Magritte tuvo un gran séquito (aún hoy no extinto) entre los artistas de todo el mundo, especialmente entre aquellos que, en los años 60'- 80', fueron los artífices de la corriente llamada "conceptualismo científico",[65] entre los cuales recuerdo al estadounidense Joseph Kosuth, citando dos de sus obras más famosas.

[65] En los años 70' y 80' yo mismo dediqué gran atención a esta corriente artística que se inspiró decididamente en el mundo de la ciencia, en general, y de la matemática en particular, promoviendo

Neon Electrical Light English Glass Letters White Eight (1965)



"El contenido de esta obra es el descrito en el título", en el sentido *exacto* de esta frase. Se trata, de una referencia autónoma. En otras palabras, el "sentido" es la referencia a sí misma, como sucede con la mayor parte de los signos de la matemática.

One and three chairs (1965)

Esta obra consiste en un objeto (una silla), la fotografía de dicha silla y la definición de "silla" tomada de un diccionario; lo que nos obliga a traer en mente una síntesis de las obras de Magritte y de Frege al mismo tiempo. ¿Se trata (de la representación) de "una" o de "tres" sillas?[66]

6. Esquemas ternarios del significado

Volvamos a las interpretaciones del significado conceptual.
Los esquemas "triangulares" pretenden reunir «el estudio semiótico del contenido» (Eco, 1975, p. 89), pero fallan una vez que intentan definir un modo unívoco (para todos los lenguajes y para todos los códigos) lo que debería entenderse por "significado" de

varias iniciativas expositivas y presentando diversos análisis críticos, referidos tanto al movimiento en sí como a los artista que lo seguían.

[66] Para tener referencias ulteriores sobre el arte figurativo de la época, se puede ver el catálogo de una importante muestra internacional sobre este tema (D'Amore, Menna, 1974), las actas de un congreso de estudio que reunía matemáticos y críticos de arte (D'Amore, Speranza, 1977), la historia del arte de aquel período (1970-1990), escrita por Giorgio Di Genova (1993), uno de los máximos estudiosos en este campo.

un "significante" (lo que es de extrema importancia, si se quiere entender tanto la matematica, como el arte).
Ahora, la posición más ingenua e inmediata es aquella donde el significado del significante es el mismo objeto al cual se hace referencia. Esta posición lleva a una falacia (la "falacia extensional") (Eco, 1975, p. 93 y siguientes) que, si es verdad que mete en crisis todas las teoría de los códigos que tienen necesidad de extensiones relativas a objetos relacionados con lo real, no molesta a la matemática donde los objetos son definibles en forma extensiva, sin necesidad de alguna referencia a la realidad objetiva empírica (me parece que el mismo discurso, cambiando lo que haya que cambiar, vale para el arte figurativo).
No es casual que el lógico matemático Frege se permitiera considerar el *Bedeutung* en sentido estrictamente extensivo, dado que él pensaba exclusivamente en la matemática y no en la lengua natural.[67]
Una de las esquematizaciones a tres términos, más recientes y de mayor notoriedad, es ciertamente, la de Gérard Vergnaud (1990).[68] Por lo menos en el campo de la didáctica y de las reflexiones epistemológicas, sobre todo en lo que concierne a la matemática. Según este célebre autor francés,[69] el punto decisivo de la conceptualización del real (y en didáctica de la matemática) es el pasaje de los *conceptos – como – instrumentos* a los *conceptos – como – objetos*, y una operación lingüística esencial en esta transformación es la nominalización.
Es entonces fundamental dar una definición pertinente y eficaz de *concepto*. Según Vergnaud:
concepto C es una terna de conjuntos C=(**S, I,** ***S***), tal que:

- **S** es el conjunto de las situaciones que dan sentido al concepto (el *referente*)
- **I** es el conjunto de los invariantes (definidos por él y ejemplificados en otras obras) sobre las cuales se basa la operatividad de los esquemas (el *significado*)
- ***S*** es el conjunto de las formas lingüísticas y no lingüísticas que permiten representar simbólicamente el concepto, sus procesos, las situaciones y los procesos de tratamiento (el *significante*).

Según Vergnaud, estudiar cómo se desarrolla y cómo funciona un concepto significa considerar, cada vez, estos tres planos separadamente y en mutua relación recíproca.

7. Esquemas binarios del significado

Recientemente, Raymond Duval (1993) sustituyó el esquema ternario por un esquema binario, aquel que se expresa con la pareja: significado – objeto o también con la pareja signo – objeto; el hecho es que en Duval el término "significado" reagrupa los diversos significantes del mismo objeto; por tanto los términos "significado" y "signo" son, en cierto sentido, intercambiables.
Es obvio que, si se pone el acento sobre la pareja (*signo - objeto*), todas las representaciones triádicas (de C.S. Peirce, de G. Frege, de C.K. Ogden y I.A. Richards, de G. Vergnaud, …) caen en defecto.
La conceptualización pasa entonces a través del signo que expresa el objeto mismo.

[67] Interesantes consideraciones de tipo didáctico se obtuvieron aplicando las ideas de Frege a la semántica del álgebra; se puede ver una presentación con ejemplos en Arzarello, Bazzini e Chiappini (1994), p. 36 y siguientes.
[68] Una amplia discusión de las tesis de Vergnaud se encuentra en D'Amore (1999).
[69] Véase mi voz sobre G. Vergnaud en la *Enciclopedia Pedagogica* (D'Amore, 2002a).

El caso de la matemática es, peculiar; al menos por tres motivos:

- todo concepto matemático tiene reenvíos, como ya se ha dicho, a "no-objetos"; por tanto, la conceptualización no es y no puede ser basada en significantes que se apoyan en la realidad concreta; en otras palabras, en matemáticas no son posibles reenvíos ostensivos;
- todo concepto matemático se ve obligado a servirse de representaciones, dado que no existen "objetos" que se puedan exhibir en su lugar o en su evocación; [70] por tanto, la conceptualización debe pasar, necesariamente, a través de registros representativos que, por varios motivos, si son de carácter lingüístico, no pueden ser unívocos;
- en matemáticas se habla más en general de "objetos matemáticos" y no de "conceptos matemáticos", dado que se estudian preferiblemente objetos y no conceptos; «la noción de objeto es una noción que no se puede no utilizar desde el momento en el cual nos interrogamos sobre la naturaleza, sobre las condiciones de validez o sobre el valor del conocimiento» (Duval, 1998).

Es absolutamente necesario subrayar que el término "concepto", en Duval, no nos lleva a las mismas exigencias y al mismo uso que hacen de esto Piaget, Kant, Vergnaud, Vygotsky, Chevallard...

En la dirección trazada por Duval, la noción de concepto, preliminar o de cualquier manera prioritaria en casi todos los autores, pasa a un segundo plano, mientras la noción que asume un carácter prioritario es la pareja (*signo - objeto*).

En Duval (1996) se cita un pasaje de Vygotsky en el cual sustancialmente se declara que no existe concepto sin signo:

«Todas las funciones psíquicas superiores están unidas por una característica común superior, la de ser procesos mediadores, es decir de incluir en su estructura, como parte central y esencial del proceso en su conjunto, el empleo del signo como medio fundamental de orientación y de dominio de los procesos psíquicos… La lista central [del proceso de formación de los conceptos] es el uso funcional del signo, o de la palabra, como medio que permite al adolescente someter a su poder las propias operaciones psíquicas, de dominar el curso de los procesos psíquicos…» (Vygotsky, 1962; en edición francesa, 1985, en las páginas 150, 151, 157).

[A propósito de esta cita de Vygotsky o, mejor, aprovechándola, es necesario hacer una rápida consideración a propósito de la palabra "signo", sugerida en conversaciones e intercambio de ideas personales con Raymond Duval, en cuanto, él afirma, que para algunos estudiosos de la didáctica se vislumbra una reducción del *signo* a los *símbolos convencionales* que connotan directamente y aisladamente los objetos. Lo cual es reductivo].

Con referencia a De Saussure (1915) (que Vygostsky conocía bien dada su formación lingüística), no existe signo fuera de un "sistema de signos". Por ejemplo, las palabras no tienen significado sino en el interior del sistema de un idioma (de aquí los problemas bien conocidos de las traducciones). Cuando en Duval (y por tanto, aquí) se habla de "registro de representación semiótica" nos referimos a un sistema de signos que permite colmar las funciones de comunicación, tratamiento y objetivización, y no nos referimos en cambio, a las notaciones convencionales que no forman sistemas. Por ejemplo, la numeración binaria, o aquella decimal, forman un sistema; pero no lo forman las letras o los símbolos que se utilizan para indicar las operaciones algebraicas.

[70] Recuerdo aquí la definición de "cosa" dada citando a Aristóteles páginas arriba.

Tal vez, convendría ahora traducir a Vygotsky introduciendo en el lugar de la palabra "signo" la locución "sistema de signos".
Nótese también que, desde este punto de vista, y contrariamente a la opinión difusa, un sistema semiótico no es un instrumento: éste es constitutivo del funcionamiento mismo del pensamiento y del conocimiento. Sólo un código que viene usado para recodificar un mensaje ya expresado, puede ser un instrumento.
Dado que en este artículo estoy haciendo un paralelismo entre las situaciones de la matemática y aquellas del arte figurativo, aunque no se trate del objetivo principal de este trabajo, el lector puede releer el precedente apartado 7, buscando analogías entre los dos campos. Quien lo ha hecho, comenta haber encontrado impresionantes situaciones comunes, compartidas o sólo análogas, en el ámbito de una teoría del significado conceptual.
Como una vez era difuso concluir, se deja como ejercicio al lector este análisis…

8. La naturaleza compleja y problemática del significado conceptual y de sus representaciones

Se puede huir de la problemática del significado conceptual, con ironía, como hacía Magritte; o buscar capturar la esencia de la relación entre el significado conceptual y la/las representación/ciones, como intentó hacer Frege y los otros estudios de esquemas destinados a recoger tal esencia, en general, independientemente de los códigos; ó asimilar el significado conceptual al conjunto de los signos representantes, evocadores de lo representado, pero en semióticas específicas…
Me parece que el resultado será el mismo; lo que surge con fuerza es que la naturaleza del significado conceptual es un hecho *complejo* y *problemático*.
Complejo significa que no es definible ni unívoco, dado que integra varias actividades humanas y que en cada una de ellas asume identidades específicas diversas, dependiendo del contexto; puede incluso suceder que existan de hecho analogías interpretativas (y en este estudio estoy buscando relacionar el dominio de la matemática con el del arte figurativo), pero no es posible evidenciar más que analogías. No existe una teoría general unívoca del significado conceptual.
Problemático significa que la naturaleza del significado conceptual no se sobrepone a reduccionismos que reenvían a modelos preexistentes (Speranza, 1997). Toda tentativa de categorización abre nuevas interpretaciones y, por tanto, la necesidad de nuevos modelos, siempre más profundos. Las respuestas a preguntas sobre la naturaleza del significado conceptual, en conclusión, no son jamas definitivas y, si no son autoreferentes, abren el camino a nuevas preguntas.
Vimos también que la/las representación/ciones del significado conceptual no puede/pueden ni siquiera ser ostensiva/s, por lo menos, en las dos actividades creativas humanas sobre las cuales aquí he reflexionado, matemática y arte figurativo. Como máximo, las representaciones pueden recurrir a signos de naturaleza semiótica diversa y pretender coincidir con ellos (existen los famosos ejemplos que presenta Duval en el campo de la matemática y de varios artistas en el campo del arte figurativo, como Kosuth, y otros que aquí no he querido recordar para abreviar). Por tanto, también la representación del significado conceptual tiene características de complejidad y problematicidad.
Inspirándonos en la distinción que se hace en epistemología de la matemática entre posiciones realistas y pragmáticas (D'Amore, Fandiño Pinilla, 2001; D'Amore, 2001a,

2003b), debemos estar dispuestos a reconocer una doble analogía entre absolutismo y realismo, y entre problematización y pragmatismo. Sobre esta base, la naturaleza compleja y problemática de la teoría del significado conceptual cambia según el contexto, lo que la hace difícil de "capturar" con los clásicos sistemas que tienen éxito en las posiciones realistas: la lógica, por ejemplo, o una semántica *a priori*.
Esto nos debe conducir forzosamente a las "prácticas humanas" (Godino, Batanero, 1994) reconociendo el hecho que, como subraya Luis Radford, el conocimiento está ligado indisolublemente a las actividades en las que se empeñan los sujetos (Radford, 1997, 2003a, b), y esto debe ser considerado en relación estrecha con las instituciones culturales del contexto social cada vez considerado (Crombie, 1995, p. 232).
Radford enfatiza la especificidad de los ambientes en los cuales, en la historia, se ha desarrollado la investigación científica: «Una simple mirada a las diversas culturas en la historia muestra que cada una de estas ha tenido intereses científicos propios. Además, cada cultura ha desarrollado modalidades propias para definir y delimitar la forma y el contenido de los objetos de la propia investigación» (Radford, 1997, p. 30); yo creo que lo mismo se puede decir, exactamente, para el arte figurativo, sin necesidad de forzar la mano. Y esto ilustra claramente el sentido que he querido dar a los adjetivos *complejo* y *problemático* que he usado en éste texto. Los resultados de la matemática y del arte figurativo son productos, artefactos humanos, indisolubles de la sociedad cultural que los ha producido y estrechamente determinados por la práctica humana gracias a la cual fueron realizados.
Así, más que una teoría del significado de algo general que comprende estos productos, existe, por el contrario, el significado específico de éste algo en aquel determinado contexto en el cual está inmerso. La complejidad y la problematicidad se reducen así al hecho local y relativo específico, al producto de la creatividad humana en un determinado contexto, también éste específico.

Bibliografía

Arzarello F., Bazzini L., Chiappini G. (1994). L'algebra come strumento di pensiero. Analisi teorica e considerazioni didattiche. Quaderno 6, Progetto Strategico del CNR "Innovazioni didattiche per la matematica". Pavía. [Resumen del IX Seminario Nacional de Investigación en Didáctica de la Matemática. Pisa. 5-7 noviembre 1992].

Crombie A.C. (1995). Commitments and Styles of European Scientific Thinking. *History of Sciences*. 33, 225-238.

D'Amore V. (1999). *Elementi di didattica della matematica*. Bologna: Pitagora. [Traducción en curso].

D'Amore B. (2000). "Concetti" e "oggetti" in Matematica. *Rivista di Matematica dell'Università di Parma*. (6) 3, 143-151.

D'Amore B. (2001a), Una contribución al debate sobre conceptos y objetos matemáticos. *Uno*. 27, 2001, 51-76.

D'Amore B. (2001b). *Scritti di Epistemologia Matematica. 1980-2001*. Bologna: Pitagora.

D'Amore B. (2002a). Gérard Vergnaud. Voce sull'*Enciclopedia Pedagogica*. Appendice A-Z. 1508-1509. Brescia: La Scuola Ed.

D'Amore B. (2002b). La complejidad de la noética en matemáticas como causa de la falta de devolución. *TED*. Bogotà, Universidad Pedagógica Nacional. 11, 63-71.

D'Amore B. (2003a). La complexité de la noétique en mathématiques ou les raisons de la dévolution manquée. *For the learning of mathematics*. 23, 1, 47-51.

D'Amore B. (2003b). *Le basi filosofiche, pedagogiche, epistemologiche e concettuali della Didattica della Matematica*. Bologna: Pitagora. [En idioma español: México D.F.: Reverté-Cinvestav].

D'Amore B. (2004). Conceptualización, registros de representaciones semióticas y noética: interacciones constructivisticas en el aprendizaje de los conceptos matemáticos e hipótesis sobre algunos factores que inhiben la devolución. *Uno*. 35, 90-106.

D'Amore B., Fandiño Pinilla M.I. (2001). Concepts et objects mathématiques. En: Gagatsis A. (ed.) (2001). *Learning in Mathematics and Science and Educational Technology*. Nicosia (Chipre): Intercollege Press Ed. [Actas del "Third Intensive Programme Socrates-Erasmus, Nicosia, Universidad de Chipre, 22 junio - 6 julio 2001. 111-130].

D'Amore B., Matteuzzi M. (1975). *Dal numero alla struttura*. Bologna: Zanichelli.

D'Amore B., Menna F. (1974). *De Mathematica*. Roma: L'Obelisco. [Libro - catálogo de una muestra internacional]

D'Amore B., Speranza F. y otros (1977). *Alcuni aspetti della critica analitica. Rapporti tra critica analitica e ricerca nelle arti visive*. Bologna: Galería de arte moderno. [Actas de un congreso, el acta de nacimiento de la línea del *arte exacto* que dío vida a una gran cantidad de muestras].

De Saussure F. (1915). *Cours de linguistique générale.* París y Lausanne: Payot. [5a edic. 1960].

Di Genova G. (1993). *Storia dell'arte italiana del 900*. Bologna: Bora.

Duval R. (1993). Registres de représentations sémiotiques et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Science Cognitives*, ULP, IREM Strasbourg. 5, 37-65.

Duval R. (1996). Il punto decisivo nell'apprendimento della matematica. La conversione e l'articolazione delle rappresentazioni. En: D'Amore B. (ed.) (1996). *Convegno del decennale*. 11-26. Bologna: Pitagora.

Duval R. (1998). Signe et objet (I). Trois grandes étapes dans la problématique des rapports entre répresentations et objet. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*. 6, 139-163.

Eco U. (1975). *Trattato di semiotica generale.* Milán: Bompiani.

Godino J.D., Batanero C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en didactiques des mathématiques*. 14, 3, 325-355.

Menna F. (1975). *La linea analitica dell'arte moderna*. Milán: Einaudi.

Radford L. (1997). On Psychology, Historical Epistemology and the Teaching os Mathematics: Towards a Socio-Cultural History of Mathematics. *For the Learning of Mathematics*. 17(1), 26-33.

Radford L. (2003a). On the epistemological limits of language. Mathematical knowledge and social practice in the Renaissance. *Educational Studies in Mathematics*. 52(2), 123-150.

Radford L. (2003b). On Culture and Mind. A post-Vygotskian Semiotic Perspective, with an Example from Greek Mathematical Thought. En: Anderson M. y otros. (Eds.). *Educational Perspectives on Mathematics as Semiosis: From Thinking to Interpreting to Knowing*. 49-79. Ottawa: Legas.

Speranza F. (1997). *Scritti di epistemologia della matematica*. Bologna: Pitagora.

Vergnaud G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en didactique des mathématiques*. 10, 133-169.

Vygotsky L.S. (1962). *Thought and language*. Cambridge, MIT Press. [Se trata de un resumen tomado de la ed. original en lengua ruso, reunida en artículos publicados en Moscú en 1956].

Traducción de Martha Isabel Fandiño Pinilla

En idioma italiano:
D'Amore B. (2004). Il ruolo dell'Epistemologia nella formazione degli insegnanti di Matematica nella scuola secondaria. *La matematica e la sua didattica*. [Bologna, Italia]. 4, 4-30.
En idioma español:
D'Amore B. (2004). El papel de la Epistemología en la formación de profesores de Matemática de la escuela secundaria. *Epsilon*. [Cádiz, Spagna]. 60, 20, 3, 413-434.

El papel de la Epistemología en la formación de profesores de Matemática de la escuela secundaria

En memoria de Francesco Speranza [1932-1998]

Bruno D'Amore

Departamento de Matemática
Universidad de Bologna - Italia

Sunto. *In questo studio si propone di considerare come fondamentale la preparazione dei futuri docenti di Matematica della scuola secondaria non solo in Matematica ed in Didattica della matematica, ma pure in Epistemologia della matematica. Ciò per due motivi, uno culturale ed uno professionale. Il motivo culturale sta nella figura stessa del docente che, per prima cosa, deve operare una trasposizione didattica dal Sapere al sapere insegnato che tenga conto degli allievi e che, per seconda cosa, deve comunicare con essi sui temi della Matematica; sia per poter operare la trasposizione sia per dare efficacia alla comunicazione, si mostra in questo testo come sia necessaria una preparazione epistemologica. Il motivo professionale sta nel fatto che gli ostacoli cosiddetti epistemologici richiedono, per essere aggirati, profonda consapevolezza e conoscenza da parte del docente. Si sostiene anche che una buona competenza epistemologica non può prescindere da una competenza storica, dato che le due devono essere viste profondamente intrecciate.*

Abstract. *This paper considers fundamental for future secondary school Mathematics teachers training not only in Mathematics and Mathematics education but also in Epistemology of Mathematics. Two reasons are proposed: one cultural and one professional. The first reason derives from the fact that the teacher must first of all effect a didactic transposition from Knowledge to "taught knowledge" based on students themselves and then communicate with them about Mathematical questions. In both cases an epistemological training if necessary. The professional reason derives from how overcoming so-called epistemological problems requires a profound awareness and understanding on the part of the teacher. Moreover, a solid epistemological competence requires the same level of historical competence, since both are inextricably linked.*

Resumen. *En este estudio se propone considerar como fundamental la preparación de los futuros profesores de Matemática de la escuela secundaria no sólo en Matemática y en Didáctica de la Matemática, sino también en Epistemología de la Matemática. Esto por dos motivos, uno cultural y otro profesional. El motivo cultural se centra en la figura misma del docente que, en primer lugar, debe realizar una transposición didáctica del Saber al saber de enseñar, que tenga en cuenta los alumnos, y, en segundo lugar, debe comunicarse con ellos haciendo uso de los temas de la Matemática; en este texto se pone de manifiesto la necesidad de una preparación epistemológica ya sea para realizar la transposición didáctica como para hacer eficaz dicha comunicación. El motivo profesional está en el hecho que los obstáculos llamados epistemológicos requieren, para ser circundados, de un profundo conocimiento y de una gran toma de conciencia por parte del profesor. Se sostiene también que una buena competencia epistemológica no puede prescindir de una conciencia histórica, dado que los dos aspectos deben ser vistos profundamente entrelazados.*

1. Premisa

Hace algunos años, creo tal vez en 1991 o en 1990, el Departamento de Matemática de la Facultad de Educación de la Universidad de Tesalónico (por iniciativa de Athanasios Gagatsis, quien, en ese entonces, era profesor en dicha ciudad), nos propuso, a Francesco Speranza[71] y a mi, dictar un ciclo de conferencias; el día anterior al inicio del Seminario, el Instituto Cultural de Francia de esta ciudad, uno de los patrocinadores de la manifestación, nos pidió hacer un seminario a dos voces sobre temas generales de la Matemática para un público de no especialistas, obviamente en francés. En dicha ocasión el Profesor Speranza defendió el valor cultural de la competencia en Epistemología de la Matemática con palabras muy fuertes, palabras que me impresionaron; sostuvo radicalmente que para un profesor de Matemática conocer la epistemología es tan importante como conocer la misma Matemática; el sentido de esta afirmación esta en el hecho que conocer *sólo* la Matemática no es suficiente si no se tiene el sentido mismo de la evolución del pensamiento matemático. Le había cedido el seminario introductivo por obvios motivos de importancia académica y fue así como me encontré desplazado dado que con estas palabras había anticipado parte de lo que había pensado decir, solo que yo hubiera usado, eso sí, un tono menos perentorio. Me vi obligado a cambiar el tema y tomé en consideración la necesidad que tiene el profesor de matemática de conocer la Epistemología por motivos profesionales, con el fin de disponer de un instrumento adecuado para la evaluación de las situaciones de aula, refiriéndome en particular de los llamados "obstáculos epistemológicos".
La noche (y las siguientes) la Embajada Italiana nos ofreció como alojamiento dos apartamentos adyacentes, únicos huéspedes de un enorme edificio silencioso y oscuro; pudimos entonces seguir discutiendo por largo tiempo de estas dos visiones, "cultural" y "profesional", que se integraban perfectamente; la ocasión fue ideal para delinear el

[71] El matemático Francesco Speranza (Milano 1932 – Parma 1998) es una figura emblemática de primer nombre nacional (en Italia) en lo que concierne a la reflexión en Epistemología de la Matemática, estudio al que se dedicó sobre todo en los últimos años de su vida. Muchos de los actuales estudiosos italianos de Didáctica de la Matemática se formaron científicamente dentro de su escuela.

sentido de esta doble dirección y nos prometimos encontrar un día para escribir las reflexiones que habían surgido.
Desafortunadamente ese día nunca llegó; en parte porque mis reflexiones epistemológicas tomaron otra dirección (hacia la semiótica y la noética) (D'Amore, 2003b); pero, sobre todo, porque algunos años después él se ausentó definitivamente, ausencia que aún hoy es sentida por mi y por toda la comunidad científica italiana, para la cual era un punto de referencia excepcional.
Intentaré aquí retomar el hilo de aquella discusión, pero incluiré en esta ocasión algunas de mis nuevas reflexiones y experiencias de estudio y de investigación, delineando lo que para mi significa esta *doble dirección de sentido,* explicando la necesidad de una preparación fuerte en este tema *Epistemología de la Matemática* por parte de futuros docentes de Matemática (en mi opinión, no sólo de la escuela secundaria, pero aquí, me limitaré sólo a este nivel escolar).
Es posible, pero inútilmente fatigoso, hacer citaciones explícitas cada vez que se requiera de frases precisas que reportaría directa o implícitamente de los escritos de Francesco Speranza (Speranza, 1997), especialmente en el *primer sentido*, ya que él fue fuente de continua inspiración; es así como, para no tediar al lector con continuos reenvíos, prefiero citar de una vez por todas, esta importante referencia para todo el apartado 2. [Naturalmente, asumo personalmente la responsabilidad de cada una de las afirmaciones que haré, sin atrincherarme detrás de barricadas hechas por la falta de citaciones bibliográficas].

Existen por tanto, como lo expresé líneas arriba, dos motivaciones, a las que no se puede renunciar, que justifican la necesidad de una preparación cultural fuerte en Epistemología de la Matemática para los futuros docentes de la escuela secundaria; estas son:

- factores culturales (que trataré en los apartados 2. y 3.)
- factores didácticos o profesionales (que trataré en los apartados 4. y 5.)

2. Los factores culturales

El desarrollo de nuestra disciplina es el resultado no sólo de un progreso técnico y formal; por el contrario, estos dos aspectos son una consecuencia de la continua revisión del sentido y del significado que la Matemática busca al interno de sí misma. El rigor, por ejemplo, uno de los aspectos que más resiente el profano o el alumno, no es un hecho intrínseco ni una costumbre del profesor, es sólo una necesidad lingüística y filosófica (D'Amore, Plazzi, 1990), un filtro (a veces fatigoso) que el matemático da al propio instrumento lingüístico para evitar tergiversaciones (por tanto pluralidad de sentidos) y para dar un significado único a la comunicación. Es por esto que el rigor no es un hecho absoluto, es un hecho relativo a la época y al lugar, siempre en constante evolución.
De otra parte, el desarrollo de la Matemática, procede en diversas direcciones, pero no se puede negar que, en primera instancia y con gran fuerza, se asocie a la creación de

conceptos;[72] ahora bien, no se pueden crear conceptos sin delinearlos epistemológicamente, por tanto, queriendo o sin querer, quien reflexiona sobre el desarrollo de la Matemática debe necesariamente plantearse el problema de la naturaleza de los conceptos (aquellos mismos que, en Matemática, generalmente se les llama *objetos*) (D'Amore, 2001).

Como consecuencia encontramos que, olvidándonos del matemático de profesión que podría producir, y a veces produce, teoremas y/o teorías al interno de un determinado dominio sin salirse de este y sin estudiar el sentido general epistemológico, otra persona *cualquiera* que se ocupe de Matemática y de su desarrollo *debe* necesariamente ponerse el problema epistemológico como hecho cultural.

El profesor de Matemáticas no es un creador de teoremas ni de teorías, es un profesional, experto en Matemática, a quien la sociedad le propone de hacer sí que los jóvenes ciudadanos construyan y aprendan a usar competencias matemáticas.[73]

En primer lugar, él debe conocer la Matemática, no obstante sobre este punto se hayan presentado diversas posiciones, yo lo juzgo un punto de partida al que no se puede renunciar (D'Amore, 1999a).

Pero el profesor tiene dos deberes principales que consisten en:

- efectuar una *transposición didáctica*; el profesor no puede limitarse banalmente a repetir la Matemática aprendida en la Universidad (su lugar de formación cultural, en lo que concierne a la Matemática); él *debe* transformar la Matemática (el saber matemático elaborado durante su formación académica) en un saber que sea adecuado a los alumnos que tiene bajo su cargo, es decir, él debe transformar el Saber en un "saber de enseñar" (D'Amore, 1999b); esta transformación no es un hecho banal, por el contrario, es ampliamente creativa y forma parte estrechamente de la profesionalidad del docente (Fandiño Pinilla, 2002);
- *comunicar la Matemática*; todos nosotros sabemos que, en una situación de aula, el carácter mediador del profesor es mucho más fuerte y que el estudiante casi nunca tiene acceso directo al Saber, limitando su propio empeño a la relación personal con el profesor y al aprendizaje de la Matemática que el profesor ha elegido para él (en forma más o menos consciente, más o menos vinculada); por tanto, el paso de la Matemática enseñada del docente al aprendiz se da en una situación comunicativa por demás fuerte, dominada por las complejas redes de la pragmática de la comunicación humana (Watzlawick, Beavin, Jackson, 1976).

Tomando como base estos dos puntos, se ve claramente como el profesor no puede ignorar el *sentido* que tiene el desarrollo de la Matemática:

- de otra manera no podría cumplir aquel acto creativo que es la *transposición*; lo puede hacer, sí y sólo sí, está en grado de elegir críticamente al interno de un cuerpo sobre el cual tiene alguna legitimidad y capacidad de decisión; si, por ejemplo, retiene que la Matemática no ofrece alternativas epistemológicas, que el cuerpo de conocimientos es aquello que es, inmutable, eterno, indiscutible, aquello que él aprendió (al máximo antes del "paréntesis universitario"),[74] entonces no estará en

[72] Evito cuidadosamente de decir *descubrimiento* y prefiero decir *creación;* la elección epistemológica de base es evidente (D'Amore, 2003); de todas formas esta discusión no es hoy tan acremente debatida como lo fue en el pasado.

[73] Uso el término *competencia* al puesto de *conocimiento* no por caso (D'Amore, Godino, Arrigo, Fandiño Pinilla, 2003).

[74] Terminología de sólito atribuida a Felix Klein para indicar el período de estudio universitario de un futuro docente de Matemática; donde es implícito un juicio negativo de inutilidad en la formación dado

grado de hacer la transposición didáctica y por tanto su éxito como profesor estaría en duda;

- de otra manera no podría *comunicar* la Matemática; sólo se puede comunicar lo que se ha construido dentro, aquello que forma parte de la experiencia personal, vivida, es decir personalizada; si la Matemática es vista como algo de impersonal, de a-temporal, sólo una sucesión de resultados secuenciales obtenidos por seres humanos que, mientras producen, sólo piensan al interno de la teoría en la cual crean, entonces no se puede hablar de comunicación sino de repetición de resultados; en la pragmática de la comunicación humana es implícito un sentido de propiedad crítica, de capacidad y de disponibilidad en la elección personal; de otra parte, uno de los límites de la Matemática transmitida en la escuela, más de una vez denunciado por Brousseau (1986, por ejemplo) es precisamente el carácter impersonal y a-temporal, este querer esconder la rica historia del esfuerzo y de las dificultades que los seres humanos han encontrado en la construcción de la Matemática tal y como la conocemos hoy; el estudiante que ve en la Matemática sólo los resultados finales, limpios y cristalinos, libres de toda fatiga y de toda discusión, ordenados, obtenidos aparentemente como consecuencia de una deducción axiomática que parece caída del cielo, se le induce a pensar que la Matemática *deba* ser así por naturaleza; si este estudiante es un futuro profesor de Matemáticas, llevará con sí, en su historia profesional, esta concepción equivocada de la disciplina.

Son muchos los autores que puedo citar en defensa de esta visión que da gran importancia a la cultura en Epistemología de la Matemática por parte de los futuros docentes.

Ciertamente Speranza (1997) se empeñó personalmente en la propuesta de incluir oficialmente esta materia como objeto de estudio en los programas de Especialización (postgrado) para la enseñanza de la Matemática en la Escuela Secundaria (que actualmente en Italia habilita para la enseñanza en la Escuela Secundaria). En aquel mismo texto, en particular de la página 124 a la página 127, Speranza me dio la posibilidad de considerar también Enriques, un Enriques en esta misma óptica, con una multiplicidad de citaciones que aquí no reporto. Una confrontación ulterior vino de Vailati, por ejemplo cuando muestra la importancia que tiene la reflexión sobre actitudes relevadas erróneas en el pasado, en la construcción de conceptos matemáticos, incluso en actividades didácticas (Vailati, 1896). Así como Bachelard, quien además es considerado por muchos como el promulgador de la idea de concebir el error en la ciencia como algo que tiene un valor intrínseco (Bachelard, 1951), tanto que en este campo condicionó el pensamiento de Brousseau (1983, 1989), el creador de la moderna Didáctica de la Matemática.

3. Consecuencias directas de los factores culturales en el campo didáctico, metadidáctico y como factores "transversales"

Los aspectos delineados en 2. tienen consecuencias directas en campo didáctico; examinaré sólo algunos ejemplos, el primero en forma más profunda en el apartado 3.1., mientras que de los otros haré sólo un delineamiento en 3.2., pasaré después al apartado 3.3. donde trataré los aspectos metadidácticos y a 3.4. para aquellos "transversales".

---

que, faltando una preparación específica, el docente de Matemática, una vez como tal, replicará el modelo observado cuando era estudiante pre-universitario (Loria, 1933).

3.1 El problema de los "elementos primarios"

Como lo he dicho en otras ocasiones (D'Amore, 2000a), en el siglo XVIII apasionaba la pregunta: ¿qué significa "simple de entender"?. ¿Lo "simple" es un hecho absoluto o un hecho relativo?. ¿Lo "simple" es indiferentemente tanto para el científico como para el estudiante que esta aprendiendo las primeras bases?. O ¿Existe alguna diferencia?, si es así ¿cuál?.

Estas preguntas encontraron intentos de respuesta incluso en la *Encyclopédie* de Jean-Baptiste Le Rond d'Alembert [1717-1783] y Denis Diderot [1713-1784], en particular en los artículos *Análisis*, *Síntesis*, *Método*, *Elementos de ciencia*. [Se trata, según mi opinión, de un estudio específico de Didáctica que se diferencia de los estudios generales de la Pedagogía].

Podría ser interesante, sólo para tener una idea de la situación, ver como d'Alembert autor de la sección *Elementos de ciencias*, intenta hacer emanar ideas didácticas de la hipótesis cartesiana de síntesis, de lo simple a lo complejo, y de como se ve obligado él mismo a admitir que la situación se complica de inmediato.

Se de forzar las cosas, pero es como si se comenzara a admitir algo de moderno, que existe una profunda diferencia entre:

- la disciplina en sí, tal y como es conocida y practicada por los especialistas, por los científicos;
- la Didáctica general en sí, tal y como esta constituida, con sus acepciones generales aceptables y garantizadas por reflexiones significativas conducidas por expertos del sector;
- la Didáctica disciplinar en sí, que tiene parámetros, paradigmas y objetivos totalmente diferentes.

El verdadero punto en discusión esta evidenciado cuando d'Alembert intenta ver que significa que un concepto *precede* a otro: ¿de cuál partir?; ¿cuál tomar como punto de partida?; ¿cuáles son los *conceptos primarios*?.

Por ejemplo, en Matemática, el científico toma como punto de partida ideas como espacio, plano, recta, punto, número, … y algunas "conexiones" entre estos; pero, ¿estamos totalmente seguros que en Didáctica de la Matemática esto sea lo más conveniente?. ¿Los elementos primarios del científico son o deben ser necesariamente los mismos elementos primarios del alumno?.

Más que aceptar los elementos primarios del científico, ¿no sería mejor recorrer la generación de ideas que han llevado a elegir estos objetos como primarios?.

No es aquí el caso de profundizar, pero es representativo el hecho que este debate, de carácter didáctico, lleve a d'Alembert a pasar de una posición del todo cartesiana a una posición lockiana y después ver como intenta de conciliar estas dos: «Las ideas simples pueden reducirse a dos tipos: uno son las ideas abstractas (…) el segundo tipo de ideas simples está encerrada en las ideas primitivas que adquirimos a través de nuestras sensaciones».

Pero: los elementos que los estudiantes, que se acercan por primera vez al estudio de la ciencia, están en grado de comprender, ¿son o no son los mismos elementos de la ciencia?; o: ¿son por lo menos de igual naturaleza?.

- Si se responde que sí, entonces el método didáctico es una reestructuración, una sistematización, una puesta en campo progresivo de los elementos de la ciencia, del saber de los científicos ((Kintzler, 1989);

- si se responde que no, ¿cómo se pasa de las competencias infantiles, de los elementos cognitivos que posee un estudiante al inicio de su recorrido escolar, al saber científicamente entendido?.

En todo caso, ¿qué relación existe entre los elementos primarios adquiribles por el estudiante y los elementos primarios de las ciencias académicamente entendidas (Saber o *Savoir savant*)?.

Para mi, es a partir de este debate que comienza finalmente a delinearse una terna de contenidos:

- los contenidos de la disciplina *d*, establecidos por esta, por su historia;
- los contenidos de la Didáctica de aquella disciplina: D_d; esta tiene como objeto de estudio la sistematización (en la óptica: enseñanza → aprendizaje eficaz) de los elementos de la disciplina *d*, pero los contenidos específicos de D_d no son sólo los contenidos de la disciplina *d*, son nuevos respecto a *d*;
- los contenidos de otra teoría, más general, que se podría identificar con aquella que evidencia el problema de como pasar, más allá del caso específico, de los contenidos de *d* a los contenidos de D_d, sea cual sea la disciplina *d*; se podría entonces comenzar a pensar en una especie de Didáctica general, entendida en este sentido.

Es gracias a una relación entre reflexión epistemológica y didáctica sobre la Matemática que se llega al debate sobre los *elementos primarios*, para entender el por qué no existe coincidencia entre los elementos primarios para un estudiante al inicio de su formación escolar y los elementos primarios de la Matemática. Sin esta posibilidad de reflexión crítica, el profesor se sentiría inclinado a pensar que esta coincidencia se presenta.

3.2 Las "fracciones", los racionales, el pasaje a los reales, la densidad, la continuidad

Sin una fuerte preparación en Epistemología de la Matemática, todos los temas citados en el título de este párrafo podrían ser fuente de equívoco: el profesor transmite un saber a los alumnos, después de una transposición didáctica que él juzga idónea. Pero, en un caso de no suceso, cuando los alumnos no construyen conocimiento (tanto menos competencia), la única alternativa que se tiene es pensar que los estudiantes no tienen la capacidad para afrontar este tipo de cuestiones, que no están a la altura. O, peor aún, pensar que él no es idóneo para ejercer la profesión docente.

Precisamente las competencias epistemológicas revelan, por el contrario, las increíbles incidías que se esconden detrás de estos temas. En Fandiño Pinilla (2002), por ejemplo, se estudia precisamente el caso ejemplar del debate didáctico/epistemológico entre "fracciones" (objeto del saber escolar) y "racionales" (objeto del Saber).

Las increíbles convicciones que tienen algunos estudiantes maduros (alumnos que cursan los últimos años de la escuela superior, incluso después de haber seguido un curso de Análisis) sobre la densidad y la continuidad, propuestos en el aula como puros objetos matemáticos de aprender, sin ninguna atención epistemológica, están evidenciadas por gran número de autores que han hecho investigaciones didácticas en este campo.[75]

3.3 Factores "meta", determinantes para la didáctica

Además del problema delineado en 3.1. sobre qué son los elementos primarios, existen otros factores que llamamos meta-matemáticos; por ejemplo, qué son las definiciones, o, qué son las demostraciones.

[75] Sobre este tema véase: D'Amore, Fandiño Pinilla (2004) e D'Amore (2005).

Sobre la interpretación de estos dos términos, habría mucho que decir; sin una profunda competencia epistemológica, se corre el riesgo de tergiversar burdamente el *sentido* de estas dos componente fundamentales de la Matemática. Cuántas veces he visto estudiantes confundir estos dos términos, confirmando la ausencia de *sentido*. Desafortunadamente, en varias ocasiones, escuché profesores que corregían el enunciado de una definición dada por el estudiante con expresiones del tipo: «No se dice así, debes decir así…»; y pensar que, hablando precisamente de definiciones, escuché por primera vez a Francesco Speranza hablar de "la libertad de la Matemática" (lo que me impulsó a intervenir didácticamente sobre este tema: D'Amore, 1986). Y ¿qué decir de las demostraciones repetidas a memoria?. ¿Cuántas veces nosotros, como profesores universitarios, hemos escuchado a más de un estudiante pronunciar la terrible frase: «Esta demostración no la recuerdo»?. También esto es señal de la tergiversación de base en lo que respecta al *sentido* de la demostración (y por tanto, más en general, de la Matemática y del conocimiento matemático).
¿Cómo se forman estas deletéreas convicciones en los estudiantes?. Ciertamente no por generación espontánea: estas son el resultado o de falaces enseñanzas directas o de interpretaciones inducidas por comportamientos repetidos y tal vez causados por el contrato didáctico.
Sólo una fuerte preparación de los docentes en Epistemología de la Matemática (y en Didáctica de la Matemática) puede, de una parte, fortalecer las convicciones positivas de los profesores sobre estos temas, y, de otra, hacerlos didácticamente activos.
Ya sea en las definiciones como en las demostraciones debe existir un amplio "grado de libertad", favorecido por el profesor, conquistado por el estudiante; es esto lo que nos enseña la Epistemología.
A propósito de demostración, deseo señalar el hecho de como tergiversaciones negativas lleva a casos aberrantes, como el señalado en D'Amore (1999b) en las páginas 358-360, relativo al comportamiento demostrativo de hechos absurdos por parte de un estudiante de 3° grado de la escuela superior (17 años) que escribía frases en secuencia sin ninguna relación lógica entre ellas, pero sintácticamente correctas, rica de gerundios, de conectores causales, con un formalismos preciso y exuberante. Intervenir en estos casos es casi imposible, pero lo que sí es posible es prevenirlos; sólo que para prevenir estas situaciones se necesita de una sólida competencia tanto en Epistemología como en Didáctica de la Matemática, no sólo en Matemática.

3.4. Factores "transversales"

Entre las numerosas conquistas culturales fuertes que derivan de la cultura epistemológica, doy un gran énfasis a las siguientes tres reflexiones:

- como esta hecho el lenguaje de la Matemática
- como se aprende la Matemática
- las fuertes relaciones que existen entre semiótica y noética

Me limitaré a breves consideraciones.

Son muchas las tergiversaciones que existen al rededor del lenguaje que usamos en Matemática; y tantas las convicciones que determinan misconcepciones. Sobre este tema trabajé por mucho tiempo (D'Amore, 1993, 1996, 2000b; por ejemplo). Si la convicción (débil) del profesor es que el lenguaje que se usa en Matemática es unívoco y eternamente determinado a priori por la comunidad científica, no podrá esperar del alumno más que un uso ciego de este, sin vías personales; lo que lleva por lo general a

una especie de intento de imitación a-crítica por parte del estudiante, una mala copia del lenguaje, vacía y estéril, que constituye para la clase un tipo espejismo al que nunca se llega; en D'Amore (1993) llamé "matematiquese" este lenguaje de aula, dando diferentes pruebas de su existencia y de su carácter negativo.

"Cómo" se aprende la Matemática no es sólo un problema psicológico, pedagógico o didáctico, como ingenuamente se podría pensar en un primer momento, porque el "cómo" está estrechamente ligado al "qué", el aprendizaje matemático es también un hecho que tiene que ver con la Epistemología; por ejemplo, hay quienes creen que el aprendizaje de nuestra disciplina puede reducirse únicamente a cálculos (en diversos niveles), como si este fuera el *sentido* de la Matemática; esta característica fuertemente intrínseca instrumental es mucho más común de cuanto se pueda imaginar: ¿cómo podemos pensar que un joven llegue a *construirse* conocimiento matemático?. En una visión epistemológica *realista*, esta posición podría incluso encontrar un puesto, dado que los conceptos matemáticos son el punto de llegada ideal; mientras que en una visión *pragmática* el concepto es la construcción personal obtenida en cada momento (D'Amore, Fandiño Pinilla, 2001; D'Amore, 2003a), en el paso de una relación personal con el saber, hacia una relación institucional, en una visión antropológica (Chevallard, 1992).

Que el aprendizaje matemático este fuertemente ligado con la noética, entendida como aprendizaje conceptual, esta fuera de toda discusión; cae bajo la mirada de todos y es confirmado por varios autores (Duval, 1993, 1995). Precisamente sobre la base del impulso de Duval, en los últimos años, he dedicado mi energía de investigador a este tema; me limito a indicar D'Amore (2003a, b). Que la Matemática se vea obligada a servirse de representaciones al interno de registros semióticos es un hecho ya aceptado, es más, considerado obvio, después de los estudios pioneros de Duval. Que existe una paradoja cognitiva en el hecho que un estudiante deba construir conocimiento conceptual a través de representaciones semióticas (la "paradoja de Duval") (en sus tres características esenciales: representación, transformación de tratamiento y transformación de conversión) (Duval, 1993, 1995; D'Amore 2003a, b) es también una idea ampliamente compartida, tanto que en D'Amore (2003a) inicié una operación de integración de las teorías didácticas de Brousseau y las observaciones de Duval, mostrando como elementos de una se pueden explicar por medio de la otra; en particular, mostré como a veces una situación a-didáctica no tiene suceso a causa, precisamente, de una falta de devolución que se centra en el hecho que el estudiante no alcanza la noética a través de la acción sobre la semiótica. De todo esto se concluye con la máxima evidencia que un profesor no puede fingir e ignorar la cuestión, confundiendo, como sucede generalmente, noética con semiótica: él, adulto, culto, experto, *profesor*, cree de trabajar didácticamente sobre los conceptos, mientras el estudiante, joven, no culto, esta trabajando sobre las representaciones semióticas (al máximo sobre sistemas de representación semiótica). Ignorar este *hecho* comporta una separación entre las dos acciones (aquella del enseñar y aquella de aprender) que sólo puede producir un fracaso.

Existen, según mi forma de pensar, muchos otros factores que son de tipo "transversal" y que tienen en común la necesidad del estudio de la Epistemología de la Matemática; aquí quería mostrar, como ejemplo, sólo algunos de estos.

4. Los factores didácticos (o profesionales)

En 2. evidencié el por qué es necesaria la competencia en Epistemología de la Matemática en la preparación de futuros profesores de Matemática, haciendo referencia tanto a motivos culturales (que estudié con cualquier particularidad en 3.) como a motivos didácticos (o profesionales). En este apartado 4. afrontaré más detalladamente precisamente esta última motivación. Me reservo un (especie de) anexo en 5. donde desarrollaré ulteriormente este apartado 4., pero sin crear discontinuidad con lo ya afirmado en 3.

4.1 Obstáculos epistemológicos

Todos los investigadores en Didáctica de la Matemática conocen la "teoría de los obstáculos", teoría fundamental de Guy Brousseau (1983, 1986, 1989; véase también D'Amore 1999a, para un tratamiento al interno de una teoría compleja que involucra toda la didáctica de la Matemática). Por más distinciones que se puedan hacer, sigue siendo fundamental, para la gestión de la vida en aula y para el análisis de los errores (con todo lo que implica en el campo de la evaluación), la distinción en tres tipologías de obstáculos:

- ontogenéticos
- didácticos
- epistemológicos.

Si tomamos el "triángulo de la didáctica" (Chevallard, 1985) como modelo de la situación de aula (en particular para evidenciar la complejidad del sistema) (D'Amore, Fandiño Pinilla, 2002), entonces se puede intentar como una primera aproximación que los obstáculos:

- ontogenéticos son asociables al vértice "alumno"
- didácticos son asociables al vértice "maestro"
- epistemológicos son asociables al vértice "Saber".

Esta forma de ver las cosas da una idea de unidad al interno de la Didáctica, como teoría clarificadora de las relaciones, que de otra forma se eludirían. En tal caso, pero, resulta obvio que este instrumento potencialmente excepcional produce resultados positivos en las manos del profesor sí y sólo sí él toma conciencia (conciencia que se logra gracias a los estudios de Didáctica); pero, por lo que respecta al tercer punto, él tiene necesidad de un conocimiento más, el de la Epistemología precisamente, para poder por lo menos reconocer, entre los inevitables errores de los estudiantes, aquellos que se pueden catalogar propiamente como los que tienen origen en un obstáculo epistemológico. En este caso, la Didáctica por sí sola no puede alcanzar y pide ayuda a las competencias epistemológicas.

4.2 Cambio de convicciones

Hoy sabemos muy bien que las competencias maduradas por los futuros profesores de Matemáticas producen en ellos cambios de convicciones y de hecho cambio de concepciones.[76] Dado que sobre este tema la bibliografía es vasta, reenviamos a

[76] La distinción entre estos dos términos, a primera vista sinónimos, es hoy ya aceptada en ambiente de investigación; se usa hacer una diferencia más o menos explícita como sigue (D'Amore, Fandiño Pinilla, 2004):

D'Amore, Fandiño Pinilla (2004), artículo en el cual la bibliografía es fuertemente seleccionada. En este trabajo se presenta una investigación cuyo objetivo era el de evidenciar precisamente los cambios en las convicciones y en las concepciones que sobre la Matemática, la Didáctica de la Matemática y sobre el papel del docente de Matemática, se hayan presentado en los profesores de escuela secundaria en formación inicial, después de haber cursado (en Bologna) los 4 semestres del programa de Especialización para la enseñanza de la Matemática. El hecho tiene aquí, un particular intereses, dado que en Bologna dentro de esta especialización se deben cursar 2 cursos específicos de Epistemología / Historia de la Matemática, mientras que los 2 cursos de Didáctica de la Matemática tienen un fuerte contenido problemático y epistemológico, siguiendo la tradicional "escuela francesa" y se da gran énfasis a las cuestiones fundacionales (los cursos se basan en el estudio de diversos materiales, entre los cuales D'Amore, 1999a, que se discute oralmente en grupos, por dos semestres). Reenvío aún al texto D'Amore, Fandiño Pinilla (2004), para los detalles, pero resulta un hecho muy interesante cuando a declarar a propósito de sus cambios son precisamente los futuros profesores que siguen el programa de especialización: siempre se mezclan motivaciones didácticas con motivaciones epistemológicas, expresión del hecho que los estudiantes, dado que serán profesionales de la escuela en el futuro, tienden a evaluar sus nuevas competencias epistemológicas al interno de la acción didáctica.
Entre los cambios de convicciones que mayormente asombran a los mismos profesores en formación, emerge una diferencia entre una precedente imposibilidad de un uso impropio del lenguaje matemático y una nueva disponibilidad a escuchar el alumno que se empeña en una comunicación a sujeto matemático. Sobre este punto, gran influencia tienen las pruebas de práctica docente efectuadas concretamente en las aulas; quienes cursan el programa de especialización cambian radicalmente de convicciones sobre el *sentido* que debe tener al contenido matemático que los estudiantes expresan sobre la base de dos factores que han aprendido a reconocer en los cursos del programa de Especialización:

- si bien la comunicación del estudiante A al estudiante B sea incorrecta (del punto de vista del adulto), B entiende el sentido
- generalmente el uso del lenguaje es inapropiado (respecto a las expectativas del adulto) no por lagunas matemáticas sino por incomprensión en la base.

Un ejemplo de este segundo punto esta dado en el comportamiento de un estudiante que, a la solicitud de definir el paralelogramo responde: «Un paralelogramo es un cuadrilátero que tiene los lados dos a dos». Se tiene un disentimiento entre las expectativas: de una parte el profesor advierte la omisión de un adjetivo que "cierre" la frase ya que, dicha así, no tiene sentido; de otra parte, el estudiante juzga que haber repetido correctamente 12 palabras de 13 sea ya un muy buen resultado. Es verdad que juega un papel importante el contrato didáctico y las diversas concepciones que de la Matemática tienen los dos actores de la historia, pero también es verdad que existen

---

- *convicción* (belief) (o creencia): opinión, conjunto de juicios /expectativas, lo que se piensa a propósito de algo;
- el conjunto de las convicciones de una persona (A) sobre un determinado hecho, argumento, cosa (T) determina la *concepción* (K) de A relativa a T; si A pertenece a un grupo social (S) y comparte con los otros integrante de S el mismo conjunto de convicciones relativas a T, entonces K es la concepción de S relativa a T.

A veces, al puesto de "concepción de A relativa a T" se habla de la "imagen que A tiene de T".

expectativas epistemológicas diversas en lo que concierne al uso del lenguaje en Matemática.

4.3. Currículo y la centralidad del alumno

Las observaciones precedentes tienen notables repercusiones en el sentido del currículo; de un pesante fardel de respetar, el currículo se convierte en un instrumento de plasmar y de aprovechar en la situación verdadera de aula, móvil conductor de la historia de clase. De una lista más o menos comentada que viene impuesta en aula y que condiciona toda la actividad dentro de esta, el currículo se transforma en arma que se adaptada a hacer sí que cada estudiante sea puesto, con base en sus propias capacidades, en las mejores condiciones para construir competencias matemáticas; de un currículo normativo se pasa precisamente a un currículo que refleja puntos de vista epistemológicos (Fandiño Pinilla, 2002, pag. 36 y segg.: «el punto de vista epistemológico en la construcción del currículo»).

Esto coloca al centro la figura del alumno, y deja de lado aquella secuencia curricular junto con los meros contenidos. Esto significa interpretar al revés aquello que en D'Amore (1999b) he llamado "epistemología del aprendizaje de la Matemática": el problema real de quien se ocupa de Didáctica de la Matemática, como investigación o como profesión, es el de entender los procesos de aprendizaje de la Matemática, no limitarse únicamente a crear ideales de enseñanza.

Sólo un ejemplo para clarificar este punto de vista.

Desde hace muchos años forma parte de las tareas de un estudiante de Matemática aprender a demostrar teoremas; el Saber decidió que el paradigma de respetar universalmente en lo concerniente a tal actividad esta en la lógica megárico – estoica y aquella aristotélica; razón por la cual, muchos consideran *preliminar*, a la actividad de demostrar, el aprendizaje de la Lógica, como un capítulo de la Matemática. Es por eso que los estudiantes aprenden las tablas de verdad semánticas, los conectivos, en particular la implicación material. Una vez hecho esto, comúnmente se confunde deducción (meta-lingüística) con la implicación (lingüística) y se pasa a la estructura de los teoremas y a sus demostraciones. Si el estudiante no logra el éxito, se le considera como no apto para la demostración o por lo menos no en grado de demostrar. Pero si se da particular atención a las propuestas demostrativas de los estudiantes, dando la vuelta al sentido de la experiencia, se pueden encontrar sorpresas interesantes. Me di cuenta del hecho que los estudiantes que no lograban llevar a buen término una demostración simplemente no sabían gestionar el instrumento meta-lógico propuesto y pensé que tal vez este era no adecuado. Fue entonces que me prometí observar a estos estudiantes para entender los diferentes tipos de errores que cometían. Así descubrí que muchos de ellos hacían referencia continuamente a ejemplos inapropiados, enunciando la tesis como si fuera hipótesis, intentando anclar las implicaciones materiales a ejemplos concretos. Recordé la lógica nyaya, desarrollada hace miles de años en India, en la cual el esquema de razonamiento típico estaba concebido en forma muy diversa de la forma de razonamiento aristotélico. Para conocer los detalles de este largo estudio, circunstanciado y corroborado con ejemplos tomados del aula, reenvío a D'Amore (2004a).

Me limito aquí a un ejemplo, el más representativo de esta lógica (exactamente como el silogismo de Sócrates es considerado como ejemplo prototípico de la lógica aristotélica):

1. el objeto A se mueve (afirmación)
2. porque se le aplicó una fuerza (razón)
3. cada vez que se le aplica una fuerza a un objeto este se mueve (proposición general); por ejemplo: si se amarran bueyes a una yunta, esta se mueve (ejemplo)
4. al objeto A se le aplicó una fuerza (aplicación)

por tanto

5. el objeto A se mueve (conclusión).

Es bastante fácil escribir en forma moderna este razonamiento. Pero antes de dar una formulación en lenguaje moderno del ejemplo anterior, introduzcamos un simbolismo oportuno; sean:
A, B objetos dados, X un objeto genérico;
P(X): enunciado predicativo abierto "X se mueve"
F(X): enunciado predicativo abierto "a X se le aplicó una fuerza".
El enunciado abierto F(X) es verdadero si cada vez que, sustituida la variable X por una constante A, F(A) es experimentalmente verificable (en el sentido: su veracidad cae bajo el peso de los sentidos) (esta es, al menos, la interpretación empirista nyaya; es necesario hacer notar también que, para los lógicos nyaya, los sentidos son seis).
El razonamiento nyaya se puede ahora interpretar formalmente como sigue:

Afirmación:	1.	P(A)	afirmación (aún no probada)
Razón:	2.	F(A)	causa que actúa sobre P(A)
Tesis:	3.	$(\forall X)\ [F(X) \rightarrow P(X)]$ Por ejemplo: $F(B) \rightarrow P(B)$	proposición general ejemplo
Aplicación:	4.	F(A)	del caso general se pasa al caso en examen: una fuerza ejerce una acción sobre A
Conclusión:	5.	P(A)	A se mueve

Ahora bien, algunos de los estudiantes entrevistados y considerados como no en grado de conducir con éxito una demostración, de hecho efectuaban demostraciones siguiendo la lógica nyaya y no siguiendo la lógica aristotélica o megárico–estoica. Sin informaciones de carácter epistemológico, no hubiera contado con los instrumentos epistemológicos para darme cuenta, como investigador, de este hecho. De igual forma, sin los instrumentos epistemológicos adecuados, el profesor se queda sin armas. En este caso, pude sugerir al profesor confrontar estos dos instrumentos demostrativos en aula, buscando analogías y deferencias.
Es obvia la importancia que en todo esto tiene una visión epistemológica del currículo que privilegia la visión central del alumno en aula.

4.4. La influencia sobre la evaluación

De los últimos párrafos, particularmente, emerge una visión compleja de la evaluación como proceso y no como fin, por tanto como instrumento didáctico. En Fandiño Pinilla (2002, pag. 75 y segg.) se propone una evaluación que tiene diferentes objetivos: evaluación del currículo, autoevaluación de la eficacia del proceso de enseñanza, evaluar para dar información de lo que se considera importante, evaluar para tomar decisiones, evaluar para dar un juicio del alumno… En cuanto a los objetivos y a las

técnicas de cada una de estas acepciones, la situación es complicada precisamente porque en muchas ocasiones, para tomar decisiones, se necesita hacer elecciones de carácter epistemológico (véase la evolución histórica-social de la idea de evaluación en los últimos 100 años, en las páginas 94-96 del texto citado líneas arriba; y el elenco de las funciones y de las características de la evaluación según el enfoque de diversos Autores, a partir de la elección epistemológica, en las páginas 97-98). Una innovación de la evaluación implica elección de criterios y es por esto que se llama "evaluación por criterios". A frenar estos específicos impulsos innovadores (que, en algunos Países, se han convertido normas de ley para la Escuela), están ciertamente las convicciones de los profesores y muchas de sus concepciones de escuela, sentido de la instrucción etc., en forma mucho más específica.
Pero, hemos visto como las convicciones epistemológicas, incluso cuando faltan o dan la idea de faltar (Speranza las llama: *implícitas*, 1997), marcan decididamente todas las otras, así que el círculo se cierra…
Entre las elecciones, no siempre implícitas, surgen, con un cierto porcentaje, aquellas actitudes que reflejan, más o menos, formas de interpretar la Matemática y que se identifican con escuelas epistemológicas:

- formalismo
- platonismo
- logicismo
- empirismo
- intuicionismo según Poincaré
- intuicionismo como construcción de actos de pensamiento
- …

y hoy, más en general, condensadas en dos grandes grupos (Speranza, 1997, D'Amore, 1987):[77]

- realismo
- pragmatismo

que las resumen (D'Amore, 2003b).

Ahora bien, el uso de las convicciones maduradas con los estudios epistemológicos debe hacer pareja con una fuerte competencia en Didáctica de la Matemática porque sólo así se contribuye a formar aquella *herramienta*, aquellos instrumentos útiles, prácticos y teóricos, en la profesión docente, para entender de esta forma la evolución de las situaciones de aula. A esto favorece ciertamente la valiosa contribución de Guy Brousseau quien, además de ser pionero y de haber determinado los primeros pasos de la Didáctica de la Matemática, proporciona aún hoy, en mi opinión, material de reflexión, en constante evolución y de gran profundidad. Ideas como el contrato didáctico, la teoría de los obstáculos, la teoría de las situaciones,… junto con los análisis críticos que han llevado a la desaparición de precedentes formas de interpretar la Didáctica de la Matemática, son aún hoy de analizar y de potenciar: son misterios que esperan ser aclarados.

[77] Este trabajo de 1987 es (más o menos) el texto de una comunicación que hice en Valencia en el mismo año; también este viaje fue una ocasión de confronto muy fuerte con Francesco Speranza sobre temas epistemológicos; yo intentaba encontrar raíces de autoridad, de las "bases epistemológicas" dado que, en aquel momento, estábamos detallando los nuevos programas de matemática para la escuela italiana y, naturalmente, era para mi un gran conforto las discusiones y los debates con un gran Maestro.

5. Epistemología e Historia de la Matemática; la Historia como clave para entender la Epistemología; el uso de la Historia en la Didáctica de la Matemática

5.1. Epistemología e Historia de la Matemática

«La filosofía sin la historia es vacía, la historia sin la filosofía es ciega», afirmaba, y con razón, Kant (por ejemplo: Speranza, 1997, pag. 145). Lakatos circunstanciaba: «La filosofía de la ciencia sin la historia es vacía, la historia de la ciencia sin la filosofía de la ciencia es ciega» (Lakatos, 1971, pag. 102).

Una vez aceptada la posición de estos gigantes, todo comentario es superfluo. Se concluye que, si la Epistemología estudia la evolución de los conceptos, no es posible pensar en escindir los estudios de Epistemología de la Matemática de aquellos de la Historia de la Matemática. Esto justifica la elección de llamar a los cursos del programa de Especialización con el nombre actual de Epistemología / Historia de la Matemática.

5.2. La Historia para entender la Epistemología

Así, parece obvio pensar la Historia como la referencia paradigmática por excelencia para entender la evolución de las ideas y las necesidades de adecuar el pensamiento. Por ejemplo, si nada se supiese de los orígenes aristotélicos de la geometría euclidiana, ni de las geometrías no euclidianas con su consecuente revolución sobre el concepto de verdad matemática, ni de la necesidad de un nuevo rigor que diese a los términos primarios y a los axiomas un *sentido* moderno, no se podría entender el por qué David Hilbert tuvo que escribir nuevos elementos de Geometría 22 siglos después de los de Euclides. Veo entonces en la Historia de la Matemática el aspecto clave para entender la Epistemología.

5.3. Uso de la Historia en la Didáctica

Si bien los dos puntos anteriores sean de excepcional relevancia, tanto de dar razón a quien impone cursos de Epistemología a los profesores en formación, existe un punto que emerge con gran fuerza en los últimos 30 años, un punto al cual tanto Francesco Speranza como yo dimos forma curando la edición de 3 libros, con diversos títulos, que recogen experiencias verdaderas de profesores de distintos niveles escolares, cuando esto aún no era común (D'Amore, Speranza, 1989, 1992, 1995); se trata del uso de la Historia de la Matemática como instrumento didáctico en los cursos de Matemática.

Dado que este punto se relaciona estrechamente con las cuestiones epistemológicas, considero correcto hacer referencia a este hecho.[78] De otra parte, si se quiere usar la Historia de la Matemática en aula, se requiere conocer la Historia de la Matemática; por tanto tiene sentido el problema de la cuestión de la preparación en Historia de los futuros profesores de Matemática.

5.4 La Historia de la Matemática en la formación de futuros profesor de Matemáticas

Según Freudenthal, aprender la matemática significa "re-inventarla" (se describe un proceso denominado "mathematising") (Freudenthal, 1973): por tanto el papel de la componente histórica en la enseñanza justifica una profundización específica.

[78] Agradezco al amigo y colega profesor Giorgio Bagni (Universidad de Roma "La Sapienza") por el material y los consejos que generosamente me ha dado para la redacción de este apartado.

Considerar un concepto matemático a través de su evolución histórica requiere la toma de posiciones epistemológicas no siempre fáciles: la misma selección de los datos históricos no es neutra (Radford, 1997) y problemas notables están relacionados con su interpretación, conducida inevitablemente a la luz de nuestros actuales paradigmas culturales, mediante los cuales se ponen en contacto culturas "diversas pero no inconmensurables" (Radford, Boero, Vasco, 2000, pag. 165).
Hemos insistido mucho sobre el hecho que la enseñanza esta influenciada por las concepciones de los profesores a propósito de la naturaleza de los conocimientos científicos y de su evolución. Surge por tanto fundamental que un profesor se confronte directamente con la historia de la disciplina y que pueda llegar a explicar las referencias históricas consciente y coherentemente con las propias concepciones epistemológicas (Thompson, 1992; Moreno, Waldegg, 1993; Speranza, Grugnetti, 1996).
En general, la Historia de la Matemática ofrece a la didáctica algunas posibilidades importantes (Furinghetti, Somaglia, 1997):

- en primer lugar aquella de la aproximación anecdótica que, siendo en ocasiones considerada superficial, puede reforzar en términos significativos la motivación de quien aprende (D'Amore, Speranza, 1989, 1992, 1995; Radford, 1997; D'Amore, 1999a);
- la posibilidad de una reflexión metacognitiva;
- la posibilidad de un conocimiento orgánico de un periodo histórico y de la comprensión de las situaciones culturales que han determinado el nacimiento o la difusión de una idea matemática.

Refiriéndonos a aquel vértice del triángulo de la didáctica que llamamos Saber (Chevallard, 1985), llamaremos "conocimiento institucionalizado" la última versión, desde un punto de vista cronológico, del saber en cuestión, es decir la forma más reciente que ha sido aceptada por la comunidad científica: de esto se desprende que la institucionalización a la cual hacemos referencia viene a ser contextualizada y correlacionada con los diversos ambientes socio-culturales (Bagni, 2004b). A este punto entra en juego la componente histórica: es de hecho muy extraño (o tal vez imposible) que un conocimiento matemático nazca de una idea absolutamente nueva, sin ninguna conexión con las experiencias del pasado: por muchas razones un conocimiento incorpora en sí mismo las propias raíces históricas. ¿Qué relación existe entre el conocimiento institucionalizado y su propia historia?.
Tal problemática nos lleva a indagar con mayor profundidad en la estructura histórica de un conocimiento matemático que, como veremos, podría influenciar notablemente la didáctica. Siguiendo D'Amore (2001), podríamos, como ejemplo, preguntarnos: ¿el incremento progresivo del saber puede ser asociado a un proceso de inclusión (acumulación cuantitativa) o de sobre-posición (cualitativa)?. En otras palabras: ¿la reformulación de un objeto matemático incluye las viejas versiones o las reemplaza? (D'Amore 2001).
La adopción de modelos de (pura) inclusión o de (pura) sobre-posición comporta problemas teóricos: dichos modelos sufrirían de una formulación descontextualizada. La concepción de evolución del saber K que prevé incluir un conocimiento K(m+1) al conocimiento K(m) no tiene en cuenta que K(m) tenía sentido en su contexto original C(m), mientras el conocimiento K(m+1) resiente del nuevo contexto socio-cultural C(m+1) que se ha creado (en Bagni, 2004a se examina, como ejemplo, el caso de los procedimientos infinitesimales). De otra parte, la sobre-posición de los conceptos

conduciría a una continua re-fundación siempre nueva, mientras la (progresiva) variación del ambiente socio-cultural lleva a pensar en progresivas adaptaciones.
En un momento histórico (por ejemplo, en el momento actual) y en un contexto socio-cultural C(n) determinado, podemos pensar en procesos en los cuales las versiones "históricas" del conocimiento en consideración vienen a formar parte del Saber en relación con los contextos socio-culturales en los cuales se desarrollaron; por este motivo, el proceso se entiende como una continua evolución cronológica, un continuo devenir.
Volvamos ahora al aspecto didáctico: descrito el Saber específico de conocimiento K, es necesario proceder a su transposición didáctica, es decir en saber de enseñar. Hemos visto la importancia que reviste, en esta transformación, la Epistemología; y ahora nos preguntamos: ¿qué papel se le reconoce, en esta fase, a la Historia de K?. En particular, ¿cómo se diferencian las modalidades de la transposición del conocimiento K(n) (institucionalizado en el momento en el cual se incluye en el proceso de enseñanza / aprendizaje) de aquellas de la transposición de las referencias que constituyen la "historia de K"?. El punto crucial está constituido por la transposición de la "historia de K"(Gadamer, 1975).
Indiquemos dos elecciones posibles:

- la transposición de K(1), K(2), …, K(n-1) tomando como referencia el contexto C(n) (*actualización*);
- la transposición de K(1), K(2), …, K(n-1) tomando como referencia los respectivos contextos C(1), C(2), ..., C(n–1) (*contextualización histórica de las referencias*).

Cada una de las opciones se basa evidentemente en una postura epistemológica fuerte que presenta, desde el punto de vista didáctico, aspectos delicados:

- una evolución histórica *propuesta didácticamente* desde un punto de vista moderno no sería tal vez radicalmente inaceptable (mientras que una interpretación platónica de la historia en sentido absoluto nos dejaría hoy escépticos y perplejos); dicha concepción permite, por ejemplo, mostrar a los alumnos los principales obstáculos epistemológicos y hacer precisiones sobre algunas posiciones históricas cuya debilidad epistemológica fue revelada sucesivamente (Sfard, 1991);
- pero una formulación que pretenda seguir el desarrollo cognitivo de un recorrido modelado sobre la evolución histórica (Piaget, Garcia, 1983) encontraría dificultades teóricas y alguna duda fundamental.

La presentación de elementos históricos con referencia al propio contexto socio-cultural (Radford, 2003) ofrece la posibilidad de una profundización orgánica e induce reflexiones fundamentales sobre la génesis de un concepto (Radford, Boero, Vasco, 2000). La elección de una historia "interna", de un desarrollo insolado de la Matemática, aparece problemática (Grugnetti, Rogers, 2000, pag. 40) y difícilmente sostenible desde un punto de vista epistemológico.
Esto, sólo para trazar un panorama reducido de la complejidad de la gestión de la Historia con fines didácticos; esta bien intentar una aproximación anecdótica para motivar, pero no es este el verdadero y propio reto cognitivo exitoso. En el momento que se intenta algo más significativo, vemos surgir problemas y desafíos de gran interés que pueden y deben ser afrontados por el docente de matemática con conciencia profunda.
En todo caso, Historia y Epistemología están estrictamente relacionadas entre ellas y su sistema lo es con la Didáctica de la Matemática. Tanto que se podría seguir la vía abierta de Kant y reforzada por Lakatos, acuñando una ulterior máxima:

La Didáctica de la Matemática sin relaciones con la Epistemología y la Historia es como un instrumento ágil y potente que ninguno sabe usar plenamente; la Epistemología y la Historia son medios culturales fuertes, abstractos y profundos, que la Didáctica de la Matemática hace concretos y útiles al progreso de la humanidad, a la construcción de competencias, a la conciencia del propio saber.

Referencias bibliográficas

Bachelard G. (1951). *L'activité rationaliste de la physique contemporaine*. París: PUF.

Bagni G.T. (2004a). Historical roots of limit notion. Development of its representative registers and cognitive development. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*. En curso de impresión.

Bagni G.T. (2004b). Storia della matematica in classe: scelte epistemologiche e didattiche. *La matematica e la sua didattica*. En curso de impresión.

Brousseau G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 4, 2, 165-198.

Brousseau G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 7, 2, 33-115.

Brousseau. G. (1989). Les obstacles épistémologiques et la didactique des mathématiques. En: Bednarz N., Garnier C. (eds.) (1989). *Constructions des savoirs, obstacles et conflits*. 41-64. Montreal: Agence d'Arc.

Chevallard Y. (1985). *La transposition didactique, du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble: La Penseé Sauvage.

Chevallard Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche antropologique. *Recherches en didactique des mathématiques*. 12, 1, 73-112.

D'Amore B. (1986). Il ruolo della definizione nella didattica della matematica. *Insegnare*. 6, 9-13.

D'Amore B. (1987). Motivazioni epistemologiche che stanno alla base delle scelte didattiche operate nelle attività educative in Italia dalla scuola dell'infanzia al biennio superiore. En: Actas del "II Congreso Internacional sobre investigación en didáctica de las Ciencias y de la Matemática". Valencia 1987, 323-324.

D'Amore B. (1993). Esporre la matematica appresa: un problema didattico e linguistico. *La matematica e la sua didattica*. 3, 289-301.

D'Amore B. (1996). Schülersprache beim Lösen mathematischer Probleme. *Journal für Mathematik Didaktik*. 17, 2, 81-97.

D'Amore B. (1999a). Il ruolo essenziale ed insostituibile delle didattiche disciplinari nella costruzione della conoscenza nell'educazione. *Pitagora Notizie*. 4, 2.

D'Amore B. (1999b). *Elementi di didattica della matematica*. Bologna: Pitagora. [En curso de impresión por el Grupo Editorial Iberoamérica, México D.F., México].

D'Amore B. (2000a). La didáctica de la matemática a la vuelta del milenio: raíces, vínculos e intereses. *Educación Matemática*. México D.F., México. 12, 1, 239-50.

D'Amore B. (2000b). Lingua, Matematica e Didattica. *La matematica e la sua didattica*. 1, 28-47.

D'Amore, B. (2001). Un contributo al dibattito su concetti e oggetti matematici: la posizione "ingenua" in una teoria "realista" vs il modello "antropologico" in una teoria "pragmatica", *La matematica e la sua didattica*. 1, 4-30. [En francés: Une

contribution au débat sur les concepts et les objets mathématiques. *Scientia Paedagogica Experimentalis*. Gent, Bélgica. XXXVIII, 1, 2001, 17-46]. [En español: Una contribución al debate sobre conceptos y objetos matemáticos. *Uno*, Barcelona, España, 27, 2001, 51-76].

D'Amore B. (2003a). La complexité de la noétique en mathématiques ou les raisons de la dévolution manquée. *For the learning of mathematics*. 23, 1, 47-51. [En español: La complejidad de la noética en matemáticas como causa de la falta de devolución, *TED*, Bogotà, Colombia, Università Pedagogica Nazionale, 11, 2002, 63-71].

D'Amore B. (2003b). *Le basi filosofiche, pedagogiche, epistemologiche e concettuali della Didattica della Matematica*. Bologna: Pitagora. [En curso de impresión por el Grupo Editorial Iberoamérica, México D.F., México].

D'Amore B. (2004a). Young pupils' mathematical argumentation and Indian logic (Nyaya). En curso de impresión en idioma español en *Uno*, 2005.

D'Amore B. (2004b). Il ruolo dell'Epistemologia nella formazione degli insegnanti di Matematica nella scuola secondaria. *La matematica e la sua didattica*. 4, 4-30.

D'Amore B., Fandiño Pinilla M.I. (2001). Concepts et objects mathématiques. En: Gagatsis A. (ed.) (2001). *Learning in Mathematics and Science and Educational Technology*. Nicosia (Chipre): Intercollege Press Ed. Actas del "Third Intensive Programme Socrates-Erasmus, Nicosia, Universidad de Chipre, 22 junio - 6 julio 2001. 111-130.

D'Amore B., Fandiño Pinilla M.I. (2002). Un acercamiento analítico al "triángulo de la didáctica". *Educación Matemática*. México DF, México. 14, 1, 48-61.

D'Amore B., Fandiño Pinilla M.I. (2004). Cambi di convinzioni in insegnanti di matematica di scuola secondaria superiore in formazione iniziale. *La matematica e la sua didattica*. 3, 27-50. En idioma español, en curso de impresión: *Epsilon*, 2005.

D'Amore B., Godino D.J., Arrigo G., Fandiño Pinilla M.I. (2003). *Competenze in matematica*. Bologna: Pitagora.

D'Amore B., Plazzi P. (1990). Intuizione e rigore nella pratica e nei fondamenti della Matematica. *La matematica e la sua didattica*. 3,18-24.

D'Amore B., Speranza B. (eds.) (1989). *Lo sviluppo storico della matematica - Spunti didattici*. Volumen I. Roma: A. Armando.

D'Amore B., Speranza F. (eds.) (1992). *Lo sviluppo storico della matematica - Spunti didattici*. Volumen II. Roma: A. Armando.

D'Amore B., Speranza F. (eds.) (1995). *La matematica e la sua storia. Alcuni esempi per spunti didattici*. Milán: Angeli ed.

Duval R. (1993). Registres de répresentations sémiotiques et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de didactique et de sciences cognitives*. 5, 37-65.

Duval R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine: régistres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Berne: Peter Lang. [En español: *Semiosis y pensamiento humano*. Berne: Peter Lang – Cali: Universidad del Valle. 1999].

Fandiño Pinilla M.I. (2002). *Curricolo e valutazione in matematica*. Bologna: Pitagora.

Freudenthal H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dodrecht: Riedel.

Furinghetti F., Radford L. (2002). Historical conceptual developments and the teaching of mathematics: from philogenesis and ontogenesis theory to classroom practice. En: English L. (ed.) (2002). *Handbook of International Research in Mathematics Education*. Hillsdale: Erlbaum. 631-654.

Furinghetti F., Somaglia A. (1997). Storia della matematica in classe. *L'educazione matematica*. XVIII, V, 2, 1.

Gadamer H.G. (1975). *Truth and Method*. New York: Crossroad (2nd ed.: 1989).

Grugnetti L., Rogers L. (2000). Philosophical, multicultural and interdisciplinary issues. En: Fauvel, J., van Maanen J. (eds.). *History in Mathematics Education*. Dodrecht: Kluwer. 39-62.

Kintzler C. (1989). Éléments. En: AA. VV. (eds.) (1989). *Écrits de Condorcet*. París, Edilig.

Lakatos I. (1971). *History of science and its rational reconstructions*. Cambridge: Cambridge U.P.

Loria G. (1933). Commission internationale de l'enseignement mathématique. La préparation théorique et pratique des professeurs de mathématiques de l'enseignement secondaire dans les diverses pays. I. *Rapport général. L'enseignement mathématique*. XXXII, 5-20.

Moreno L., Waldegg G. (1993). Costructivism and mathematical education. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*. 24, 5, 653-661.

Piaget J., Garcia R. (1983). *Psychogenèse et histoire des sciences*. París: Flammarion.

Radford L. (1997). On Psychology, Historical Epistemology and the Teaching of Mathematics: Towards a Socio-Cultural History of Mathematics. *For the Learning of Mathematics*. 17, 1, 26-33.

Radford L. (2003). On Culture and Mind. A post-Vygotskian Semiotic Perspective, with an Example from Greek Mathematical Thought. En: Anderson M. et Al. (eds.) (2003). *Educational Perspectives on Mathematics as Semiosis: From Thinking to Interpreting to Knowing*. Ottawa: Legas. 49-79.

Radford L., Boero P., Vasco C. (2000). Epistemological assumptions framing interpretations of students understanding of mathematics. En: Fauvel J., van Maanen J. (eds.) (2000). *History in Mathematics Education*. Dordrecht: Kluwer. 162-167.

Sfard A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coins. *Educational Studies in Mathematics*. 22, 1-36.

Speranza F. (1997). *Scritti di Epistemologia della Matematica*. Bologna: Pitagora.

Speranza F., Grugnetti L. (1996). History and epistemology in didactics of mathematics. En: Malara N.A., Menghini M., Reggiani M. (eds.) (1996). *Italian research in mathematics education*, Roma: CNR. 126-135.

Thompson A.G. (1992). Teachers' beliefs and conceptions: a synthesis of the research. *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. London: D.A.N.Y. McMillan, 127-208.

Vailati G. (1896). Sull'importanza delle ricerche relative alla storia della scienza. En: Vailati G. (1911). *Scritti*. Firenze – Leipzig: Seeber-Barth.

Watzlawick W., Beavin J.H., Jackson D.D. (1967). *Pragmatic of the human communication*. New York: W.W. Norton & C.

Traducción de Martha Isabel Fandiño Pinilla