

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Matematica Pura ed Applicata
Dottorato di ricerca in Matematica Computazionale - XVIII ciclo

Metodi per la ricostruzione di superfici

Presentata da:

ELENA FRANCHINI

Supervisore:

Chiar.mo Prof.

GIULIO CASCIOLA

Coordinatore:

Chiar.mo Prof.

MICHELE CONFORTI

31 Dicembre 2005

Indice

Lista delle Figure	12
Lista delle Tabelle	13
Abstract	15
Introduzione	19
1 Box spline: definizioni e proprietà	25
1.1 Introduzione	25
1.2 Definizioni di Box spline	26
1.3 Proprietà di base	34
2 Metodi numerici per la valutazione di Box spline	43
2.1 Introduzione	43
2.2 Stato dell'arte	43
2.3 Rappresentazione di Bézier di polinomi multivariati	45
2.4 L'algoritmo MDDS: caso bivariato	48
2.4.1 Calcolo del B-net per Box spline a tre direzioni	48
2.4.2 Descrizione dell'algoritmo	55
2.4.3 Calcolo del B-net per Box spline a quattro direzioni	59
2.5 L'algoritmo MDDS: caso trivariato	76
2.5.1 Descrizione dell'algoritmo	84
2.6 Rappresentazione grafica di superfici e volumi Box spline	89
2.6.1 Sperimentazione numerica	91
3 Interpolazione con Box spline	105
3.1 Introduzione	105
3.2 Interpolazione su \mathbb{Z}^s	106

3.2.1	Interpolazione con Box spline bivariate a 3 direzioni	108
3.2.2	Costruzione del sistema di interpolazione	113
3.2.3	Condizioni esterne aggiuntive	118
3.3	Interpolazione definita su sottomoduli	129
3.3.1	Interpolazione con Box spline bivariate a 4 direzioni	131
3.4	Capacità di ricostruzione delle funzioni Box spline bivariate	136
3.5	Interpolazione con Box spline trivariate a 4 direzioni	142
3.6	Capacità di ricostruzione delle funzioni Box spline trivariate	149
3.6.1	Prodotto tensoriale misto	153
4	Ricostruzione di superfici a partire da dati “scattered”	155
4.1	Introduzione	155
4.2	Metodi numerici per la ricostruzione di superfici	156
4.3	Box spline come strumento per la ricostruzione di superfici	158
4.3.1	Algoritmo <i>Moving Least Square</i>	159
4.3.2	Sperimentazione numerica	164
4.3.3	Progressive Grid Filling (PGF)	166
4.3.4	Metodi composti PGF-interpolazione Box spline	168
4.4	Partizione dell’unità (POU)	180
4.4.1	Interpolanti locali Box spline	183
4.4.2	Sperimentazione numerica: esempi e risultati	191
4.4.3	Ricostruzione delle feature di una superficie	200
4.4.4	Dall’acquisizione dei dati alla ricostruzione del modello	205
	Conclusioni	213
	Bibliografia	215

Elenco delle figure

1.1	Box spline univariata di grado 3 ($n = 4$).	28
1.2	Esempi di Box spline prodotto tensoriale.	28
1.3	Costruzione della hat function e dello ZP element.	29
1.4	In alto: sinistra, funzione caratteristica del quadrato unitario; destra, hat function. In basso: ZP element.	30
1.5	Costruzione geometrica della Box spline lineare definita su una griglia triangolare.	33
1.6	Griglia triangolare.	35
1.7	Decomposizione del dominio della Box spline associata alla matrice (1.13).	36
1.8	Box spline costante in una direzione.	39
2.1	Griglia generata dalle direzioni $e_1, e_2, e_1 + e_2$	48
2.2	Le direzioni $e_1, e_2, e_1 + e_2$ partizionano il dominio in triangoli T_{down} e T_{up}	48
2.3	Posizione (sinistra) e relativi valori (destra) dei coefficienti di Bézier di un patch di grado 2 definito sui triangoli T_{down} e T_{up}	50
2.4	B-net della Box spline M_{111}^1 e relativa matrice 3×3 in cui sono memorizzati i coefficienti di Bézier. Al di fuori del supporto i coefficienti sono uguali a 0.	51
2.5	Operazione di traslazione e sottrazione dei coefficienti di M_{111}^1 nella direzione e_1	52
2.6	Coefficienti di Bézier di un patch bivariato lineare (in alto) e quadratico (in basso).	53
2.7	La direzione mista generata per calcolare i coefficienti di Bézier $P_{101}^{2,(3,d)}, P_{011}^{2,(3,d)}, P_{101}^{2,(2,d)}, P_{011}^{2,(2,d)}, P_{101}^{2,(1,d)}, P_{011}^{2,(1,d)}$ della Box spline M_{211}^2	54
2.8	Tutte le direzioni miste sufficienti a determinare il B-net della Box spline M_{211}^2	55
2.9	Box spline bivariata quartica a tre direzioni M_{222}^4 e relativo B-net.	58

2.10	Generazione del B-net di M_{222}^4 attraverso successive somme dei coefficienti di $D_{e_1}M_{111}^1$, $D_{e_2}M_{211}^2$, $D_{e_{12}}M_{221}^3$ lungo le direzioni segnate.	59
2.11	Griglia generata dalle direzioni e_1 , e_2 , $e_1 + e_2$, $e_1 - e_2$	59
2.12	Le direzioni e_1 , e_2 , $e_1 + e_2$, $e_1 - e_2$ identificano una partizione del dominio in quattro triangoli T_1 , T_2 , T_3 , T_4	60
2.13	Un punto $p(x_1, x_2)$ suddivide un patch quadratico in tre sottopatch quadratici.	61
2.14	Coefficienti ausiliari derivanti dall'algoritmo di de Casteljaeu nel caso lineare (a) e quadratico (b).	62
2.15	Coefficienti di Bézier della Box spline M_{1110}^1	62
2.16	B-net della Box spline bivariata a quattro direzioni M_{1111}^2	63
2.17	Le sette direzioni in una Box spline trivariata.	77
2.18	Tassellazione tetraedrale di un cubo unitario.	78
2.19	Ascisse baricentriche dei coefficienti di Bézier di un TB-volume di grado 2 (sinistra) e relativo valore assunto (destra).	79
2.20	Matrice trivariata contenente i valori dei coefficienti del tetraedro 5 di Fig. 2.18.	79
2.21	B-net di M_{1111}^1	80
2.22	Traslazione e sottrazione dei coefficienti di $M_{D_4}^1$	80
2.23	Coefficienti di Bézier del patch trivariato quadratico definito sui tetraedri 1 (sinistra) e 5 (destra).	81
2.24	La direzione mista utilizzata per calcolare i coefficienti $P_{1001}^{2,(3,5)}$, $P_{0101}^{2,(3,5)}$, $P_{1001}^{2,(2,5)}$, $P_{0101}^{2,(2,5)}$, $P_{1001}^{2,(1,5)}$, $P_{0101}^{2,(1,5)}$ di M_{2111}^2	82
2.25	Tutti i percorsi di integrazione (MD) sufficienti per il calcolo del B-net della Box spline quadratica trivariata M_{2111}^2	82
2.26	Matrici bidimensionali che contengono i coefficienti di Bézier della Box spline M_{2111}	83
2.27	Matrice tridimensionale contenente i coefficienti del B-net della Box spline lineare trivariata.	84
2.28	L'insieme delle direzioni miste 2D generate per calcolare il B-net della Box spline trivariata cubica M_{2112}^3	86
2.29	L'insieme delle direzioni miste 3D generate per calcolare il B-net della Box spline trivariata cubica M_{2112}^3	86
2.30	I quattro rami relativi ai contributi di λ_1 , λ_2 , λ_3 , λ_4	87

2.31	I parallelogrammi generati da D traslati sulla griglia $D\mathbb{Z}^2$ formano una partizione di \mathbb{R}^2	90
2.32	Centri delle Box spline base e relativo reticolo di controllo.	92
2.33	Posizione dei triangoli T_{up} e T_{down} all'interno del supporto della Box spline lineare M_{111}	94
2.34	Superficie Box spline costruita come combinazione lineare di funzioni base M_{222} secondo i coefficienti del reticolo.	95
2.35	Box spline M_{222} non nulle sul triangolo T_{up} evidenziato in (a). Le crocette in (a) indicano i centri $(iT, jT)_k$, $k = 1, \dots, 12$. I cerchietti in (b) indicano i vertici dei triangoli T_{down} all'interno del supporto della Box spline (\mathbf{posd}_k , $k = 1, \dots, 12$).	96
2.36	Generico dominio e nodi da cui decollano le Box spline base M_{222} il cui supporto contiene almeno un triangolo T_{down} (cerchietto) oppure T_{up} (star).	97
2.37	Posizione dei triangoli T_1, T_2, T_3, T_4 all'interno del supporto della Box spline quadratica M_{1111} . I cerchietti indicano il punto identificato dai vettori $\mathbf{pos1}_k, \mathbf{pos2}_k, \mathbf{pos3}_k, \mathbf{pos4}_k$	99
2.38	Box spline M_{2111} non nulle sul triangolo T_2 evidenziato in (a). Le crocette in (a) indicano i centri $(iT, jT)_k$, $k = 1, \dots, 10$. I cerchietti in (b) indicano i vertici dei triangoli T_3 all'interno del supporto della Box spline ($\mathbf{pos3}_k$, $k = 1, \dots, 10$).	99
2.39	Superficie Box spline costruita come combinazione lineare delle funzioni base bivariate M_{1111} secondo i coefficienti del reticolo.	100
2.40	Box spline M_{1111} non nulle sul tetraedro 2 evidenziato in (a). Le crocette in (a) indicano i centri $(iT, jT, kT)_k$, $k = 1, \dots, 4$. I cerchietti in (b) indicano i vertici dei tetraedri 5 all'interno del supporto della Box spline ($\mathbf{posT5}_k$, $k = 1, \dots, 4$).	102
2.41	Box spline base trivariate M_{2222} . Estrazione della isosuperficie a livello 0 (sinistra), e a livello 0.005 (destra).	103
2.42	Combinazione lineare di Box spline trivariate M_{2222}	104
3.1	Generico dominio Ω	109
3.2	L'unica Box spline $M_{111}(x_1, x_2) \in S_{\nu_1\nu_2\nu_3}(\Omega)$ non nulla in $(0, 0)$ è quella centrata nel nodo stesso. I cerchietti indicano i nodi (i, j) , la crocetta il centro della Box spline non nulla in $(0, 0)$	110

3.3	Le crocette indicano i centri delle Box spline $M_{211}(x_1, x_2) \in S_{\nu_1\nu_2\nu_3}(\Omega)$ non nulle nel nodo $(0, 0)$. Per ogni nodo (i, j) (cerchietto) sono tre le funzioni M_{211} non nulle.	111
3.4	Posizione dei centri delle Box spline non nulle in (i, j) . Il peso w_i a sinistra indica il valore assunto in (i, j) dalla Box spline centrata nel nodo in corrispondenza del peso.	113
3.5	Per alcune Box spline i pesi w_i coincidono con il punto medio del patch di Bézier corrispondente.	115
3.6	Struttura della matrice \bar{A}	118
3.7	Centri delle Box spline non nulle sul dominio riferito all'esempio 3.3. . .	120
3.8	Interpolazione con Box spline M_{222} utilizzando diverse condizioni esterne: costanti (in alto), lineari (al centro), tipo <i>not a knot</i> (in basso). . .	124
3.9	In alto: a sinistra, B-net della Box spline M_{222} ; a destra, B-net della derivata prima lungo la direzione e_2 ; in basso: sinistra, derivata seconda; destra, derivata terza.	125
3.10	Maschera da applicare ai coefficienti c_{kl} , $(k, l) \in I(\Omega)$	125
3.11	Centri delle Box spline M_{222} non nulle sul dominio evidenziato dal tratto continuo.	126
3.12	Nodi della griglia definita dal sottomodulo \mathcal{F} generato dalla matrice 3.14.131	131
3.13	Generale dominio Ω	132
3.14	Nodi del sottomodulo \mathcal{F} contenuti nel supporto di alcune Box spline bivariate a quattro direzioni.	133
3.15	Condizioni esterne aggiuntive nel caso di interpolazione con Box spline a quattro direzioni. I coefficienti esterni (quadrato) coincidono con i dati (cerchietto) secondo le corrispondenze indicate dalle frecce.	134
3.16	Nodi (i, j) dei punti di interpolazione e relativo valore (sinistra). Distribuzione nello spazio dei punti di interpolazione (destra).	136
3.17	Interpolazione con B-spline bicubiche (sinistra). Interpolazione con Box spline M_{222} utilizzando condizioni esterne di tipo <i>not a knot</i> (destra). .	137
3.18	Interpolazione con Box spline M_{112} utilizzando condizioni esterne di tipo costante. La funzione base è \mathcal{C}^1 lungo la diagonale, ma \mathcal{C}^0 lungo le altre direzioni.	137
3.19	Nodi (i, j) dei punti di interpolazione e relativo valore (sinistra). Distribuzione nello spazio dei punti di interpolazione (destra).	138

3.20	Interpolazione con B-spline bicubiche (in alto a sinistra). Interpolazione con Box spline M_{222} utilizzando condizioni esterne di tipo costante (in alto a destra). Interpolazione con Box spline M_{2211} utilizzando condizioni esterne di tipo costante (in basso).	139
3.21	Nodi (i, j) dei punti di interpolazione e relativo valore (sinistra). Distribuzione nello spazio dei punti di interpolazione (destra).	140
3.22	Interpolazione con B-spline bicubiche (in alto a sinistra). Interpolazione con M_{222} e condizioni esterne di tipo costante (in alto a destra). Interpolazione con M_{2211} e condizioni esterne di tipo costante (in basso). . .	140
3.23	Funzione test.	141
3.24	Funzione Box spline interpolante (a sinistra). Funzione B-spline interpolante (a destra). I cerchietti indicano i punti di interpolazione campionati su una griglia regolare di $\frac{1}{4}\mathbb{Z}^2$	142
3.25	Generico dominio Ω	143
3.26	L'unica Box spline $M_{1111}(x_1, x_2, x_3) \in S_{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}(\Omega)$ non nulla in $(0, 0, 0)$ è quella centrata nel nodo stesso.	144
3.27	Le Box spline $M_{2111}(x_1, x_2, x_3) \in S_{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}(\Omega)$ non nulle in $(0, 0, 0)$ sono quelle con centro indicato dalla crocetta.	145
3.28	(b): Posizione dei centri delle Box spline trivariate non nulle in (i, j, k) . Il peso w_i in (a) indica il valore assunto in (i, j, k) dalla Box spline centrata nel nodo in corrispondenza del peso.	145
3.29	Struttura della matrice \bar{A}	148
3.30	Il simbolo \bullet indica i nodi (i, j, k) per cui $f_{ijk} = 0$; i nodi interni al cubo (\square) sono associati a $f_{ijk} = 1$; per quelli esterni (*) si ha $f_{ijk} = -1$	150
3.31	Superficie estratta come zero-set dal volume di interpolazione generato dalle funzioni B-spline prodotto tensoriale trivariate (sinistra) e Box spline M_{2222} (destra).	151
3.32	Il simbolo \bullet indica i nodi (i, j, k) per cui $f_{ijk} = 0$; i nodi interni al cubo (\square) sono associati a $f_{ijk} = 1$; per quelli esterni (*) si ha $f_{ijk} = -1$	151
3.33	Superficie estratta come zero-set dal volume di interpolazione generato dalle funzioni base M_{2222}	152
3.34	Superficie generata utilizzando l'interpolante trivariato M_{2222}	152
3.35	Esempi di oggetti a forma libera costruiti con interpolanti Box spline M_{2222}	153

3.36	Superficie estratta come zero-set dal volume di interpolazione generato dalle funzioni base del tipo (3.22), definite come prodotto tensoriale tra la B-spline univariata cubica e la Box spline M_{222} (sinistra), e dalle B-spline tricubiche (destra).	154
4.1	Insieme di 150 punti random del dominio.	164
4.2	Superficie generata dal metodo MLS Hermite con interpolazione della derivata nella direzione (1 1), a partire da 150 dati scattered distribuiti uniformemente sul dominio. Sono state considerate funzioni peso $w_i(\mathbf{x}) = \frac{1}{ \mathbf{x}-\mathbf{x}_i ^4}$ e polinomi di grado ≤ 4	166
4.3	Set di dati sperimentale distribuiti nel dominio $[0, 40] \times [0, 41.3]$ (sinistra). Vista prospettica (destra).	167
4.4	Set di 150 punti scattered presi all'interno del rettangolo $[0, 2] \times [0, 1]$ (asterischi). I cerchietti indicano i valori dei punti griglia calcolati con la tecnica PGF.	168
4.5	Le valutazioni nei punti griglia sono state ottenute con l'algoritmo MLS (sinistra) e PGF (destra).	168
4.6	Confronto tra i tempi di esecuzione dell'algoritmo MLS e del metodo composto PGF-Box spline nel problema test (3.17).	169
4.7	In alto a sinistra: superficie 41×21 generata con l'algoritmo MLS; in alto a destra: 17×9 punti generati con PGF e da interpolare; in basso: superficie interpolante Box spline costruita con funzioni base M_{222} e condizioni esterne lineari.	170
4.8	Funzioni test bivariate.	171
4.9	A sinistra: insieme di 80 punti random distribuiti uniformemente sul quadrato $[0, 1] \times [0, 1]$; a destra: insieme di 80 punti random distribuiti uniformemente sul quadrato $[-0.1, 1.1] \times [-0.1, 1.1]$	172
4.10	Insieme di 80 punti random distribuiti in modo non uniforme sul quadrato $[-0.1, 1.1] \times [-0.1, 1.1]$	173
4.11	Metodo composto PGF-Box spline sui dati dell'insieme set1.	174
4.12	Metodo composto PGF-Box spline sui dati dell'insieme set2.	175
4.13	Metodo composto PGF-Box spline sui dati dell'insieme set3.	176
4.14	Metodo composto PGF-Box spline a quattro direzioni.	177
4.15	Funzioni test trivariate.	178
4.16	Insieme di 150 punti random distribuiti uniformemente.	179

4.17 Metodo composto PGF-Box spline applicato alla funzione $F7$	179
4.18 Metodo composto PGF-Box spline applicato alla funzione $F8$	180
4.19 Metodo composto PGF-Box spline applicato alla funzione $F9$	180
4.20 Disco di influenza Ω_i e punti sulla griglia hZ^2 (cerchietti) generati con PGF (in alto); se uno dei punti della griglia coincide con il dato \mathbf{x}_i la funzione Box spline locale ne interpolerà il valore (in basso).	186
4.21 Distribuzione non uniforme dei punti all'interno del disco di influenza. In questi casi è particolarmente vantaggioso utilizzare l'algoritmo PGF per il calcolo dei punti griglia.	186
4.22 Punti scattered e dischi $\Omega_i, i = 1, \dots, 7$	190
4.23 Le funzioni peso $\bar{W}_1(\mathbf{x})$ (a sinistra), $\bar{W}_2(\mathbf{x})$ (a destra).	192
4.24 La funzione peso $\bar{W}_3(\mathbf{x})$	192
4.25 Sinistra: A1; destra: superficie generata con il metodo I.	193
4.26 Sinistra: A2; destra: superficie generata con il metodo I.	193
4.27 Metodo II applicato al set di dati A1 (sinistra) e A2 (destra).	195
4.28 Set di dati nello spazio 3D, completamente scattered (sinistra), quasi a griglia (destra).	196
4.29 Metodo I e set di dati completamente scattered.	198
4.30 Metodo II e set di dati completamente scattered.	198
4.31 Metodo I e set di dati quasi a griglia.	199
4.32 Metodo II e set di dati quasi a griglia.	199
4.33 Nodi (i, j) dei punti di interpolazione e relativo valore (sinistra). Distribuzione nello spazio dei punti di interpolazione (destra)	201
4.34 Sinistra: interpolazione con B-spline bicubiche; destra: interpolazione con Box spline bivariate M_{1111}	202
4.35 Insiemi di dati P1 e P2.	202
4.36 Insiemi $\Lambda 1$ e $\Lambda 2$	202
4.37 Interpolanti M_1 e M_2	203
4.38 Utilizzo degli interpolanti Box spline a due e a quattro direzioni in un approccio POU.	204
4.39 Set di dati acquisito per la ricostruzione.	206
4.40 Suddivisione del dominio in zone.	206
4.41 Ricostruzione con Box spline.	207
4.42 Ricostruzione con B-spline prodotto tensoriale.	207
4.43 Particolare della superficie ricostruita con Box spline.	208

4.44	Particolare della superficie ricostruita con B-spline prodotto tensoriale.	208
4.45	Ricostruzione con Box spline.	209
4.46	Ricostruzione con B-spline prodotto tensoriale.	210
4.47	Esempio di ricostruzione con Box spline trivariate a partire da una nuvola di punti 3D.	211
4.48	Esempio di ricostruzione con B-spline prodotto tensoriale trivariato a partire da una nuvola di punti 3D.	212

Elenco delle tabelle

1.1	Grado di continuità di alcune Box spline a tre (sinistra) e a quattro direzioni (destra).	41
3.1	Valori assunti da alcune Box spline nei nodi.	113
3.2	Condizioni esterne per alcune Box spline bivariate a tre direzioni. . . .	120
3.3	Valori assunti da alcune Box spline bivariate a quattro direzioni nei nodi.	135
3.4	Valori assunti da alcune Box spline trivariate nei nodi.	146
3.5	Condizioni esterne per alcune Box spline trivariate a quattro direzioni.	147
4.1	Valore di r^2 per alcune approssimazioni MLS.	165
4.2	Confronto tra le tecniche MLS e MLS Hermite.	166
4.3	Valore di r^2 per alcune funzioni test.	173
4.4	Valore di r^2 per alcune funzioni test.	179
4.5	Valore di r^2 per alcune funzioni test.	196
4.6	Valore di r^2 per alcune funzioni test.	196
4.7	Valore di r^2 per alcune funzioni test.	200
4.8	Valore di r^2 per alcune funzioni test.	201

Abstract

Surface reconstruction is concerned with the generation of continuous model from unorganized sets of points. This problem arises in a wide range of scientific and engineering applications, as well as in computer graphics and computer model surfaces. Creating accurate models of real object from digital scans is currently the subject of intensive research. In these cases, in order to obtain high quality surface reconstructions, it is very important to recover the surface shape. Generally the techniques can be divided into two major categories. The first category tries to generate a parametric function that interpolates or approximates the initial data set. Piecewise linear approximation is the easiest and the most popular technique in this category. The second interpolates or approximates scalar functions where the reconstructed domain is defined as the zero-set of them.

For their importance we can cite triangular spline, useful in the geometric modelling, but not suitable to be generalized in the multivariate case. On the other hand many papers are focused on RBF (Radial Basis Function), a class of functions exploited for the multivariate reconstruction purpose, but not fit in the modelling phase. This considerations prompted us to focus our attention on a new class of function, the Box splines. Although they were introduced by de Boor and De Vore in 1983 ([34]) and they were studied theoretically by de Boor, Höllig and Riemenschneider in 1993 ([32]), the application of Box splines in reconstruction problem doesn't exist in literature. The goal of this dissertation is to experiment Box spline behaviour in this context.

In the first chapter the definitions and the properties of these functions are introduced. Although in this chapter we have considered the general s -variate Box spline associated with n directions, we want to focalize our attention on the bivariate three and four-direction Box splines and the trivariate four-direction ones, the more significant cases in the applications. The first step for a practical use is to create a powerful instrument for the numerical elaboration, evaluation and visualization of the functions. General evaluation algorithms can exploit one or more of the following properties of Box splines:

(i) two-scale subdivision, (ii) Fourier transform, (iii) recurrence definition formula, or (iv) Bézier polynomial representation.

The first two techniques lead to an approximate evaluation of Box spline, while the third is exact, but very expensive. In computer aided geometric design it is common to represent a polynomial on an interval or triangle by its Bézier points, since this is very useful (both in theory and in applications) as the appropriate piecewise linear interpolant of the Bézier points, the so-called Bézier net, reflects the shape of the polynomial curve or surface. Curiously, these results have not previously been extended to more than two dimensions. For this reason we have proposed an efficient and stable algorithm (MDDS) for an exact evaluation of an s -variate Box spline ([12]). The algorithm we propose is based on mixed directional differences and summations for computing the Bézier net coefficients of all bivariate three and four-direction Box splines of any degree over triangular tessellations of the domain (section 2.4) and of all trivariate four-direction Box splines of any degree over tetrahedral tessellations (section 2.5).

The third and fourth chapters deal with the resolution of interpolation problem with Box splines, in particular we have considered cardinal interpolation (chapter 3) and scattered data interpolation (chapter 4). The information acquired during the acquisition phase through scanner 3D, is typically constituted by a set of grid data point in all domain except near boundary or in the region where the slope variation of the object is considerable. For this reason we think that a Box spline interpolation may be more suitable than other techniques. The literature is rich in works about theoretical aspects of bivariate Box spline interpolation ([4], [5], [22], [23], [81], [44], [46]), but poor in practical applications and case studies. The trivariate case is completely omitted. In order to clarify the approach used in the interpolation with Box splines, we have initially tested their potentiality in bivariate examples and then we have studied trivariate case. It is very important to observe the deep influence of Box spline structure, in particular of the directions which define it, on the surface reconstruction quality, depending on the data set organization. A comparison between surfaces obtained through interpolation with Box spline and tensor-product B-spline shows how in the first case the quality reconstruction is better (sections 3.4-3.6).

In order to exploit Box spline interpolation even when the data points are scattered, it is necessary to elaborate the original information and to work out a set of grid points. For this purpose we have applied a standard approach, the Moving Least Squares approximation (subsection 4.3.1). To calculate the grid points in the region

with low density information, an efficient iterative algorithm is presented (Progressive Grid Filling) in subsection 4.3.3.

One of the most important problem connected with surface reconstruction is the large number of samples acquired through scanner 3D. Once these points have been collected, it is a non-trivial task to build a surface representation that is faithful to the collected data. To overcome this problem we have focused our attention on local methods, capable of efficiently handling much larger data sets and much more suitable for parallel implementation. In particular we have considered two methods, that are an application of the Partition of Unity approach to Box splines, using different weight functions. The basic idea of the partition of unity approach is to break the data domain into several pieces, interpolate the data in each subdomain separately, and then blend the local solutions together using smooth, local weights that sum up to one everywhere on the domain. In the last part of the dissertation some practical examples are presented.

Introduzione

La ricostruzione di superfici a partire da punti tipicamente acquisiti da scanner 3D, è un problema di crescente interesse nel mondo della Computer Aided Geometric Design (CAGD) e in tutte le applicazioni correlate. Sono diversi i campi in cui la digitalizzazione e la ricostruzione di forme 3D sono oggetto di continue ricerche: dal reverse engineering alla simulazione virtuale, dall'animazione grafica alla prototipazione di oggetti, dalla medicina all'archeologia. L'approccio generalmente utilizzato è quello di rilevazione dei dati dell'oggetto tramite scanner 3D, ricostruzione quindi del modello al calcolatore ed eventuale modifica della forma per modellazione. Il problema di generare un modello continuo da un insieme di punti è stato affrontato in due differenti modi: ricostruzione di singole range-image con funzioni bivariate (in questo caso l'insieme dei punti viene solitamente identificato con scattered) e ricostruzione di una nuvola di punti (più range-image allineate) con lo zero-set di una funzione trivariata. In questo lavoro, con la terminologia "scattered" si intenderà indifferentemente dati non su griglia sia nel caso bivariato che trivariato. Il settore più generale della ricostruzione di superfici ha ricevuto molta attenzione in letteratura; gli approcci e le proposte sono veramente numerose. Per la loro importanza cito nel caso bivariato i metodi di ricostruzione di dati scattered mediante spline su triangolazione, ma che non hanno una generalizzazione nel caso trivariato e l'approccio meshless con Radial Basis Function (RBF) che sembrano le più naturali per il caso multivariato, ma non sono adatte per la modellazione. Questo lavoro di tesi si colloca in questo contesto di ricostruzione di superfici anche se più specificatamente a partire da dati acquisiti da scanner e si propone di studiare l'applicazione in questo settore delle ben note Box spline. Sebbene introdotte da de Boor e De Vore ([34]) nel 1983 e studiate in modo approfondito in [32] da de Boor, Höllig e Riemenschneider nel 1993, a nostro avviso non sono mai state utilizzate in pratica. Questa ricerca si propone di colmare questa lacuna.

Nel primo capitolo di questa tesi si studiano le caratteristiche delle funzioni Box spline,

fornendone diverse interpretazioni, legate ad una definizione per convoluzione, una analitica e una descrizione geometrica (sezione 1.2). Ne discendono alcune proprietà fondamentali, che verranno poi utilizzate nel corso della trattazione. Sebbene in questo capitolo le Box spline studiate sono, in generale, s -variate e definite da n direzioni, il nostro obiettivo è quello di focalizzare l'attenzione sui casi bivariato a tre e quattro direzioni e trivariato a quattro direzioni, che saranno quelli più significativi e utili nelle applicazioni. Data la scarsità di lavori che sfruttano tali funzioni nella modellazione di forme, questa tesi si propone, in primo luogo, di applicare quanto studiato in teoria a casi pratici di ricostruzione di superfici.

Pertanto, il primo passo necessario è quello di elaborare un metodo efficiente per la valutazione e rappresentazione di Box spline. Un'analisi su quanto è già presente in letteratura, ci ha permesso di cogliere i limiti e le potenzialità delle tecniche adottate in precedenza e pertanto, di formulare un'idea generale applicabile facilmente al caso multivariato. Il settore, infatti, in cui manca maggiormente della sperimentazione numerica è quello multivariato e in particolare trivariato, al quale siamo interessati per le applicazioni. Alcune delle tecniche di valutazione proposte in letteratura, utilizzano opportune maschere di suddivisione da applicare ricorsivamente alla mesh iniziale per generare la Box spline ([6], [10], [20], [26]). Altri approcci si servono invece dell'algoritmo FFT che utilizza la trasformata inversa discreta di Fourier per ottenere un'approssimazione della funzione ([58]). Entrambi i metodi non forniscono una valutazione esatta della Box spline e quindi in diverse applicazioni non sono efficaci. Inoltre l'utilizzo della formula ricorrente che definisce le Box spline risulta piuttosto costoso da un punto di vista computazionale ([47]) e quindi inefficiente come strumento di valutazione, soprattutto quando si lavora con Box spline trivariate. Poiché una Box spline s -variata ristretta ad un s -simpleso (triangolo nel caso bivariato, tetraedro nel caso trivariato) coincide con un patch di Bézier, si è pensato di sfruttare questa proprietà per la valutazione della superficie, calcolando dapprima i coefficienti del reticolo corrispondenti ad una regolare partizione del dominio e utilizzando poi una generalizzazione del noto algoritmo di de Casteljau. I risultati già ottenuti nel caso bivariato da Chui e Lai in [18] e [49] per Box definite sugli insiemi di direzioni 2D ($\{(1\ 0)^t, (0\ 1)^t, (1\ 1)^t\}$) e ($\{(1\ 0)^t, (0\ 1)^t, (1\ 1)^t, (1\ -1)^t\}$), non sono mai stati estesi al caso trivariato. A questo proposito, quindi, si è ideato un valido algoritmo (MDDS), facilmente generalizzabile a volumi, che sfrutta, a partire da una lineare, il B-net di una Box spline di grado $m - 1$ per ottenere i coefficienti di quella di grado m , $\forall m$ definita su una partizione tetraedrale del dominio. L'idea dominante è stata quella di applicare un'operazione

simile a quella di shift-subtract-integrate, già adoperata da Sabin in [76], a particolari set di coefficienti della Box di grado $m - 1$, scelti in accordo con la struttura tetraedrale del supporto. Tali coefficienti identificano delle speciali direzioni (mixed-directions), il cui pattern e numero dipende esclusivamente dal grado della Box. Questo metodo permette di evitare una più complicata integrazione su tetraedri, riconducendo il problema al semplice caso univariato. Per meglio spiegare l'approccio utilizzato, ho inizialmente illustrato l'algoritmo nel caso bivariato, trattando nel paragrafo 2.4.1 le Box spline a tre direzioni e nel paragrafo 2.4.3 quelle a quattro direzioni. La sezione 2.5 è interamente dedicata al caso di Box spline trivariate definite sulle quattro direzioni 3D ($\{(1\ 0\ 0)^t, (0\ 1\ 0)^t, (0\ 0\ 1)^t, (1\ 1\ 1)^t\}$). Sebbene siano stati presi in considerazione solo questi casi, l'idea alla base dell'algoritmo MDDS è applicabile alle diverse classi di Box spline. Una volta costruito uno strumento di valutazione che sia efficiente e stabile da un punto di vista computazionale, il passo successivo è naturalmente quello di definire e rappresentare graficamente superfici e volumi come combinazione lineare di Box spline bivariate e trivariate rispettivamente (sezione 2.6).

I capitoli 3 e 4 sono volti a sperimentare quanto noto in teoria riguardo la risoluzione di problemi di interpolazione con Box spline su punti a griglia (capitolo 3) e nel presentare una loro applicazione su dati "scattered" (capitolo 4). Nelle applicazioni, spesso ci si trova di fronte a set di dati per la maggior parte a griglia, ma in alcune zone, scattered. In questi casi, utilizzare metodi di interpolazione/approssimazione pensati appositamente per dati scattered, risulta eccessivo, mentre si potrebbero utilizzare le funzioni Box spline, definite su griglia e particolarmente adatte ad una interpolazione cardinale, ossia di punti su griglia. Pertanto, abbiamo inizialmente affrontato il problema limitatamente a set di dati esclusivamente su griglia regolare e di conseguenza abbiamo adattato il metodo utilizzato, al caso di punti scattered.

I lavori sull'interpolazione con Box spline, esistenti in letteratura, si concentrano perlopiù sugli aspetti teorici dell'esistenza e unicità della soluzione, senza mai realizzare test numerici e rappresentazioni grafiche di quanto analizzato. Inoltre, tali lavori sono focalizzati esclusivamente su Box spline bivariate a tre direzioni ([4], [5], [22], [23], [81]) e in parte a quattro direzioni ([44], [46]). Il caso trivariato è completamente trascurato. Al riguardo, si è quindi pensato di sperimentare le potenzialità delle Box spline in questo campo, partendo dapprima con esempi bivariati, semplici da gestire, in modo da chiarire i problemi e le proprietà delle funzioni, e poi applicare quanto analizzato al caso trivariato. I primi problemi sorti sono legati al fatto che imponendo solo condizioni di interpolazione dei punti dati non si ottengono sistemi quadrati (esempio

3.7). E' stato dunque necessario studiare delle condizioni aggiuntive per la gestione dei bordi della superficie (paragrafo 3.2.3). In particolare ho applicato tre strategie: condizioni costanti, lineari e di tipo *not a knot* (vedi [77]). I risultati ottenuti confermano quanto ci si aspettava: non sempre le superfici interpolanti rispettano la proprietà di shape preserving; la natura della Box spline con cui si interpola deve riconoscere la struttura dei punti di interpolazione. Quindi in relazione alla tipologia del set di dati è opportuno utilizzare una specifica funzione Box spline, definita dalle direzioni che seguono l'andamento dei punti (sezione 3.4). Analogamente ho sperimentato il comportamento delle funzioni trivariate, limitandomi a quelle definite sulle quattro direzioni 3D $\{(1\ 0\ 0)^t, (0\ 1\ 0)^t, (0\ 0\ 1)^t, (1\ 1\ 1)^t\}$ e utilizzando condizioni aggiuntive costanti. Le superfici visualizzate come zero-set estratti dai volumi così costruiti, mostrano come anche in questo caso le direzioni su cui sono definite le Box base influenzano la ricostruzione della superficie (sezione 3.6). Sono stati dunque confrontati i risultati ottenuti interpolando set di dati con B-spline prodotto tensoriale trivariate e Box spline trivariate a quattro direzioni.

L'applicazione di interpolanti di tipo Box ha come restrizione che i punti di interpolazione siano su griglia. Per poter interpolare set di dati scattered, che non soddisfano cioè nessuna particolare condizione di densità e distribuzione nello spazio, è necessaria una prima fase di elaborazione dei dati, che permetta di trasferire le informazioni originali su punti a griglia. Al riguardo ho sfruttato il ben noto algoritmo di *Moving Least Squares*, che costituisce uno dei metodi di approssimazione più sfruttati di recente (paragrafo 4.3.1). Nel nostro ambito è stato utilizzato per generare una superficie approssimante (o interpolante), la cui valutazione sui nodi di una griglia regolare fornisce i nuovi punti da interpolare con le Box spline. Nel caso in cui il set di dati presenta zone con bassa densità o assenza di informazioni, abbiamo sviluppato un algoritmo (PGF) che calcola progressivamente i punti griglia, a partire dalle regioni con un maggior numero di dati fino ad arrivare nelle zone con buchi o in prossimità del bordo, dove sono presenti pochi punti. Questa tecnica prevede che ogni punto griglia generato vada ad incrementare l'insieme di dati iniziale, cosicché vicino ai buchi la quantità di informazione sia tale da poter ricostruire al meglio la superficie (paragrafo 4.3.3). La combinazione di questa tecnica con l'interpolazione Box permette di interpolare set di dati scattered (paragrafo 4.3.4).

Nei casi applicativi di ricostruzione di superfici, spesso il numero delle osservazioni date è molto alto. Utilizzando un approccio globale, dove cioè il valore della funzione

ricostruita F in \mathbf{x} dipende da tutti i dati del dominio, appesantisce fortemente la gestione delle informazioni, rendendo difficoltosa la ricostruzione. Questa considerazione ci ha condotto verso un approccio locale, dove solo i punti vicini a \mathbf{x} (secondo una distanza prefissata) influenzano il valore $F(\mathbf{x})$. In questo modo, inoltre, risulta più semplice catturare le caratteristiche della superficie e ricostruirle fedelmente. In particolare sono stati sperimentati due metodi che utilizzano interpolanti Box spline locali. Il primo è essenzialmente l'adattamento della tecnica di *partition of unity* al caso Box spline, il secondo sfrutta l'idea di suddividere il dominio in alcuni sottodomini e di miscelare gli interpolanti locali ivi definiti, attraverso funzioni peso opportunamente introdotte (paragrafo 4.4.1). L'ultima parte della tesi è dedicata alla sperimentazione di alcuni casi test, realizzati tramite la scannerizzazione di oggetti reali.

Capitolo 1

Box spline: definizioni e proprietà

1.1 Introduzione

Nel settore della Computer Aided Geometric Design (CAGD) da sempre è alto l'interesse per lo studio di nuove classi di funzioni per la modellazione e ricostruzione di forme. La maggior parte dei sistemi CAD (Computer Aided Design) utilizza, per la rappresentazione, la primitiva NURBS (Non Uniform Rational B-Spline), che da anni è uno strumento standard. In particolare, la rappresentazione di superfici avviene mediante spline bivariate prodotto tensoriale 4D, proiettate nello spazio tridimensionale. Lo schema prodotto tensoriale, risulta in pratica il più utilizzato, in quanto permette di generalizzare molte proprietà del caso univariato ed è estremamente efficiente dal punto di vista computazionale. Tuttavia comporta non poche limitazioni nel caso di gestione di strutture complesse. Costruite, infatti, a partire da un prodotto di due funzioni base univariate, le B-spline prodotto tensoriale sono definite su un dominio rettangolare (direzioni $e_1 = (1\ 0)^t$, $e_2 = (0\ 1)^t$) e la superficie generata risulta costituita da patch rettangolari. I problemi risultano evidenti nel momento in cui si vogliono applicare queste funzioni a regioni a tre, quattro, e in generale n direzioni.

Le funzioni Box spline, inizialmente introdotte da de Boor e De Vore ([34]) e studiate in modo approfondito in [32] da de Boor, Höllig e Riemenschneider, nascono dalla necessità di elaborare una nuova teoria che estenda a casi più generali le buone proprietà delle B-spline. In questo primo capitolo verranno esposti i tratti salienti della teoria Box spline, in modo da fornire gli strumenti necessari per l'utilizzo in pratica di tali funzioni. Illustrerò dunque le definizioni principali, introducendo già da subito le notazioni utilizzate nell'intera dissertazione; discuterò quindi le proprietà che ne conseguono, aggiungendo esempi dettagliati per una maggiore comprensione delle

potenzialità di questa classe di funzioni.

1.2 Definizioni di Box spline

Richiamerò dapprima la definizione delle B-spline, per poi ricavarne una generalizzazione, cosicchè sia chiaro già da ora lo stretto legame tra B-spline e Box spline. Sono innumerevoli le definizioni utilizzate in questo ambito. Consideriamo ora quella per convoluzione, poiché risulta facilmente generalizzabile nel caso multivariato.

Partendo dalla B-spline di grado 0, definita dalla funzione costante

$$N^0(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

la B-spline di grado n si ottiene dalla seguente convoluzione

$$N^n(x) = (N^{n-1} \otimes N^0)(x) = \int_{-\infty}^x N^{n-1}(t)N^0(x-t) dt. \quad (1.1)$$

Ora integrando per parti la (1.1) si ha che

$$N^n(x) = \left(\int_{-\infty}^x N^{n-1}(t) dt \right) N^0(x-t)|_{-\infty}^x$$

e ricordando che

$$N^0(x-t) = \begin{cases} 1 & \text{se } x-1 \leq t < x \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

otteniamo

$$N^n(x) = \int_{x-1}^x N^{n-1}(t) dt. \quad (1.2)$$

Iterando il processo di convoluzione

$$N^n(x) = N^{n-1}(x) \otimes N^0(x) = (N^{n-2}(x) \otimes N^0(x)) \otimes N^0(x) = \dots = \bigotimes_{i=0}^n N^0(x).$$

Dunque una funzione B-spline di grado n è definita come segue:

$$N^n(x) = \bigotimes_{i=0}^n N^0(x). \quad (1.3)$$

Osservazione 1. La (1.2) può essere scritta nel modo seguente

$$N^n(x) = \int_{-\infty}^x (N^{n-1}(t-1) - N^{n-1}(t)) dt.$$

L'operatore convoluzione, che determina le funzioni B-spline di grado > 0 , non è altro che la combinazione di due operatori, ognuno dei quali può facilmente essere calcolato numericamente. Il primo è *traslazione-sottrazione*, il secondo *integrazione* (*shift-subtract-integrate* [76]). Le B-spline prodotto tensoriale, definite su un dominio rettangolare sono generate dal semplice prodotto cartesiano di due famiglie univariate e quindi in corrispondenza dell'azione di due operatori convoluzione indipendenti.

La generalizzazione di questa definizione al caso di domini multivariati a più direzioni, permette di introdurre il concetto di Box spline.

Sia D una matrice $s \times n$ con colonne in $\mathbb{R}^s \setminus \{\mathbf{0}\}$ che generano tutto lo spazio \mathbb{R}^s , cioè tali che

$$\text{Span}D := \langle D \rangle = \mathbb{R}^s.$$

L'insieme delle direzioni su cui è definita la Box spline è costituito dai vettori colonna distinti di D $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_k$. In particolare si ha che

$$D = [\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \dots, \mathbf{d}_n] = \underbrace{[\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_1]}_{\nu_1} \underbrace{[\mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_2]}_{\nu_2} \dots \underbrace{[\mathbf{w}_k, \dots, \mathbf{w}_k]}_{\nu_k},$$

dove per ogni $i = 1, \dots, k$, ν_i indica il numero di volte che appare la direzione \mathbf{w}_i tra le colonne $\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_n$ di D , quindi $\sum_{i=1}^k \nu_i = n$.

Con la notazione

$$\{D\} = \{\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_n\} = \left\{ \sum_{i=1}^n t^i \mathbf{d}_i : 0 \leq t^i < 1, \quad i = 1, \dots, n \right\}$$

indico il parallelepipedo di dimensione s definito dalle direzioni $\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_n$. Poichè $\langle D \rangle = \mathbb{R}^s$, il volume s -dimensionale di $\{D\}$, denotato con $\text{vol}_s\{D\}$, è positivo. Ordinando, se necessario, le colonne della matrice $D = [\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_n]$ in modo che

$$\text{vol}_s\{\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_s\} = |\det[\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_s]| > 0,$$

si definisca la Box spline $M_D(\mathbf{x})$ associata alla matrice D come segue:

$$M_{[\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_s]}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{1}{|\det[\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_s]|} & \text{se } \mathbf{x} \in \{\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_s\} \\ 0 & \text{altrimenti .} \end{cases} \quad (1.4)$$

Quindi per $m = s + 1, \dots, n$ si definisce induttivamente

$$M_{[\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_m]}(\mathbf{x}) = \int_0^1 M_{[\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_{m-1}]}(\mathbf{x} - t\mathbf{d}_m) dt. \quad (1.5)$$

In particolare sia $M_D(\cdot) = M_{[\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_n]}(\cdot)$.

Osservazione 2. La costruzione (1.5) è una generalizzazione a s variabili e k direzioni con molteplicità ν_1, \dots, ν_k della (1.2). La Box spline associata alla matrice con colonne $\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_n$ è vista come convoluzione nella direzione \mathbf{d}_n della Box spline associata a $[\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_{n-1}]$.

Esempio 1.1. Nel semplice caso $s = 1$, con $d_1 = d_2 = \dots = d_n = 1$ e quindi $D = \underbrace{[1, \dots, 1]}_n$, è chiaro che $M_D(x) = N^{n-1}(x)$. Dunque la Box spline univariata definita su una direzione con molteplicità n coincide con la B-spline di grado $n - 1$ costruita su partizione nodale uniforme (Fig. 1.1).

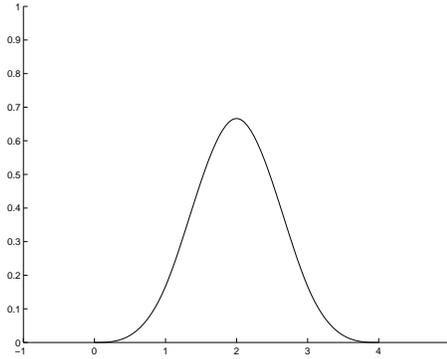


Figura 1.1: Box spline univariata di grado 3 ($n = 4$).

Esempio 1.2. Le B-spline prodotto tensoriale (vedi Fig. 1.2) rientrano in un particolare caso di Box spline associate alle matrici $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (in basso a sinistra),

$D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (in basso a destra), $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (in alto a sinistra), $D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (in alto a destra).

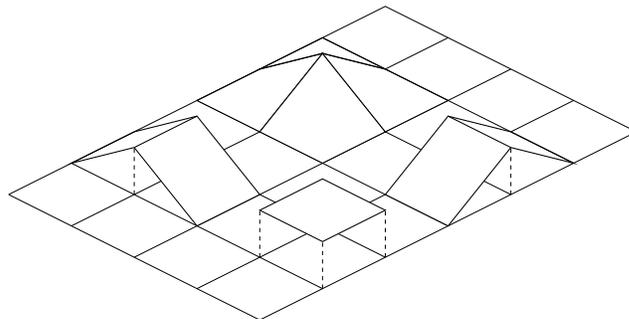


Figura 1.2: Esempi di Box spline prodotto tensoriale.

Come primo esempio bivariato ($s = 2$) diverso dal prodotto tensoriale, consideriamo la costruzione induttiva di M_D con $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Partendo dalla funzione caratteristica sul quadrato unitario M_Z con $Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e con un'operazione di convoluzione nella direzione $\mathbf{d}_3 = (1 \ 1)^t$ si ottiene la cosiddetta **hat function** o **Courant element** (1.4 in alto a destra). Il prossimo e ultimo passo è quello di convoluzione della hat function nella direzione $\mathbf{d}_4 = (-1 \ 1)^t$ per generare lo **Zwart-Powell element** o **ZP element** (1.4 in basso), studiato da Zwart ([85]) e indipendentemente da Powell [67] e Sabin [68].

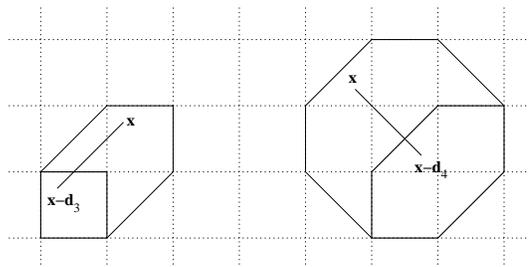


Figura 1.3: Costruzione della hat function e dello ZP element.

Il seguente teorema permette di dedurre una definizione di Box spline analitica equivalente.

Teorema 1.1.

$$\int_{\mathbb{R}^s} \varphi(\mathbf{x}) M_D(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{[0 \dots 1]^n} \varphi(D\mathbf{t}) dt, \quad \text{per ogni } \varphi \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^s) \quad (1.6)$$

dove $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^s)$ indica l'insieme delle funzioni continue a supporto compatto contenuto in \mathbb{R}^s e $[0 \dots 1]^n$ è un cubo unitario semi-aperto.

Dimostrazione. Per $n = s$, servendosi della trasformazione

$$\mathbf{t} = (t^1, \dots, t^s) \mapsto \mathbf{x} = \sum_{i=1}^s t^i \mathbf{d}_i, \quad \mathbf{t} \in [0 \dots 1]^s,$$

con Jacobiano

$$|\det J| = \left| \det \begin{bmatrix} d_1^1 & \dots & d_1^s \\ \vdots & & \vdots \\ d_s^1 & \dots & d_s^s \end{bmatrix} \right| = \text{vol}_s \{ \mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_s \},$$

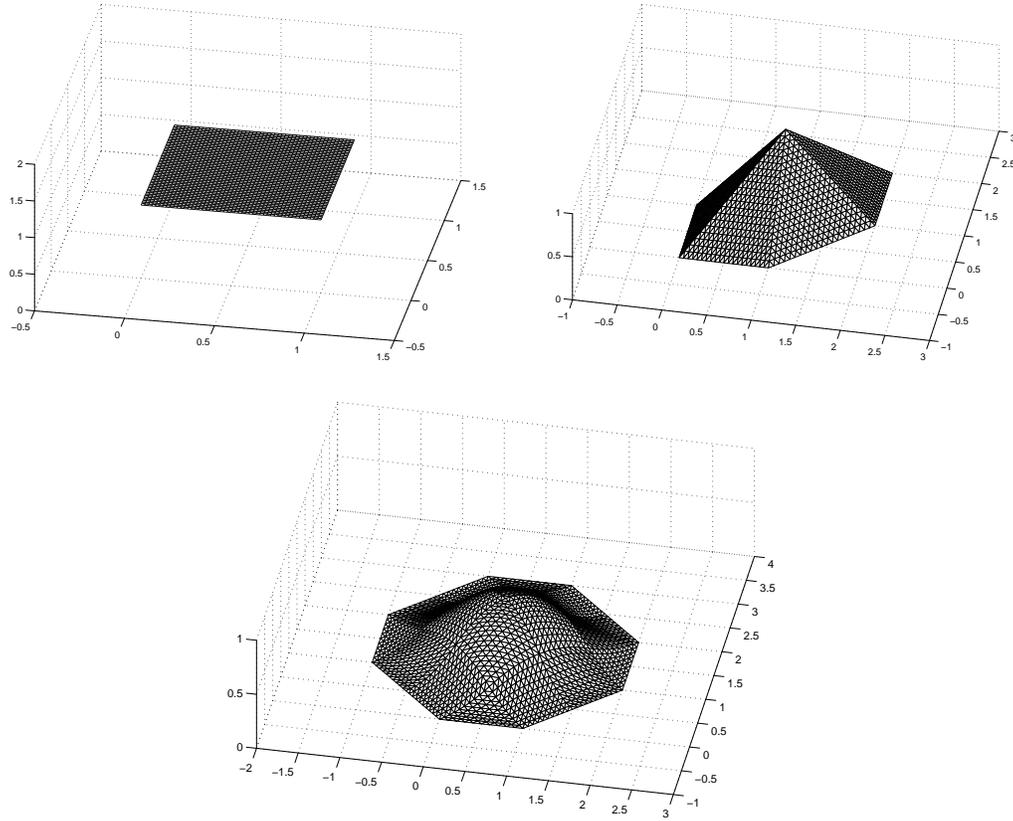


Figura 1.4: In alto: sinistra, funzione caratteristica del quadrato unitario; destra, hat function. In basso: ZP element.

abbiamo che

$$\begin{aligned} \int_{[0 \dots 1]^s} \varphi \left(\sum_{i=1}^s t^i \mathbf{d}_i \right) dt^1 \dots dt^s &= \int_{\{\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_s\}} \varphi(\mathbf{x}) |\det J|^{-1} d\mathbf{x} \\ &= \int_{\mathbb{R}^s} M_{[\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_s]}(\mathbf{x}) \varphi(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Questo ci consente di utilizzare il principio di induzione matematica. Data l'ipotesi induttiva e la definizione (1.5), otteniamo:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^s} M_D(\mathbf{x}) \varphi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} &= \int_{\mathbb{R}^s} \int_0^1 M_{[\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_{n-1}]}(\mathbf{x} - t^n \mathbf{d}_n) \varphi(\mathbf{x}) dt^n d\mathbf{x} \\ &= \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^s} M_{[\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_{n-1}]}(\mathbf{x}) \varphi(\mathbf{x} + t^n \mathbf{d}_n) d\mathbf{x} dt^n \\ &= \int_0^1 \int_{[0 \dots 1]^{n-1}} \varphi \left(\sum_{i=1}^{n-1} t^i \mathbf{d}_i + t^n \mathbf{d}_n \right) dt^1 \dots dt^{n-1} dt^n \\ &= \int_{[0 \dots 1]^n} \varphi \left(\sum_{i=1}^n t^i \mathbf{d}_i \right) dt^1 \dots dt^n. \end{aligned}$$

□

Ciò completa la dimostrazione del teorema e ci permette di dedurre la seguente definizione analitica.

Definizione analitica

L'idea della definizione induttiva (1.5) era già presente in [76], mentre per una definizione formale di Box spline si dovrà attendere il lavoro del 1983 di de Boor e DeVore [34], nel quale apparve per prima una definizione analitica di queste funzioni.

Definizione 1.1. Una Box spline M_D associata alla matrice D $s \times n$ può essere vista come la distribuzione data dalla regola

$$\int_{\mathbb{R}^s} \varphi(\mathbf{x}) M_D(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{[0..1]^n} \varphi(D\mathbf{t}) dt, \quad \text{per ogni } \varphi \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^s) \quad (1.7)$$

Esempio 1.3. Si consideri il seguente esempio nel caso univariato $D = [1 \ 1]$. Pertanto il secondo membro dell'uguaglianza (1.7) diventa

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 \varphi(t^1 + t^2) dt^1 \right) dt^2. \quad (1.8)$$

Sia ora $x = t^1 + t^2$. Quindi

$$(1.8) = \int_0^1 \left(\int_{t^1}^{1+t^1} \varphi(x) dx \right) dt^1 = \int_0^1 \left(\int_{\mathbb{R}} \chi_{[t^1, 1+t^1]}(x) \varphi(x) dx \right) dt^1. \quad (1.9)$$

Questo integrale è diverso da zero per $t^1 \in [x-1, x]$; così segue che:

- se $x < 0 \Rightarrow \chi_{[t^1, 1+t^1]}(x) \varphi(x) = 0$ allora (1.9) = 0;
- se $x > 2 \Rightarrow \chi_{[t^1, 1+t^1]}(x) \varphi(x) = 0$ allora (1.9) = 0;
- se $0 \leq x \leq 1 \Rightarrow (1.9) = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^x dt^1 \right) \varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}} x \varphi(x) dx$;
- se $1 \leq x \leq 2 \Rightarrow (1.9) = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{x-1}^1 dt^1 \right) \varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}} (2-x) \varphi(x) dx$.

In conclusione (1.8) = $\int_{\mathbb{R}} M_{[1 \ 1]}(x) \varphi(x) dx$ con

$$M_{[1 \ 1]}(x) = \begin{cases} x & \text{if } 0 \leq x \leq 1 \\ 2-x & \text{if } 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Da entrambe le definizioni si deduce che una Box spline può essere identificata con una funzione definita su $\text{Imm}(D)$, dove

$$\text{Imm}(D) := \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^s : \mathbf{y} = D\mathbf{t}, \mathbf{t} \in [0 \dots 1]^n\}.$$

In particolare se $n \geq s$ e la matrice D ha rango massimo ($s = \dim(\text{Imm}(D))$), la M_D è una funzione su tutto \mathbb{R}^s .

Una descrizione geometrica

La definizione geometrica di una spline fu già data da Schoenberg nel 1966: una funzione spline è la *perdita di intensità di raggi di luce paralleli* che passano attraverso un poliedro dello spazio affine \mathcal{A}^n in uno spazio affine \mathcal{A}^s ; l'ombra prodotta non è altro che il supporto della spline. Si noti che in questo modello i raggi di luce devono avere dimensione $n - s$. In particolare se il poliedro è un parallelepipedo e l'ombra generata vive su una griglia regolare, la funzione è una Box spline.

Per ottenere una corretta interpretazione geometrica si consideri il parallelepipedo Q in \mathbb{R}^n :

$$Q := \left\{ \sum_{i=1}^n t^i \mathbf{y}_i : 0 \leq t^i < 1, \quad i = 1, \dots, n \right\}, \quad \text{vol}_n Q \neq 0,$$

con i vertici \mathbf{y}_i che soddisfano $\mathbf{y}_i|_{\mathbb{R}^s} = \mathbf{d}_i$, dove $\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \dots, \mathbf{d}_n$ sono le colonne della matrice D . Effettuando il seguente cambio di variabile nell'integrale al secondo membro della (1.7):

$$D\mathbf{t} = \mathbf{u}(\mathbf{t})|_{\mathbb{R}^s}$$

con

$$\mathbf{u}(\mathbf{t}) = (u_1, u_2, \dots, u_n) = t^1 \mathbf{y}_1 + t^2 \mathbf{y}_2 + \dots + t^n \mathbf{y}_n,$$

si ottiene

$$\begin{aligned} \int_{[0 \dots 1]^n} \varphi(D\mathbf{t}) \, d\mathbf{t} &= \int_{[0 \dots 1]^n} \varphi(\mathbf{u}(\mathbf{t})|_{\mathbb{R}^s}) \, d\mathbf{t} = \frac{1}{\text{vol}_n Q} \int_Q \varphi(u_1, \dots, u_n) \, du_1 \dots du_n \\ &= \frac{1}{\text{vol}_n Q} \int_{\mathbb{R}^s} \varphi(u_1, \dots, u_s) \left(\int_{\{\mathbf{u} \in Q : \mathbf{u}|_{\mathbb{R}^s} = (u_1, \dots, u_s)\}} du_{s+1} \dots du_n \right) du_1 \dots du_s \\ &= \frac{1}{\text{vol}_n Q} \int_{\mathbb{R}^s} \varphi(\mathbf{x}) \, \text{vol}_{n-s} \{\mathbf{u} \in Q : \mathbf{u}|_{\mathbb{R}^s} = \mathbf{x}\} \, d\mathbf{x} \end{aligned} \quad (1.10)$$

Dunque, in accordo con (1.7)

$$M_D(\mathbf{x}) = \frac{\text{vol}_{n-s} \{\mathbf{u} \in Q : \mathbf{u}|_{\mathbb{R}^s} = \mathbf{x}\}}{\text{vol}_n Q}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^s. \quad (1.11)$$

Questa relazione vale per qualsiasi parallelepipedo Q con le caratteristiche descritte sopra.

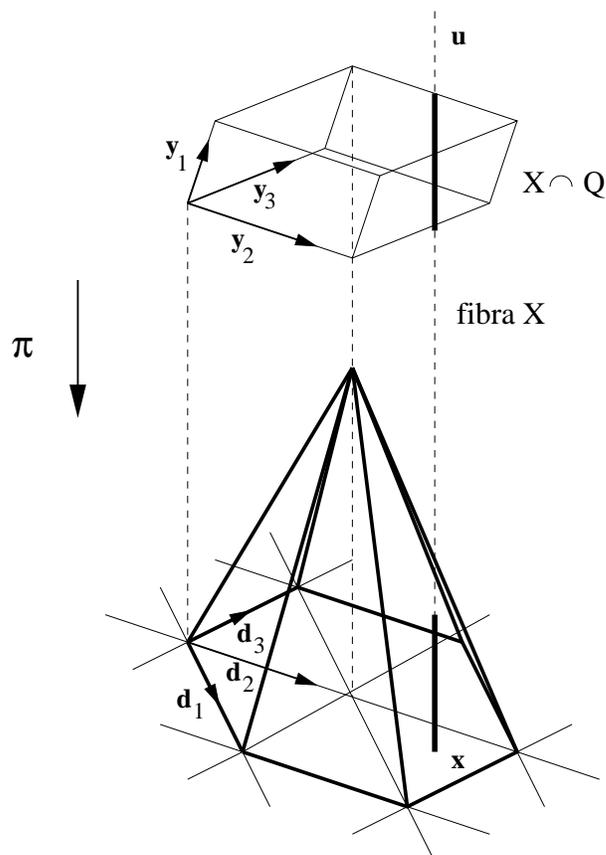


Figura 1.5: Costruzione geometrica della Box spline lineare definita su una griglia triangolare.

Volendo formalizzare matematicamente quanto espresso da Schoenberg, si consideri la mappa affine $\pi : \mathcal{A}^n \longrightarrow \mathcal{A}^s$, $\pi : \mathbf{y}_i \mapsto \mathbf{d}_i$

$$\mathbf{d}_i = \pi(\mathbf{y}_i) \quad \forall i = 1, \dots, n$$

tale che la proiezione del parallelepipedo Q secondo π in \mathcal{A}^s fornisce tutti i punti

$$\mathbf{x} = t^1 \mathbf{d}_1 + \dots + t^n \mathbf{d}_n \quad 0 \leq t^i < 1, \quad i = 1, \dots, n. \quad (1.12)$$

Ora i punti di \mathcal{A}^n che hanno la stessa immagine \mathbf{x} formano la *fibra* X della mappa π , che risulta essere dunque l'insieme delle soluzioni del sistema lineare (1.12) e quindi un sottospazio affine di dimensione $n - s$. Il volume dell'intersezione $X \cap Q$ non è altro che il numeratore dell'espressione (1.11), da cui normalizzando si ritrova quanto mostrato sopra. La Fig. 1.5 illustra la costruzione geometrica di una Box spline.

Osservazione 3. M_D non dipende dall'ordine delle colonne che formano la matrice D , ma dalla molteplicità con cui ogni vettore appare. Quando le direzioni sono sottintese indicheremo con $M_{\nu_1\nu_2\dots\nu_k}$ la Box spline associata alla matrice

$$D = [\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \dots, \mathbf{d}_n] = \underbrace{[\mathbf{w}_1 \dots \mathbf{w}_1]}_{\nu_1}, \underbrace{[\mathbf{w}_2 \dots \mathbf{w}_2]}_{\nu_2}, \dots, \underbrace{[\mathbf{w}_k \dots \mathbf{w}_k]}_{\nu_k}$$

con $\sum_{i=1}^k \nu_i = n$.

Diremo che la matrice Z , ottenuta da D eliminando alcune colonne, è una base nel caso in cui $\text{Imm}(Z) = \text{Imm}(D)$ e non esiste alcuna sottomatrice di Z che genera tutto lo spazio. Denoteremo l'insieme delle basi di D con $\mathcal{B}(D)$. Quindi, ad esempio, se

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (1.13)$$

avremo che

$$\mathcal{B}(D) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \right. \\ \left. \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \right\}.$$

1.3 Proprietà di base

Dalle definizioni date derivano le seguenti proprietà:

1. M_D è positiva, infatti è costruita a partire dalla funzione caratteristica dell'iper-cubo unitario tramite medie ripetute; in particolare

$$M_D(\mathbf{x}) \begin{cases} > 0 & \text{se } \mathbf{x} \in \{D\} \\ = 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- 2.

$$\int_{\text{Imm}(D)} M_D(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 1, \quad (1.14)$$

infatti dalla relazione (1.7), ponendo $\varphi \equiv 1$ si ha che $\int_{[0\dots 1]^n} 1 d\mathbf{t} = 1$, da cui l'uguaglianza (1.14);

3. M_D è simmetrica rispetto al centro definito dal punto

$$c_D = \sum_{\mathbf{d}_i \in D} \mathbf{d}_i / 2; \quad (1.15)$$

4.

$$M_D(\mathbf{x}) = |\det Q| M_{QD}(Q\mathbf{x}), \quad (1.16)$$

dove Q è una qualsiasi matrice $s \times s$ invertibile. Nel caso in cui Q sia la matrice del cambiamento di base dal sistema di riferimento cartesiano ortonormale ad uno qualsiasi, questa formula ci permette di rappresentare una Box spline M_D nelle coordinate desiderate. Sia ad esempio $Q = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}$ la matrice di passaggio dal sistema ortonormale al sistema rappresentato in Fig. 1.6. Allora

$$M_{QD}(Q\mathbf{x}) = \frac{2}{\sqrt{3}} M_D(\mathbf{x}).$$

Si osservi che la griglia triangolare generata a partire dalle direzioni del nuovo sistema di riferimento è esattamente quella utilizzata da Loop ([57]) e Sabin ([76]) nei loro lavori. La nostra scelta di lavorare su un sistema ortonormale non comporta, dunque, alcun cambiamento concettualmente significativo nei risultati già ottenuti in questi studi.

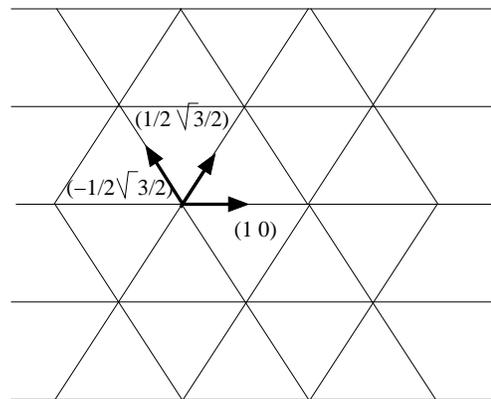


Figura 1.6: Griglia triangolare.

5. M_D ha il supporto definito dall'insieme chiuso

$$D([0 \dots 1]^n) = \left\{ \sum_{i=1}^n t^i \mathbf{d}_i : 0 \leq t^i \leq 1 \right\}.$$

Dalla definizione induttiva è facile dedurre che il supporto di una Box spline consiste essenzialmente nell'unione disgiunta di parallelepipedi generati dalle basi

contenute nella matrice D . Partendo infatti dal parallelepipedo s -dimensionale $\{\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_s\}$ e trasladandolo nelle direzioni indicate dai rimanenti vettori colonna della matrice (rispettando l'eventuale molteplicità), si genera il supporto su cui vive la Box spline. Si indichi con $\|Z\|$ il numero di colonne della matrice Z . Come dimostrato in [32], la relazione ricorrente (1.5) ci permette di scrivere la $M_D(\mathbf{x})$ come una somma

$$\sum_{\substack{Z \subseteq D \\ \|Z\| = s}} \sum_{\mathbf{a} \in \{0,1\}^{D \setminus Z}} \lambda_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) M_D(\mathbf{x} - (D \setminus Z)\mathbf{a})$$

di Box spline di grado più basso, ognuna delle quali, se definita su $\text{Imm}(D)$, è la funzione caratteristica di alcuni parallelepipedi generati dalle basi di D . Se Z è una sottomatrice $s \times n_1$ ($n_1 < n$) di D , $D \setminus Z$ denota la matrice ottenuta eliminando da D tutte le colonne di Z .

È importante osservare che esiste una precisa decomposizione del supporto in cui ogni base di D interviene esattamente una volta, considerando le eventuali ripetizioni (vedi Fig. 1.7).

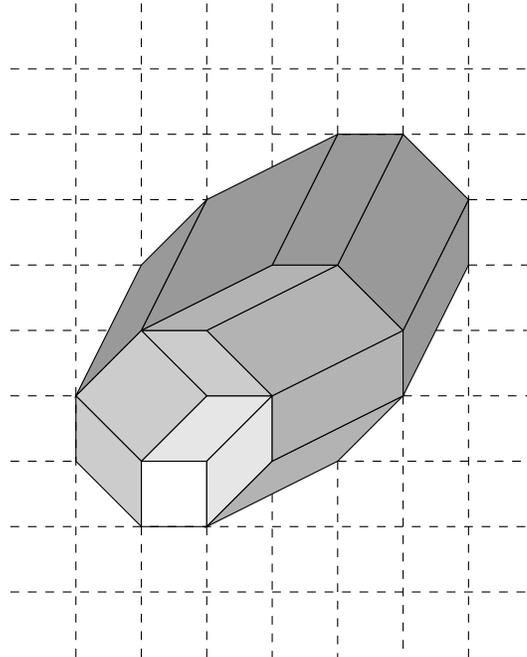


Figura 1.7: Decomposizione del dominio della Box spline associata alla matrice (1.13).

Il teorema che enuncia questa proprietà è il seguente:

Teorema 1.2. Sia $\text{Imm}(D) = \mathbb{R}^s$. Esistono dei punti $\alpha_Z \in D\{0, 1\}^n$, $Z \in \mathcal{B}(D)$, tali che $D([0 \dots 1]^n)$ è l'unione disgiunta degli insiemi

$$\alpha_Z + Z([0 \dots 1]^s), \quad Z \in \mathcal{B}(D).$$

In particolare,

$$\text{vol}_s D([0 \dots 1]^n) = \sum_{Z \in \mathcal{B}(D)} |\det Z|.$$

Dimostrazione. Per la dimostrazione si consulti [32]. \square

Per studiare la continuità delle Box spline utilizziamo il seguente teorema che permette di calcolare in modo efficiente la derivata della funzione e ricavarne una immediata formula ricorrente.

Teorema 1.3. Si indichi con $D_{\mathbf{x}}$ la derivata rispetto alla direzione \mathbf{x} . Se

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{d}_i$$

allora

$$D_{\mathbf{x}} M_D(\cdot) = \sum_{i=1}^n \lambda_i [M_{D \setminus \{\mathbf{d}_i\}}(\cdot) - M_{D \setminus \{\mathbf{d}_i\}}(\cdot - \mathbf{d}_i)], \quad (1.17)$$

e

$$M_D(\mathbf{x}) = \frac{1}{n-s} \sum_{i=1}^n [\lambda_i M_{D \setminus \{\mathbf{d}_i\}}(\mathbf{x}) + (1 - \lambda_i) M_{D \setminus \{\mathbf{d}_i\}}(\mathbf{x} - \mathbf{d}_i)]. \quad (1.18)$$

Dimostrazione. Senza perdere di generalità dimostriamo la (1.17) quando \mathbf{x} coincide con uno dei vettori direzione. Si supponga $\mathbf{x} = \mathbf{d}_n$. Utilizzando l'uguaglianza

$$\frac{\partial}{\partial t} \varphi(t\mathbf{x}) = D_{\mathbf{x}} \varphi(t\mathbf{x}) \quad (1.19)$$

e considerando un'arbitraria funzione φ appartenente all'insieme $\mathcal{C}_0^1(\mathbb{R}^s)$ delle funzioni a supporto compatto in \mathbb{R}^s con derivata prima continua, si ottiene dalla (1.7):

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^s} \varphi(\mathbf{x}) D_{\mathbf{d}_n} M_D(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} &= - \int_{\mathbb{R}^s} D_{\mathbf{d}_n} \varphi(\mathbf{x}) M_D(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = - \int_{[0 \dots 1]^n} \frac{\partial}{\partial t_n} \varphi(D(\mathbf{t})) \, dt \\ &= \int_{[0 \dots 1]^{n-1}} \varphi(t^1 \mathbf{d}_1 + \dots + t^{n-1} \mathbf{d}_{n-1}) \, dt^1 \dots dt^{n-1} \\ &\quad - \int_{[0 \dots 1]^{n-1}} \varphi(t^1 \mathbf{d}_1 + \dots + t^{n-1} \mathbf{d}_{n-1} + \mathbf{d}_n) \, dt^1 \dots dt^{n-1} \\ &= \int_{\mathbb{R}^s} \varphi(\mathbf{x}) M_{D \setminus \{\mathbf{d}_n\}}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} - \int_{\mathbb{R}^s} \varphi(\mathbf{x} + \mathbf{d}_n) M_{D \setminus \{\mathbf{d}_n\}}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\ &= \int_{\mathbb{R}^s} \varphi(\mathbf{x}) [M_{D \setminus \{\mathbf{d}_n\}}(\mathbf{x}) - M_{D \setminus \{\mathbf{d}_n\}}(\mathbf{x} - \mathbf{d}_n)] \, d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

In questo modo è stata provata la (1.17). La relazione ricorrente (1.18) segue facilmente dalla (1.17) e dalla seguente uguaglianza:

$$D_{\mathbf{x}}M_D(\mathbf{x}) = (n - s)M_D(\mathbf{x}) - \sum_{i=1}^n M_{D \setminus \{\mathbf{d}_i\}}(\mathbf{x} - \mathbf{d}_i). \quad (1.20)$$

Per dimostrare la (1.20), integriamo per parti il seguente integrale:

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^s} \varphi(\mathbf{x}) D_{\mathbf{x}} M_D(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\ &= \sum_{i=1}^s \int_{\mathbb{R}^s} \varphi(\mathbf{x}) \mathbf{d}_i \frac{\partial}{\partial \mathbf{d}_i} M_D(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = - \sum_{i=1}^s \int_{\mathbb{R}^s} \frac{\partial}{\partial \mathbf{d}_i} (\mathbf{d}_i \varphi(\mathbf{x})) M_D(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \quad (1.21) \\ &= -s \int_{\mathbb{R}^s} \varphi(\mathbf{x}) M_D(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} - \int_{\mathbb{R}^s} D_{\mathbf{x}} \varphi(\mathbf{x}) M_D(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

D'altra parte, dalla (1.7) e (1.19) si ha

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^s} D_{\mathbf{x}} \varphi(\mathbf{x}) M_D(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} &= \int_{[0 \dots 1]^n} D_{D(\mathbf{t})} \varphi(D(\mathbf{t})) \, d\mathbf{t} = \sum_{i=1}^n \int_{[0 \dots 1]^n} t^i \frac{\partial}{\partial t^i} \varphi(D(\mathbf{t})) \, d\mathbf{t} \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{[0 \dots 1]^n} \frac{\partial}{\partial t^i} (t^i \varphi(D(\mathbf{t}))) \, d\mathbf{t} - \sum_{i=1}^n \int_{[0 \dots 1]^n} \varphi(D(\mathbf{t})) \, d\mathbf{t} \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{[0 \dots 1]^{n-1}} \varphi((D \setminus \{\mathbf{d}_i\})(\tau) + \mathbf{d}_i) \, d\tau - n \int_{\mathbb{R}^s} \varphi(\mathbf{x}) M_D(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{[0 \dots 1]^{n-1}} \varphi(\mathbf{x} + \mathbf{d}_i) M_{D \setminus \{\mathbf{d}_i\}}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} - n \int_{\mathbb{R}^s} \varphi(\mathbf{x}) M_D(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{[0 \dots 1]^{n-1}} \varphi(\mathbf{x}) [M_{D \setminus \{\mathbf{d}_i\}}(\mathbf{x} - \mathbf{d}_i) - n M_D(\mathbf{x})] \, d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Questo risultato combinato con (1.21) conduce alla (1.20). \square

Dal teorema 1.3 e dalla (1.4) segue che una Box spline M_D è una funzione polinomiale a tratti. In ogni regione delimitata dagli iperpiani del tipo

$$\mathbf{x} + \langle Y \rangle \text{ dove } Y \subset D, \quad \dim \langle Y \rangle = \|Y\| = s - 1,$$

$$\mathbf{x} = \sum_{\mathbf{d}_i \notin Y} t^i \mathbf{d}_i, \quad t^i \in \{0, 1\},$$

coincide con un polinomio di grado al più $\dim(\ker D) = n - \dim(\text{Imm}(D))$.

Nel caso in cui D abbia rango massimo si definisce il *grado* m di una Box spline come il grado dei tratti polinomiali che la costituiscono

$$m = n - s.$$

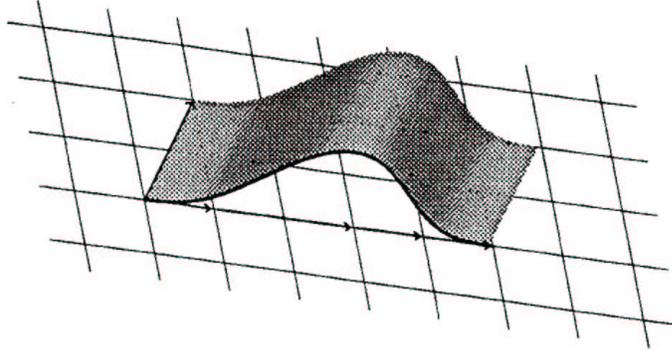


Figura 1.8: Box spline costante in una direzione.

Qualora fosse necessario specificare il grado della Box spline aggiungerei l'apice m alla notazione già usata: $M_D^m(\mathbf{x})$.

Dalla definizione induttiva segue in particolare che la Box spline $M_{D \cup \zeta}$ associata alla matrice ottenuta aggiungendo a D il vettore colonna ζ , è una costante a tratti nella direzione ζ non appartenente a $\langle D \rangle$. Se invece $\zeta \in \text{Span} D$ allora $M_{D \cup \zeta}$ è continua sul dominio, poichè ottenuta per convoluzione dalla funzione M_D . La Fig. 1.8 mostra una Box spline associata alla matrice $D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Si noti che nella direzione $(1 \ 1)$ la funzione è costante.

Inoltre, tenendo presente la relazione (1.17), si osserva che $M_D \in \mathcal{C}^{(p-1)}(\text{Imm}(D))$, con

$$p = \min\{\|Z\| : Z \in \mathcal{A}(D)\} - 1$$

e

$$\mathcal{A}(D) := \{Z \subseteq D : D \setminus Z \text{ non genera tutto lo spazio } \mathbb{R}^s\}.$$

Supponendo che $D \setminus \{\mathbf{d}_r\} = [\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_{r-1}, \mathbf{d}_{r+1}, \dots, \mathbf{d}_n]$ generi \mathbb{R}^s per $r = 1, \dots, s$, come suggerisce la relazione (1.17), le derivate direzionali di una Box spline associate a D si possono scrivere come combinazione delle traslazioni delle Box spline associate a $D \setminus \{\mathbf{d}_r\}$. Applicando questa osservazione ricorsivamente si verifica la seguente proposizione.

Proposizione 1.3.1. $M_D(\mathbf{x}) \in \mathcal{C}^r(\mathbb{R}^s)$ se ogni sottomatrice Z , ottenuta cancellando da D $r + 1$ vettori \mathbf{d}_i , genera tutto \mathbb{R}^s .

Esempio 1.4. Nel caso della **hat function**, p è 1, dunque $M_{[e_1, e_2, e_1+e_2]}$ è una funzione solamente continua, mentre $M_{[e_1, e_2, e_1+e_2, e_1-e_2]}$ (**ZP element**) appartiene a $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$, essendo $p = 2$.

Esempio 1.5. Si consideri la Box spline associata alla matrice $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = [e_1, e_2, e_1, e_2, e]$, con $e = e_1 + e_2$. Allora per ogni \mathbf{x} appartenente al supporto

$$D_{e_1} M_{[e_1 e_2 e_1 e_2 e]}(\cdot) = M_{[e_1 e_2 e_2 e]}(\cdot) - M_{[e_1 e_2 e_2 e]}(\cdot - e_1) \quad (1.22)$$

$$D_{e_1} D_{e_1} M_{[e_1 e_2 e_1 e_2 e]}(\cdot) = M_{[e_2 e_2 e]}(\cdot) - M_{[e_2 e_2 e]}(\cdot - e_1). \quad (1.23)$$

Essendo dunque la $M_{[e_2 e_2 e]}$ una costante a tratti nella direzione e la (1.23) non è necessariamente continua su tutto il dominio, mentre lo è la derivata (1.22). Quindi $M_D \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2) \setminus \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$. Si giunge allo stesso risultato applicando la proposizione 1.3.1 e osservando che, eliminando una qualsiasi coppia di vettori dalla matrice, i vettori rimanenti generano tutto lo spazio.

Nel caso di Box spline associate alla matrice $D = [\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_s, \mathbf{d}_1 + \dots + \mathbf{d}_s]$, in [34, eqn. 2.6] viene illustrata la seguente formula per calcolare p :

$$p = z + w - 1$$

dove z e w sono le due più piccole molteplicità dei vettori della matrice associata. Questa espressione deriva dal fatto che qualunque siano le s direzioni scelte, queste generano comunque \mathbb{R}^s .

Osservazione 4. Fissato un numero di vettori direzione, si può incrementare il grado di continuità della Box spline aumentando opportunamente la molteplicità di ogni vettore. D'altra parte fissato il numero di colonne della matrice D , maggiore è il numero di vettori linearmente dipendenti, minore è il grado di continuità.

Per esempio, per

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

si ha $p = 2$, essendo $Z = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -4 \end{bmatrix}$. Se invece le colonne di D fossero state a due a due linearmente indipendenti, la Box spline M_D avrebbe avuto il grado di continuità massimo, cioè $p = n - s - 1$.

Nella tabella 1.1 è riportato il grado di continuità di alcune funzioni Box spline a tre $(e_1, e_2, e_1 + e_2)$ e quattro $(e_1, e_2, e_1 + e_2, e_1 - e_2)$ direzioni.

$\nu_1\nu_2\nu_3$	grado di continuità
1 1 1	0
2 1 1	0
2 2 1	1
2 2 2	2

$\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4$	grado di continuità
1 1 1 1	1
2 1 1 1	1
2 2 1 1	2
2 2 2 1	3
2 2 2 2	4

Tabella 1.1: Grado di continuità di alcune Box spline a tre (sinistra) e a quattro direzioni (destra).

Capitolo 2

Metodi numerici per la valutazione di Box spline

2.1 Introduzione

Il primo passo verso uno studio approfondito delle caratteristiche delle Box spline e un loro utilizzo pratico, è fornirsi di uno strumento valido ed efficiente per la loro valutazione e rappresentazione. Si pensi ad esempio alla risoluzione di problemi di interpolazione o approssimazione, dove è richiesta l'esatta valutazione di una Box spline in un punto dato. Nella gestione pratica di questioni del genere spesso si inciampa su problemi numerici dovuti all'instabilità degli algoritmi, agli elevati costi computazionali o agli errori di approssimazione numerica. Per questo motivo il primo obiettivo che mi sono proposta è stato quello di ricercare uno schema computazionalmente efficiente che risultasse di semplice generalizzazione al caso di più variabili. Un primo approccio alle varie tecniche presenti in letteratura, ha permesso di cogliere i limiti e le potenzialità di ognuna di loro e di formulare un'idea generale applicabile facilmente al caso multivariato. In questo capitolo percorrerò i passi principali che ci hanno condotto allo sviluppo di un algoritmo per la valutazione di una particolare classe di Box spline bivariate e trivariate, anche se, come risulterà chiaro nel corso della trattazione, l'impostazione dell'algoritmo è valida per una qualsiasi funzione Box spline.

2.2 Stato dell'arte

In generale gli algoritmi di valutazione per Box spline possono sfruttare uno o più dei seguenti approcci:

- i. suddivisione;
- ii. trasformata di Fourier;
- iii. formula ricorrente;
- iv. rappresentazione della Box spline tramite i coefficienti di Bézier relativi ad ogni patch polinomiale.

La suddivisione conduce ad una tecnica iterativa che sfrutta l'applicazione ricorsiva di opportune maschere ad una mesh iniziale, generando dunque una superficie approssimante la Box spline ([6], [10], [20], [26]). L'algoritmo FFT, che utilizza la trasformata inversa discreta di Fourier, fornisce solo una valutazione approssimata, essendo una restrizione discreta della trasformazione continua [58]. Entrambe le tecniche hanno il vantaggio di valutare la Box spline in un gran numero di punti alla volta, ma costituiscono uno schema valido solo nel caso in cui sia sufficiente un'approssimazione della funzione. Per la visualizzazione grafica tali tecniche risultano accettabili, ma per studi analitici è a volte necessario conoscere l'esatto valore della funzione. I metodi **iii.** e **iv.** sono invece esatti, tuttavia l'utilizzo della formula ricorrente risulta piuttosto costoso se si pensa che i valori di ogni Box spline in ogni punto vengono calcolati uno alla volta ([47]). Solo le funzioni di grado basso possono essere valutate senza troppe difficoltà, ma in generale per una qualsiasi Box spline il costo computazionale cresce in modo combinatorio con il numero dei vettori direzione. Inoltre, il caso trivariato, a cui siamo particolarmente interessati per le applicazioni nella ricostruzione di superfici, diventa di difficile gestione. Stranamente, non esistono in letteratura studi riguardo all'utilizzo della decomposizione in volumi tetraedrali di Bézier per la valutazione delle Box spline trivariate. Alcuni lavori hanno focalizzato l'attenzione sul particolare caso bivariato di Box spline a tre e quattro direzioni, calcolando i coefficienti di Bézier relativi ad ogni patch triangolare ([18], [49]). Tuttavia nessuno ha esplicitamente generato tali coefficienti nel caso trivariato e, dato che pensiamo possa essere una valida tecnica per la valutazione esatta delle funzioni Box spline, ci siamo proposti in primis di studiare questo metodo. Nella modellazione geometrica un approccio comune è quello di rappresentare un polinomio definito su un intervallo, un triangolo o in generale un s -simplex attraverso i suoi punti di Bézier. Si tratta di una tecnica largamente diffusa sia in teoria che nelle applicazioni, perchè l'interpolante lineare a tratti di questi punti, il cosiddetto reticolo di Bézier (*B-net*), riflette fedelmente la forma della curva o superficie polinomiale, costituendone dunque una prima approssimazione. Osser-

vando che una Box spline s -variata è formata da patch polinomiali di grado $n - s$ definiti su un simpleso s -dimensionale, l'idea è quella di calcolare il B-net per ogni polinomio e determinare l'esatto valore della Box spline per ogni punto utilizzando il noto algoritmo di de Casteljau e le tecniche in [63], [79]. Dopo aver analizzato i lavori di Lai e Chui ([18], [49]) ci siamo interessati alla progettazione e sviluppo di un algoritmo alternativo con le caratteristiche di stabilità ed efficienza a basso costo computazionale, e in più facilmente generalizzabile al caso multivariato e trivariato in particolare. Il lavoro svolto in questa direzione è stato raccolto nell'articolo [12]. Nei prossimi paragrafi dopo l'introduzione delle principali proprietà dei polinomi in forma di Bézier, descriverò l'idea che ci ha condotto alla formulazione di un nuovo algoritmo, dapprima nel caso di Box spline bivariate a tre e a quattro direzioni, generalizzato poi a Box trivariate a quattro direzioni. Saranno presentati inoltre esempi che chiarificano il metodo e dettagli computazionali.

2.3 Rappresentazione di Bézier di polinomi multivariati

Definizione 2.1. Siano $\mathbf{v}^0, \mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^s$ $s + 1$ vertici in \mathbb{R}^s , le cui coordinate cartesiane $(x_1^h, x_2^h, \dots, x_s^h) = \mathbf{v}^h$, $h = 0, \dots, s$, soddisfano

$$\det \begin{bmatrix} 1 & x_1^0 & x_2^0 & \cdots & x_s^0 \\ 1 & x_1^1 & x_2^1 & \cdots & x_s^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_1^s & x_2^s & \cdots & x_s^s \end{bmatrix} \neq 0. \quad (2.1)$$

Allora, un s -simpleso T non degenere, con volume non nullo

$$\text{vol}(T) = \frac{1}{s!} \det \begin{bmatrix} 1 & x_1^0 & x_2^0 & \cdots & x_s^0 \\ 1 & x_1^1 & x_2^1 & \cdots & x_s^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_1^s & x_2^s & \cdots & x_s^s \end{bmatrix},$$

è definito come il convesso generato dai vettori $\mathbf{v}^0, \mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^s$ che soddisfano (2.1), cioè:

$$T := \langle \mathbf{v}^0, \mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^s \rangle = \left\{ \mathbf{v} \in \mathbb{R}^s : \mathbf{v} = \sum_{h=0}^s \lambda_h \mathbf{v}^h, 0 \leq \lambda_h \leq 1, \sum_{h=0}^s \lambda_h = 1 \right\}. \quad (2.2)$$

La $s + 1$ -upla $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_s)$ in (2.2) identifica le cosiddette coordinate baricentriche di un arbitrario punto $\mathbf{v} = (x_1, x_2, \dots, x_s) \in \mathbb{R}^s$ rispetto al s -simpleso $T = \langle \mathbf{v}^0, \mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^s \rangle$.

Osservazione 5. All'interno di T $\lambda_h > 0$, $\forall h = 0, 1, \dots, s$. Questo può essere verificato osservando che

$$\lambda_h := \lambda_h(\mathbf{v}) = \frac{\text{vol}(\widehat{T}_h)}{\text{vol}(T)}, \quad h = 0, \dots, s$$

è un polinomio lineare che assume il valore 1 nel vertice \mathbf{v}_h e si annulla sulla faccia opposta a \mathbf{v}_h . Con \widehat{T}_h si denota il simpleso di vertici $\mathbf{v}^0, \dots, \mathbf{v}^{h-1}, \mathbf{v}, \mathbf{v}^{h+1}, \dots, \mathbf{v}^s$.

Per ogni $\beta = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_s) \in \mathbb{Z}_+^{s+1}$ e $m \in \mathbb{Z}_+$ utilizzerò l'usuale notazione multivariata

$$\lambda^\beta = \lambda_0^{\beta_0} \lambda_1^{\beta_1} \dots \lambda_s^{\beta_s}, \quad \beta! = \beta_0! \beta_1! \dots \beta_s!, \quad |\beta| = \beta_0 + \beta_1 + \dots + \beta_s.$$

Introduciamo ora i polinomi di Bernstein s -variati come:

$$B_\beta^m(\lambda) = \frac{m!}{\beta!} \lambda^\beta, \quad m = |\beta|. \quad (2.3)$$

Poichè λ_h è un polinomio lineare, ne segue che B_β^m sono polinomi di grado m . Dunque l'insieme $\{B_\beta^m(\lambda), |\beta| = m\}$ costituisce una base per lo spazio di tutti i polinomi di grado $\leq m$. Di conseguenza ogni polinomio p di grado m su T può essere scritto in modo univoco in termini dei B_β^m , cioè

$$p(\mathbf{v}) = \sum_{|\beta|=m} P_\beta^m B_\beta^m(\lambda) \quad P_\beta^m \in \mathbb{R}. \quad (2.4)$$

La rappresentazione (2.4) per i polinomi è nota come forma di Bézier di p su T . I P_β^m sono i coefficienti di Bézier di p rispetto a T .

Osservazione 6. A seconda delle esigenze, per semplificare la notazione utilizzerò $p(\mathbf{v})$, $p(x_1, x_2, \dots, x_s)$, $p(\lambda)$ e $p(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_s)$ per indicare la stessa funzione p .

Gli indici $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_s$ sono associati rispettivamente ai vertici $\mathbf{v}^0, \mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^s$ in T ; ogni polinomio $p(\mathbf{v})$ può quindi essere rappresentato dal set di coefficienti di Bézier $\{P_\beta^m, |\beta| = m\}$.

Definizione 2.2. Le ordinate $P_\beta^m \in \mathbb{R}$ associate alle ascisse baricentriche

$$\xi_\beta = \frac{\beta_0 \mathbf{v}^0 + \beta_1 \mathbf{v}^1 + \dots + \beta_s \mathbf{v}^s}{m} \in \mathbb{R}^s, \quad |\beta| = m,$$

$$\left\{ \left(\frac{\beta_0 \mathbf{v}^0 + \beta_1 \mathbf{v}^1 + \dots + \beta_s \mathbf{v}^s}{m}, P_\beta^m \right) : |\beta| = m \right\} \in \mathbb{R}^{s+1},$$

costituiscono il reticolo di Bézier di $p(\mathbf{v})$ in \mathbb{R}^{s+1} , che determina unicamente il polinomio $p(\mathbf{v})$ e contiene le informazioni circa le caratteristiche geometriche del polinomio.

A causa della dipendenza lineare delle coordinate baricentriche, le derivate parziali di un polinomio in forma di Bézier non hanno un'ovvia interpretazione geometrica; le derivate rispetto a $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_s$ non coincidono infatti con quelle lungo le linee parametriche. Per questo motivo è preferibile lavorare con le derivate direzionali. Per semplicità si consideri il vettore direzionale $\mathbf{w} = \mathbf{v}^i - \mathbf{v}^j$, e si definisca tramite la seguente notazione

$$s_i\beta = (\beta_0, \dots, \beta_{i-1}, \beta_i + 1, \beta_{i+1}, \dots, \beta_s),$$

dove $\beta = (\beta_0, \dots, \beta_s)$, la differenza

$$\Delta_{ij}P_\beta^m = P_{s_i\beta}^{m+1} - P_{s_j\beta}^{m+1}.$$

La relazione che lega la derivata di p rispetto a \mathbf{w} e $\Delta_{ij}P_\beta^m$ per i polinomi di Bézier della forma (2.4), è enunciata nella seguente proposizione.

Proposizione 2.3.1. *Per $i \neq j$*

$$D_{\mathbf{w}}p(\mathbf{v}) = m \sum_{|\beta|=m-1} \Delta_{ij}P_\beta^{m-1} B_\beta^{m-1}(\lambda) \quad (2.5)$$

Dimostrazione. Sia $\mathbf{v} = (x_1, x_2, \dots, x_s)$ e $\mathbf{v}^i = (x_1^i, x_2^i, \dots, x_s^i)$. Poichè

$$x_l = \sum_{t=0}^s \lambda_t x_l^t, \quad l = 1, \dots, s$$

abbiamo

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{w}}p(\mathbf{v}) &= \sum_{l=1}^s (x_l^i - x_l^j) \frac{\partial}{\partial x_l} p(\mathbf{v}) \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial \lambda_i} - \frac{\partial}{\partial \lambda_j} \right) p(\mathbf{v}). \end{aligned}$$

La (2.5) segue pertanto da un semplice cambio di indici nell'espressione

$$\sum_{|\beta|=m} \frac{m!}{\beta!} P_\beta^m \left(\frac{\partial}{\partial \lambda_i} - \frac{\partial}{\partial \lambda_j} \right) \lambda^\beta.$$

□

In generale

$$\Delta_{ij}P_\beta^m(\mathbf{a}) = \sum_{k=0}^s a_k P_{s_k\beta}^{m+1},$$

dove $\mathbf{a} = (a_0, a_1, \dots, a_s)$ sono le T -coordinate della direzione $\mathbf{w} = \mathbf{w}^1 - \mathbf{w}^2$ e precisamente se $\mathbf{b} = (b_0, b_1, \dots, b_s)$ e $\mathbf{c} = (c_0, c_1, \dots, c_s)$ sono rispettivamente le coordinate baricentriche dei vettori $\mathbf{w}^1, \mathbf{w}^2$ si ha che $a_i = b_i - c_i, \forall i = 0, \dots, s$.

Si noti che $a_0 + a_1 + \dots + a_s = 0$.

2.4 L'algoritmo *Mixed Directional Difference-Summation* (MDDS): caso bivariato

2.4.1 Calcolo del B-net per Box spline a tre direzioni

Nell'iter verso la formulazione di un nuovo schema computazionale per la valutazione di Box spline trivariate, un primo approccio al caso bivariato ci ha permesso di mettere in luce alcuni aspetti del metodo **iv**. Dunque per rendere il più chiaro possibile il processo che ci ha condotto al calcolo del reticolo di Bézier trivariato, in questa sezione tratterò il caso di Box spline bivariate di grado m a tre direzioni, con matrice associata

$$D = \underbrace{[e_1, \dots, e_1]}_{\nu_1}, \underbrace{[e_2, \dots, e_2]}_{\nu_2}, \underbrace{[e_1 + e_2, \dots, e_1 + e_2]}_{\nu_3}$$

regolare Γ del dominio poligonale in \mathbb{R}^2 . Infatti le direzioni $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ identificano una griglia che suddivide il dominio in triangoli tutti uguali (Fig. 2.1).

Per rappresentare una Box spline bivariata in patch di Bézier, è necessario partizionare il suo supporto in quadrati tramite una griglia regolare del dominio e considerare una tassellazione di ogni cella in due triangoli, come mostrato in Fig. 2.2.

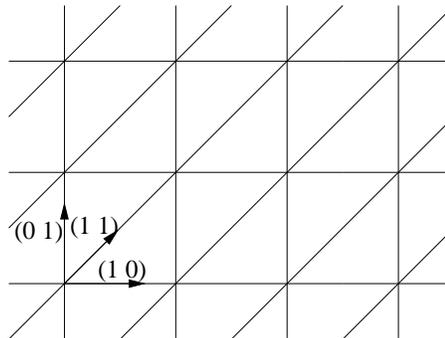


Figura 2.1: Griglia generata dalle direzioni e_1 , e_2 , $e_1 + e_2$.

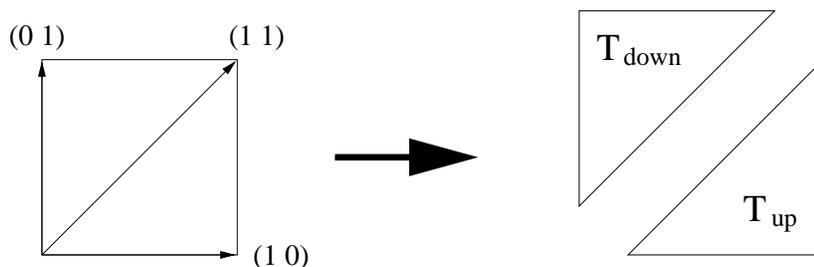
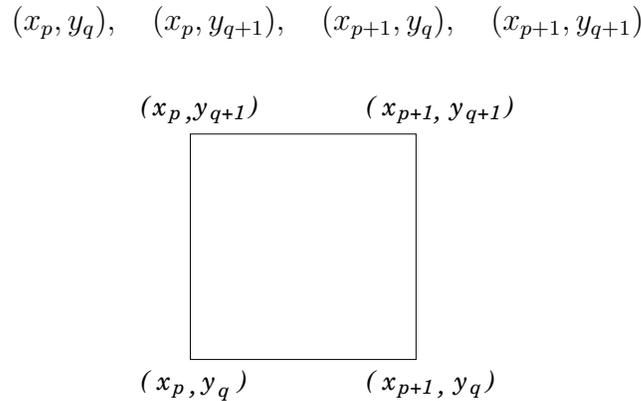


Figura 2.2: Le direzioni e_1 , e_2 , $e_1 + e_2$ partizionano il dominio in triangoli T_{down} e T_{up} .

Una funzione base Box spline bivariata $M_{\nu_1\nu_2\nu_3}^m$, $\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 = n$ è una polinomiale a tratti in due variabili che consiste in $2(\nu_1\nu_2 + \nu_1\nu_3 + \nu_2\nu_3)$ differenti polinomi dello stesso grado $m = n - 2$, definiti sui triangoli della partizione Γ .

Sia $x_0 < \dots < x_p < x_{p+1} < \dots < x_{\nu_1+\nu_3-1}$, $y_0 < \dots < y_q < y_{q+1} < \dots < y_{\nu_2+\nu_3-1}$. Si consideri poi la divisione dello spazio 2D in settori quadrati attraverso le rette $x = x_p$, $y = y_q$, $p = 0, \dots, \nu_1 + \nu_3 - 1$, $q = 0, \dots, \nu_2 + \nu_3 - 1$. Prendiamo in considerazione un generico quadrato di vertici



e indichiamo con $P_{i,j,k}^m$, $i + j + k = m$, i coefficienti di Bézier del polinomio bivariato di grado m

$$p(\mathbf{v}) = \sum_{i,j,k \geq 0} P_{i,j,k}^m B_{i,j,k}^m(\lambda)$$

definito dalla restrizione di $M_{\nu_1\nu_2\nu_3}^m$, a uno dei due triangoli T del quadrato, con

$$T := \langle \mathbf{v}^0, \mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2 \rangle = \left\{ \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2 : \mathbf{v} = \sum_{h=0}^2 \lambda_h \mathbf{v}^h, 0 \leq \lambda_h \leq 1, \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \right\}.$$

Allora il vettore $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)$ indica le coordinate baricentriche del punto \mathbf{v} rispetto al triangolo T . La Fig. 2.3 mostra i coefficienti $P_{i,j,k}^2$ e le relative posizioni sui due triangoli.

Utilizzando la relazione (2.5) nel caso bivariato si ha che la derivata di $p(\mathbf{v})$ lungo la direzione definita dal vettore \mathbf{d}_h è

$$D_{\mathbf{d}_h} p(\mathbf{v}) = m \sum_{i,j,k \geq 0} \Delta P_{i,j,k}^{m-1}(\mathbf{a}) B_{i,j,k}^{m-1}(\lambda) \quad (2.6)$$

dove $\mathbf{a} = (a_0, a_1, a_2)$, $a_0 + a_1 + a_2 = 0$, sono le T -coordinate di $\mathbf{d}_h = \mathbf{x} - (\mathbf{x} - \mathbf{d}_h)$ e i nuovi coefficienti sono legati a quelli di $p(\mathbf{v})$ dalla seguente relazione di ricorrenza:

$$\Delta P_{i,j,k}^{m-1}(\mathbf{a}) = a_0 P_{i+1,j,k}^m + a_1 P_{i,j+1,k}^m + a_2 P_{i,j,k+1}^m. \quad (2.7)$$

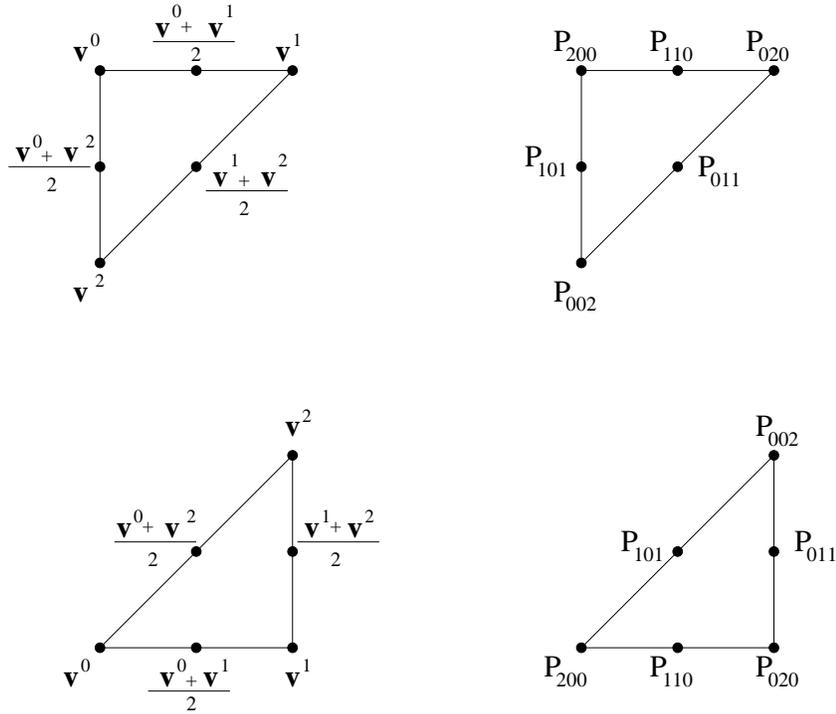


Figura 2.3: Posizione (sinistra) e relativi valori (destra) dei coefficienti di Bézier di un patch di grado 2 definito sui triangoli T_{down} e T_{up} .

Più precisamente, se $(\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2)$ e $(\beta_0, \beta_1, \beta_2)$ sono le coordinate baricentriche di \mathbf{x} e $(\mathbf{x} - \mathbf{d}_h)$ rispetto a T , si ha che $\mathbf{a} = (\gamma_0 - \beta_0, \gamma_1 - \beta_1, \gamma_2 - \beta_2) = (a_0, a_1, a_2)^1$.

Ora ricordando che una Box spline è una combinazione lineare delle funzioni base di Bézier, si può sfruttare (2.6)-(2.7) e scrivere

$$m \sum_{\substack{i,j,k \geq 0 \\ i+j+k = m-1}} \Delta P_{i,j,k}^{m-1}(\mathbf{a}) B_{i,j,k}^{m-1}(\lambda) = \sum_{\substack{i,j,k \geq 0 \\ i+j+k = m-1}} Q_{i,j,k}^{m-1} B_{i,j,k}^{m-1}(\lambda). \quad (2.8)$$

Dalla (2.8) deriva facilmente

$$Q_{i,j,k}^{m-1} = m(a_0 P_{i+1,j,k}^m + a_1 P_{i,j+1,k}^m + a_2 P_{i,j,k+1}^m). \quad (2.9)$$

La costruzione del B-net richiede quindi di calcolare i coefficienti incogniti $P_{i,j,k}^m$ dall'equazione (2.9). D'ora in avanti il fattore m sarà ommesso in modo da lavorare solo con numeri interi (vedi proposizione 2.4.1).

In conclusione, l'idea matematica e la formulazione per trovare il B-net di una qualsiasi Box spline bivariata a tre direzioni può essere sintetizzata come segue.

¹Poichè integriamo sempre lungo le direzioni $e_1, e_2, e_1 + e_2$ generate dai triangoli, si hanno solo due coordinate baricentriche non nulle, che assumono tipicamente i valori 1 e -1.

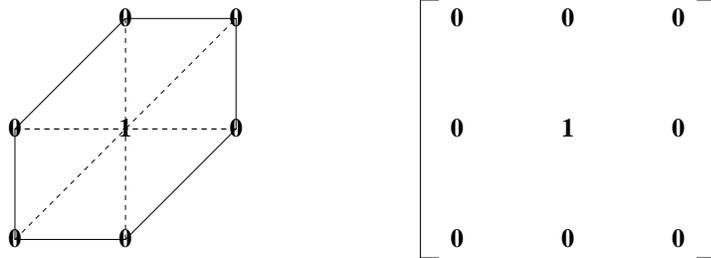


Figura 2.4: B-net della Box spline M_{111}^1 e relativa matrice 3×3 in cui sono memorizzati i coefficienti di Bézier. Al di fuori del supporto i coefficienti sono uguali a 0.

Partendo dal B-net della Box spline di grado 1 M_{111}^1 , (vedi Fig. 2.4) è possibile calcolare il B-net di una Box spline $M_{\nu_1\nu_2\nu_3}^m$, con $\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 > 3$, applicando i seguenti passi:

1. Esprimere ogni polinomio della Box spline attraverso i coefficienti (incogniti) di Bézier;
2. Utilizzare la relazione

$$D_{\mathbf{d}_h} M_D^m(\mathbf{x}) = M_{D \setminus \{\mathbf{d}_h\}}^{m-1}(\mathbf{x}) - M_{D \setminus \{\mathbf{d}_h\}}^{m-1}(\mathbf{x} - \mathbf{d}_h) \quad h = 1, \dots, n \quad (2.10)$$

per rappresentare la Box spline di grado m associata alla matrice delle direzioni D a partire dalla Box spline di grado $m - 1$ associata alla matrice $D \setminus \{\mathbf{d}_h\}$, con $\text{span}(D \setminus \{\mathbf{d}_h\}) = \mathbb{R}^2$;

3. Determinare i coefficienti P_{ijk}^m del B-net di M_D^m sfruttando la formula della derivata di un polinomio di Bézier (2.9), con (a_0, a_1, a_2) le T -coordinate della direzione \mathbf{d}_h e Q_{ijk}^{m-1} i coefficienti del B-net di $M_{D \setminus \{\mathbf{d}_h\}}^{m-1}$.

Quindi, partendo dal noto B-net della M_{111}^1 , l'idea chiave è di costruire il B-net di una Box spline di grado arbitrario applicando ricorsivamente la formula (2.10). In questo modo i coefficienti di Bézier $Q_{i,j,k}^{m-1}$ di $D_{\mathbf{d}_h} M_D^m$ possono essere ottenuti da un processo di traslazione e sottrazione (*shift-subtract procedure*) sul B-net di $M_{D \setminus \{\mathbf{d}_h\}}^{m-1}(\mathbf{x})$.

Per rendere più chiaro quanto appena detto, illustrerò con un esempio questi passi.

Esempio 2.1. Calcolare il B-net della Box spline di grado 2 definita dalla matrice delle direzioni $D_4 = [e_1, e_1, e_2, e_1 + e_2]$, dove il pedice 4 indica il numero n delle colonne della matrice D .

Seguendo i passi dell'algoritmo sopra descritti, il B-net della $M_{D_4}^2$ si ottiene trasladando il B-net della $M_{D_3}^1$ lungo la direzione e_1 , dove $D_3 = [e_1, e_2, e_1 + e_2]$, sottraendo i coefficienti

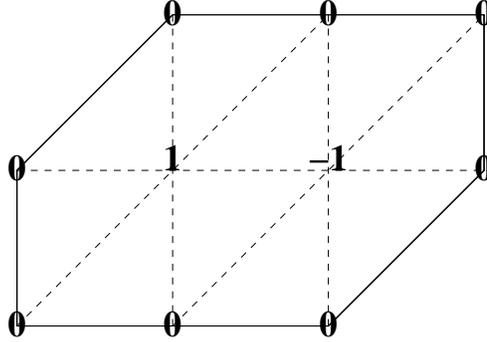


Figura 2.5: Operazione di traslazione e sottrazione dei coefficienti di M_{111}^1 nella direzione e_1 .

corrispondenti (Fig. 2.5) e integrandoli lungo la stessa direzione. Quest'ultimo passo (che permette di trovare i coefficienti di Bézier della $M_{D_4}^2$) è espresso dalla relazione (2.9) dove (a_0, a_1, a_2) sono le T -coordinate di e_1 , e precisamente

$$\begin{aligned} a_0 &= \gamma_0 - \beta_0 = 0 - 1 = -1 \\ a_1 &= \gamma_1 - \beta_1 = 1 - 0 = 1 \\ a_2 &= \gamma_2 - \beta_2 = 0 - 0 = 0. \end{aligned}$$

In altre parole, la relazione (2.9) risulta semplificata come segue:

$$\begin{aligned} Q_{100}^1 &= P_{110}^2 - P_{200}^2 \\ Q_{010}^1 &= P_{020}^2 - P_{110}^2 \\ Q_{001}^1 &= P_{011}^2 - P_{101}^2 \end{aligned} \tag{2.11}$$

e quindi

$$\begin{aligned} P_{110}^2 &= Q_{100}^1 + P_{200}^2 \\ P_{020}^2 &= Q_{010}^1 + P_{110}^2 \\ P_{011}^2 &= Q_{001}^1 + P_{101}^2. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Poichè l'integrale di un polinomio di Bézier di grado 1 è un polinomio di grado 2, le equazioni (2.12) possono essere viste come l'integrazione dei coefficienti Q_{ijk}^1 , partendo dai lati del triangolo con vertici $P_{200}^2, P_{101}^2, P_{002}^2$. Tuttavia, poichè i valori di queste costanti di integrazione non sono noti, si suppone che assumano i valori dei coefficienti del triangolo adiacente che condivide il lato contenente queste costanti, fino al raggiungimento del bordo dove i coefficienti sono uguali a zero. In questo modo si calcolano i restanti tre coefficienti $P_{110}^2, P_{020}^2, P_{011}^2$ attraverso una sequenza di addizioni successive

$$\begin{aligned} P_{110}^2 &= Q_{100}^1 + P_{200}^2 \\ P_{020}^2 &= Q_{010}^1 + Q_{100}^1 + P_{200}^2 \\ P_{011}^2 &= Q_{001}^1 + P_{101}^2. \end{aligned}$$

Applicando queste uguaglianze all'intera Box spline $M_{D_4}^2$ e sfruttando le adiacenze dei triangoli, sono stati calcolati tutti i coefficienti di Bézier del suo B-net.

D'ora in poi utilizzerò la seguente notazione: con $2, (c_1, u)$ oppure $2, (c_1, d)$ indicherò i coefficienti del patch bivariato di grado 2 definito sul triangolo $T_{up}(u)$ o $T_{down}(d)$ appartenente al quadrato c_1 . Quindi per esempio, per ottenere il coefficiente $P_{011}^{2,(1,d)}$ del triangolo T_{down} nel quadrato 1 (il primo a destra in Fig. 2.6), si utilizza la relazione

$$P_{011}^{2,(1,d)} = Q_{001}^{1,(1,d)} + P_{101}^{2,(1,d)}$$

dove $P_{101}^{2,(1,d)}$ coincide con il coefficiente $P_{011}^{2,(2,u)}$ del triangolo T_{up} nel quadrato 2.

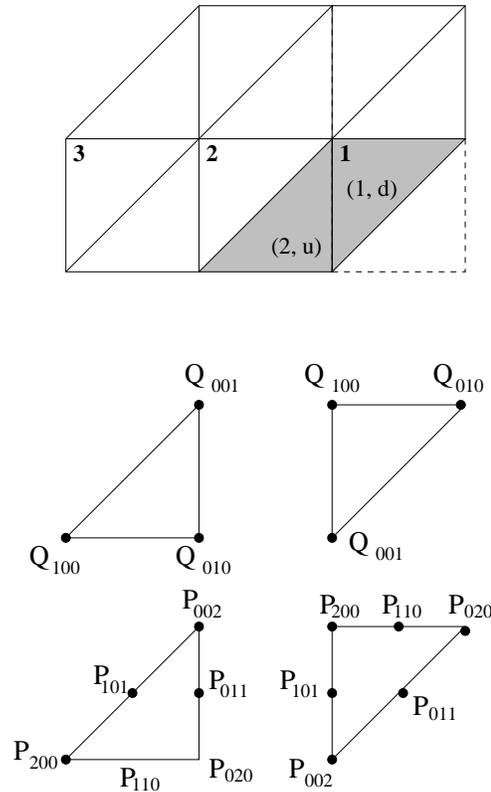


Figura 2.6: Coefficienti di Bézier di un patch bivariato lineare (in alto) e quadratico (in basso).

Di conseguenza

$$P_{011}^{2,(1,d)} = Q_{001}^{1,(1,d)} + Q_{001}^{1,(2,u)} + P_{101}^{2,(2,u)}.$$

Continuando con le sostituzioni fino a quando le costanti di integrazione raggiungono il bordo del supporto della Box, si ha

$$P_{011}^{2,(1,d)} = Q_{001}^{1,(1,d)} + Q_{001}^{1,(2,u)} + Q_{001}^{1,(2,d)} + Q_{001}^{1,(3,u)} + Q_{001}^{1,(3,d)} + P_{101}^{2,(3,d)}. \quad (2.13)$$

I coefficienti intermedi sono facilmente calcolati:

$$P_{101}^{2,(3,d)} \xrightarrow{+} Q_{001}^{1,(3,d)} \xrightarrow{=} P_{011}^{2,(3,d)} \xrightarrow{+} Q_{001}^{1,(3,u)} \xrightarrow{=} P_{101}^{2,(2,d)} \xrightarrow{+} Q_{001}^{1,(2,d)} \xrightarrow{=} P_{011}^{2,(2,d)} \xrightarrow{+} Q_{001}^{1,(2,u)} \xrightarrow{=} P_{101}^{2,(1,d)} \xrightarrow{+} Q_{001}^{1,(1,d)} \xrightarrow{=} P_{011}^{2,(1,d)}.$$

I coefficienti $Q_{i,j,k}^1$ in (2.13) identificano un particolare percorso in \mathbb{R}^2 (vedi Fig. 2.7) che permette di memorizzarli in un vettore, il quale una volta integrato tramite un processo di somme successive (che inizia dalla costante di integrazione $P_{101}^{2,(3,d)}$) genera il coefficiente $P_{011}^{2,(1,d)}$ della Box spline M_{211}^2 . Questo percorso non è altro che la composizione di alcune combinazioni lineari delle direzioni $e_1, e_2, e_1 + e_2$ (in particolare nell'esempio, $e_1 + e_2, e_2$). Da qui il nome *direzioni miste*.

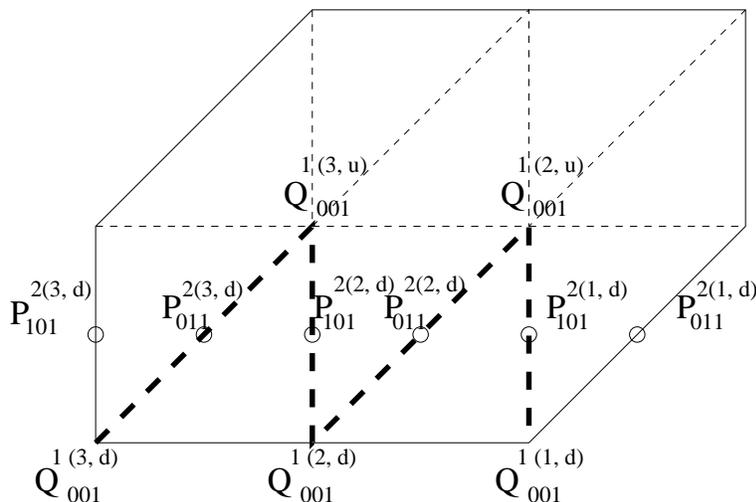


Figura 2.7: La direzione mista generata per calcolare i coefficienti di Bézier $P_{101}^{2,(3,d)}$, $P_{011}^{2,(3,d)}$, $P_{101}^{2,(2,d)}$, $P_{011}^{2,(2,d)}$, $P_{101}^{2,(1,d)}$, $P_{011}^{2,(1,d)}$ della Box spline M_{211}^2 .

La stessa procedura si applica per determinare tutte le direzioni miste di cui ho bisogno per calcolare i coefficienti del B-net della M_{211}^2 . Ovviamente, le direzioni miste individuate non sono sempre le stesse, benchè abbiano uno schema comune. Le direzioni miste che danno origine al B-net della Box spline M_{211}^2 sono visualizzate in Fig. 2.8.

Il numero e il percorso di queste direzioni dipende dal grado della Box. Come si può facilmente notare, l'insieme delle direzioni miste è composto da una direzione unidimensionale (Fig. 2.8-a) e una direzione bi-dimensionale con due rami (Fig. 2.8-b).

Una direzione ha più rami quando il pattern è lo stesso, ma traslato all'interno della Box. Nell'esempio dunque ogni ramo è semplicemente una traslazione nel vertice 1 indicato in Fig. 2.8-b, della direzione mista con origine nel vertice 0. Si osservi che in Fig. 2.8-b, considerando anche le frecce tratteggiate si definiscono i coefficienti di Bézier esterni al supporto e dunque nulli (quadrato). Tuttavia è utile considerarle cosicché la direzione mista con vertice 1 risulta essere esattamente la traslazione di quella con vertice 0.

La direzione uni-dimensionale, definita da una singola linea lungo e_1 , corrisponde alla direzione \mathbf{d}_h lungo la quale sto integrando. Per questa ragione verrà chiamata *direzione principale*. Nell'esempio, questa direzione è utilizzata per calcolare il coefficiente $P_{020}^{2,(1,d)}$ e i seguenti coefficienti intermedi:

$$P_{200}^{2,(3,d)} \xrightarrow{+} Q_{100}^{1,(3,d)} \xrightarrow{=} P_{110}^{2,(3,d)} \xrightarrow{+} Q_{010}^{1,(3,d)} \xrightarrow{=} P_{200}^{2,(2,d)} \xrightarrow{+} Q_{100}^{1,(2,d)} \xrightarrow{=} P_{110}^{2,(2,d)} \xrightarrow{+} Q_{010}^{1,(2,d)} \xrightarrow{=} P_{200}^{2,(1,d)} \xrightarrow{+} Q_{100}^{1,(1,d)} \xrightarrow{=} P_{110}^{2,(1,d)} \xrightarrow{+} Q_{010}^{1,(1,d)} \xrightarrow{=} P_{020}^{2,(1,d)}.$$

Si osservi che, poichè $Q_{010}^{1,(3,d)} = Q_{100}^{1,(2,d)}$ e $Q_{010}^{1,(2,d)} = Q_{100}^{1,(1,d)}$, la direzione principale contiene due coefficienti duplicati. In generale una qualsiasi direzione principale, nella generazione del B-net di una Box spline di grado m , contiene esattamente m coefficienti duplicati.

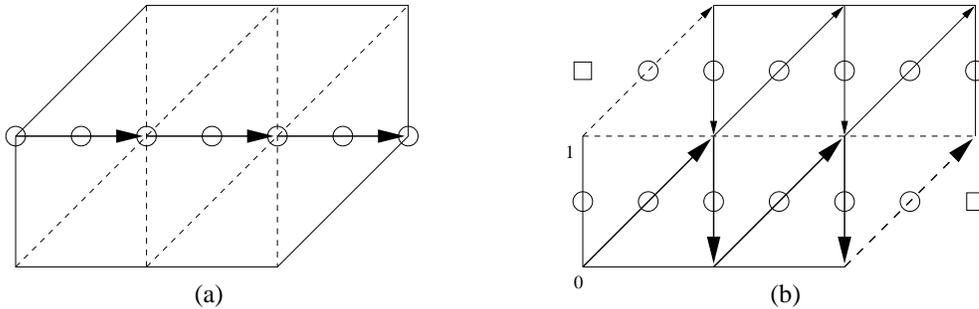


Figura 2.8: Tutte le direzioni miste sufficienti a determinare il B-net della Box spline M_{211}^2 .

2.4.2 Descrizione dell'algoritmo

L'idea per il calcolo del B-net di una Box spline bivariata $M_{\nu_1\nu_2\nu_3}^m$ può essere generalizzata e automatizzata in un semplice algoritmo che, dato in ingresso un vettore contenente le molteplicità ν_1, ν_2, ν_3 , determina i coefficienti di Bézier della Box spline corrispondente.

Sia la seguente matrice B la rappresentazione del B-net della Box lineare M_{111}^1

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Da qui, i coefficienti della Box-spline $M_{\nu_1\nu_2\nu_3}^m$ vengono generati da successive traslazioni-differenze-somme di quelli della M_{111}^1 lungo le direzioni $e_1, e_2, e_1 + e_2$, rispettivamente ν_1, ν_2, ν_3 volte:

$$M_{111}^1 \xrightarrow{I} M_{\nu_1 11}^{\nu_1} \xrightarrow{II} M_{\nu_1 \nu_2 1}^{\nu_1 + \nu_2 - 1} \xrightarrow{III} M_{\nu_1 \nu_2 \nu_3}^m.$$

Alla fine di questa procedura, i coefficienti di Bézier verranno memorizzati in una matrice $A(iA, jA)$, $1 \leq iA \leq m(\nu_2 + \nu_3) + 1$, $1 \leq jA \leq m(\nu_1 + \nu_3) + 1$, tenendo presente che all'esterno del supporto della Box i coefficienti sono nulli.

I passi I, II, III sfruttano la routine *B-net* che genera le direzioni miste MD per il calcolo dei coefficienti di A a partire da quelli di grado inferiore memorizzati in B .

I. Primo Passo: $M_{111} \longrightarrow M_{\nu_1 11}$

for $i=1, \dots, \nu_1$
 $A=B-net(i, 1, 1, B)$
 $B=A$
end

$m = i$

Numero di MD: $m - 1$

Numero di rami: $2(m - 1)$

Numero di direzioni principali: 1

II. Secondo Passo: $M_{\nu_1 11} \longrightarrow M_{\nu_1 \nu_2 1}$

for $i=1, \dots, \nu_2$
 $A=B-net(\nu_1, i, 1, B)$
 $B=A$
end

$m = \nu_1 + i - 1$

Numero di MD: $m - 1$

Numero di rami: $(\nu_1 + 1)(m - 1)$

Numero di direzioni principali: ν_1

III. Terzo Passo: $M_{\nu_1\nu_21} \longrightarrow M_{\nu_1\nu_2\nu_3}$

for $i=1, \dots, \nu_3$

$A=B\text{-net}(\nu_1, \nu_2, i, B)$

$B=A$

end

$$m = \nu_1 + \nu_2 + i - 3$$

Numero di MD: $m - 1$

Numero di rami: $(m - 1)(\nu_1 + \nu_2)$

Numero di direzioni principali: $\nu_1 + \nu_2 - 1$

La seguente proposizione contiene un'importante proprietà ai fini del calcolo e della sua stabilità numerica.

Proposizione 2.4.1. *Sia $M_{D_n}^m$ una Box spline bivariata a tre direzioni. Allora i coefficienti della sua rappresentazione di Bézier sono tutti numeri razionali.*

Dimostrazione. Questo deriva facilmente dal fatto che il metodo descritto parte dal B-net di una Box spline lineare con tutti i coefficienti interi. Il fattore $\frac{1}{m}$ derivante dalla (2.9) viene raccolto in un unico $\frac{1}{m!}$ alla fine della sequenza di operazioni che sono dunque, solo addizioni e sottrazioni tra numeri interi. \square

Corollario 2.4.2. *Il calcolo del B-net di queste Box spline avviene in aritmetica esatta.*

Osservazione 7. Per la valutazione di una qualsiasi Box spline è sufficiente il calcolo del B-net solo in fase di preprocessing, in modo che i coefficienti, memorizzati una tantum, si possano poi utilizzare in un algoritmo tipo de Casteljau per ottenere il valore richiesto.

Una tale procedura risulta essere una valida alternativa all'approccio suggerito da Lai [49], Chui e Lai [16], [18], nel quale, partendo da un lato del bordo della Box spline, si applicano successive integrazioni bivariate su ogni triangolo del dominio. L'algoritmo MDDS, invece, identifica speciali direzioni, che permettono di trattare integrazioni 2D e in generale in più dimensioni, come semplici casi univariati. Il vantaggio è evidente se si pensa che per Box spline trivariate si dovrebbe integrare su ogni tetraedro del dominio. Le Fig. 2.9 e Fig. 2.10 mostrano un esempio di Box spline bivariata con relativo reticolo di Bézier e le direzioni miste generate per il calcolo dei suoi coefficienti. Qui sotto sono esplicitate le matrici contenenti i coefficienti rispettivamente della M_{211}^2 , M_{221}^3 , M_{222}^4 .

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{6} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{24} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 4 & 6 & 6 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 6 & 8 & 10 & 8 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 6 & 10 & 12 & 12 & 10 & 6 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 & 8 & 12 & 12 & 12 & 8 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 6 & 10 & 12 & 12 & 10 & 6 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 6 & 8 & 10 & 8 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 4 & 6 & 6 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

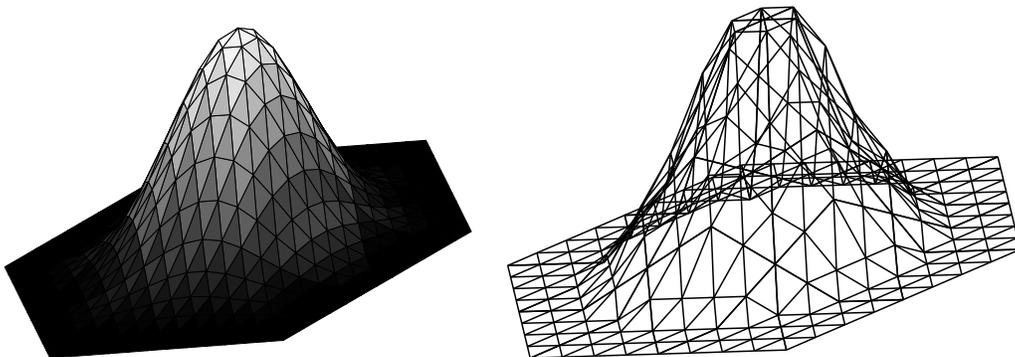


Figura 2.9: Box spline bivariata quartica a tre direzioni M_{222}^4 e relativo B-net.

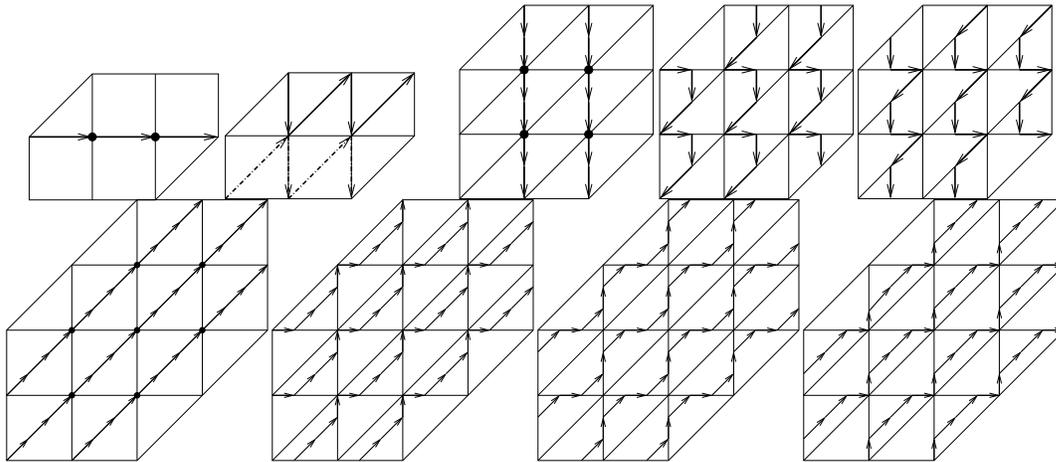


Figura 2.10: Generazione del B-net di M_{222}^4 attraverso successive somme dei coefficienti di $D_{e_1} M_{111}^1$, $D_{e_2} M_{211}^2$, $D_{e_{12}} M_{221}^3$ lungo le direzioni segnate.

2.4.3 Calcolo del B-net per Box spline a quattro direzioni

L'algoritmo analizzato nei paragrafi precedenti è alla base per generare il B-net di una Box spline bivariata definita su quattro direzioni.

Sia D_n la matrice associata contenente i vettori direzione

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad e_3 = e_1 + e_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad e_4 = e_1 - e_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

con molteplicità rispettivamente $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4$. Si ha dunque

$$D_n = \underbrace{[e_1, \dots, e_1]}_{\nu_1}, \underbrace{[e_2, \dots, e_2]}_{\nu_2}, \underbrace{[e_3, \dots, e_3]}_{\nu_3}, \underbrace{[e_4, \dots, e_4]}_{\nu_4} \quad (2.15)$$

dove $n = \nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \nu_4$.

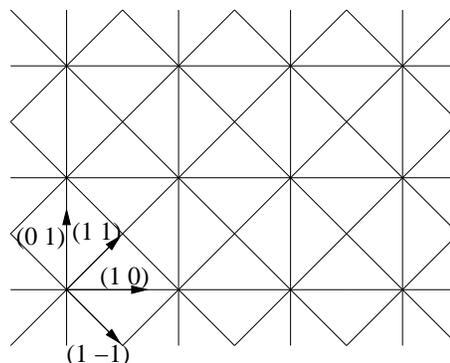


Figura 2.11: Griglia generata dalle direzioni $e_1, e_2, e_1 + e_2, e_1 - e_2$.

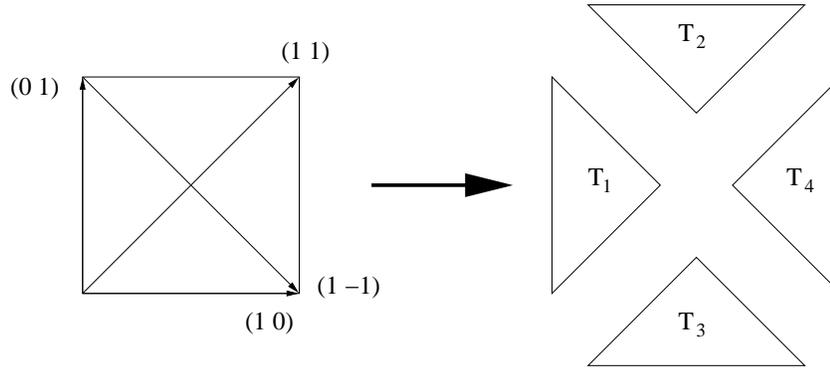


Figura 2.12: Le direzioni $e_1, e_2, e_1 + e_2, e_1 - e_2$ identificano una partizione del dominio in quattro triangoli T_1, T_2, T_3, T_4 .

Questi vettori identificano una nuova partizione del dominio in triangoli del tipo illustrato in Fig. 2.12. L'idea, quindi è quella di passare da una griglia definita dalle tre direzioni e_1, e_2, e_3 (Fig. 2.1) ad una generata dalle quattro e_1, e_2, e_3, e_4 (Fig. 2.11) e di conseguenza creare l'insieme delle direzioni miste per il calcolo dei coefficienti, analogamente a quanto fatto prima. Dato il B-net di una Box spline a tre direzioni $M_{\nu_1 \nu_2 \nu_3}^m$ e applicando un passo di suddivisione ad ogni triangolo del dominio, si ottiene la rappresentazione di Bézier della stessa Box spline, definita sulla nuova griglia. Per evidenziare le direzioni che la determinano, la indicherò con la notazione $M_{\nu_1 \nu_2 \nu_3 0}^m$. Lo 0 indica che nella direzione e_4 non è stata ancora applicata l'integrazione.

Suddivisione di un patch di Bézier. Siano $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)$ le coordinate baricentriche di un punto (x_1, x_2) del dominio triangolare T . Unendo (x_1, x_2) con i vertici del triangolo, quest'ultimo verrà suddiviso in tre sottotriangoli. In corrispondenza del punto il patch triangolare verrà diviso in tre sottopatch con domini i tre sottotriangoli. Ogni sottopatch può essere rappresentato in termini di patch polinomiale di Bézier, dove i suoi coefficienti sono i punti ausiliari ottenuti applicando l'algoritmo di de Casteljau per valutare il patch iniziale nel punto $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)$. Per la precisione:

```

for l=0, . . . , m
     $P_{i,j,k}^l = \lambda_0 P_{i+1,j,k}^{l-1} + \lambda_1 P_{i,j+1,k}^{l-1} + \lambda_2 P_{i,j,k+1}^{l-1}$ 
end

```

dove $i + j + k = m - l$, con m grado del patch polinomiale e l passo dell'algoritmo. Se $P_{i,j,k}^0$ rappresentano i coefficienti iniziali è facile mostrare che $P_{0,0,0}^m \equiv p(x_1, x_2)$.

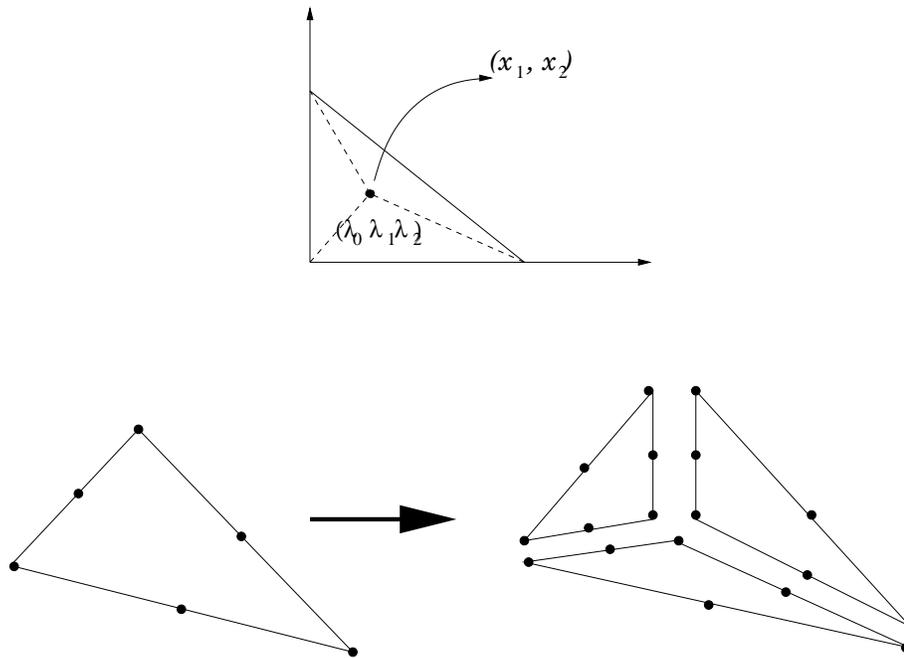


Figura 2.13: Un punto $p(x_1, x_2)$ suddivide un patch quadratico in tre sottopatch quadratici.

Nel nostro caso il punto (x_1, x_2) appartiene ad un lato del triangolo, pertanto la suddivisione darà luogo solo a due sottotriangoli. Poichè le coordinate baricentriche di questo punto rispetto a T sono $(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, i nuovi coefficienti di Bézier risultano essere semplicemente la media fra due corrispondenti vecchi.

In relazione al caso lineare di Fig. 2.14 si avrà:

$$P_{000}^1 = \frac{1}{2}P_{001}^0 + \frac{1}{2}P_{010}^0.$$

Per quanto riguarda i coefficienti dei patch quadratici della stessa figura abbiamo:

$$\begin{aligned} P_{100}^1 &= \frac{1}{2}P_{101}^0 + \frac{1}{2}P_{110}^0 \\ P_{010}^1 &= \frac{1}{2}P_{011}^0 + \frac{1}{2}P_{020}^0 \\ P_{001}^1 &= \frac{1}{2}P_{002}^0 + \frac{1}{2}P_{011}^0 \\ P_{000}^2 &= \frac{1}{2}P_{001}^1 + \frac{1}{2}P_{010}^1. \end{aligned}$$

Applicando questo passo di suddivisione ad entrambi i triangoli individuati dalla griglia a tre direzioni in una $M_{\nu_1\nu_2\nu_3}^m$, si giunge alla nuova rappresentazione della Box spline stessa su griglia a quattro direzioni. I coefficienti della lineare M_{111}^1 così calcolati sono mostrati in Fig. 2.15. Si noti che i patch definiti su ogni sottotriangolo sono lineari.

A questo punto la formula ricorrente (2.10) permette di trovare il B-net di una qualsiasi Box $M_{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}^m$, tramite lo stesso processo di traslazione, sottrazione e integrazione visto

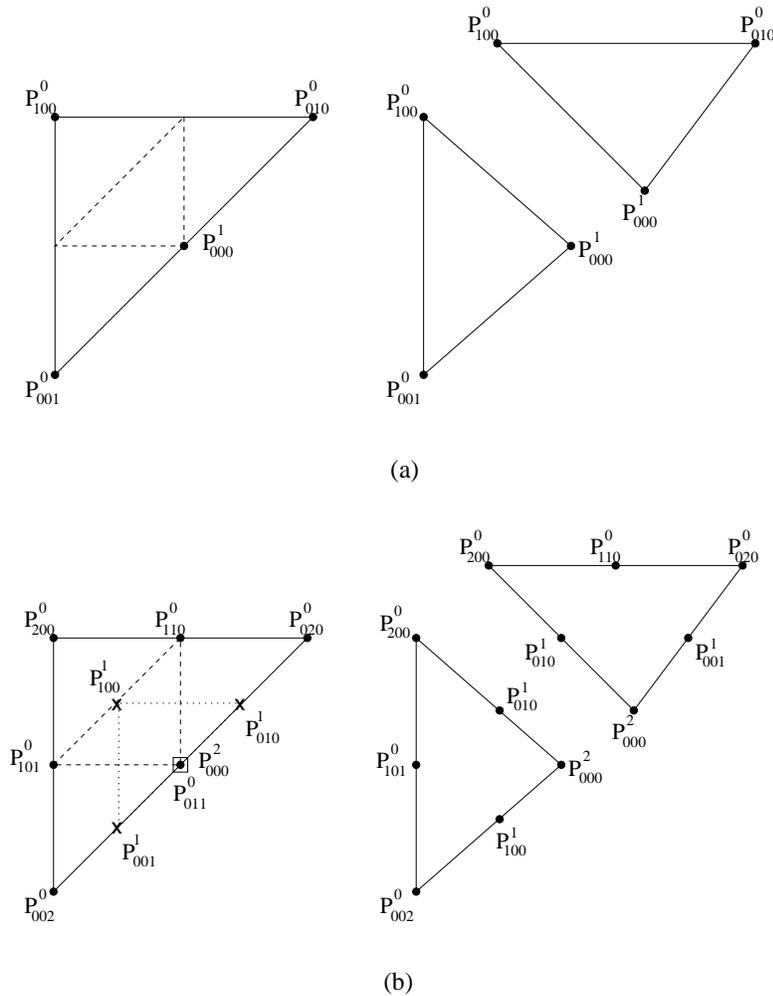


Figura 2.14: Coefficienti ausiliari derivanti dall'algoritmo di de Casteljau nel caso lineare (a) e quadratico (b).

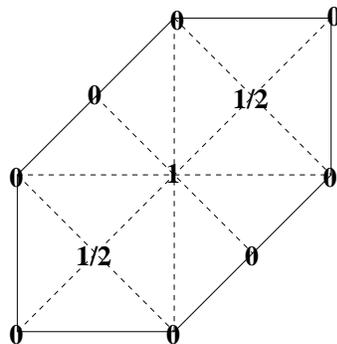


Figura 2.15: Coefficienti di Bézier della Box spline M_{1110}^1 .

precedentemente. Anche in questo caso sono state generate particolari direzioni miste uni-dimensionali e bi-dimensionali, utilizzate per memorizzare gli elementi da sommare in fase di integrazione. Gli algoritmi ideati da Chui e Lai ([18], [49]) applicano il passo

di integrazione sui quattro triangoli di ciascuno quadrato del dominio, partendo dal B-net della Box spline quadratica M_{1111}^2 , dato come noto. Il nostro approccio, invece, permette di calcolarlo direttamente, suddividendo dapprima i triangoli del supporto della Box spline lineare a tre direzioni, e applicando poi l'algoritmo MDDS nella quarta direzione.

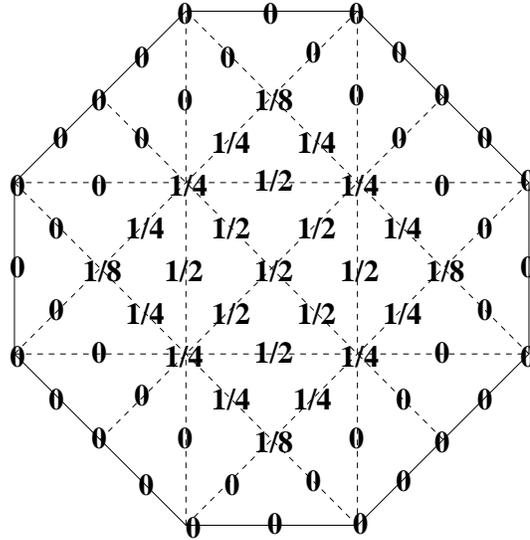


Figura 2.16: B-net della Box spline bivariata a quattro direzioni M_{1111}^2 .

Osservazione 8. Se ora volessimo costruire il B-net della Box spline M_{2111}^3 seguendo l'approccio proposto nell'algoritmo MDDS, dovremmo applicare la formula (2.10) nella direzione e_1 e quindi utilizzare la relazione (2.9) sui coefficienti, dove però le coordinate baricentriche (a_0, a_1, a_2) si complicano poichè la direzione di integrazione e_1 non appartiene alle direzioni che generano tutti i triangoli della partizione. Il problema è lo stesso se si integra nella direzione e_2 per calcolare ad esempio il B-net della funzione M_{1211}^3 . Per ovviare a questo inconveniente si è pensato di passare alla griglia definita da quattro direzioni solo dopo aver applicato l'algoritmo nelle direzioni e_1, e_2, e_3 tante volte quanto è indicato dal vettore delle molteplicità. A questo punto la creazione della griglia a quattro direzioni ci permette di integrare nella direzione e_4 senza nessun problema.

In definitiva per calcolare il B-net di una Box spline a quattro direzioni $M_{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}^m$ generica si opera nel seguente modo:

$$M_{1111}^1 \xrightarrow{I} M_{\nu_111}^{\nu_1} \xrightarrow{II} M_{\nu_1\nu_21}^{\nu_1+\nu_2-1} \xrightarrow{III} M_{\nu_1\nu_2\nu_3}^{\nu_1+\nu_2+\nu_3-2} \xrightarrow{IV} M_{\nu_1\nu_2\nu_30}^{\nu_1+\nu_2+\nu_3-2} \xrightarrow{V} M_{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}^m$$

dove

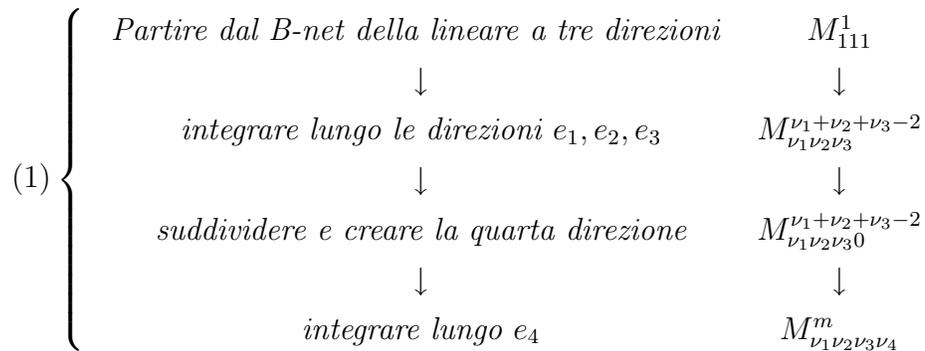
- I \rightarrow MDDS lungo la direzione e_1 ,
- II \rightarrow MDDS lungo la direzione e_2 ,
- III \rightarrow MDDS lungo la direzione e_3 ,
- VI \rightarrow suddivisione e creazione della quarta direzione,
- V \rightarrow MDDS lungo la direzione e_4 .

Come enuncia il seguente teorema, questo procedimento è equivalente a quello utilizzato da Chui e Lai ([18], [49]), ma ci permette di generare il B-net di una qualsiasi Box bivariata su quattro direzioni in modo analogo a quanto visto precedentemente, riportando al semplice caso univariato un processo di integrazione bivariata su ogni triangolo.

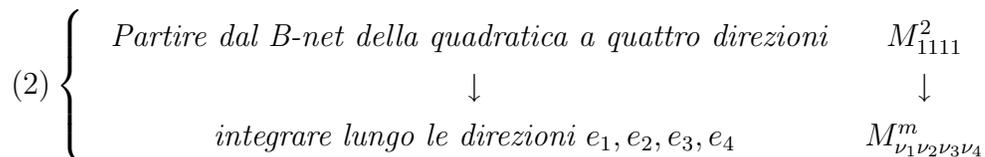
La relativa dimostrazione, piuttosto lunga e articolata, è stata annessa alla dissertazione per completezza. Non risultando però necessaria alla comprensione dell'idea alla base dell'algoritmo, il lettore può decidere di passare alla sezione 2.5 senza perdere il filo del discorso.

Teorema 2.1. *Per generare il B-net di una Box spline $M_{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}^m$ a quattro direzioni di grado m le seguenti strategie sono equivalenti:*

Algoritmo MDDS



Algoritmo di Chui e Lai



Dimostrazione. Per alleggerire la notazione, l'apice che indica il grado della Box spline verrà omissso. Dimostrerò il teorema per le funzioni $M_{\nu_1 111}$; analogamente si considerano i casi di Box spline $M_{1\nu_2 11}$, $M_{11\nu_3 1}$, $M_{111\nu_4}$ e in generale $M_{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}$.

Si dimostra per induzione su ν_1 :

- per $\nu_1 = 1$ il teorema vale poichè si è visto che, partendo dalla M_{111} , suddividendo e applicando l'algoritmo MDDS lungo e_4 , si ottiene esattamente lo stesso B-net specificato da Chui e Lai in [18];
- si supponga ora che il teorema valga per $\nu_1 - 1$, ossia

$$\begin{array}{ccc}
 M_{111} & & \\
 \downarrow & & \\
 M_{(\nu_1-1)11} & & M_{1111} \\
 \downarrow & \iff & \downarrow \\
 M_{(\nu_1-1)110} & & M_{(\nu_1-1)111} \\
 \downarrow & & \\
 M_{(\nu_1-1)111} & &
 \end{array}$$

Riscrivo il procedimento (1) evidenziando l'integrazione lungo e_1 :

$$\begin{array}{ccc}
 & M_{111} & \\
 M_{111} & \downarrow & \\
 \downarrow & M_{(\nu_1-1)11} & \\
 M_{\nu_1 11} & \downarrow & \\
 \downarrow & \iff & M_{\nu_1 11} & (2.16) \\
 M_{\nu_1 110} & \downarrow & \\
 \downarrow & M_{\nu_1 110} & \\
 M_{\nu_1 111} & \downarrow & \\
 & M_{\nu_1 111} &
 \end{array}$$

Supponiamo ora di aver dimostrato che

$$\begin{array}{ccc}
 \overbrace{M_{(\nu_1-1)11}}^{(a)} & & \overbrace{M_{(\nu_1-1)11}}^{(b)} \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 M_{\nu_1 11} & & M_{(\nu_1-1)110} \\
 \downarrow & \iff & \downarrow & (2.17) \\
 M_{\nu_1 110} & & M_{(\nu_1-1)111} \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 M_{\nu_1 111} & & M_{\nu_1 111}
 \end{array}$$

Di conseguenza

$$(2.16) \iff \begin{array}{c} \boxed{\begin{array}{c} M_{111} \\ \downarrow \\ M_{(\nu_1-1)11} \\ \downarrow \\ M_{(\nu_1-1)110} \\ \downarrow \\ M_{(\nu_1-1)111} \end{array}} \quad (*) \\ \downarrow \\ M_{\nu_1 111} \end{array} \quad (2.18)$$

e per l'ipotesi induttiva si ha che

$$(*) \iff \begin{array}{c} M_{1111} \\ \downarrow \\ M_{(\nu_1-1)111} \end{array}$$

Quindi segue immediatamente che

$$(2.16) \iff \begin{array}{c} M_{1111} \\ \downarrow \\ M_{(\nu_1-1)111} \\ \downarrow \\ M_{\nu_1 111} \end{array}$$

La completa dimostrazione del teorema si ha una volta provata l'equivalenza (2.17). È cioè necessario mostrare che, partendo dalla Box spline $M_{(\nu_1-1)11}$, si ottiene lo stesso risultato integrando dapprima lungo la direzione e_1 , suddividendo i triangoli del dominio e integrando poi lungo la direzione e_4 , oppure applicando inizialmente il passo di suddivisione, integrando lungo e_4 e solo alla fine lungo e_1 .

Le formule di suddivisione e integrazione per i coefficienti di Bézier di un patch triangolare viste nei paragrafi precedenti, possono essere generalizzate come segue:

- Per i triangoli T_1

SUDDIVISIONE:

$$D_{ijk}^{(1)} = \frac{1}{2^j} \sum_{s=0}^j \binom{j}{s} D_{(k+s)i(j-s)} \quad i + j + k = \nu_1 - 1 \quad (2.19)$$

INTEGRAZIONE LUNGO e_4 :

$$B_{ijk}^{(1)} = \sum_{s=0}^{j-1} D_{(i+j-1-s)sk}^{(1)} + B_{(i+j)0k}^{(1)} \quad i + j + k = \nu_1$$

INTEGRAZIONE LUNGO e_1 :

$$\begin{aligned} A_{ijk}^{(1)} &= \sum_{s=0}^{j-1} \sum_{u=0}^s \binom{s}{u} \frac{1}{2^s} B_{(i-u+s)(j-s-1)(k+u)}^{(1)} \\ &+ \sum_{u=0}^j \binom{j}{u} \frac{1}{2^j} A_{(i+j-u)0(k+u)}^{(1)} \quad i + j + k = \nu_1 + 1 \end{aligned}$$

- Per i triangoli T_2

SUDDIVISIONE:

$$D_{ijk}^{(2)} = \frac{1}{2^i} \sum_{s=0}^i \binom{i}{s} D_{(i-s)j(k+s)} \quad i + j + k = \nu_1 - 1 \quad (2.20)$$

INTEGRAZIONE LUNGO e_4 :

$$B_{ijk}^{(2)} = \sum_{s=0}^{i-1} D_{s(i+j-1-s)k}^{(2)} + B_{0(i+j)k}^{(2)} \quad i + j + k = \nu_1$$

INTEGRAZIONE LUNGO e_1 :

$$A_{ijk}^{(2)} = \sum_{s=0}^{k-1} B_{i(\nu_1-i-s)s}^{(2)} + A_{i(j+k)0}^{(2)} \quad i + j + k = \nu_1 + 1$$

- Per i triangoli T_3

SUDDIVISIONE:

$$D_{ijk}^{(3)} = \frac{1}{2^i} \sum_{s=0}^i \binom{i}{s} D_{(i-s)j(k+s)} \quad i + j + k = \nu_1 - 1 \quad (2.21)$$

INTEGRAZIONE LUNGO e_4 :

$$B_{ijk}^{(3)} = \sum_{s=i}^{\nu_1-k-1} D_{s(i+j-1-s)k}^{(3)} + B_{(i+j)0k}^{(3)} \quad i + j + k = \nu_1$$

INTEGRAZIONE LUNGO e_1 :

$$A_{ijk}^{(3)} = \sum_{s=0}^{j-1} B_{is(j+k-1-s)}^{(3)} + A_{i0(j+k)}^{(3)} \quad i + j + k = \nu_1 + 1$$

- Per i triangoli T_4

SUDDIVISIONE:

$$D_{ijk}^{(4)} = \frac{1}{2^j} \sum_{s=0}^j \binom{j}{s} D_{(k+s)i(j-s)} \quad i + j + k = \nu_1 - 1 \quad (2.22)$$

INTEGRAZIONE LUNGO e_4 :

$$B_{ijk}^{(4)} = \sum_{s=j}^{\nu_1-k-1} D_{(i+j-1-s)sk}^{(4)} + B_{0(i+j)k}^{(4)} \quad i + j + k = \nu_1$$

INTEGRAZIONE LUNGO e_1 :

$$\begin{aligned} A_{ijk}^{(4)} &= \sum_{t=0}^{i-1} \sum_{s=0}^t \binom{t}{s} 2^{t-s} (-1)^s B_{(i-1-t)(j+t-s)(k+s)}^{(4)} \\ &+ \sum_{s=0}^i \binom{i}{s} 2^{i-s} (-1)^s A_{0(i-s)(j+k+s)}^{(4)} \quad i + j + k = \nu_1 + 1 \end{aligned}$$

Dunque per ogni triangolo del dominio i coefficienti $A_{ijk}^{(t)}$, $t = 1, \dots, 4$ della Box spline $M_{\nu_1 111}$ possono essere calcolati a partire da quelli della $M_{(\nu_1-1)11}$ seguendo i due diversi percorsi **(a)**, **(b)** di (2.17). Riscrivendoli in funzione dei coefficienti di grado inferiore e confrontando la loro espressione, si osserva che i due metodi conducono allo stesso risultato. Si noti che i coefficienti con almeno uno degli indici i, j, k nullo, appartengono ai lati del triangolo. Applicando le relazioni appena trovate a tutti i triangoli della partizione del dominio e sfruttando il fatto che questi coefficienti coincidono con quelli del triangolo adiacente, dopo un certo numero di sostituzioni si arriva al bordo del supporto dove i coefficienti sono nulli. Questa osservazione ci permette di eliminarli dal calcolo dei coefficienti $A_{ijk}^{(t)}$, $t = 1, \dots, 4$.

Premetto i seguenti lemmi, che verranno utilizzati nel confronto dei metodi **(a)**, **(b)** di (2.17).

Lemma 2.4.3.

$$\sum_{s=0}^t (-1)^s \binom{a}{s} \binom{r-s}{t-s} = \binom{r-a}{t} \quad 0 \leq t \leq a \leq r, \quad r-a \geq t$$

Dimostrazione. Sviluppando la sommatoria

$$\binom{a}{0} \binom{r}{t} - \binom{a}{1} \binom{r-1}{t-1} + \dots + (-1)^t \binom{a}{t} \binom{r-t}{0}$$

e ricordando la seguente proprietà dei coefficienti binomiali:

$$\binom{r-1}{t} = \binom{r}{t} - \binom{r-1}{t-1} \tag{2.23}$$

l'idea è quella di controllare nello sviluppo di $\binom{r-a}{t}$ per ogni a , i coefficienti di $\binom{r}{t}$, $\binom{r-1}{t-1}, \dots, \binom{r-t}{0}$.

In particolare

- $a = 0$: il coefficiente di $\binom{r}{t}$ è banalmente **1**;

- $a = 1$: $\binom{r-1}{t} = \mathbf{1} \binom{r}{t} - \mathbf{1} \binom{r-1}{t-1}$ i coefficienti moltiplicativi di $\binom{r}{t}$ e $\binom{r-1}{t-1}$ sono rispettivamente **1** e **-1**;

- $a = 2$:

$$\begin{aligned} \binom{r-2}{t} &= \frac{\binom{r-1}{t}}{\downarrow} - \frac{\binom{r-2}{t-1}}{\downarrow} \\ &= \mathbf{1} \binom{r}{t} - \mathbf{1} \binom{r-1}{t-1} - \mathbf{1} \binom{r-1}{t-1} + \mathbf{1} \binom{r-2}{t-2} \\ &= \mathbf{1} \binom{r}{t} - \mathbf{2} \binom{r-1}{t-1} + \mathbf{1} \binom{r-2}{t-2}. \end{aligned}$$

Si noti che i coefficienti trovati (**1 -2 1**) vengono calcolati sottraendo da quelli del passo precedente (**1 -1**) gli stessi traslati di una posizione, riferiti cioè ai coefficienti binomiali shiftati. Inoltre coincidono con $\binom{2}{0}, -\binom{2}{1}, \binom{2}{2}$.

$$\begin{array}{rcccc} \binom{r}{t} & \binom{r-1}{t-1} & \binom{r-2}{t-2} & & \\ & \mathbf{1} & & & \\ & & \mathbf{-1} & & \\ \hline & \mathbf{1} & \mathbf{-2} & \mathbf{-1} & \mathbf{=} \end{array}$$

- $a = t$: lo sviluppo di $\binom{r-a}{a}$ è

$$\begin{array}{cccccc} \binom{r}{a} & \binom{r-1}{a-1} & \binom{r-2}{a-2} & \cdots & \binom{r-a+1}{1} & \binom{r-a}{0} \\ \binom{\mathbf{a}-1}{\mathbf{0}} & -\binom{\mathbf{a}-1}{\mathbf{1}} & \binom{\mathbf{a}-1}{\mathbf{2}} & \cdots & (-1)^{\mathbf{a}-1} \binom{\mathbf{a}-1}{\mathbf{a}-1} & - \\ \hline & \binom{\mathbf{a}-1}{\mathbf{0}} & -\binom{\mathbf{a}-1}{\mathbf{1}} & \cdots & (-1)^{\mathbf{a}-2} \binom{\mathbf{a}-1}{\mathbf{a}-2} & (-1)^{\mathbf{a}-1} \binom{\mathbf{a}-1}{\mathbf{a}-1} \\ \hline \mathbf{1} & -\binom{\mathbf{a}}{\mathbf{1}} & \binom{\mathbf{a}}{\mathbf{2}} & \cdots & (-1)^{\mathbf{a}-1} \binom{\mathbf{a}}{\mathbf{a}-1} & (-1)^{\mathbf{a}} \end{array}$$

- $a > t$:

$$\begin{array}{cccccc} \binom{r}{t} & \binom{r-1}{t-1} & \cdots & \binom{r-t}{0} & & \\ \binom{\mathbf{a}-1}{\mathbf{0}} & -\binom{\mathbf{a}-1}{\mathbf{1}} & \cdots & (-1)^{\mathbf{t}} \binom{\mathbf{a}-1}{\mathbf{t}} & \cdots & - \\ \hline & \binom{\mathbf{a}-1}{\mathbf{0}} & \cdots & (-1)^{\mathbf{t}-1} \binom{\mathbf{a}-1}{\mathbf{t}-1} & \cdots & = \\ \hline \mathbf{1} & -\binom{\mathbf{a}}{\mathbf{1}} & \cdots & (-1)^{\mathbf{t}} \binom{\mathbf{a}}{\mathbf{t}} & \cdots & \end{array}$$

□

Lemma 2.4.4.

$$\sum_{s=0}^t \binom{r-s}{t-s} \binom{a+s}{s} = \binom{a+r+1}{t} \quad a \geq 0, \quad r \geq t$$

Dimostrazione. Come nel lemma precedente si calcolano i coefficienti di $\binom{r}{t}$, $\binom{r-1}{t-1}$, \dots , $\binom{r-t}{0}$, utilizzando la relazione (2.23).

In particolare:

- $a = 0$:

$$\binom{r+1}{t} = \mathbf{1} \binom{r}{t} + \mathbf{1} \binom{r-1}{t-1} + \dots + \mathbf{1} \binom{r-t}{0};$$

- $a = 1$:

$$\binom{r+2}{t} = \mathbf{1} \binom{r+1}{t} + \mathbf{1} \binom{r}{t-1} + \dots + \mathbf{1} \binom{r+t-1}{0}.$$

Considerando gli sviluppi di ogni coefficiente binomiale:

$$\begin{array}{rcccc} & & \binom{r}{t} & \binom{r-1}{t-1} & \dots & \binom{r-t}{0} \\ \binom{r+1}{t} & \rightarrow & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \dots & \mathbf{1} \\ \binom{r}{t-1} & \rightarrow & & \mathbf{1} & \dots & \mathbf{1} \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ \binom{r+1-t}{0} & \rightarrow & & & & \mathbf{1} \end{array}$$

$$\text{si ha che } \binom{r+2}{t} = \mathbf{1} \binom{r}{t} + \mathbf{2} \binom{r-1}{t-1} + \dots + (\mathbf{t+1}) \binom{r-t}{0}.$$

- supponiamo che per $a - 1$ sia

$$\binom{r+a}{t} = \mathbf{1} \binom{r+a-1}{t} + \mathbf{1} \binom{r+a-2}{t-1} + \dots + \mathbf{1} \binom{r+a-t-1}{0}$$

$$\begin{array}{rcccc} & & \binom{r}{t} & \binom{r-1}{t-1} & \dots & \binom{r-t}{0} \\ \binom{r+a-1}{t} & \rightarrow & \binom{\mathbf{a-1}}{\mathbf{0}} & \binom{\mathbf{a}}{\mathbf{1}} & \dots & \binom{\mathbf{a-1+t}}{\mathbf{t}} \\ \binom{r+a-2}{t-1} & \rightarrow & & \binom{\mathbf{a-1}}{\mathbf{0}} & \dots & \binom{\mathbf{a-2+t}}{\mathbf{t-1}} \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ \binom{r+a-1-t}{0} & \rightarrow & & & & \binom{\mathbf{a-1}}{\mathbf{0}} \end{array}$$

$$\binom{\mathbf{a-1}}{\mathbf{0}} \quad \binom{\mathbf{a}}{\mathbf{1}} \quad \binom{\mathbf{a-1+t}}{\mathbf{t}}$$

$$\text{Quindi } \binom{r+a}{t} = \binom{\mathbf{a-1}}{\mathbf{0}} \binom{r}{t} + \binom{\mathbf{a}}{\mathbf{1}} \binom{r-1}{t-1} + \dots + \binom{\mathbf{a-1+t}}{\mathbf{t}} \binom{r-t}{0}.$$

- per a :

$$\binom{r+a+1}{t} = \mathbf{1} \binom{r+a}{t} + \mathbf{1} \binom{r+a-1}{t-1} + \dots + \mathbf{1} \binom{r+a-t}{0}$$

$$\begin{array}{rcc}
 & \begin{pmatrix} r \\ t \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} r-1 \\ t-1 \end{pmatrix} & \cdots & \begin{pmatrix} r-t \\ 0 \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} r+a \\ t \end{pmatrix} & \rightarrow & \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \mathbf{a}+1 \\ \mathbf{1} \end{pmatrix} & \cdots & \begin{pmatrix} \mathbf{a}+t \\ \mathbf{t} \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} \mathbf{r}+\mathbf{a}-1 \\ \mathbf{t}-1 \end{pmatrix} & \rightarrow & & \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} & \cdots & \begin{pmatrix} \mathbf{a}-1+t \\ \mathbf{t}-1 \end{pmatrix} \\
 \vdots & & & & \ddots & \vdots \\
 \begin{pmatrix} \mathbf{r}+\mathbf{a}-t \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} & \rightarrow & & & & \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \mathbf{a}+1 \\ \mathbf{1} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \mathbf{a}+t \\ \mathbf{t} \end{pmatrix}
 \end{array}$$

Allora si ha che $\begin{pmatrix} r+a+1 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{a}+1 \\ \mathbf{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r-1 \\ t-1 \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} \mathbf{a}+t \\ \mathbf{t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r-t \\ 0 \end{pmatrix}$.

□

Triangolo T_1 :

Metodo (a)

$$\begin{aligned}
 A_{ijk}^{(1)} &= \sum_{t=0}^{j-1} \sum_{u=0}^t \frac{1}{2^t} \binom{t}{u} \left(\sum_{s=0}^{j-t-2} \frac{1}{2^s} \sum_{r=0}^s \binom{s}{r} D_{(k+u+r)(\nu_1-1-k-u-s)(s-r)} + B_{(i+j-u-1)0(k+u)}^{(1)} \right) \\
 &= \underbrace{\sum_{t=0}^{j-1} \sum_{u=0}^t \sum_{s=0}^{j-t-2} \sum_{r=0}^s \frac{1}{2^{t+s}} \binom{t}{u} \binom{s}{r} D_{(k+u+r)(\nu_1-1-k-u-s)(s-r)}}_{(*)} \\
 &\quad + \underbrace{\sum_{t=0}^{j-1} \sum_{u=0}^t \frac{1}{2^t} \binom{t}{u} B_{(i+j-u-1)0(k+u)}^{(1)}}_{\diamond}
 \end{aligned}$$

Dalla relazione (2.19) e cambiando nome agli indici

$$(\diamond) = \sum_{t=0}^{j-1} \sum_{s=0}^t \frac{1}{2^t} \binom{t}{s} B_{(k+s)(\nu_1-k-s)0}^{(1)}$$

Inoltre operando opportunamente sugli indici

$$(*) = \sum_{t=0}^{j-2} \sum_{r=0}^t \sum_{s=0}^{j-t-2} \sum_{u=0}^s \frac{1}{2^{t+s}} \binom{t}{u} \binom{s}{s-u} D_{(k+s)(\nu_1-1-k-r-s)r}$$

$$\begin{aligned}
&= 1 \sum_{t=0}^{j-2} \sum_{r=0}^t \sum_{s=0}^{j-t-2} \frac{1}{2^{t+s}} \binom{t+s+1}{s} D_{(k+s)(\nu_1-1-k-r-s)r} \\
&= \sum_{m=1}^{j-1} \sum_{s=0}^{j-1-m} \sum_{r=0}^{m-1} \frac{1}{2^{m+s-1}} \binom{m+s}{s} D_{(k+s)(\nu_1-1-k-r-s)r}
\end{aligned}$$

Metodo (b)

$$\begin{aligned}
A_{ijk}^{(1)} &= \sum_{t=0}^{j-1} \left[\sum_{s=0}^t \frac{1}{2^t} \binom{t}{s} \left(\sum_{r=0}^{t-s-1} 2D_{(k+s)(\nu_1-1-k-r-s)r} + B_{(k+s)(\nu_1-k-s)0} \right) \right] \\
&= \underbrace{\sum_{t=0}^{j-1} \sum_{s=0}^t \sum_{r=0}^{t-s-1} \frac{1}{2^{t-1}} \binom{t}{s} D_{(k+s)(\nu_1-1-k-r-s)r}}_{(**)} + \underbrace{\sum_{t=0}^{j-1} \sum_{s=0}^t \frac{1}{2^t} \binom{t}{s} B_{(k+s)(\nu_1-k-s)0}}_{\diamond}
\end{aligned}$$

Con qualche operazione sugli indici

$$(**) = \sum_{m=1}^{j-1} \sum_{s=0}^{j-1-m} \sum_{r=0}^{m-1} \frac{1}{2^{m+s-1}} \binom{m+s}{s} D_{(k+s)(\nu_1-1-k-r-s)r}$$

Quindi $(*) = (**)$ e $(\diamond) = (\diamond\diamond)$.

Triangolo T_2 :

Metodo (a)

$$\begin{aligned}
A_{ijk}^{(2)} &= \sum_{t=0}^{k-1} \left[\sum_{s=0}^{i-1} \frac{1}{2^s} \sum_{r=0}^s \binom{s}{r} D_{(s-r)(\nu_1-1-s-t)(t+r)} + B_{0(\nu_1-t)t}^{(2)} \right] \\
&= \underbrace{\sum_{t=0}^{k-1} \sum_{s=0}^{i-1} \frac{1}{2^s} \sum_{r=0}^s \binom{s}{r} D_{(s-r)(\nu_1-1-s-t)(t+r)}}_* + \underbrace{\sum_{t=0}^{k-1} B_{0(\nu_1-t)t}^{(2)}}_{\diamond}
\end{aligned}$$

Utilizzando la (2.20)

$$(\diamond) = \sum_{t=0}^{k-1} B_{0(\nu_1-t)t}$$

Metodo (b)

$$\begin{aligned}
A_{ijk}^{(2)} &= \sum_{t=0}^{i-1} \left[\frac{1}{2^t} \sum_{s=0}^t \binom{t}{s} \left(\sum_{r=0}^{k+s-1} D_{(t-s)(\nu_1-1-r-t+s)r} + B_{(t-s)(\nu_1-t+s)0} \right) \right] \\
&= \underbrace{\sum_{t=0}^{i-1} \sum_{s=0}^t \sum_{r=0}^{k+s-1} \frac{1}{2^t} \binom{t}{s} D_{(t-s)(\nu_1-1-r-t+s)r}}_{**} + \underbrace{\sum_{t=0}^{i-1} \sum_{s=0}^t \frac{1}{2^t} \binom{t}{s} B_{(t-s)(\nu_1-t+s)0}}_{\diamond\diamond}
\end{aligned}$$

¹Per il lemma 2

Con uno scambio di indici:

$$\begin{aligned}
 (**) &= \sum_{s=0}^{i-1} \sum_{r=0}^s \sum_{t+r=0}^{k+r-1} \frac{1}{2^s} \binom{s}{r} D_{(s-r)(\nu_1-1-s-t)(t+r)} \\
 &= \sum_{s=0}^{i-1} \frac{1}{2^s} \sum_{r=0}^s \sum_{t=0}^{k-1} \binom{s}{r} D_{(s-r)(\nu_1-1-s-t)(t+r)}
 \end{aligned}$$

Dunque $(*) = (**)$ e $(\diamond) = (\diamond\diamond)$.

Triangolo T_3 :

Metodo (a)

$$\begin{aligned}
 A_{ijk}^{(3)} &= \sum_{t=0}^{j-1} \left(\sum_{s=i}^{i+t-1} \frac{1}{2^s} \sum_{r=0}^s \binom{s}{r} D_{(s-r)(t+i-s-1)(\nu_1-i-t+r)} + B_{(t+i)0(\nu_1-i-t)}^{(3)} \right) \\
 &= \underbrace{\sum_{t=0}^{j-1} \sum_{s=i}^{i+t-1} \frac{1}{2^s} \sum_{r=0}^s \binom{s}{r} D_{(s-r)(t+i-s-1)(\nu_1-i-t+r)}}_{(*)} + \underbrace{\sum_{t=0}^{j-1} B_{(t+i)0(\nu_1-i-t)}^{(3)}}_{(\diamond)}
 \end{aligned}$$

Tenendo conto della (2.21)

$$(\diamond) = \sum_{t=0}^{j-1} \frac{1}{2^{t+i}} \sum_{s=0}^{t+i} \binom{t+i}{s} B_{(t+i-s)0(\nu_1-i-t+s)}$$

Traslando gli indici e operando opportune sostituzioni

$$\begin{aligned}
 (*) &= \sum_{t=i}^{\nu_1-k} \sum_{s=i}^{t-1} \frac{1}{2^s} \sum_{r=0}^s \binom{s}{r} D_{(s-r)(t-s-1)(\nu_1-t+r)} \\
 &= \sum_{t+r+1=i}^{\nu_1-k} \sum_{s=i}^{r+t} \frac{1}{2^t} \sum_{s=0}^t \binom{t}{s} D_{(t-s)r(\nu_1-1-t+s-r)} \\
 &= \sum_{m=i-1}^{\nu_1-k-1} \sum_{t=i}^m \frac{1}{2^t} \sum_{s=0}^t \binom{t}{s} D_{(t-s)r(\nu_1-1-t+s-r)}
 \end{aligned}$$

Metodo (b)

$$\begin{aligned}
 A_{ijk}^{(3)} &= \sum_{t=i}^{\nu_1-k} \left[\frac{1}{2^t} \sum_{s=0}^t \binom{t}{s} \left(\sum_{r=0}^{\nu_1-k-t-1} D_{(t-s)r(\nu_1-1-t+s-r)} + B_{(t-s)0(\nu_1-t+s)} \right) \right] \\
 &= \underbrace{\sum_{t=i}^{\nu_1-k} \frac{1}{2^t} \sum_{s=0}^t \binom{t}{s} \sum_{r=0}^{\nu_1-k-t-1} D_{(t-s)r(\nu_1-1-t+s-r)}}_{(**)} + \underbrace{\sum_{t=i}^{\nu_1-k} B_{(t-s)0(\nu_1-t+s)}}_{(\diamond\diamond)}
 \end{aligned}$$

Traslando gli indici

$$\begin{aligned}
(\diamond\diamond) &= \sum_{t=0}^{j-1} \frac{1}{2^{t+i}} \sum_{s=0}^{t+i} \binom{t+i}{s} B_{(t+i-s)0(\nu_1-i-t+s)} \\
(**) &= \sum_{t=i}^{\nu_1-k} \sum_{m=t}^{\nu_1-k-t-1} \sum_{s=0}^t \frac{1}{2^t} \binom{t}{s} D_{(t-s)(m-t)(\nu_1-1+s-m)} \\
&= \sum_{t=i}^{\nu_1-k} \sum_{m=t}^{\nu_1-k-1} \sum_{s=0}^t \frac{1}{2^t} \binom{t}{s} D_{(t-s)(m-t)(\nu_1-1+s-m)} \\
&= \sum_{m=i}^{\nu_1-k-1} \sum_{t=i}^m \sum_{s=0}^t \frac{1}{2^t} \binom{t}{s} D_{(t-s)(m-t)(\nu_1-1+s-m)}
\end{aligned}$$

Segue dunque $(*) = (**)$ e $(\diamond) = (\diamond\diamond)$.

Triangolo T_4 :

Metodo (a)

$$\begin{aligned}
A_{ijk}^{(4)} &= \sum_{t=0}^{i-1} \sum_{u=0}^t \binom{t}{u} 2^{t-u} (-1)^u \left(\sum_{s=j+t-u}^{\nu_1-1-k-u} \frac{1}{2^s} \sum_{r=0}^s \binom{s}{r} D_{(k+u+r)(\nu_1-1-k-u-s)(s-r)} + \right. \\
&\quad \left. + B_{0(\nu_1-k-u)(k+u)}^{(4)} \right) \\
&= \underbrace{\sum_{t=0}^{i-1} \sum_{u=0}^t \sum_{s=j+t-u}^{\nu_1-1-k-u} \sum_{r=0}^s \binom{t}{u} \binom{s}{r} 2^{t-u-s} (-1)^u D_{(k+u+r)(\nu_1-1-k-u-s)(s-r)} +}_{*} \\
&\quad + \underbrace{\sum_{t=0}^{i-1} \sum_{u=0}^t \binom{t}{u} 2^{t-u} (-1)^u B_{0(\nu_1-k-u)(k+u)}^{(4)}}_{\diamond}
\end{aligned}$$

Con opportune traslazioni e scambi di indici

$$\begin{aligned}
(*) &= \sum_{t=0}^{i-2} \sum_{r=0}^{i-2-t} \sum_{u=0}^t \sum_{s=u}^{\nu_1-1-k-r} \binom{t}{u} (-1)^u \frac{1}{2^{\nu_1-1-k-t-r}} \binom{\nu_1-1-k-r-u}{s-u} D_{(k+s)r(\nu_1-1-k-s-r)} \\
&= \sum_{t=0}^{i-2} \sum_{r=0}^{i-2-t} \sum_{s=0}^{\nu_1-k} \sum_{u=0}^s \binom{t}{u} \binom{\nu_1-1-k-r-u}{s-u} (-1)^u \frac{1}{2^{\nu_1-1-k-t-r}} D_{(k+s)r(\nu_1-1-k-s-r)} \\
^1 &= \sum_{t=0}^{i-2} \sum_{r=0}^{i-2-t} \sum_{s=0}^{\nu_1-1-k-r-t} \binom{\nu_1-1-k-r-t}{s} \frac{1}{2^{\nu_1-1-k-t-r}} D_{(k+s)r(\nu_1-1-k-s-r)}
\end{aligned}$$

¹Per il lemma 1

$$= \sum_{t=0}^{i-2} \sum_{m=t}^{i-2} \sum_{s=0}^{t+j} \frac{1}{2^{t+j}} \binom{t+j}{s} D_{(k+s)(m-t)(\nu_1-1-k-s-m+t)}$$

Utilizzando l'espressione (2.22)

$$\begin{aligned} (\diamond) &= \sum_{t=0}^{i-1} \sum_{s=0}^{\nu_1-k} \sum_{u=0}^s \binom{t}{u} (-1)^u \binom{\nu_1-k-u}{s-u} \frac{1}{2^{\nu_1-k-t}} B_{(k+s)0(\nu_1-k-s)} \\ 1 &= \sum_{t=0}^{i-1} \sum_{s=0}^{\nu_1-k} \binom{\nu_1-k-t}{s} \frac{1}{2^{\nu_1-k-t}} B_{(k+s)0(\nu_1-k-s)} \\ &= \sum_{t=0}^{i-1} \sum_{s=0}^{t+j} \binom{t+j}{s} \frac{1}{2^{t+j}} B_{(k+s)0(\nu_1-k-s)} \end{aligned}$$

Metodo (b)

$$\begin{aligned} A_{ijk}^{(4)} &= \sum_{t=j}^{\nu_1-k} \frac{1}{2^t} \sum_{s=0}^t \binom{t}{s} \left(\sum_{r=0}^{\nu_1-k-t-1} D_{(k+s)r(\nu_1-1-k-s-r)} + B_{(k+s)0(\nu_1-k-s)} \right) \\ &= \underbrace{\sum_{t=j}^{\nu_1-k} \sum_{s=0}^t \sum_{r=0}^{\nu_1-k-t-1} \frac{1}{2^t} \binom{t}{s} D_{(k+s)r(\nu_1-1-k-s-r)}}_{**} + \underbrace{\sum_{t=j}^{\nu_1-k} \sum_{s=0}^t \frac{1}{2^t} \binom{t}{s} B_{(k+s)0(\nu_1-k-s)}}_{\diamond} \end{aligned}$$

Si vede facilmente che

$$(**) = \sum_{t=0}^{i-2} \sum_{m=t}^{i-2} \sum_{s=0}^{t+j} \frac{1}{2^{t+j}} \binom{t+j}{s} D_{(k+s)(m-t)(\nu_1-1-k-s-m+t)}$$

Traslando l'indice t

$$(\diamond) = \sum_{t=0}^{i-2} \sum_{s=0}^{t+j} \binom{t+j}{s} \frac{1}{2^{t+j}} B_{(k+s)0(\nu_1-k-s)}$$

Dato che $(*) = (**)$ e $(\diamond) = (\diamond)$ le due espressioni per $A_{ijk}^{(4)}$ coincidono.

□

2.5 L'algoritmo *Mixed Directional Difference-Summation* (MDDS): caso trivariato

Per quello che conosciamo, il B-net di Box spline trivariate non è mai stato calcolato esplicitamente da nessuno. L'applicazione dell'algoritmo MDDS a questo caso risulta

dunque un approccio originale nella risoluzione del problema di valutare volumi Box spline trivariati. In questa sezione verranno riprese le nozioni principali già viste, analizzandole in relazione ad una classe di funzioni trivariate particolare.

Sia $M_{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}^m(\mathbf{x}) = M_{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}^m(x_1, x_2, x_3)$ la Box spline trivariata a quattro direzioni e_1, e_2, e_3, e_{123} associata alla matrice

$$D_n = [\underbrace{e_1, \dots, e_1}_{\nu_1}, \underbrace{e_2, \dots, e_2}_{\nu_2}, \underbrace{e_3, \dots, e_3}_{\nu_3}, \underbrace{e_{123}, \dots, e_{123}}_{\nu_4}]$$

dove $n = \nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \nu_4$, $\nu_h \in \mathbb{Z}_+ \setminus \{0\} \quad \forall h = 1, \dots, 4$ con

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad e_{123} = e_1 + e_2 + e_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (2.24)$$

Si noti che i vettori direzione (2.24) formano una partizione di \mathbb{R}^3 in tetraedri regolari. In realtà $D_4 \equiv \{e_1, e_2, e_3, e_{123}\}$ è solo un sottoinsieme del set completo di direzioni

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \quad (2.25)$$

contenente tutti i 7 vettori unitari del dominio di una Box spline trivariata [65] (vedi Fig. 2.17).

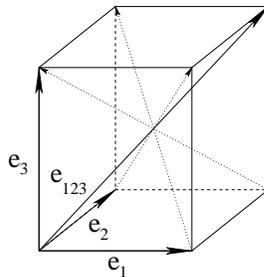


Figura 2.17: Le sette direzioni in una Box spline trivariata.

Analogamente al caso bivariato la rappresentazione di una Box spline trivariata in patch di Bézier necessita di una partizione del supporto in cubi tramite una griglia regolare del dominio. Ogni cubo viene suddiviso in sei tetraedri, come mostrato in Fig. 2.18.

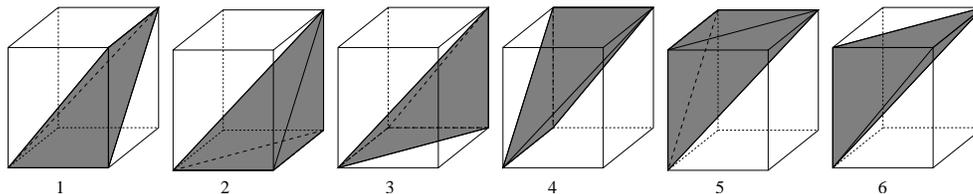


Figura 2.18: Tassellazione tetraedrale di un cubo unitario.

Osservazione 9. Questa classe è l'analogo nel caso trivariato di quella studiata nella sezione 2.4.1. Infatti proiettando i tetraedri sulle facce del cubo si ottiene la tassellazione di ogni quadrato del supporto di una Box spline bivariata a tre direzioni in due triangoli. Proiettando invece i tetraedri generati dalla partizione formata dalle direzioni (2.25), la tassellazione risultante è quella relativa alle Box spline bivariate studiate nella sezione 2.4.3.

In linea con la definizione (2.2) si consideri

$$T := \langle \mathbf{v}^0, \mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2, \mathbf{v}^3 \rangle = \left\{ \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{v} = \sum_{h=0}^3 \lambda_h \mathbf{v}^h, 0 \leq \lambda_h \leq 1, \sum_{h=0}^3 \lambda_h = 1 \right\}.$$

Si definisca su T il patch trivariato

$$p(\mathbf{v}) = \sum_{i,j,k,l \geq 0, i+j+k+l=m} P_{i,j,k,l}^m B_{i,j,k,l}^m(\lambda) \quad P_{i,j,k,l}^m \in \mathbb{R}$$

dove

$$B_{i,j,k,l}^m(\lambda) = \frac{(i+j+k+l)!}{i!j!k!l!} \lambda_0^i \lambda_1^j \lambda_2^k \lambda_3^l, \quad m = i+j+k+l.$$

sono i polinomi di Bernstein trivariati.

La funzione $p(\mathbf{v}) \equiv p(x, y, z) \equiv p(\lambda) \equiv p(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ viene solitamente chiamata *tetrahedral Bézier volume (TB volume)*.

Osservazione 10. I coefficienti di Bézier interni al tetraedro sono $P_{i,j,k,l}^m$ con tutti gli indici $i, j, k, l \neq 0$. Gli altri coefficienti indicano punti sulle facce, sugli spigoli e sui vertici del tetraedro. Si può osservare dunque che i TB volumi di grado $m \leq 3$ non hanno coefficienti interni. Questo segue banalmente poichè la relazione $i+j+k+l = m$ implica che uno degli indici i, j, k, l debba essere uguale a zero se $m \leq 3$.

La Fig. 2.19 mostra i coefficienti P_{ijkl}^2 e le relative posizioni sul tetraedro.

Il metodo illustrato nei paragrafi precedenti utilizza la relazione che lega i coefficienti di Bézier di una Box spline con quelli della sua derivata, la quale, nel caso trivariato,

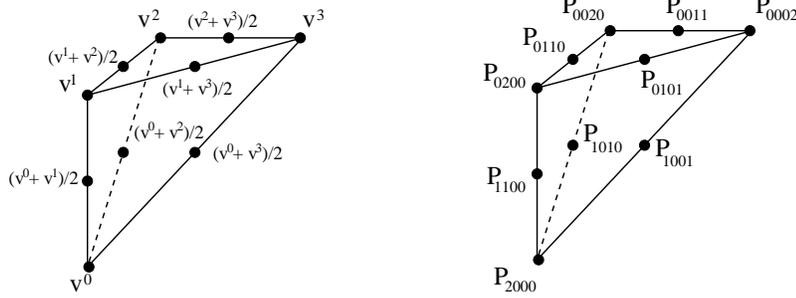


Figura 2.19: Ascisse baricentriche dei coefficienti di Bézier di un TB-volume di grado 2 (sinistra) e relativo valore assunto (destra).

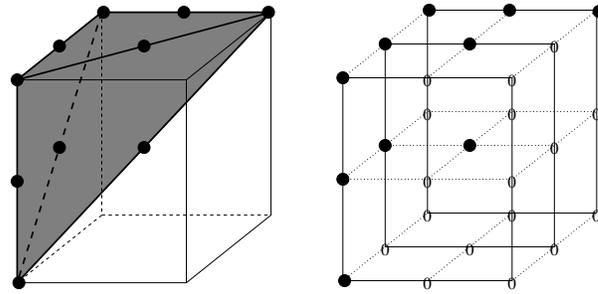


Figura 2.20: Matrice trivariata contenente i valori dei coefficienti del tetraedro 5 di Fig. 2.18.

assume la seguente forma

$$\begin{aligned}
 D_{\mathbf{d}_n} M_{D_n}(\mathbf{x}) &= m \sum_{\substack{i, j, k \geq 0 \\ i + j + k = m - 1}} \Delta_{i, j, k}^{P^{m-1}}(\mathbf{a}) B_{i, j, k}^{m-1}(\lambda) \\
 &= \sum_{\substack{i, j, k \geq 0 \\ i + j + k = m - 1}} Q_{i, j, k}^{m-1} B_{i, j, k}^{m-1}(\lambda).
 \end{aligned}$$

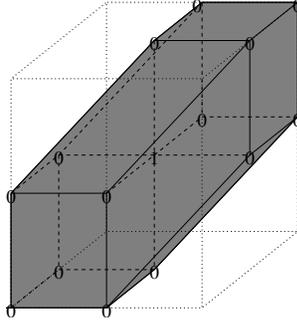
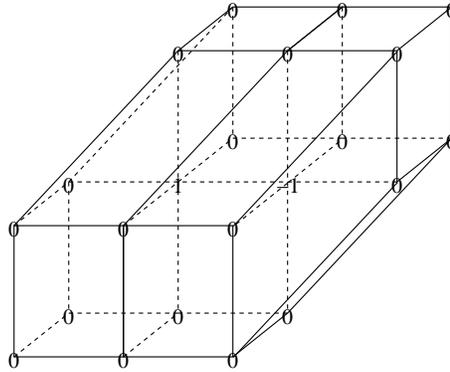
Da qui

$$Q_{i, j, k, l}^{m-1} = m(a_0 P_{i+1, j, k, l}^m + a_1 P_{i, j+1, k, l}^m + a_2 P_{i, j, k+1, l}^m + a_3 P_{i, j, k, l+1}^m) \quad (2.26)$$

Seguendo il procedimento di *traslazione-sottrazione-integrazione* descritto precedentemente, a partire dal noto B-net della M_{1111}^1 si ottengono i coefficienti di una qualsiasi Box spline trivariata a quattro direzioni. Vediamo ora le peculiarità del caso trivariato studiando il seguente esempio.

Esempio 2.2. Calcolare il B-net della Box spline trivariata di grado 2 definita dalla matrice delle direzioni $D_5 = \{e_1, e_1, e_2, e_3, e_{123}\}$.

Il risultato del primo passo di traslazione e sottrazione nella direzione e_1 dei coefficienti della lineare (Fig. 2.21) è visualizzato nella Fig. 2.22. L'operazione di integrazione

Figura 2.21: B-net di M_{1111}^1 .Figura 2.22: Traslazione e sottrazione dei coefficienti di $M_{D_4}^1$.

permette di trovare il B-net della $M_{D_5}^2$ sfruttando la relazione (2.26), dove (a_0, a_1, a_2, a_3) sono le T -coordinate di e_1 , e precisamente

$$\begin{aligned} a_0 &= \gamma_0 - \beta_0 = 0 - 1 = -1 \\ a_1 &= \gamma_1 - \beta_1 = 1 - 0 = 1 \\ a_2 &= \gamma_2 - \beta_2 = 0 - 0 = 0 \\ a_3 &= \gamma_3 - \beta_3 = 0 - 0 = 0. \end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned} Q_{1000}^1 &= P_{1100}^2 - P_{2000}^2 & P_{1100}^2 &= Q_{1000}^1 + P_{2000}^2 \\ Q_{0100}^1 &= P_{0200}^2 - P_{1100}^2 & P_{0200}^2 &= Q_{0100}^1 + P_{1100}^2 \\ Q_{0010}^1 &= P_{0110}^2 - P_{1010}^2 & P_{0110}^2 &= Q_{0010}^1 + P_{1010}^2 \\ Q_{0001}^1 &= P_{0101}^2 - P_{1001}^2 & P_{0101}^2 &= Q_{0001}^1 + P_{1001}^2 \end{aligned} \quad (2.27)$$

Partendo dalle facce triangolari del tetraedro con vertici $P_{2000}^2, P_{1010}^2, P_{1001}^2, P_{0020}^2, P_{0011}^2, P_{0002}^2$ si calcolano i restanti quattro coefficienti $P_{1100}^2, P_{0200}^2, P_{0110}^2, P_{0101}^2$ attraverso una sequenza di addizioni successive. Anche in questo caso si suppone che i coefficienti della faccia di un tetraedro assumano lo stesso valore di quelli appartenenti al tetraedro

adiacente con la stessa faccia (vedi Fig. 2.23). I coefficienti al bordo sono chiaramente posti uguali a zero.

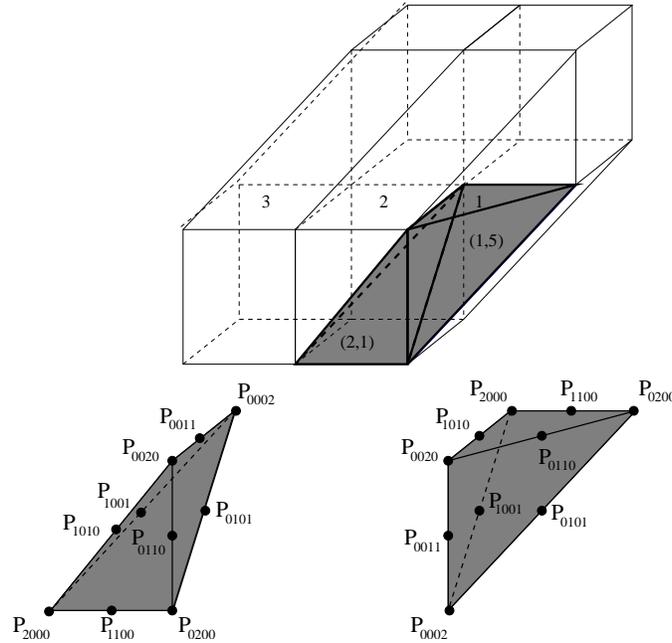


Figura 2.23: Coefficienti di Bézier del patch trivariato quadratico definito sui tetraedri 1 (sinistra) e 5 (destra).

$$\begin{aligned}
 P_{1100}^2 &= Q_{1000}^1 + P_{2000}^2 \\
 P_{0200}^2 &= Q_{0100}^1 + Q_{1000}^1 + P_{2000}^2 \\
 P_{0110}^2 &= Q_{0010}^1 + P_{1010}^2 \\
 P_{0101}^2 &= Q_{0001}^1 + P_{1001}^2
 \end{aligned}$$

Utilizzando la stessa notazione della sezione 2.4.1, e cioè $2, (c_1, c_2), (c_2 \in \{1, \dots, 6\})$ per indicare i coefficienti del c_2 -esimo patch trivariato di grado 2 appartenente al cubo c_1 , ricaviamo l'espressione dei seguenti coefficienti.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & Q_{0001}^{1,(3,5)} & & Q_{0001}^{1,(3,1)} & & Q_{0001}^{1,(2,5)} & & Q_{0001}^{1,(2,1)} & & Q_{0001}^{1,(1,5)} \\
 & \nearrow + & & \searrow = & \nearrow + & & \searrow = & \nearrow + & \searrow = & \nearrow + & \searrow = \\
 P_{1001}^{2,(3,5)} & & & & P_{0101}^{2,(3,5)} & & P_{1001}^{2,(2,5)} & & P_{0101}^{2,(2,5)} & & P_{1001}^{2,(1,5)} & & P_{0101}^{2,(1,5)}.
 \end{array}$$

Come è facilmente intuibile dal confronto con il caso bivariato, i percorsi (direzioni miste) identificati dai coefficienti $Q_{i,j,k,l}^1$ sono in generale contenuti nello spazio \mathbb{R}^3 (vedi Fig. 2.24) e sono una composizione di alcune combinazioni lineari delle direzioni e_1, e_2, e_3, e_{123} (in particolare nell'esempio, $e_{123}, e_2 + e_3$). Nel caso trivariato l'insieme

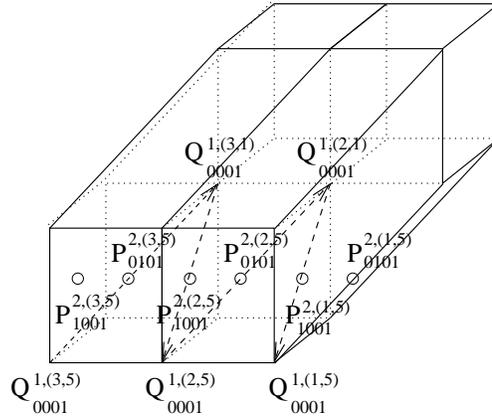


Figura 2.24: La direzione mista utilizzata per calcolare i coefficienti $P_{1001}^{2,(3,5)}$, $P_{0101}^{2,(3,5)}$, $P_{1001}^{2,(2,5)}$, $P_{0101}^{2,(2,5)}$, $P_{1001}^{2,(1,5)}$, $P_{0101}^{2,(1,5)}$ di M_{2111}^2 .

delle direzioni miste è composto da una direzione uni-dimensionale (principale) (Fig. 2.25-a), due bi-dimensionali (con due rami ciascuna), contenute rispettivamente nel piano $y = costante$ (Fig. 2.25-b) e $z = costante$ (Fig. 2.25-c), e una direzione tri-dimensionale (Fig. 2.25-d) (con quattro rami diversi). Anche in questo caso la direzione principale contiene esattamente m coefficienti duplicati.

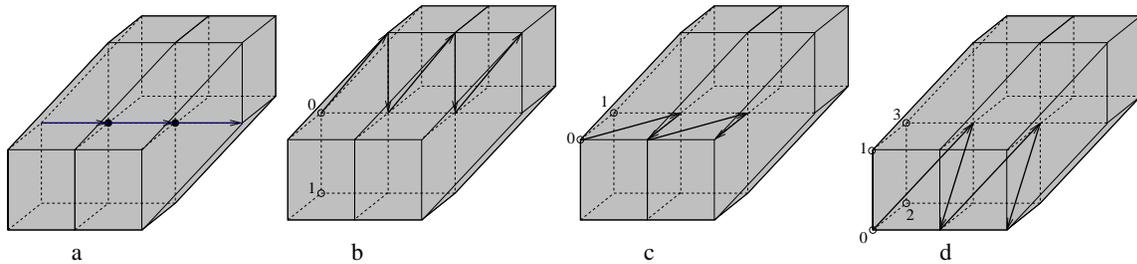


Figura 2.25: Tutti i percorsi di integrazione (MD) sufficienti per il calcolo del B-net della Box spline quadratica trivariata M_{2111}^2 .

I coefficienti di Bézier per la Box spline trivariata M_{2111} sono indicati nelle matrici seguenti. Tali coefficienti sono memorizzati in una matrice tridimensionale di dimensione $5 \times 7 \times 5$. Si noti che esternamente al supporto della Box spline i coefficienti sono per convenzione nulli.

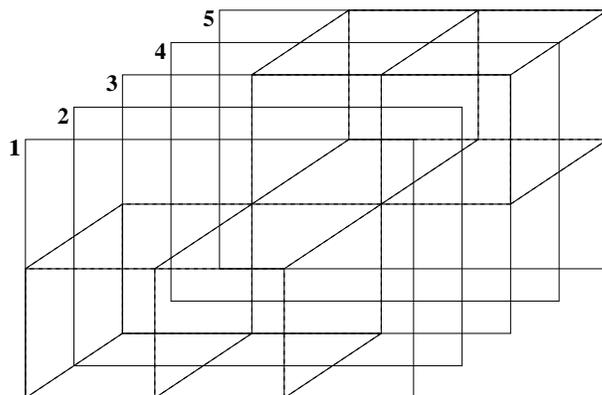


Figura 2.26: Matrici bidimensionali che contengono i coefficienti di Bézier della Box spline M_{2111} .

$$\mathbf{1} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{2} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{3} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{4} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{5} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2.5.1 Descrizione dell'algoritmo

Sia B la matrice tridimensionale di Fig. 2.27. B è la rappresentazione del B-net della Box spline lineare M_{1111}^1 .

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccc}
 \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
 \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
 \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}
 \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{ccc}
 \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
 \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\
 \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}
 \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{ccc}
 \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
 \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
 \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}
 \end{array}
 \end{array}$$

Figura 2.27: Matrice tridimensionale contenente i coefficienti del B-net della Box spline lineare trivariata.

Per calcolare il B-net di $M_{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}^m$ si eseguono sulla matrice B i seguenti passi:

$$M_{1111}^1 \xrightarrow{I} M_{\nu_1111}^{\nu_1} \xrightarrow{II} M_{\nu_1\nu_31}^{\nu_1+\nu_3-1} \xrightarrow{III} M_{\nu_1\nu_2\nu_31}^{\nu_1+\nu_2+\nu_3-2} \xrightarrow{IV} M_{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}^m$$

Al termine di queste operazioni i coefficienti di Bézier della $M_{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}^m$ verranno memorizzati in un vettore tridimensionale $A(iA, jA, kA)$, $1 \leq iA \leq m(\nu_3 + \nu_4) + 1$, $1 \leq jA \leq m(\nu_1 + \nu_4) + 1$, $1 \leq kA \leq m(\nu_2 + \nu_4) + 1$. I passi per il calcolo delle MD sono sintetizzati come segue:

I. Primo Passo: $M_{1111} \longrightarrow M_{\nu_1111}$

```

for i=1, ...,  $\nu_1$ 
  A=B-net(i, 1, 1, 1, B)
  B=A
end

```

$m = i$

Numero di MD: m^2

Numero di rami: $(2\nu_1 - 1)^2$

II. Secondo Passo:

$$M_{\nu_1 1 1 1} \longrightarrow M_{\nu_1 1 \nu_3 1}$$

for $i=1, \dots, \nu_3$

$$A=B\text{-net}(\nu_1, 1, i, 1, B)$$

$$B=A$$

end

$$m = \nu_1 + i - 1$$

Numero di MD: m^2

Numero di rami: $(2m - 1)(m(\nu_1 + 1) - 1)$

III. Terzo Passo:

$$M_{\nu_1 1 \nu_3 1} \longrightarrow M_{\nu_1 \nu_2 \nu_3 1}$$

for $i=1, \dots, \nu_2$

$$A=B\text{-net}(\nu_1, i, \nu_3, 1, B)$$

$$B=A$$

end

$$m = \nu_1 + \nu_3 + i - 2$$

Numero di MD: m^2

Numero di rami: $(m(\nu_3 + 1) - 1)(m(\nu_1 + 1) - 1)$

IV. Quarto Passo:

$$M_{\nu_1 \nu_2 \nu_3 1} \longrightarrow M_{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4}$$

for $i=1, \dots, \nu_4$

$$A=B\text{-net}(\nu_1, \nu_2, \nu_3, i, B)$$

$$B=A$$

end

$$m = \nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + i - 3$$

Numero di MD: $3m(m - 1) + 1$

Numero di rami: $m^2(\nu_1 \nu_2 + \nu_2 \nu_3 + \nu_1 \nu_3) - m(\nu_1 + \nu_2 + \nu_3) + 1$

Osservazione 11. Il B-net bivariato come caso particolare del trivariato. Lo schema computazionale trivariato contiene in sè come caso particolare quello bivariato. Infatti si può osservare che la restrizione ad un particolare piano di una Box spline trivariata definita su quattro direzioni coincide con un'opportuna Box spline bivariata dello stesso grado definita su tre direzioni. Si ha il seguente teorema:

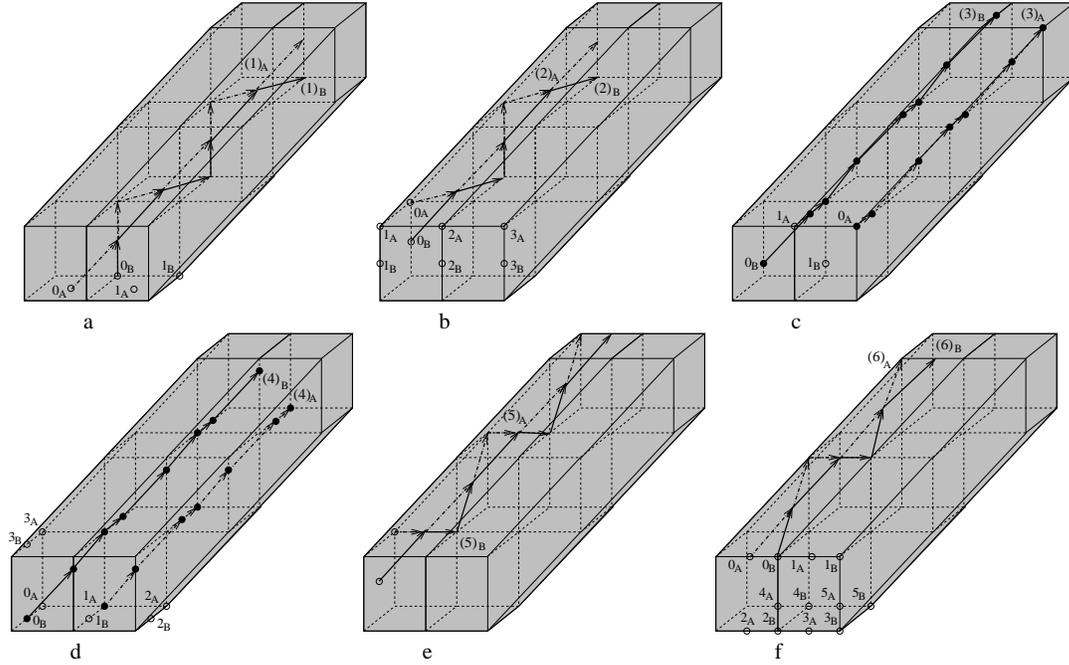


Figura 2.28: L'insieme delle direzioni miste 2D generate per calcolare il B-net della Box spline trivariata cubica M_{2112}^3 .

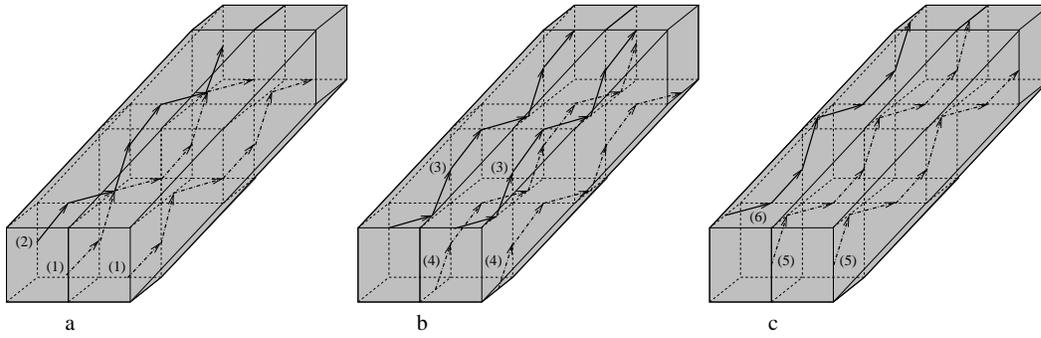


Figura 2.29: L'insieme delle direzioni miste 3D generate per calcolare il B-net della Box spline trivariata cubica M_{2112}^3 .

Teorema 2.2.

$$M^m(x_1, x_2, x_3) \Big|_{\text{piano}} = M^m(x_1, x_2) \quad \forall m \geq 1.$$

In particolare

$$M_{\nu_1 \nu_2 \nu_3}^{\nu_1 + \nu_3 - 1}(x_1, x_2, x_3) \Big|_{x_2=1} = M_{\nu_1 \nu_3}^{\nu_1 + \nu_3 - 1}(x_1, x_3),$$

$$M_{\nu_1 \nu_2 \nu_3}^{\nu_1 + \nu_2 - 1}(x_1, x_2, x_3) \Big|_{x_3=1} = M_{\nu_1 \nu_2}^{\nu_1 + \nu_2 - 1}(x_1, x_2),$$

$$M_{\nu_1 \nu_2 \nu_3}^{\nu_2 + \nu_3 - 1}(x_1, x_2, x_3) \Big|_{x_1=1} = M_{\nu_2 \nu_3}^{\nu_2 + \nu_3 - 1}(x_2, x_3),$$

$$M_{\nu_1 \nu_3 \nu_4}^{\nu_3 + \nu_4 - 1}(x_1, x_2, x_3) \Big|_{x_1=x_2} = M_{\nu_3 \nu_4}^{\nu_3 + \nu_4 - 1}(x_1, x_3).$$

Dimostrazione. Il teorema si prova per induzione sul grado m . Per la dimostrazione mi limiterò al primo caso, concentrandomi in particolare sulla restrizione della Box spline trivariata $M_{\nu_1 111}^{\nu_1}$ ($\nu_3 = 1$) al piano $x_2 = 1$.

Sia $E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Il primo passo è il caso lineare:

$$M_{E_3}^1(x_1, x_2, x_3) \Big|_{x_2=1} = M_{E_2}^1(x_1, x_3).$$

In accordo con la definizione di Box spline che utilizza la formula ricorrente,

$$\begin{aligned} M_{E_3}^1(x_1, x_2, x_3) &= \lambda_1 M_{E_3 \setminus \{e_1\}}^0(x_1, x_2, x_3) + (1 - \lambda_1) M_{E_3 \setminus \{e_1\}}^0(x_1 - 1, x_2, x_3) & (2.28) \\ &+ \lambda_2 M_{E_3 \setminus \{e_2\}}^0(x_1, x_2, x_3) + (1 - \lambda_2) M_{E_3 \setminus \{e_2\}}^0(x_1, x_2 - 1, x_3) \\ &+ \lambda_3 M_{E_3 \setminus \{e_3\}}^0(x_1, x_2, x_3) + (1 - \lambda_3) M_{E_3 \setminus \{e_3\}}^0(x_1, x_2, x_3 - 1) \\ &+ \lambda_4 M_{E_3 \setminus \{e_{123}\}}^0(x_1, x_2, x_3) + (1 - \lambda_4) M_{E_3 \setminus \{e_{123}\}}^0(x_1 - 1, x_2 - 1, x_3 - 1). \end{aligned}$$

La Fig. 2.30 rappresenta graficamente quanto calcolato in (2.28).

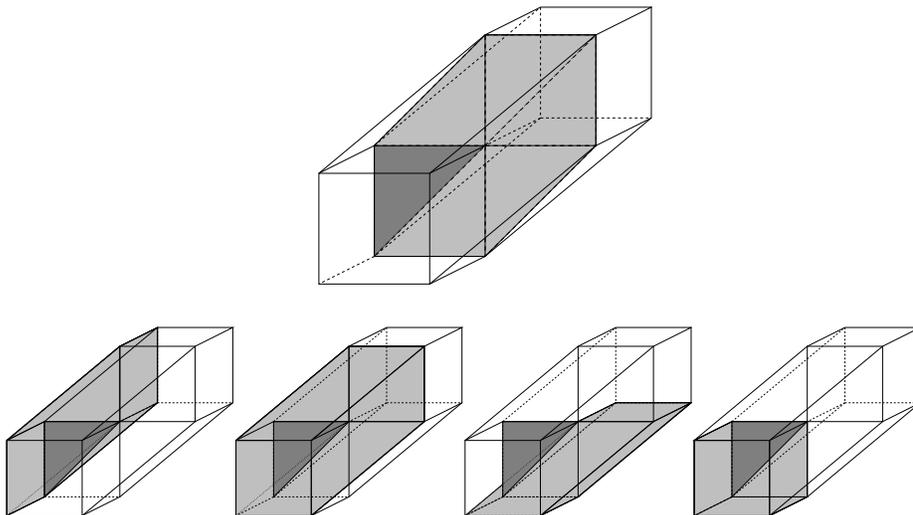


Figura 2.30: I quattro rami relativi ai contributi di λ_1 , λ_2 , λ_3 , λ_4 .

Inoltre si noti che i soli rami dell'albero che danno contributo non nullo sono quelli per cui (x_1, x_2, x_3) giace nel supporto della corrispondente Box spline traslata. In questo caso (x_1, x_2, x_3) è scelto nell'area delimitata dall'esagono grigio (Fig. 2.30). Una dimostrazione completa richiederebbe il calcolo su ognuno dei sei triangoli dell'esagono,

ma poichè concettualmente non vi è differenza, mi occuperò di uno solo in particolare. Si supponga quindi che (x_1, x_2, x_3) sia contenuto nel triangolo più scuro. Allora $M_{E_3}^1(x_1, x_2, x_3) = \lambda_1 + 1 - \lambda_2$.

Applicando la relazione ricorrente (1.18) si ha $M_{E_3}^1(x_1, x_2, x_3) \Big|_{x_2=1} = x_1$.

Analogamente ho valutato la Box spline bivariata nello stesso triangolo, ottenendo

$$M_{E_2}^1(x_1, x_3) = x_1.$$

Sfruttando la definizione induttiva, si ha

$$\begin{aligned} M_{E_3 \cup \{e_1\}}^2(x_1, x_2, x_3) \Big|_{x_2=1} &= \int_0^1 M_{E_3}^1(x_1 - t, x_2, x_3) dt \Big|_{x_2=1} \\ &= \int_0^1 M_{E_3}^1(x_1 - t, x_2, x_3) \Big|_{x_2=1} dt. \quad (*) \end{aligned}$$

Poichè per l'ipotesi induttiva $M_{E_3}^1(x_1 - t, 1, x_3) = M_{E_2}^1(x_1 - t, x_3)$, abbiamo che

$$(*) = \int_0^1 M_{E_2}^1(x_1 - t, x_3) dt = M_{E_2 \cup \{e_1\}}^2(x_1, x_3).$$

□

Questa proprietà permette di generare semplicemente il B-net di una Box spline bivariata a tre direzioni $M_{\nu_1 \nu_2 \nu_3}^m$ (con una delle molteplicità ν_1, ν_2, ν_3 uguale a 1), come restrizione del B-net della corrispondente Box trivariata a quattro direzioni ad un ben preciso piano. Per esempio il B-net della bivariata M_{211}^2

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

è esattamente il B-net della trivariata M_{2111}^2 ristretto al piano $x_2 = 1$. Tutto ciò diventa ancora più chiaro se si osserva che nel caso bivariato le direzioni miste sono esattamente quelle bidimensionali della corrispondente Box spline trivariata, appartenenti al piano sezione.

2.6 Rappresentazione grafica di superfici e volumi Box spline

Una volta studiate le caratteristiche teoriche e forniti gli strumenti necessari per la valutazione di Box spline base, il passo successivo è stato quello di utilizzarle per generare superfici e volumi.

Definizione 2.3. Una *spline cardinale* s è per definizione una combinazione lineare delle traslazioni sulla griglia intera di \mathbb{Z}^s delle funzioni Box spline M_D , cioè

$$s(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^s} c_\alpha M_D(\mathbf{x} - \alpha), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^s \quad (2.29)$$

con coefficienti $c_\alpha \in \mathbb{R}$.

Date le proprietà di supporto locale e positività delle Box spline, il reticolo in \mathbb{R}^{s+1} costituito dai punti (α, c_α) , approssima la funzione s o viceversa si può pensare che la funzione s sia una buona approssimazione di forma del reticolo. In particolare la convessità della funzione $c : \mathbb{Z}^s \rightarrow \mathbb{R}$, $\alpha \mapsto c_\alpha$ in una precisa direzione ξ implica la convessità della corrispondente spline cardinale nella stessa direzione. Le Box spline, analogamente alle B-spline, godono di una proprietà fondamentale: la partizione dell'unità.

Teorema 2.3. Partizione dell'unità. Per ogni $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^s$,

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^s} M_D(\mathbf{x} - \alpha) = 1. \quad (2.30)$$

Dimostrazione. Da (1.5),

$$\int_0^1 \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^s} M_D(\mathbf{x} - \alpha - t\xi) dt = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^s} M_{D \cup \xi}(\mathbf{x} - \alpha).$$

Dunque è sufficiente dimostrare la (2.30) solo nel caso in cui D è una matrice $s \times s$.

Si ha che

$$M_D = \frac{\chi_{\{D\}}}{|\det D|},$$

dove $\chi_{\{D\}}$ è la funzione caratteristica dell'insieme $\{D\}$ e poichè le traslazioni dei parallelogrammi $\{D\}$ sulla griglia $D\mathbb{Z}^s = \{\beta = D\alpha : \alpha \in \mathbb{Z}^s\}$ formano una partizione di \mathbb{R}^s (vedi Fig. 2.31), segue che

$$\sum_{\beta \in D\mathbb{Z}^s} M_D(\cdot - \beta) = 1/|\det D|. \quad (2.31)$$

Questo implica la (2.30), poichè \mathbb{Z}^s è l'unione disgiunta di $\gamma + D\mathbb{Z}^s$ con γ appartenente al gruppo quoziente $\mathbb{Z}^s/D\mathbb{Z}^s$ che contiene esattamente $|\det D|$ elementi (si consulti [32, Lemma 9, cap. II]). L'esempio di Fig. 2.31 considera $D = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

□

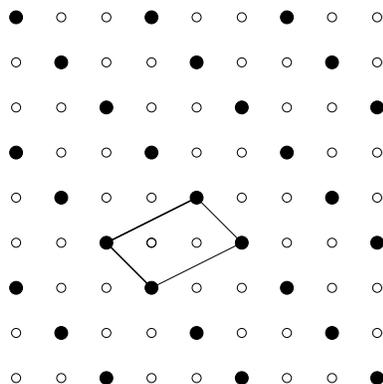


Figura 2.31: I parallelogrammi generati da D traslati sulla griglia $D\mathbb{Z}^2$ formano una partizione di \mathbb{R}^2 .

Una superficie Box spline S è definita dal seguente insieme di punti

$$S = \{s(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in \Omega\}$$

dove $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ è il dominio parametrico e s è data dalla (2.29) con M_D Box spline bivariate. Si parlerà di volume Box spline V quando $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ e le funzioni base che generano s sono trivariate.

Osservazione 12. Essendo le Box spline funzioni a supporto compatto, la sommatoria in (2.29) può essere ristretta all'insieme

$$a(\Omega, D) := \{\alpha : M_D(\mathbf{x} - \alpha) > 0 \text{ per qualche } \mathbf{x} \in \Omega\}.$$

Si dimostra facilmente che per ogni \mathbf{x} fissato, non appartenente agli iperpiani generati dalle direzioni di D , il numero di Box spline traslate non nulle nel punto coincide con quello dei nodi di \mathbb{Z}^s contenuti in $\{D\}$, cioè

$$|a(\mathbf{x}, D)| = \text{vol}_s D([0 \dots 1]^n) = |\{\mathbb{Z}^s \cap D[0 \dots 1]^n\}|, \quad (2.32)$$

dove in generale $|X|$ indica il numero degli elementi contenuti nell'insieme X . Nel caso particolare di domini del tipo $[0, n_1] \times \dots \times [0, n_s]$, con $n_i \in \mathbb{N}$ e Box spline definite dalle direzioni

$$e_1, \quad e_2, \quad \dots, \quad e_s, \quad e_1 + e_2 + \dots + e_s$$

dove e_j , $j = 1, \dots, s$, rappresenta il j -esimo vettore unitario dello spazio \mathbb{R}^s , in [5] è stata dimostrata la seguente formula che calcola il numero di Box spline non nulle su tutto il dominio:

$$|a(\Omega, D)| = \nu_s \prod_{i=1}^s (n_i + \nu_i) - (\nu_{s+1} - 1) \prod_{i=1}^s (n_i + \nu_i - 1).$$

Il *reticolo di controllo* di S è una superficie bilineare a tratti così definita

$$\mathbf{x} \mapsto \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^2} c_\alpha M_E(\mathbf{x} - \alpha), \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Nel caso trivariato si parla di reticolo di controllo di V intendendo un volume del tipo

$$\mathbf{x} \mapsto \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^3} c_\alpha M_E(\mathbf{x} - \alpha), \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Poichè le traslazioni di una Box spline sono non negative e la loro somma vale 1, si ha che

$$s(\mathbf{x}) \in \text{conv}\{c_\alpha : \alpha \in a(\Omega, D)\}.$$

2.6.1 Sperimentazione numerica

Caso bivariato

Per generare superfici Box spline, combinazione di funzioni base a tre o a quattro direzioni, abbiamo adottato due differenti tecniche: la prima permette di introdurre i centri delle Box spline della combinazione e l'altra, a partire dal dominio della superficie che si vuole costruire, calcola le funzioni non nulle che vivono su tale insieme e genera la superficie Box risultante. Consideriamo dapprima Box spline base definite su tre direzioni $M_{\nu_1 \nu_2 \nu_3}$.

Approccio 1. Sia assegnato l'insieme N contenente i centri $\alpha = (i, j)$ delle Box base $M_{\nu_1 \nu_2 \nu_3}$

$$N = \{(i, j) \in \mathbb{Z}^2 : a1 \leq i \leq a2, \quad b1 \leq j \leq b2, \quad c1 \leq j - i \leq c2\},$$

$$a1, a2, b1, b2, c1, c2 \in \mathbb{Z}$$

e sia

$$C = \{c_\alpha = c_{ij} \in \mathbb{R} | \alpha \in N\}$$

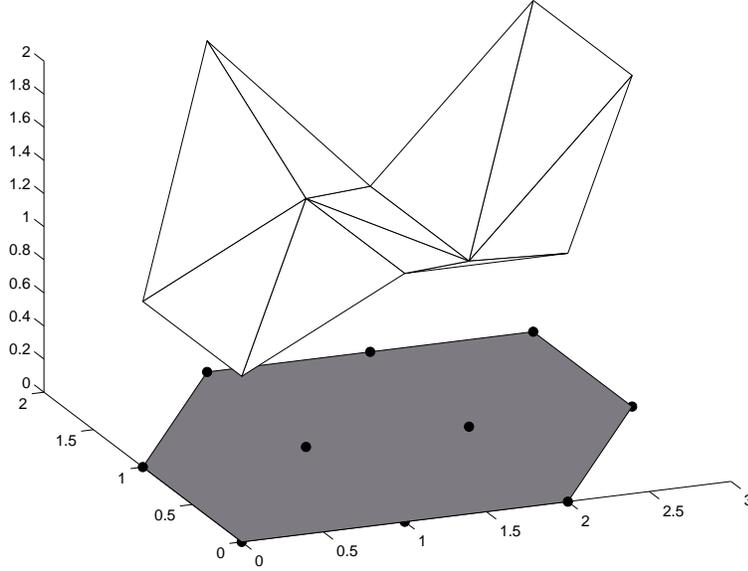


Figura 2.32: Centri delle Box spline base e relativo reticolo di controllo.

l'insieme dei coefficienti di $s(x_1, x_2)$.

Allora

$$s(x_1, x_2) = \sum_{(i,j) \in N} c_{ij} M_{\nu_1 \nu_2 \nu_3}(x_1 - t_i, x_2 - t_j)$$

dove $(t_i, t_j) = (i, j) - \frac{1}{2}(\nu_1 + \nu_3, \nu_2 + \nu_3)$ sono i nodi da cui decollano le $|N|$ funzioni base.

Osservazione 13. Nel caso di molteplicità ν_1, ν_2, ν_3 tali che $\nu_1 + \nu_3$ è dispari oppure $\nu_2 + \nu_3$ è dispari, i nodi (t_i, t_j) non coincidono con i punti della griglia di \mathbb{Z}^2 .

Osservazione 14. L'insieme N è rettangolare se $c_1 = b_1 - a_2$ e $c_2 = b_2 - a_1$.

Il dominio su cui è definita $s(x_1, x_2)$ è

$$\Omega = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \begin{aligned} asupp_1 &\leq x_1 \leq asupp_2, \\ bsupp_1 &\leq x_2 \leq bsupp_2, \\ csupp_1 &\leq x_2 - x_1 \leq csupp_2 \end{aligned}\}.$$

con

$$\begin{aligned} asupp_1 &= a_1 - 1 + (\nu_1 + \nu_3)/2, & asupp_2 &= a_2 + 1 - (\nu_1 + \nu_3)/2, \\ bsupp_1 &= b_1 - 1 + (\nu_2 + \nu_3)/2, & bsupp_2 &= b_2 + 1 - (\nu_2 + \nu_3)/2, \\ csupp_1 &= c_1 - 1 + (\nu_1 + \nu_2)/2, & csupp_2 &= c_2 + 1 - (\nu_1 + \nu_2)/2. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Consideriamo la partizione Γ del dominio (vedi sezione 2.4.1) che genera i triangoli T_{up} e T_{down} . In particolare, dati ν_1, ν_2, ν_3 è possibile calcolare il numero $numT$ dei triangoli all'interno del supporto di una Box base attraverso la formula:

$$|T_{up}| = |T_{down}| = \nu_1\nu_2 + \nu_1\nu_3 + \nu_2\nu_3.$$

Infatti il numero dei triangoli e dei quadratini coincide a meno dei tagli sugli angoli:

$$\begin{aligned} |T_{up}| &= (\nu_1 + \nu_3)(\nu_2 + \nu_3) - \underbrace{\frac{\nu_3(\nu_3 - 1)}{2}}_{\text{num triangoli nel}} - \underbrace{\frac{\nu_3(\nu_3 + 1)}{2}}_{\text{num triangoli nel}} \\ &\qquad\qquad\qquad \text{taglio superiore} \qquad\qquad\qquad \text{taglio inferiore} \\ &= \nu_1\nu_2 + \nu_1\nu_3 + \nu_2\nu_3 \end{aligned}$$

Per simmetria $numT := |T_{up}| = |T_{down}|$.

Osservazione 15. Essendo $|a(T, D)|$ il numero di Box spline traslate non nulle sul triangolo $T \subset \Omega$, si ha che $numT \equiv |a(T, D)|$. Inoltre da (2.32) e dal teorema 1.2 si deduce che

$$numT = \sum_{Z \in \mathcal{B}(D)} |\det Z|.$$

Si indichino con \mathbf{posd}_k e \mathbf{posu}_k , $k = 1, \dots, numT$ i vettori contenenti la posizione (vertice in basso a sinistra, vedi Fig. 2.33) dei T_{down} e T_{up} interni alla Box base, rispetto al nodo da cui questa decolla. Ad esempio per la lineare $M_{111}(x_1, x_2)$ che decolla dal nodo $(0, 0)$ si ha che $numT = 3$ e

$$\mathbf{posd}_1 = (0, 0), \quad \mathbf{posd}_2 = (1, 0), \quad \mathbf{posd}_3 = (1, 1)$$

$$\mathbf{posu}_1 = (0, 0), \quad \mathbf{posu}_2 = (0, 1), \quad \mathbf{posu}_3 = (1, 1).$$

Per valutare la superficie Box in un dato triangolo T_{down} (oppure T_{up}) del dominio è necessario individuare i centri (iT, jT) delle Box spline che lo contengono all'interno del proprio supporto. Il numero di queste funzioni è esattamente $numT$. Se si denota con $(v1, v2)$ il vertice in basso a sinistra di tale triangolo, i centri (iT, jT) si ricavano dalla seguente formula:

per i triangoli T_{up} :

$$(iT, jT)_k = (v1, v2) + (\mathbf{posd}_k(1) - (\nu_1 + \nu_3)/2 + 1, \mathbf{posd}_k(2) - (\nu_2 + \nu_3)/2 + 1) \quad (2.34)$$

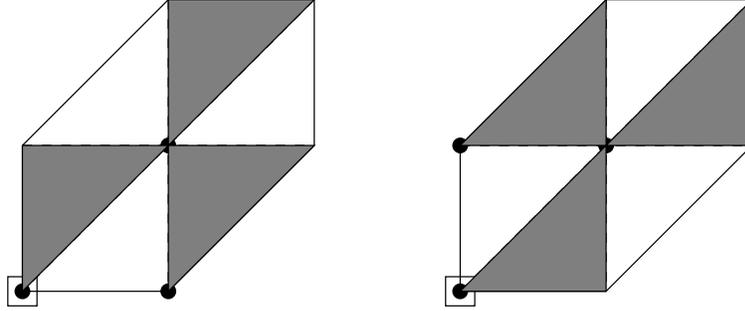


Figura 2.33: Posizione dei triangoli T_{up} e T_{down} all'interno del supporto della Box spline lineare M_{111} .

per i triangoli T_{down} :

$$(iT, jT)_k = (v1, v2) + (\mathbf{posu}_k(1) - (\nu_1 + \nu_3)/2 + 1, \mathbf{posu}_k(2) - (\nu_2 + \nu_3)/2 + 1) \quad (2.35)$$

dove $k = 1, \dots, numT$.

A questo punto è semplice ricercare il triangolo T_{down} all'interno del supporto della k -esima Box spline base. Infatti esso coinciderà con il triangolo che si ottiene partendo dal primo a destra in alto e trasladolo di un vettore pari a $(iT, jT)_1 - (iT, jT)_k$, $k = 1, \dots, numT$. I passi principali per la valutazione di T_{down} sono:

per $k = 1, \dots, numT$

- calcolo i centri (iT, jT) delle Box non nulle su T_{down} utilizzando la (2.35);
- applico l'algoritmo di de Casteljau al triangolo del supporto della k -esima Box spline base coincidente con T_{down} ;
- sommo i vari contributi delle funzioni base moltiplicate per il coefficiente $c_{iT, jT}$.

Esempio 2.3. Si consideri il triangolo T_{up} di Fig. 2.35. Utilizzando la formula (2.34), calcolo i centri delle Box spline M_{222} che lo contengono nel proprio supporto. Innanzitutto $numT = 12$ e i vettori \mathbf{posd}_k , $k = 1, \dots, numT$ sono:

$$\begin{array}{ll} \mathbf{posd}_1 = (0, 0) & \mathbf{posd}_7 = (3, 1) \\ \mathbf{posd}_2 = (1, 0) & \mathbf{posd}_8 = (1, 2) \\ \mathbf{posd}_3 = (2, 0) & \mathbf{posd}_9 = (2, 2) \\ \mathbf{posd}_4 = (0, 1) & \mathbf{posd}_{10} = (3, 2) \\ \mathbf{posd}_5 = (1, 1) & \mathbf{posd}_{11} = (2, 3) \\ \mathbf{posd}_6 = (2, 1) & \mathbf{posd}_{12} = (3, 3). \end{array}$$

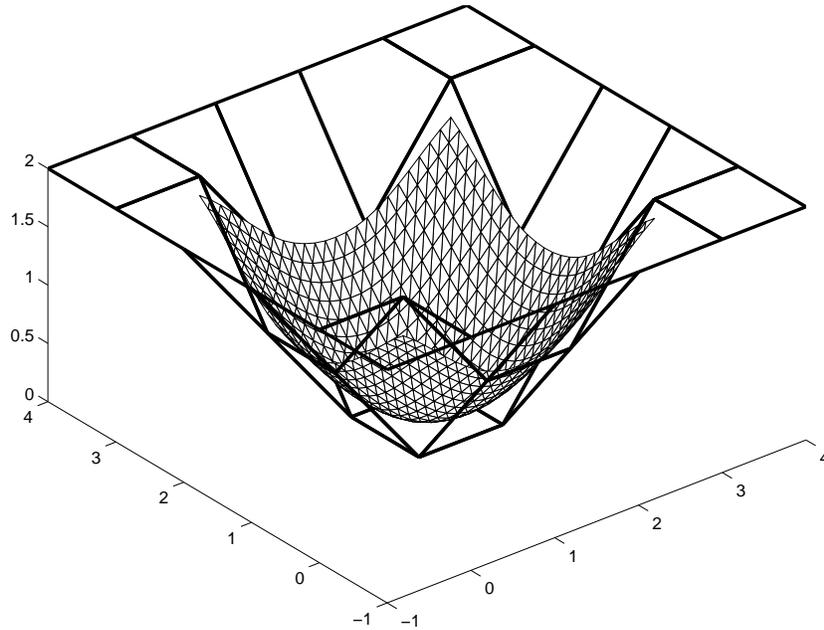


Figura 2.34: Superficie Box spline costruita come combinazione lineare di funzioni base M_{222} secondo i coefficienti del reticolo.

Allora essendo $(v1, v2) = (2, 2)$ si ha che

$$\begin{array}{ll}
 (iT, jT)_1 = (1, 1) & (iT, jT)_7 = (4, 2) \\
 (iT, jT)_2 = (2, 1) & (iT, jT)_8 = (2, 3) \\
 (iT, jT)_3 = (3, 1) & (iT, jT)_9 = (3, 3) \\
 (iT, jT)_4 = (1, 2) & (iT, jT)_{10} = (4, 3) \\
 (iT, jT)_5 = (2, 2) & (iT, jT)_{11} = (3, 4) \\
 (iT, jT)_6 = (3, 2) & (iT, jT)_{12} = (4, 4).
 \end{array}$$

Se prendiamo in considerazione la M_{222} con centro in $(iT, jT)_1 = (1, 1)$, T_{up} coincide con il triangolo che all'interno del supporto si ottiene traslando il primo in alto sulla destra del vettore $(iT, jT)_1 - (iT, jT)_1 = (0, 0)$.

Approccio 2. Sia assegnato il dominio

$$\Omega = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : d1 \leq x_1 \leq d2, \quad f1 \leq x_2 \leq f2, \quad g1 \leq x_2 - x_1 \leq g2\}$$

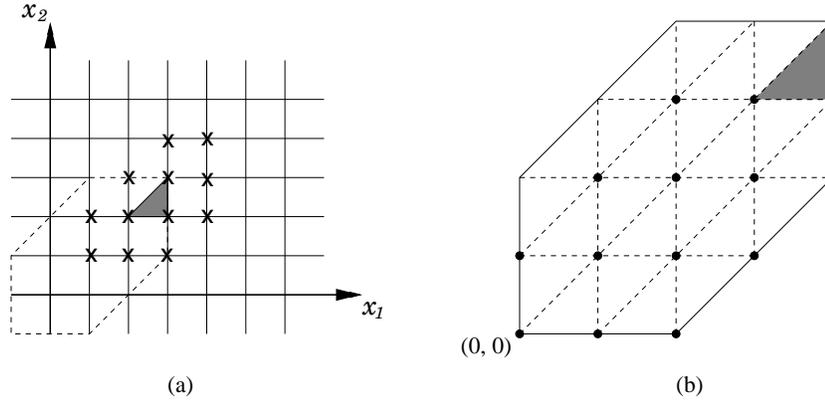


Figura 2.35: Box spline M_{222} non nulle sul triangolo T_{up} evidenziato in (a). Le crocette in (a) indicano i centri $(iT, jT)_k$, $k = 1, \dots, 12$. I cerchi in (b) indicano i vertici dei triangoli T_{down} all'interno del supporto della Box spline (posd_k , $k = 1, \dots, 12$).

con

$$\left. \begin{array}{l} d1 - (\nu_1 + \nu_3)/2 \\ d2 + (\nu_1 + \nu_3)/2 \\ f1 - (\nu_2 + \nu_3)/2 \\ f2 + (\nu_2 + \nu_3)/2 \\ g1 - (\nu_1 + \nu_2)/2 \\ g2 + (\nu_1 + \nu_2)/2 \end{array} \right\} \in \mathbb{Z}.$$

Dalle relazioni (2.33) si ricava l'espressione per $a1, a2, b1, b2, c1, c2$ e quindi l'insieme N dei centri delle Box spline, riconducendoci al caso precedente.

Per superfici combinazioni di Box spline definite su quattro direzioni $M_{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}$, si procede in modo analogo. L'insieme dei centri delle funzioni base diventa in generale

$$N = \{(i, j) \in \mathbb{Z}^2 : a1 \leq i \leq a2, \quad b1 \leq j \leq b2, \quad c1 \leq j - i \leq c2, \quad cc1 \leq j + i \leq cc2\},$$

$$a1, a2, b1, b2, c1, c2, cc1, cc2 \in \mathbb{Z}$$

e quindi i nodi da cui decollano le funzioni base sono $(t_i, t_j) = (i, j) - \frac{1}{2}(\nu_1 + \nu_3 + \nu_4, \nu_2 + \nu_3 - \nu_4)$. Inoltre

$$\Omega = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \begin{array}{l} asupp_1 \leq x_1 \leq asupp_2, \\ bsupp_1 \leq x_2 \leq bsupp_2, \\ csupp_1 \leq x_2 - x_1 \leq csupp_2, \\ ccsupp_1 \leq x_2 + x_1 \leq ccsupp_2 \end{array}\}.$$

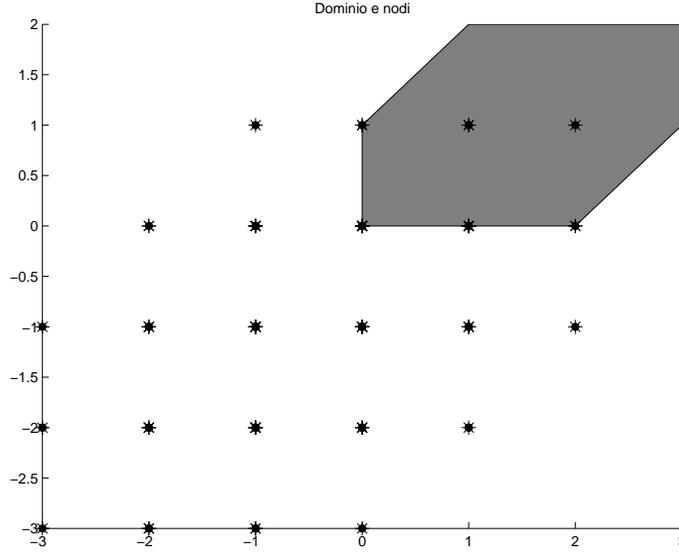


Figura 2.36: Generico dominio e nodi da cui decollano le Box spline base M_{222} il cui supporto contiene almeno un triangolo T_{down} (cerchietto) oppure T_{up} (star).

con

$$\begin{aligned}
 asupp_1 &= a1 - 1 + (\nu_1 + \nu_3 + \nu_4)/2, & asupp_2 &= a2 + 1 - (\nu_1 + \nu_3 + \nu_4)/2, \\
 bsupp_1 &= b1 - 1 + (\nu_2 + \nu_3 - \nu_4)/2, & bsupp_2 &= b2 + 1 - (\nu_2 + \nu_3 - \nu_4)/2, \\
 csupp_1 &= c1 - 1 + (\nu_1 + \nu_2 - \nu_4)/2, & csupp_2 &= c2 + 1 - (\nu_1 + \nu_2 - \nu_4)/2, \\
 ccsupp_1 &= cc1 - 1 + (\nu_1 + \nu_2 - \nu_4)/2, & ccsupp_2 &= c2 + 1 - (\nu_1 + \nu_2 - \nu_4)/2.
 \end{aligned}
 \tag{2.36}$$

Osservazione 16. Nel caso particolare in cui $c1 = b1 - a2$, $c2 = b2 - a1$, $cc1 = a1 + b1$, $cc2 = a2 + b2$, l'insieme N è rettangolare.

Il dominio di $s(x_1, x_2)$ viene suddiviso nei quattro triangoli T_1, T_2, T_3, T_4 (vedi Fig. 2.12), il cui numero all'interno del supporto di una Box spline viene calcolato attraverso la seguente formula:

$$numT = \nu_1\nu_2 + \nu_1\nu_3 + \nu_1\nu_4 + \nu_2\nu_3 + \nu_2\nu_4 + 2\nu_3\nu_4,$$

infatti

$$\begin{aligned}
 |T_1| = |T_2| = |T_3| = |T_4| &= (\nu_1 + \nu_3 + \nu_4)(\nu_2 + \nu_3 + \nu_4) \\
 &- \frac{\nu_3(\nu_3 - 1)}{2} - \frac{\nu_3(\nu_3 + 1)}{2} - \frac{\nu_4(\nu_4 - 1)}{2} - \frac{\nu_4(\nu_4 + 1)}{2} \\
 &= \nu_1\nu_2 + \nu_1\nu_3 + \nu_1\nu_4 + \nu_2\nu_3 + \nu_2\nu_4 + 2\nu_3\nu_4.
 \end{aligned}$$

Le formule (2.34) e (2.35) vengono sostituite dalle seguenti

per i triangoli T_1 :

$$(iT, jT) = (v1, v2) + (\mathbf{pos4}_k(1) - (\nu_1 + \nu_3 + \nu_4)/2, \mathbf{pos4}_k(2) - (\nu_2 + \nu_3 - \nu_4)/2)$$

per i triangoli T_2 :

$$(iT, jT) = (v1, v2) + (\mathbf{pos3}_k(1) - (\nu_1 + \nu_3 + \nu_4)/2, \mathbf{pos3}_k(2) - (\nu_2 + \nu_3 - \nu_4)/2)$$

per i triangoli T_3 :

$$(iT, jT) = (v1, v2) + (\mathbf{pos1}_k(1) - (\nu_1 + \nu_3 + \nu_4)/2, \mathbf{pos1}_k(2) - (\nu_2 + \nu_3 - \nu_4)/2)$$

per i triangoli T_4 :

$$(iT, jT) = (v1, v2) + (\mathbf{pos1}_k(1) - (\nu_1 + \nu_3 + \nu_4)/2, \mathbf{pos1}_k(2) - (\nu_2 + \nu_3 - \nu_4)/2).$$

I vettori $\mathbf{pos1}_k$, $\mathbf{pos2}_k$, $\mathbf{pos3}_k$, $\mathbf{pos4}_k$ contengono rispettivamente le posizioni dei triangoli T_1, T_2, T_3, T_4 all'interno del supporto della Box spline base $M_{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}$. $(v1, v2)$ è il punto centrale del quadrato che contiene il triangolo di valutazione, il quale coincide in ogni Box base non nulla con il corrispondente triangolo con vertice in $(iT, jT)_1 - (iT, jT)_k$, $k = 1, \dots, numT$.

Anche in questo caso le operazioni richieste per la valutazione in un triangolo sono le stesse viste precedentemente.

Esempio 2.4. Si calcolino i centri delle Box spline M_{2111} non nulle sul triangolo T_2 di Fig. 2.38. Si ha che $numT = 10$ e

$$\begin{array}{ll} \mathbf{pos3}_1 = (3/2, -1/2) & \mathbf{pos3}_6 = (7/2, 1/2) \\ \mathbf{pos3}_2 = (5/2, -1/2) & \mathbf{pos3}_7 = (1/2, 3/2) \\ \mathbf{pos3}_3 = (1/2, 1/2) & \mathbf{pos3}_8 = (3/2, 3/2) \\ \mathbf{pos3}_4 = (3/2, 1/2) & \mathbf{pos3}_9 = (5/2, 3/2) \\ \mathbf{pos3}_5 = (5/2, 1/2) & \mathbf{pos3}_{10} = (7/2, 3/2). \end{array}$$

Allora essendo $(v1, v2) = (1/2, 0)$ si ha che

$$\begin{array}{ll} (iT, jT)_1 = (0, -1) & (iT, jT)_6 = (2, 0) \\ (iT, jT)_2 = (1, -1) & (iT, jT)_7 = (-1, 1) \\ (iT, jT)_3 = (-1, 0) & (iT, jT)_8 = (0, 1) \\ (iT, jT)_4 = (0, 0) & (iT, jT)_9 = (1, 1) \\ (iT, jT)_5 = (1, 0) & (iT, jT)_{10} = (2, 1). \end{array}$$

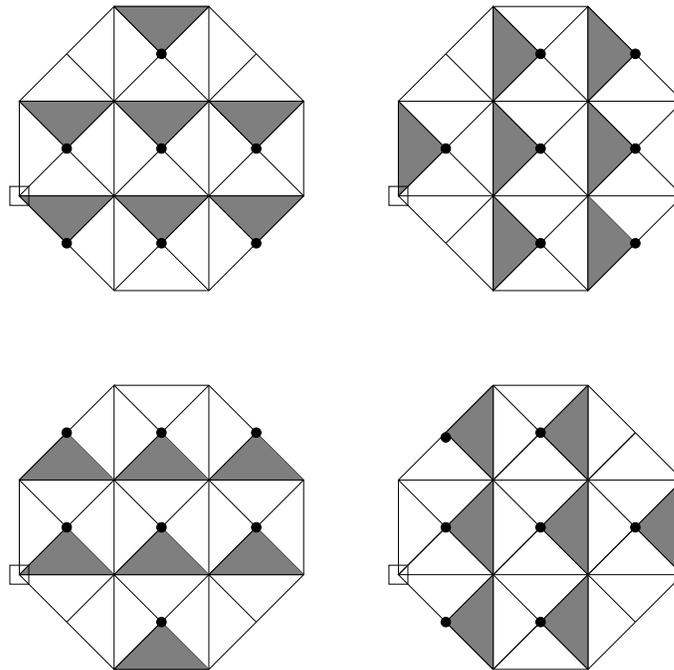


Figura 2.37: Posizione dei triangoli T_1, T_2, T_3, T_4 all'interno del supporto della Box spline quadratica M_{1111} . I cerchietti indicano il punto identificato dai vettori $\mathbf{pos1}_k, \mathbf{pos2}_k, \mathbf{pos3}_k, \mathbf{pos4}_k$.

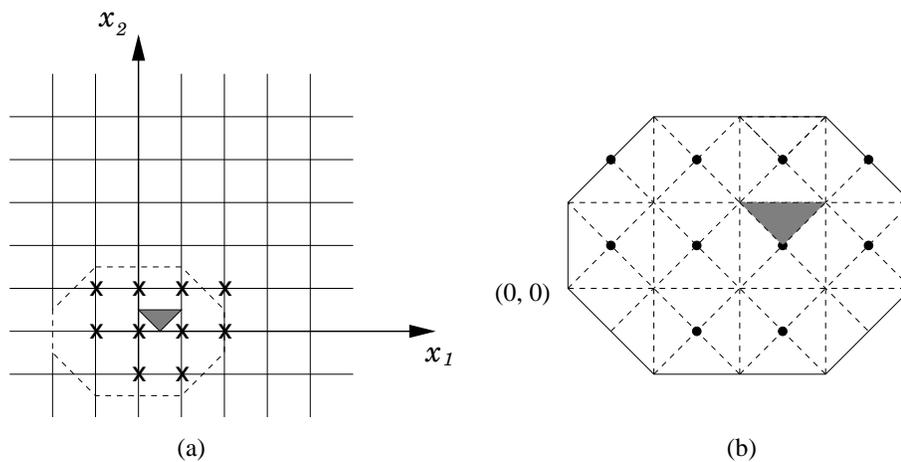


Figura 2.38: Box spline M_{2111} non nulle sul triangolo T_2 evidenziato in (a). Le crocette in (a) indicano i centri $(iT, jT)_k, k = 1, \dots, 10$. I cerchietti in (b) indicano i vertici dei triangoli T_3 all'interno del supporto della Box spline ($\mathbf{pos3}_k, k = 1, \dots, 10$).

Il triangolo T_2 all'interno del supporto della M_{2111} avente centro in $(0, 0)$, si ottiene traslando il primo in alto sulla destra del vettore $(iT, jT)_1 - (iT, jT)_4 = (0, -1)$.

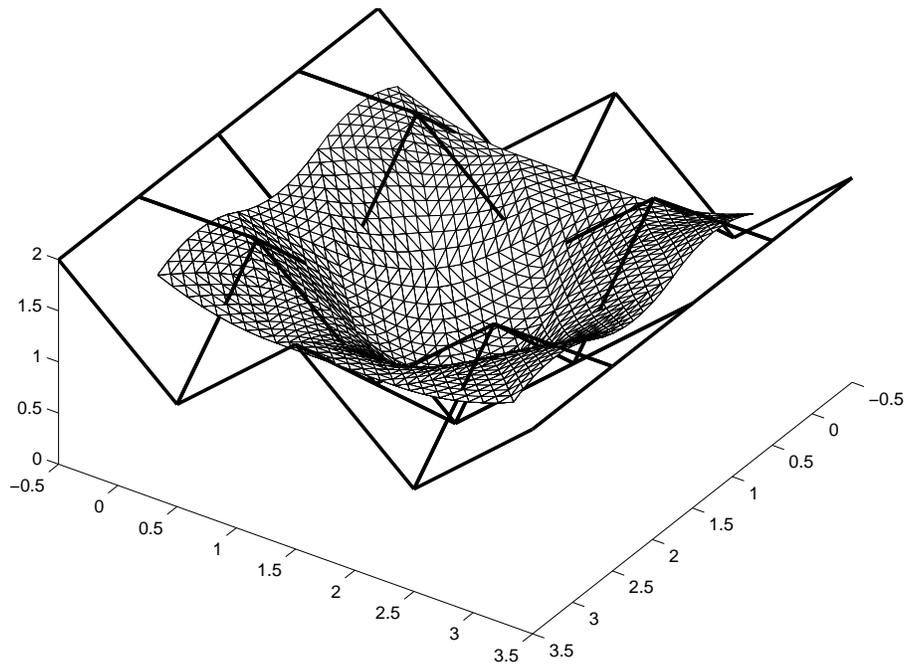


Figura 2.39: Superficie Box spline costruita come combinazione lineare delle funzioni base bivariate M_{1111} secondo i coefficienti del reticolo.

Caso trivariato

Il nostro approccio al caso trivariato è giustificato dal crescente interesse verso le applicazioni nel settore della geometria solida e della ricostruzione di superfici. Oltre ad essere il principale strumento per definire volumi, le funzioni trivariate costituiscono la base per lavorare con superfici implicite. Infatti una superficie implicita è una forma geometrica bi-dimensionale che esiste in uno spazio tri-dimensionale. Consiste cioè in tutti quei punti dello spazio 3D che soddisfano una qualche particolare richiesta ([9]). Matematicamente una superficie in forma implicita S è definita come segue

$$S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid V(x_1, x_2, x_3) = 0\},$$

dove $V : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione trivariata che definisce implicitamente la superficie S , spesso denominata *zero-set* di V . Mentre una superficie esplicita mappa ogni elemento del dominio di definizione $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ in uno scalare $x_3 = g(x_1, x_2)$, esprimendo dunque la coordinata x_3 in funzione di x_1 e x_2 , una superficie implicita non è altro che un insieme di punti che soddisfa una data proprietà. In questo modo anche le superfici chiuse possono avere una loro rappresentazione. Inoltre una superficie implicita descrive in modo naturale l'interno di un oggetto, identificando facilmente i punti interni ossia $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ tali che $V(x_1, x_2, x_3) > 0$ e quelli esterni $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ tali che

$V(x_1, x_2, x_3) < 0$. In secondo luogo, l'abilità di descrivere particolarità geometriche di alcuni oggetti a forma libera rende preferibile l'utilizzo di superfici implicite. Inoltre risulta più semplice la costruzione di oggetti complessi attraverso operazioni booleane e la ricerca di regioni di intersezioni della superficie. Per tutte queste ragioni ci siamo dedicati allo studio di funzioni trivariate, in particolare definite come combinazione di volumi Box spline.

Per la loro valutazione e rappresentazione è stato adottato lo stesso approccio visto nel caso di superfici definite da combinazioni di Box spline bivariate a tre direzioni.

Sia $M_{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}(x_1, x_2, x_3)$ una Box spline trivariata definita su una griglia a quattro direzioni (confronta la sezione 2.5). Supponiamo per semplicità che l'insieme N contenente i centri (i, j, k) delle Box base sia un parallelepipedo, cioè

$$N = \{(i, j, k) \in \mathbb{Z}^3 : A1 \leq i \leq A2, \quad B1 \leq j \leq B2, \quad C1 \leq k \leq C2\}$$

$$A1, A2, B1, B2, C1, C2 \in \mathbb{Z}$$

e sia

$$C = \{c_{ijk} \in \mathbb{R} | (i, j, k) \in N\}$$

l'insieme dei coefficienti del volume $V(x_1, x_2, x_3)$. I nodi da cui decollano le suddette Box spline trivariate sono legate ai loro centri dalla relazione

$$(t_i, t_j, t_k) = (i, j, k) - \frac{1}{2}(\nu_1 + \nu_4, \nu_2 + \nu_4, \nu_3 + \nu_4).$$

Il dominio su cui è definito il volume è partizionato in tetraedri (vedi Fig. 2.18), ognuno dei quali è contenuto nel supporto della Box spline base $numT$ volte, dove in questo caso

$$numT = \nu_1\nu_2\nu_3\nu_4 + \nu_1\nu_2 + \nu_1\nu_3 + \nu_1\nu_4 + \nu_2\nu_3 + \nu_2\nu_4 + \nu_3\nu_4 - (\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \nu_4) + 1.$$

I centri delle Box spline trivariate non nulle su un tetraedro dato, si calcolano in modo analogo al caso bivariato. Se si denota con $(v1, v2, v3)$ il vertice in basso a sinistra, i centri (iT, jT, kT) si ricavano dalla seguente formula:

$$(iT, jT, kT)_k = (v1, v2, v3) + (w1, w2, w3)_k$$

dove

$$\text{per } Tetra1 \quad \begin{cases} w1 = \mathbf{posT4}_k(1) - (\nu_1 + \nu_4)/2 + 1 \\ w2 = \mathbf{posT4}_k(2) - (\nu_2 + \nu_4)/2 + 1 \\ w3 = \mathbf{posT4}_k(3) - (\nu_3 + \nu_4)/2 + 1 \end{cases}$$

$$\text{per Tetra2} \quad \begin{cases} w1 = \mathbf{posT5}_k(1) - (\nu_1 + \nu_4)/2 + 1 \\ w2 = \mathbf{posT5}_k(2) - (\nu_2 + \nu_4)/2 + 1 \\ w3 = \mathbf{posT5}_k(3) - (\nu_3 + \nu_4)/2 + 1 \end{cases}$$

$$\text{per Tetra3} \quad \begin{cases} w1 = \mathbf{posT6}_k(1) - (\nu_1 + \nu_4)/2 + 1 \\ w2 = \mathbf{posT6}_k(2) - (\nu_2 + \nu_4)/2 + 1 \\ w3 = \mathbf{posT6}_k(3) - (\nu_3 + \nu_4)/2 + 1 \end{cases}$$

$$\text{per Tetra4} \quad \begin{cases} w1 = \mathbf{posT1}_k(1) - (\nu_1 + \nu_4)/2 + 1 \\ w2 = \mathbf{posT1}_k(2) - (\nu_2 + \nu_4)/2 + 1 \\ w3 = \mathbf{posT1}_k(3) - (\nu_3 + \nu_4)/2 + 1 \end{cases}$$

$$\text{per Tetra5} \quad \begin{cases} w1 = \mathbf{posT2}_k(1) - (\nu_1 + \nu_4)/2 + 1 \\ w2 = \mathbf{posT2}_k(2) - (\nu_2 + \nu_4)/2 + 1 \\ w3 = \mathbf{posT2}_k(3) - (\nu_3 + \nu_4)/2 + 1 \end{cases}$$

$$\text{per Tetra6} \quad \begin{cases} w1 = \mathbf{posT3}_k(1) - (\nu_1 + \nu_4)/2 + 1 \\ w2 = \mathbf{posT3}_k(2) - (\nu_2 + \nu_4)/2 + 1 \\ w3 = \mathbf{posT3}_k(3) - (\nu_3 + \nu_4)/2 + 1 \end{cases}$$

dove i vettori $\mathbf{posT1}_k$, $\mathbf{posT2}_k$, $\mathbf{posT3}_k$, $\mathbf{posT4}_k$, $\mathbf{posT5}_k$, $\mathbf{posT6}_k$ contengono le posizioni dei sei tetraedri all'interno del supporto della k -esima Box spline. Il vettore $(w1, w2, w3)$ permette di localizzare in ogni Box non nulla il tetraedro da valutare.

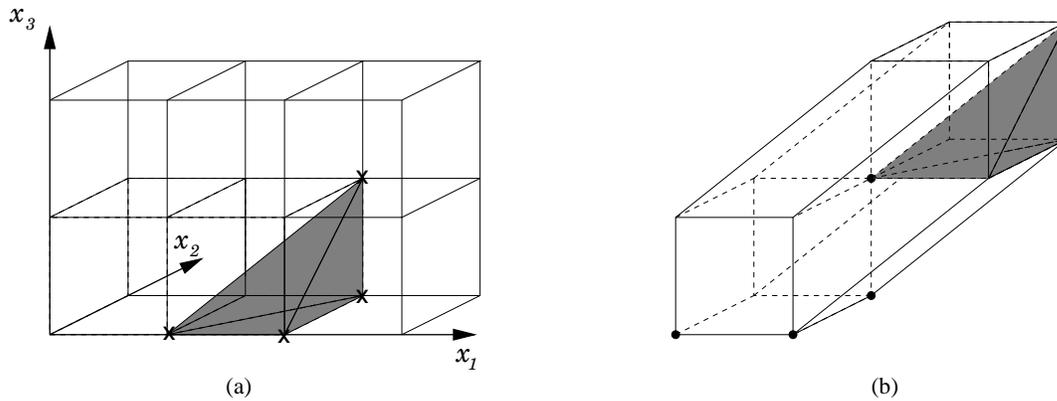


Figura 2.40: Box spline M_{1111} non nulle sul tetraedro 2 evidenziato in (a). Le crocette in (a) indicano i centri $(iT, jT, kT)_k$, $k = 1, \dots, 4$. I cerchietti in (b) indicano i vertici dei tetraedri 5 all'interno del supporto della Box spline ($\mathbf{posT5}_k$, $k = 1, \dots, 4$).

Esempio 2.5. Dato il tetraedro 2 di Fig. 2.40 calcoliamo i centri delle Box spline trivariate M_{1111} che lo contengono nel supporto. Si noti che in questo caso $numT = 4$ e i vettori $\mathbf{posT2}_k$, $k = 1, \dots, numT$ sono:

$$\begin{aligned} \mathbf{posT5}_1 &= (0, 0, 0) & \mathbf{posT5}_2 &= (1, 0, 0) \\ \mathbf{posT5}_3 &= (1, 1, 0) & \mathbf{posT5}_4 &= (1, 1, 1). \end{aligned}$$

Allora essendo $(v1, v2, v3) = (1, 0, 0)$ si ha che

$$\begin{aligned} (iT, jT, kT)_1 &= (1, 0, 0) & (iT, jT, kT)_2 &= (2, 0, 0) \\ (iT, jT, kT)_3 &= (2, 1, 0) & (iT, jT, kT)_4 &= (2, 1, 1). \end{aligned}$$

Se prendiamo in considerazione la M_{1111} con centro in $(iT, jT, kT)_1 = (1, 0, 0)$, il tetraedro 2 coincide all'interno del supporto con il tetraedro che si ottiene traslando il primo in alto sulla destra di un vettore pari a $(iT, jT, kT)_1 - (iT, jT, kT)_1 = (0, 0, 0)$.

Osservazione 17. In alcune applicazioni è utile avere uno strumento che, dati in input il reticolo di controllo, il vettore delle molteplicità delle direzioni su cui è definita la Box spline base e un punto $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$, fornisca in output il valore $V(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$. Questo è possibile individuando dapprima il cubo della partizione del dominio e in modo particolare il tipo di tetraedro contenente il punto, ricavando poi le coordinate baricentriche e applicando l'algoritmo generalizzato di de Casteljau al tetraedro di vertice $(w1, w2, w3)_k$ per ogni Box base trivariata non nulla in $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$. La somma di tutti questi contributi moltiplicati per il coefficiente corrispondente danno luogo al valore ricercato.

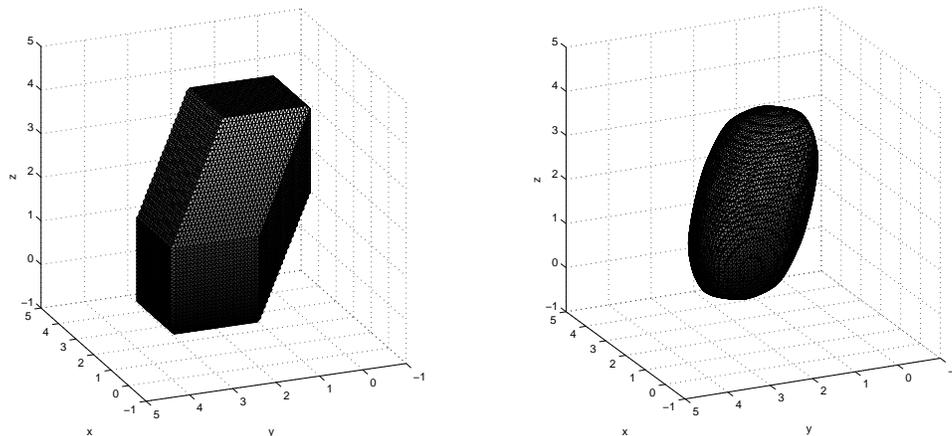


Figura 2.41: Box spline base trivariate M_{2222} . Estrazione della isosuperficie a livello 0 (sinistra), e a livello 0.005 (destra).

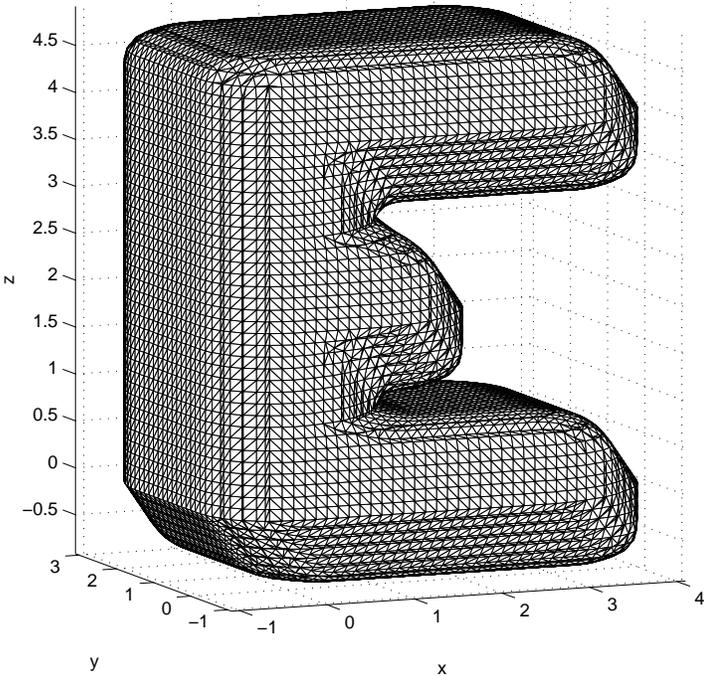


Figura 2.42: Combinazione lineare di Box spline trivariate M_{2222} .

Capitolo 3

Interpolazione con Box spline

3.1 Introduzione

Una delle ragioni per cui si è intrapreso lo studio delle funzioni Box spline come possibile strumento di modellazione e ricostruzione, è che la loro definizione su più direzioni dà l'opportunità di lavorare in modo semplice anche su regioni arbitrarie non necessariamente a forma rettangolare o di parallelepipedo, cosa non possibile se si utilizzano le classiche B-spline prodotto tensoriale. Tuttavia l'utilizzo di interpolanti Box spline non permette di separare il problema in una serie di interpolazioni univariate, come nel caso prodotto tensoriale. È stato dunque necessario studiare una nuova tecnica risolutiva, robusta ed efficiente, che si potesse adattare facilmente al caso multivariato. I lavori che esistono in letteratura si concentrano su uno studio strettamente teorico del problema di interpolazione con Box spline ([33], [19], [73]); alcuni ricercatori hanno focalizzato l'attenzione sul caso bivariato di Box spline a tre ([4], [5], [22], [23], [81]) e in parte a quattro direzioni ([44], [46]), soffermandosi sull'aspetto teorico dell'esistenza e unicità della soluzione, ma senza mai produrre una sperimentazione numerica fatta di risultati e immagini finalizzate ad avvalorare il metodo proposto e le scelte effettuate. Inoltre non esistono lavori che analizzano e mostrano il comportamento di interpolanti Box spline trivariati, ai quali siamo particolarmente interessati dato il crescente sviluppo negli ultimi anni di settori quali la modellazione solida e la ricostruzione di superfici. Lo scopo di questo capitolo è quindi quello di sperimentare le caratteristiche delle Box spline trivariate nella risoluzione di un problema di interpolazione. In questo ambito verranno proposti alcuni set di dati che mostrano bene i vantaggi e gli svantaggi che si hanno nell'utilizzare le Box spline rispetto al classico prodotto tensoriale. In particolare il primo paragrafo è dedicato alla teoria dell'interpolazione con Box spline e ai teoremi

che validano i metodi utilizzati. Inizialmente ho esplorato il caso bivariato trattando separatamente le funzioni a tre (paragrafo 3.2.1) e a quattro direzioni (paragrafo 3.3.1), mettendo in evidenza quali tipologie di set di dati è conveniente interpolare con Box spline a due (prodotto tensoriale), o a più direzioni (sezione 3.4). Analogamente ho gestito il caso trivariato soffermandomi sulla classe di Box spline a quattro direzioni vista nel capitolo precedente. Al riguardo ho confrontato le superfici ricostruite a partire da un set di dati a griglia, attraverso Box spline, B-spline tricubiche e un prodotto misto tra B-spline univariate e Box spline bivariate (sezione 3.5).

3.2 Interpolazione su \mathbb{Z}^s

Si consideri lo spazio $S(D)$ generato dalle traslazioni intere delle Box spline $M_D(\mathbf{x})$:

$$S(D) := \langle \{M_D(\mathbf{x} - \alpha) | \alpha \in \mathbb{Z}^s\} \rangle.$$

Sia $g \in S(D)$ così definita:

$$g(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^s} c_\alpha M_D(\mathbf{x} - \alpha) \quad c_\alpha \in \mathbb{R}.$$

Il problema di interpolazione cardinale (**CIP**), con dati cioè su griglia intera è definito come segue:

Definizione 3.1 (CIP). Con il vettore $\mathbf{j} = (j_1, \dots, j_s)$ si indichi la posizione dei nodi nella griglia di \mathbb{Z}^s . Assegnati i dati $f_{\mathbf{j}} : \mathbb{Z}^s \mapsto \mathbb{R}$, si trovi l'unica funzione $g(\mathbf{x}) \in S(D)$ con coefficienti $c_\alpha : \mathbb{Z}^s \mapsto \mathbb{R}$, che interpola i dati sui punti griglia, cioè

$$g(\mathbf{j}) = f_{\mathbf{j}}, \quad \mathbf{j} \in \mathbb{Z}^s.$$

Se il problema ammette un'unica soluzione si dice che è *corretto*. Una condizione necessaria per la correttezza del problema è l'iniettività della mappa:

$$\{c_\alpha\} \mapsto \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^s} c_\alpha M_D(\cdot - \alpha).$$

In altre parole siamo interessati a verificare la condizione:

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^s} c_\alpha M_D(\mathbf{x} - \alpha) = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^s \implies c_\alpha = 0 \quad \forall \alpha \in \mathbb{Z}^s. \quad (3.1)$$

Definizione 3.2. Si dice che le traslazioni intere

$$M_D(\cdot - \alpha) \quad \alpha \in \mathbb{Z}^s \quad (3.2)$$

di una Box spline $M_D(\cdot)$ sono (globalmente) linearmente indipendenti se l'implicazione (3.1) è verificata.

Si parla di lineare indipendenza locale se la (3.1) è verificata solo localmente, cioè se

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^s} c_\alpha M_D(\mathbf{x} - \alpha) = 0 \implies c_\alpha = 0$$

vale $\forall \mathbf{x} \in \Omega$ aperto di \mathbb{R}^s , $\forall \alpha$ tale che $\Omega \cap \text{supp} M_D(\cdot - \alpha) \neq \emptyset$.

Il fenomeno della lineare indipendenza è elegantemente caratterizzato dal seguente teorema.

Teorema 3.1. *Sia la matrice D costituita da vettori colonna in \mathbb{Z}^s . Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1. $|\det Z| = 1 \forall$ base $Z \subset D$ (**condizione del determinante**);
2. le traslazioni (3.2) sono globalmente linearmente indipendenti;
3. le traslazioni (3.2) sono localmente linearmente indipendenti;

Le matrici D che soddisfano la 1. sono dette *unimodulari*.

Dimostrazione. Per la dimostrazione si consulti [11]. L'implicazione 2. \Rightarrow 1. è stata dimostrata anche da de Boor e Höllig ([29, Prop. 4]), mentre 1. \Rightarrow 2. è dovuta a Jia ([45]) e Dahmen e Micchelli ([25, Teorema 4.2]). \square

Sfortunatamente la condizione del determinante limita notevolmente la possibilità di utilizzare interpolanti Box in molti casi importanti. Si pensi ad esempio alle Box spline

bivariate definite sulle quattro direzioni $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $e_3 = e_1 + e_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$,
 $e_4 = e_1 - e_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. La base costituita dai vettori e_3, e_4 è tale che

$$\left| \det \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right| = 2 \neq 1.$$

Al contrario, nel caso di Box spline bivariate a tre direzioni, la condizione del determinante risulta banalmente verificata. Infatti

$$\left| \det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = \left| \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = \left| \det \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right| = 1.$$

Per questo motivo è opportuno trattare separatamente l'interpolazione bivariata con Box spline a tre e a quattro direzioni. Come vedremo nel paragrafo 3.3, modificando opportunamente la definizione 3.1, è possibile sfruttare i risultati di alcuni teoremi per garantire l'esistenza e unicità della soluzione per il problema di interpolazione bivariata con Box spline a quattro direzioni.

3.2.1 Interpolazione con Box spline bivariate a 3 direzioni

Si consideri la Box spline bivariata a 3 direzioni $M_{\nu_1\nu_2\nu_3}(x_1, x_2)$, di grado m . Definiamo sul dominio semplicemente connesso $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, il seguente spazio di Box spline

$$S_{\nu_1\nu_2\nu_3}(\Omega) = \left\{ \sum_{(k,l) \in I(\Omega)} c_{kl} M_{\nu_1\nu_2\nu_3}(x_1 - k, x_2 - l), \quad c_{kl}, x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

con

$$I(\Omega) = I_{\nu_1\nu_2\nu_3}(\Omega) = \{(k, l) \in \mathbb{Z}^2 : M_{\nu_1\nu_2\nu_3}(x_1 - k, x_2 - l) \neq 0, \text{ per qualche } (x_1, x_2) \in \Omega\}.$$

Il numero di coppie in $I(\Omega)$ è uguale al numero di Box spline traslate il cui supporto interseca il dominio Ω .

Per mantenere la struttura di definizione della Box spline, in generale i dati da interpolare vengono definiti su una griglia intera con al più due tagli nella direzione $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ (Fig. 3.1). L'insieme Ω è cioè limitato da linee orizzontali, verticali e diagonali:

$$\Omega = \{(x_1, x_2) : a_1 \leq x_1 \leq a_2, \quad b_1 \leq x_2 \leq b_2, \quad c_1 \leq x_2 - x_1 \leq c_2\}. \quad (3.3)$$

I punti di interpolazione coincidono con i nodi della griglia intera (i, j) contenuti nel dominio Ω . Si osservi che Ω può essere in linea di principio a forma qualunque e nella pratica questo ci permette di gestire diverse situazioni interessanti.

Il problema di interpolazione con Box spline bivariate a tre direzioni diventa:

Dati i valori f_{ij} definiti nei nodi $(i, j) \in \Omega$, trovare una funzione Box spline $g(x_1, x_2) \in S_{\nu_1\nu_2\nu_3}(\Omega)$ tale che

$$g(i, j) = f_{ij} \quad \forall (i, j) \in \Omega \cap \mathbb{Z}^2. \quad (3.4)$$

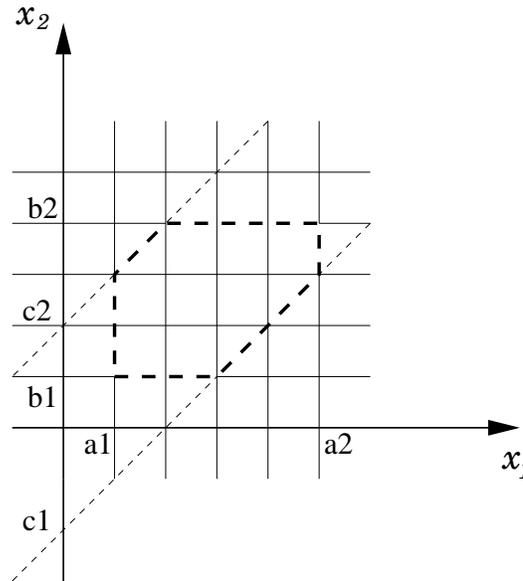


Figura 3.1: Generico dominio Ω

La condizione di interpolazione (3.4) risulta essere:

$$\sum_{(k,l) \in I(\Omega)} c_{kl} M_{\nu_1 \nu_2 \nu_3}(i-k, j-l) = f_{ij}. \quad (3.5)$$

Conoscendo i dati f_{ij} , e i valori che le Box spline traslate assumono nei punti griglia, la risoluzione del problema equivale a calcolare i coefficienti c_{kl} della combinazione lineare $g(x_1, x_2)$, come soluzione del sistema lineare derivante da (3.5).

Esempio 3.1. Caso di dominio rettangolare. Assegnati i dati f_{ij} , un interpolante lineare a tratti è così definito:

$$g_1(x_1, x_2) = \sum_{(i,j) \in I(\Omega)} f_{ij} M_{111}(x_1 - i, x_2 - j),$$

dove, senza perdere di generalità, si supponga

$$\Omega = \{(x_1, x_2) : 0 \leq x_1 \leq a, \quad 0 \leq x_2 \leq b, \quad -a \leq x_2 - x_1 \leq b\},$$

traslando il dominio, infatti, è sempre possibile riportarsi a questo caso. Assumendo che la Box spline associata al coefficiente c_{kl} sia centrata nel nodo (k, l) , la (3.5) diventa:

$$\left\{ \begin{array}{l} c_{00}M_{111}(0,0) = f_{00} \\ \vdots = \vdots \\ c_{a0}M_{111}(0,0) = f_{a0} \\ \vdots = \vdots \\ c_{0b}M_{111}(0,0) = f_{0b} \\ \vdots = \vdots \\ c_{ab}M_{111}(0,0) = f_{ab} \end{array} \right. \quad (3.6)$$

Si noti che in questo caso l'unica Box spline non nulla in un punto griglia di Ω è quella centrata nel nodo stesso. In particolare abbiamo che $M_{111}(c_D - (1, 1)) = M_{111}(0, 0) = 1$, dove c_D è espresso dalla formula (1.15). Dal sistema (3.6) si ricava banalmente

$$c_{ij} = f_{ij} \quad \forall (i, j) \in \Omega \cap \mathbb{Z}^2.$$

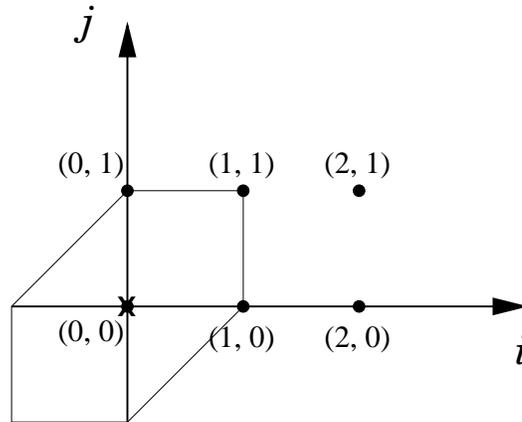


Figura 3.2: L'unica Box spline $M_{111}(x_1, x_2) \in S_{\nu_1\nu_2\nu_3}(\Omega)$ non nulla in $(0, 0)$ è quella centrata nel nodo stesso. I cerchietti indicano i nodi (i, j) , la crocetta il centro della Box spline non nulla in $(0, 0)$.

Osservazione 18. Nell'esempio 3.1 $I(\Omega)$ coincide con l'insieme dei punti di interpolazione.

In questo semplice caso non è necessario risolvere alcun sistema lineare, essendo le equazioni tra loro indipendenti; tuttavia l'interpolante generato è solamente \mathcal{C}^0 . Se si vogliono ottenere interpolanti con un grado di continuità più alto, preferibilmente \mathcal{C}^1 o \mathcal{C}^2 , il sistema di interpolazione assumerà dimensioni maggiori e subentrano nuove problematiche relative all'aggiunta di condizioni al bordo adeguate.

Esempio 3.2. Vediamo ora di risolvere il problema di interpolazione dei punti considerati nell'esempio 3.1, utilizzando la Box spline quadratica $M_{211}(x_1, x_2)$. In questo caso, per ogni nodo (i, j) ci sono più Box spline non nulle e precisamente sono quelle centrate in

$$(i - 1, j), \quad (i, j), \quad (i + 1, j).$$

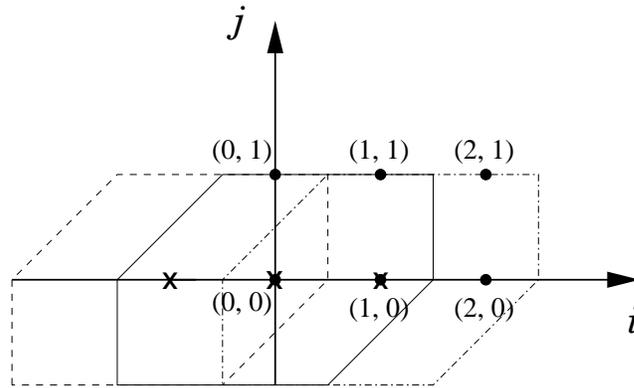


Figura 3.3: Le crocette indicano i centri delle Box spline $M_{211}(x_1, x_2) \in S_{\nu_1\nu_2\nu_3}(\Omega)$ non nulle nel nodo $(0, 0)$. Per ogni nodo (i, j) (cerchietto) sono tre le funzioni M_{211} non nulle.

Pertanto il sistema (3.5) assumerà la seguente forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} c_{-10}M_{211}(1, 0) + c_{00}M_{211}(0, 0) + c_{10}M_{211}(-1, 0) = f_{00} \\ \dots = \dots \\ c_{a-10}M_{211}(1, 0) + c_{a0}M_{211}(0, 0) + c_{a+10}M_{211}(-1, 0) = f_{a0} \\ \dots = \dots \\ \dots = \dots \\ c_{-11}M_{211}(1, 0) + c_{01}M_{211}(0, 0) + c_{11}M_{211}(-1, 0) = f_{01} \\ \dots = \dots \\ c_{a-11}M_{211}(1, 0) + c_{a1}M_{211}(0, 0) + c_{a+11}M_{211}(-1, 0) = f_{a1} \\ \dots = \dots \\ \dots = \dots \\ c_{-1b}M_{211}(1, 0) + c_{0b}M_{211}(0, 0) + c_{1b}M_{211}(-1, 0) = f_{0b} \\ \dots = \dots \\ c_{a-1b}M_{211}(1, 0) + c_{ab}M_{211}(0, 0) + c_{a+1b}M_{211}(-1, 0) = f_{ab} \end{array} \right. \quad (3.7)$$

Si osservi che contrariamente a quanto accadeva prima, il numero delle Box spline non nulle in ogni punto griglia è ora > 1 . Per questo motivo il sistema (3.7) è rettangolare

con $(a+3)(b+1)$ coefficienti incogniti e $(a+1)(b+1)$ condizioni di interpolazione. Per la risoluzione esatta del problema sono necessarie quindi delle condizioni aggiuntive (in questo esempio si tratta precisamente di $2(b+1)$ condizioni), in modo da rendere quadrato il sistema (3.7) e quindi determinare univocamente l'interpolante. La superficie Box spline risultante è definita dai coefficienti (*control points*) associati ai centri interni alla regione Ω e a quelli esterni (*phantom points*, vedi [77]) calcolabili attraverso diverse possibili tecniche. In letteratura sono state studiate differenti strategie per la gestione del bordo del dominio e a seconda del set di dati a disposizione sarà opportuno utilizzarne una piuttosto che un'altra. Aggiungendo queste condizioni, di cui parlerò più approfonditamente nel paragrafo 3.2.3, il problema di interpolazione completo diventa:

Dati i valori f_{ij} da interpolare nei nodi griglia $(i, j) \in \Omega$, determinare i coefficienti c_{kl} della funzione Box spline $g(x_1, x_2) \in S_{\nu_1\nu_2\nu_3}(\Omega)$ in modo tale che

$$g(i, j) = \sum_{(k,l) \in I(\Omega)} c_{kl} M_{\nu_1\nu_2\nu_3}(i-k, j-l) = f_{ij} \quad \forall (i, j) \in \Omega \cap \mathbb{Z}^2 \quad (3.8)$$

e risultino verificate le condizioni esterne

$$c_{kl} = \xi_{kl} \quad \forall (k, l) \in I(\Omega) \setminus \{\Omega \cap \mathbb{Z}^2\} \quad (3.9)$$

dove ξ_{kl} in generale è una combinazione lineare dei dati f_{ij} .

Tale formulazione non richiede restrizioni del dominio, si può dunque pensare che Ω sia in generale di forma qualunque. Il problema scritto in forma matriciale risulta

$$A\mathbf{c} = \mathbf{b}$$

dove A è matrice reale di dimensioni $num \times num$, $num = |I(\Omega)|$, \mathbf{c} è un vettore contenente i coefficienti c_{kl} della combinazione e \mathbf{b} è il vettore dei dati e delle condizioni esterne.

Le equazioni che hanno origine dall'imposizione delle condizioni al bordo sono combinate quindi con quelle derivanti dalle condizioni di passaggio per il punto di interpolazione per dar luogo ad un sistema lineare quadrato, risolvibile con le classiche tecniche dell'Algebra Lineare Numerica. Il condizionamento della matrice del sistema è stato studiato in alcuni casi particolari da Arge e altri in [4], dove sono stati presi in considerazione problemi di interpolazione con le Box spline a tre direzioni M_{221} e M_{222} . In questi casi è stato mostrato che la matrice del sistema di interpolazione è ben condizionata e definita positiva.

3.2.2 Costruzione del sistema di interpolazione

La tabella 3.1 riporta i valori non nulli nei nodi griglia delle Box spline M_{111} , M_{211} , M_{121} , M_{112} , M_{221} , M_{122} , M_{212} , M_{222} . I pesi w_1, w_2, w_3, w_4, w_5 posizionati come in Fig. 3.4 indicano i valori che la funzione $M_{\nu_1\nu_2\nu_3}$ centrata nei punti griglia in corrispondenza del peso, assume nel nodo (i, j) . Quindi, ad esempio, la Box spline M_{222} centrata nel nodo $(i-1, j-1)$ assume in (i, j) il valore $w_1 = \frac{1}{12}$.

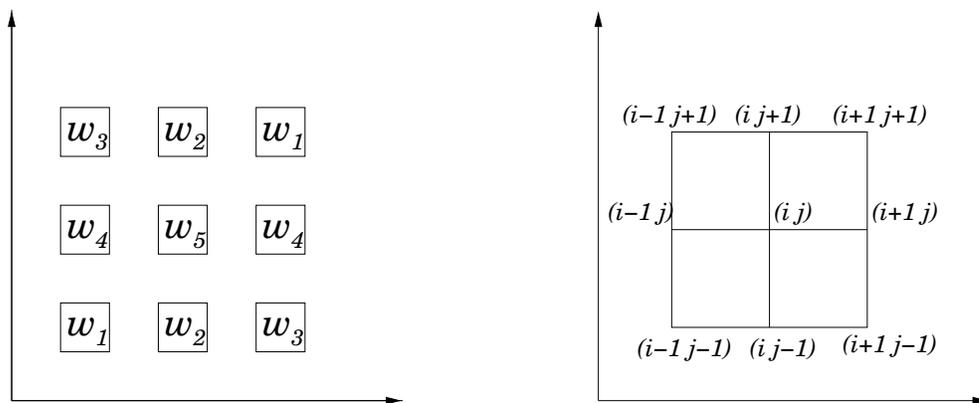


Figura 3.4: Posizione dei centri delle Box spline non nulle in (i, j) . Il peso w_i a sinistra indica il valore assunto in (i, j) dalla Box spline centrata nel nodo in corrispondenza del peso.

Box spline	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5
M_{111}	0	0	0	0	1
M_{211}	0	0	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{4}$
M_{121}	0	$\frac{1}{8}$	0	0	$\frac{3}{4}$
M_{112}	$\frac{1}{8}$	0	0	0	$\frac{3}{4}$
M_{122}	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{24}$	$\frac{7}{12}$
M_{212}	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{24}$	$\frac{7}{12}$
M_{221}	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{7}{12}$
M_{222}	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{2}$

Tabella 3.1: Valori assunti da alcune Box spline nei nodi.

I pesi w_i , $i = 1, \dots, 5$ godono delle seguenti proprietà:

1. $w_i > 0$, $\forall i = 1, \dots, 5$ (*positività* delle funzioni Box spline);

$$2. \quad 2(w_1 + w_2 + w_3 + w_4) + w_5 = 1 \quad (\text{partizione dell'unit\`a}).$$

Se $\nu_1 + \nu_3$ e $\nu_2 + \nu_3$ sono pari, i pesi coincidono con i valori del B-net ricavati precedentemente con l'algoritmo MDDS (paragrafo 2.4.1), essendo calcolati esattamente nei nodi della griglia intera. Negli altri casi abbiamo le seguenti situazioni:

1. $\nu_1 + \nu_3$ pari e $\nu_2 + \nu_3$ dispari \rightarrow Fig. 3.5-a;
2. $\nu_1 + \nu_3$ dispari e $\nu_2 + \nu_3$ pari \rightarrow Fig. 3.5-b;
3. $\nu_1 + \nu_3$ dispari e $\nu_2 + \nu_3$ dispari \rightarrow Fig. 3.5-c.

In altre parole, i pesi corrispondono alle valutazioni nei punti medi di ogni lato del patch triangolare che li contiene. Ricordando che m indica il grado della Box spline e P_{ijk}^m sono i coefficienti di Bézier del relativo patch bivariato, il valore del peso si ottiene facilmente dall'algoritmo di de Casteljau:

$$1. \quad \rightarrow \frac{1}{2^m} \sum_{s=0}^m \binom{m}{s} P_{s(m-s)0};$$

$$2. \quad \rightarrow \frac{1}{2^m} \sum_{s=0}^m \binom{m}{s} P_{0s(m-s)};$$

$$3. \quad \rightarrow \frac{1}{2^m} \sum_{s=0}^m \binom{m}{s} P_{s0(m-s)}.$$

Osserviamo ora la struttura della matrice del sistema di interpolazione. Le condizioni di interpolazione assumono la forma:

$$f_{ij} = w_1(c_{i-1j-1} + c_{i+1j+1}) + w_2(c_{ij-1} + c_{ij+1}) + w_3(c_{i-1j+1} + c_{i+1j-1}) + w_4(c_{i+1j} + c_{i-1j}) + w_5 c_{ij}. \quad (3.10)$$

Le condizioni esterne sono del tipo (3.9).

Per convenzione ordiniamo i coefficienti nel modo seguente:

$$c_{-1-1} \quad c_{0-1} \quad \cdots \quad c_{a+1-1} \quad c_{-10} \quad c_{00} \quad \cdots \quad c_{a+10} \quad \cdots \cdots \quad c_{-1b+1} \quad c_{0b+1} \quad \cdots \quad c_{a+1b+1}$$

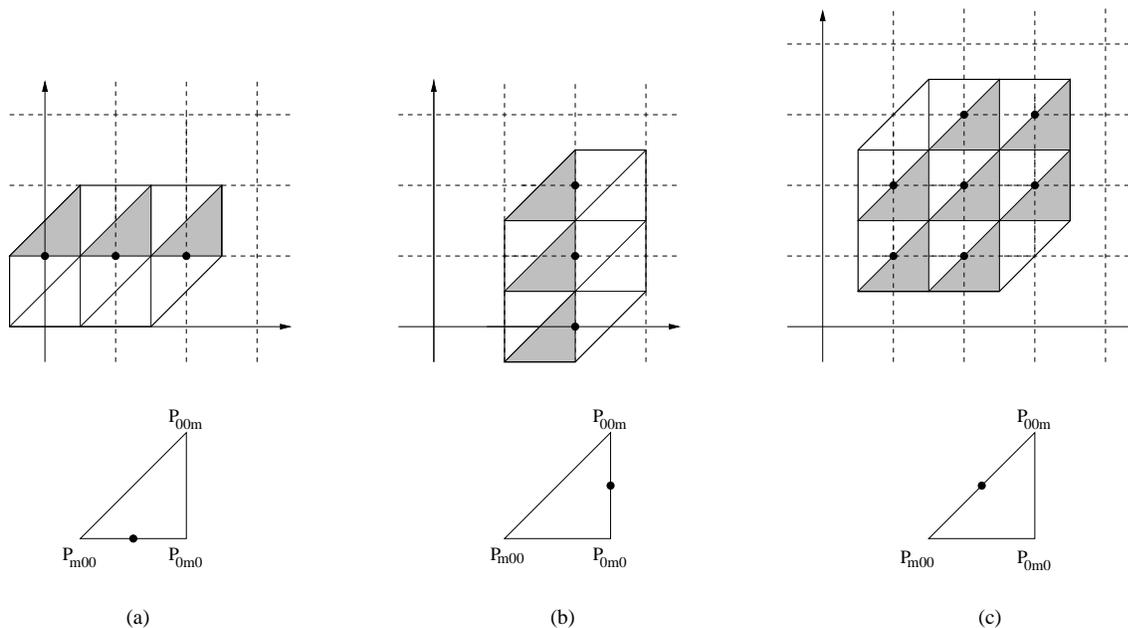


Figura 3.5: Per alcune Box spline i pesi w_i coincidono con il punto medio del patch di Bézier corrispondente.

La matrice viene dunque così costruita:

$$A = \begin{bmatrix} I_{s_1} & & & & & \\ & \dots & & & & \\ & & I_{s_2} & & & \\ & & & \dots & & \\ & & & & \dots & \\ & & & & & I_{s_{b+2}} \end{bmatrix} \tag{3.11}$$

dove

$$s_1 = 1 - c_1, \quad s_{b+2} = 1 + c_2, \quad s_2 = \dots = s_{b+1} = 2,$$

indicano l'ordine delle matrici identità che si trovano in corrispondenza dei *phantom points*. Le righe vuote di A in (3.11) vengono riempite con i coefficienti che intervengono

nelle condizioni di interpolazione (3.10).

$$A = \left[\begin{array}{c} I_{s_1} \\ w_1 \ w_2 \ w_3 \ 0 \ \cdots \ 0 \ w_4 \ w_5 \ w_4 \ 0 \ \cdots \ 0 \ w_3 \ w_2 \ w_1 \\ \vdots \\ w_1 \ w_2 \ w_3 \ 0 \ \cdots \ 0 \ w_4 \ w_5 \ w_4 \ 0 \ \cdots \ 0 \ w_3 \ w_2 \ w_1 \\ \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 \\ \hline \end{array} \\ w_1 \ w_2 \ w_3 \ 0 \ \cdots \ 0 \ w_4 \ w_5 \ w_4 \ 0 \ \cdots \ 0 \ w_3 \ w_2 \ w_1 \\ \vdots \\ w_1 \ w_2 \ w_3 \ 0 \ \cdots \ 0 \ w_4 \ w_5 \ w_4 \ 0 \ \cdots \ 0 \ w_3 \ w_2 \ w_1 \\ \vdots \\ I_{s_{b+2}} \end{array} \right] \quad (3.12)$$

La matrice A è quadrata, sparsa e in generale non simmetrica.

Si definisca la matrice **coeff** di dimensioni $num \times 2$, contenente la posizione dei coefficienti ordinati seguendo la numerazione indicata sopra. Quindi

$$\mathbf{coeff} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \\ \vdots & \vdots \\ a+1 & b+1 \end{bmatrix}.$$

Il vettore \mathbf{b} dei termini noti è costruito seguendo la regola:

per $k = 1, \dots, num$
 $i = \mathbf{coeff}(k, 1); j = \mathbf{coeff}(k, 2);$
 se $(i, j) \in \Omega$
 $\mathbf{b}(k) = f_{ij}$
 altrimenti
 $\mathbf{b}(k) = \xi_{ij}.$

Tenendo conto del valore di alcuni coefficienti ricavato dalle condizioni esterne, il sistema associato alla matrice (3.12) si riduce al seguente equivalente

$$\bar{A}\mathbf{c} = \bar{\mathbf{b}},$$

dove \bar{A} è una matrice tridiagonale a blocchi

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} B_1 & C_1^t & O & \cdots & O \\ C_1 & B_2 & C_2^t & \ddots & \vdots \\ O & C_2 & \ddots & \ddots & O \\ \vdots & \ddots & \ddots & B_{k-1} & C_{k-1}^t \\ O & \cdots & O & C_{k-1} & B_k \end{bmatrix}.$$

Nel caso più generale di domini non rettangolari del tipo (3.3), le matrici B_i sono quadrate e tridiagonali:

$$B_i = \begin{bmatrix} w_5 & w_4 & 0 & \cdots & 0 \\ w_4 & w_5 & w_4 & \ddots & \vdots \\ 0 & w_4 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & w_5 & w_4 \\ 0 & \cdots & 0 & w_4 & w_5 \end{bmatrix},$$

dove l'ordine, che in generale dipende da $i = 1, \dots, k$, coincide con il numero di punti di interpolazione contenuti in ogni riga del dominio. In particolare si ha che $k = b_2 - b_1$, pertanto l'ordine di \bar{A} è uguale al numero totale dei punti di interpolazione.

Le matrici C_i sono dunque rettangolari del tipo

$$C_i = \begin{bmatrix} w_2 & w_3 & 0 & \cdots & 0 \\ w_1 & w_2 & w_3 & \ddots & \vdots \\ 0 & w_1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & w_3 \\ \vdots & \ddots & \ddots & w_1 & w_2 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & w_1 \end{bmatrix}, \text{ oppure } C_i = \begin{bmatrix} w_1 & w_2 & w_3 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & w_1 & w_2 & w_3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & w_1 & w_2 & w_3 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & w_1 & w_2 \end{bmatrix}.$$

Nel caso in cui il dominio è rettangolare le matrici B_i e C_i sono tutte tridiagonali dello stesso ordine $a_2 - a_1$. Questa particolare situazione è stata studiata da Arge e altri in [4], dove viene fornita una dimostrazione della positività della matrice del sistema per Box spline M_{222} . Per le altre funzioni considerate nella tabella 3.1, si può osservare che la matrice è a diagonale dominante in senso stretto a prescindere dal dominio Ω e dunque non singolare. Si è verificato che la matrice \bar{A} è sempre fortemente strutturata (Fig. 3.6); nonostante questo non è stata dimostrata, in generale, la non singolarità, problema che va affrontato caso per caso, a seconda del dominio dei dati, delle condizioni aggiuntive e del tipo di Box spline base adottato. Tra le molteplici prove effettuate non è mai stato individuato un caso in cui la matrice del sistema fosse singolare. Questo ci porta a pensare che gli eventuali casi in cui il problema di interpolazione possa non ammettere una sola soluzione, sono piuttosto ricercati e particolari da non rientrare nei casi di interesse applicativo.

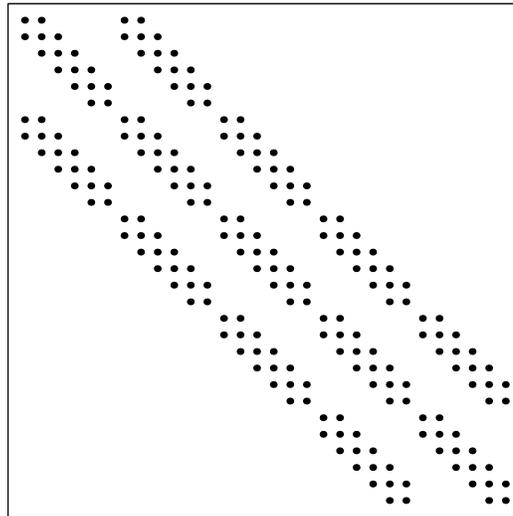


Figura 3.6: Struttura della matrice \bar{A} .

3.2.3 Condizioni esterne aggiuntive

Come già osservato, affinché nel sistema di interpolazione il numero di incognite sia uguale al numero di equazioni, è necessario aggiungere delle condizioni sui coefficienti delle Box spline esterni ad Ω . Esistono diverse strategie per definire tali condizioni esterne. In fase di sperimentazione sono state adottate principalmente tre tecniche. Una possibile scelta è quella di uguagliare i coefficienti esterni ai valori f_{ij} del bordo di Ω . In particolare abbiamo:

• **Condizioni esterne costanti**

1. a) $c_{i-1} = f_{i0} \quad i = 0, \dots, a$
 b) $c_{ib+1} = f_{ib} \quad i = 0, \dots, a$
2. a) $c_{-1j} = f_{0j} \quad j = 0, \dots, b$
 b) $c_{a+1j} = f_{0j} \quad j = 0, \dots, b$
3. $c_{-1-1} = f_{00}$
4. $c_{a+1b+1} = f_{ab}$

In alternativa si possono utilizzare le condizioni esterne lineari, dove si impone che il coefficiente esterno appartenga alla retta perpendicolare al bordo passante per i due dati f_{ij} più vicini. In particolare si hanno le seguenti:

• **Condizioni esterne lineari**

1. a) $c_{i-1} = 2f_{i0} - f_{i1} \quad i = 0, \dots, a$
 b) $c_{ib+1} = 2f_{ib} - f_{ib-1} \quad i = 0, \dots, a$
2. a) $c_{-1j} = 2f_{0j} - f_{1j} \quad j = 0, \dots, b$
 b) $c_{a+1j} = 2f_{aj} - f_{a-1j} \quad j = 0, \dots, b$
3. $c_{-1-1} = 2f_{00} - f_{11}$
4. $c_{a+1b+1} = 2f_{ab} - f_{a-1b-1}$

A seconda delle molteplicità ν_1, ν_2, ν_3 della Box spline base interpolante solo alcune delle condizioni esterne esposte sopra sono da utilizzare. La tabella 3.2 indica quali in particolare si devono considerare nei vari casi. Si osservi che con queste condizioni la matrice del sistema A (3.12) rimane invariata; ciò che cambia è il vettore \mathbf{b} dei termini noti. Dunque il sistema mantiene le stesse caratteristiche viste precedentemente.

Esempio 3.3. Si considerino i punti di interpolazione su griglia intera rappresentati in Fig. 3.7.

Mostriamo con questo esempio come viene costruito il sistema lineare a partire dalle condizioni di interpolazione e condizioni aggiuntive, in un caso di dominio non rettangolare. Si noti che non è limitativo considerare domini non convessi. Sfruttiamo, ad esempio, Box spline interpolanti M_{222} e condizioni esterne costanti.

Indicando con A, B, \dots , i coefficienti delle Box spline contenuti nel dominio di interpolazione, con a, b, \dots , i coefficienti esterni e con f_A, f_B, \dots , le osservazioni in

BOX SPLINE	CONDIZIONI ESTERNE
M_{211}	2.
M_{121}	1.
M_{112}	1.a) ($i = 0, \dots, a - 1$) 1.b) ($i = 1, \dots, a$) 2.a) ($j = 0, \dots, b - 1$) 2.b) ($j = 1, \dots, b$) 3. 4.
M_{221}	1. 2. 3. 4.
M_{212}	1. 2. 3. 4.
M_{122}	1. 2. 3. 4.
M_{222}	1. 2. 3. 4.

Tabella 3.2: Condizioni esterne per alcune Box spline bivariate a tre direzioni.

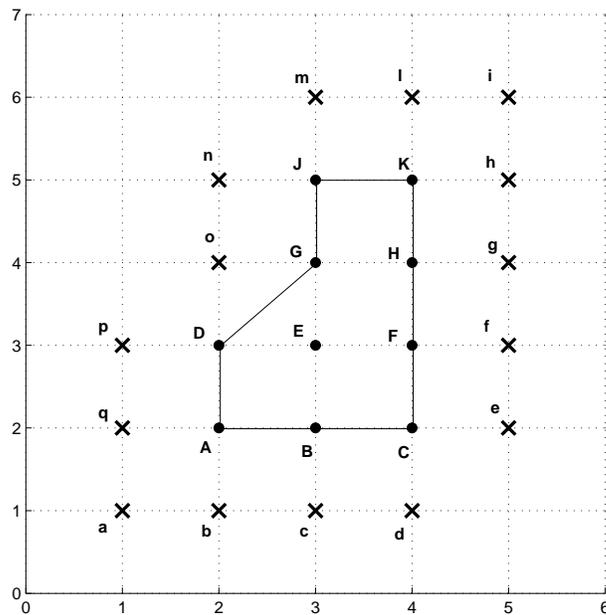


Figura 3.7: Centri delle Box spline non nulle sul dominio riferito all'esempio 3.3.

corrisponenza dei punti di interpolazione (cerchietti). Le condizioni di interpolazione e quelle aggiuntive portano alla formazione del seguente sistema lineare:

$$\left\{ \begin{array}{l}
 a = f_A \\
 b = f_A \\
 c = f_B \\
 d = f_C \\
 q = f_A \\
 \frac{1}{12}a + \frac{1}{12}b + \frac{1}{12}q + \frac{1}{2}A + \frac{1}{12}B + \frac{1}{12}D + \frac{1}{12}E = f_A \\
 \frac{1}{12}b + \frac{1}{12}c + \frac{1}{12}A + \frac{1}{2}B + \frac{1}{12}C + \frac{1}{12}E + \frac{1}{12}F = f_B \\
 \frac{1}{12}c + \frac{1}{12}d + \frac{1}{12}B + \frac{1}{2}C + \frac{1}{12}e + \frac{1}{12}F + \frac{1}{12}f = f_C \\
 e = f_C \\
 p = f_D \\
 \frac{1}{12}q + \frac{1}{12}A + \frac{1}{12}p + \frac{1}{2}D + \frac{1}{12}E + \frac{1}{12}o + \frac{1}{12}G = f_D \\
 \frac{1}{12}A + \frac{1}{12}B + \frac{1}{12}D + \frac{1}{2}E + \frac{1}{12}F + \frac{1}{12}G + \frac{1}{12}H = f_E \\
 \frac{1}{12}B + \frac{1}{12}C + \frac{1}{12}E + \frac{1}{2}F + \frac{1}{12}f + \frac{1}{12}H + \frac{1}{12}g = f_F \\
 f = f_F \\
 o = f_G \\
 \frac{1}{12}D + \frac{1}{12}E + \frac{1}{12}o + \frac{1}{2}G + \frac{1}{12}H + \frac{1}{12}J + \frac{1}{12}K = f_G \\
 \frac{1}{12}E + \frac{1}{12}F + \frac{1}{12}G + \frac{1}{2}H + \frac{1}{12}f + \frac{1}{12}K + \frac{1}{12}h = f_H \\
 g = f_H \\
 n = f_G \\
 \frac{1}{12}o + \frac{1}{12}G + \frac{1}{12}n + \frac{1}{2}J + \frac{1}{12}K + \frac{1}{12}m + \frac{1}{12}l = f_J \\
 \frac{1}{12}G + \frac{1}{12}H + \frac{1}{12}J + \frac{1}{2}K + \frac{1}{12}h + \frac{1}{12}l + \frac{1}{12}i = f_K \\
 h = f_K \\
 m = f_J \\
 l = f_K \\
 i = f_K
 \end{array} \right.$$

da cui:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2}A + \frac{1}{12}B + \frac{1}{12}D + \frac{1}{12}E = f_A - \frac{1}{12}f_A - \frac{1}{12}f_A - \frac{1}{12}f_A \\ \frac{1}{12}A + \frac{1}{2}B + \frac{1}{12}C + \frac{1}{12}E + \frac{1}{12}F = f_B - \frac{1}{12}f_A - \frac{1}{12}f_B \\ \frac{1}{12}B + \frac{1}{2}C + \frac{1}{12}F = f_C - \frac{1}{12}f_B - \frac{1}{12}f_C - \frac{1}{12}f_C - \frac{1}{12}f_F \\ \frac{1}{12}A + \frac{1}{2}D + \frac{1}{12}E + \frac{1}{12}G = f_D - \frac{1}{12}f_A - \frac{1}{12}f_D - \frac{1}{12}f_G \\ \frac{1}{12}A + \frac{1}{12}B + \frac{1}{12}D + \frac{1}{2}E + \frac{1}{12}F + \frac{1}{12}G + \frac{1}{12}H = f_E \\ \frac{1}{12}B + \frac{1}{12}C + \frac{1}{12}E + \frac{1}{2}F + \frac{1}{12}H = f_F - \frac{1}{12}f_F - \frac{1}{12}f_H \\ \frac{1}{12}D + \frac{1}{12}E + \frac{1}{2}G + \frac{1}{12}H + \frac{1}{12}J + \frac{1}{12}K = f_G - \frac{1}{12}f_G \\ \frac{1}{12}E + \frac{1}{12}F + \frac{1}{12}G + \frac{1}{2}H + \frac{1}{12}K = f_H - \frac{1}{12}f_F - \frac{1}{12}f_K \\ \frac{1}{12}G + \frac{1}{2}J + \frac{1}{12}K = f_J - \frac{1}{12}f_G - \frac{1}{12}f_G - \frac{1}{12}f_J - \frac{1}{12}f_K \\ \frac{1}{12}G + \frac{1}{12}H + \frac{1}{12}J + \frac{1}{2}K = f_K - \frac{1}{12}f_K - \frac{1}{12}f_K - \frac{1}{12}f_K \end{array} \right.$$

Il sistema in forma matriciale diventa

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{12} & 0 & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{2} & \frac{1}{12} & 0 & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{12} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{12} & 0 & \frac{1}{12} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & 0 & \frac{1}{12} & \frac{1}{2} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & 0 & \frac{1}{12} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{12} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \\ G \\ H \\ J \\ K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4}f_A \\ \frac{11}{12}f_B - \frac{1}{12}f_A \\ \frac{10}{12}f_C - \frac{1}{12}f_B - \frac{1}{12}f_F \\ \frac{11}{12}f_D - \frac{1}{12}f_A - \frac{1}{12}f_G \\ f_E \\ \frac{11}{12}f_F - \frac{1}{12}f_H \\ \frac{11}{12}f_G \\ f_H - \frac{1}{12}f_F - \frac{1}{12}f_K \\ \frac{11}{12}f_J - \frac{1}{6}f_G - \frac{1}{12}f_K \\ \frac{3}{4}f_K \end{bmatrix}.$$

La soluzione del problema di interpolazione esiste ed è unica, essendo la matrice del sistema non singolare. Nel caso di condizioni aggiuntive lineari, la matrice non viene

modificata, mentre il vettore dei termini noti diventa:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2}f_A + \frac{1}{12}f_E + \frac{1}{12}f_D + \frac{1}{2}f_B \\ \frac{5}{6}f_B - \frac{1}{6}f_A + \frac{1}{12}f_D + \frac{1}{12}f_E \\ \frac{5}{6}f_C + \frac{1}{6}f_E - \frac{1}{12}f_F - \frac{1}{6}f_B \\ \frac{5}{6}f_D - \frac{1}{6}f_A + \frac{1}{12}f_B + \frac{1}{12}f_E - \frac{1}{6}f_G + \frac{1}{12}f_H \\ f_E \\ \frac{5}{6}f_F - \frac{1}{6}f_H + \frac{1}{12}f_E + \frac{1}{12}f_G \\ \frac{5}{6}f_G + \frac{1}{12}f_H \\ f_H - \frac{1}{6}f_F - \frac{1}{6}f_K + \frac{1}{12}f_E + \frac{1}{12}f_J \\ \frac{2}{3}f_J - \frac{1}{12}f_G + \frac{1}{6}f_H - \frac{1}{12}f_K \\ \frac{1}{2}f_K + \frac{1}{12}f_G + \frac{1}{12}f_H + \frac{1}{12}f_J \end{bmatrix}.$$

- **Condizioni esterne tipo *not a knot*** (solo nel caso $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = 2$)

In alcuni casi, adottando le strategie precedenti, la superficie generata assume ondulazioni non volute in prossimità del bordo (vedi Fig. 3.8). Per questo motivo si è pensato di applicare una tecnica simile alla ben nota *not a knot* del caso cubico univariato, già analizzata da Sabin in [77], che impone la continuità della derivata terza attraverso il lato del bordo.

Nell'interpolazione con B-spline cubiche la condizione al contorno consiste nell'imporre la continuità della derivata terza nel secondo e penultimo nodo (si ricordi che una B-spline di grado 3 è \mathcal{C}^2), cosicchè i due intervallini iniziale e finale siano parte dello stesso tratto cubico. La stessa idea applicata al caso bivariato utilizza i coefficienti di Bézier della Box spline di grado 4 M_{222} , della sua derivata prima, seconda e terza. Si noti che l'unica Box spline a tre direzioni di classe \mathcal{C}^2 ovunque è appunto la funzione M_{222} . Dato il suo B-net, i coefficienti della derivata lungo una direzione si ricavano applicando la formula (2.9) ad ogni triangolino del supporto (Fig. 3.9). Poichè si richiede che la derivata terza lungo la direzione perpendicolare al bordo calcolata nelle due fasce più esterne del dominio sia la stessa, ossia che la loro differenza sia nulla, applichiamo ai coefficienti corrispondenti la maschera di Fig. 3.10, ottenuta sottraendo i coefficienti relativi alla derivata terza, dei triangoli adiacenti lungo la direzione parallela al bordo. Essendo la Box spline M_{222} simmetrica rispetto al suo centro, ragionando allo stesso modo sugli altri bordi si genera la stessa maschera. Per i dettagli si confronti [77].

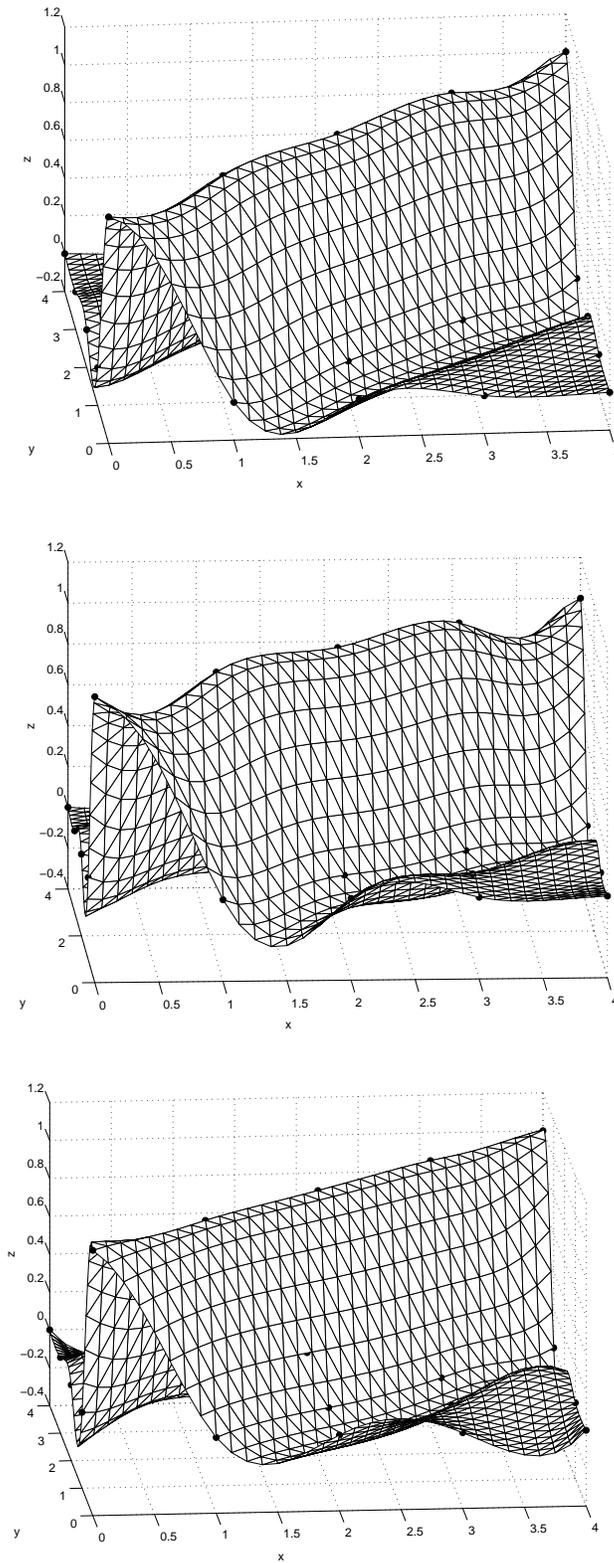


Figura 3.8: Interpolazione con Box spline M_{222} utilizzando diverse condizioni esterne: costanti (in alto), lineari (al centro), tipo *not a knot* (in basso).

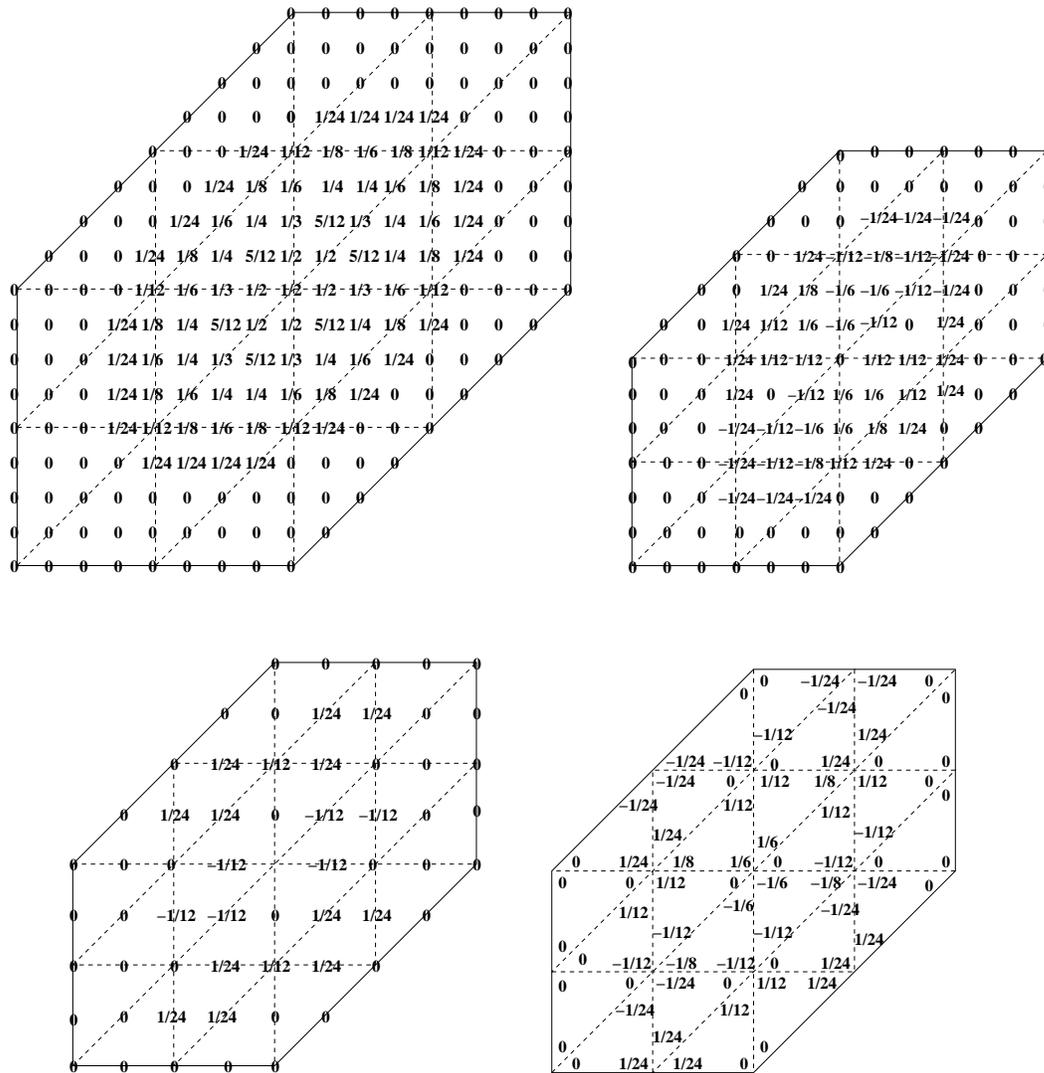


Figura 3.9: In alto: a sinistra, B-net della Box spline M_{222} ; a destra, B-net della derivata prima lungo la direzione e_2 ; in basso: sinistra, derivata seconda; destra, derivata terza.

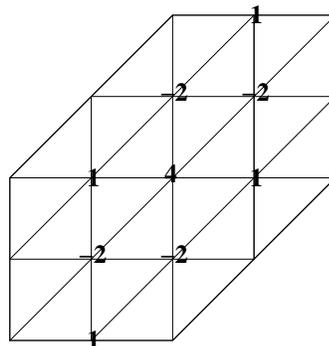


Figura 3.10: Maschera da applicare ai coefficienti c_{kl} , $(k, l) \in I(\Omega)$.

I coefficienti situati negli angoli dell'insieme $I(\Omega)$, essendo determinati dall'incontro di due diverse direzioni, sono gestiti a parte. In questo caso si applica la maschera precedentemente calcolata in entrambe le direzioni, ricavando dalla combinazione delle due equazioni ottenute, una terza che determina il coefficiente ricercato in funzione degli altri noti. La maschera in questo caso è:

$$\begin{array}{cccc}
 & & & -2 \\
 & & 4 & 1 \\
 -2 & & 2 & \\
 & & -8 & -2 \\
 6 & & 4 & \\
 * & & -2 &
 \end{array}$$

Esempio 3.4. Si consideri l'insieme dei punti di interpolazione di Fig. 3.11. Il valore di tali punti è indicato con le lettere f_A, f_B, \dots . Le lettere maiuscole A, B, \dots denotano i coefficienti delle Box spline della combinazione, calcolati imponendo le condizioni di interpolazione, mentre quelle minuscole a, b, \dots sono relative ai coefficienti derivanti dalle condizioni esterne.

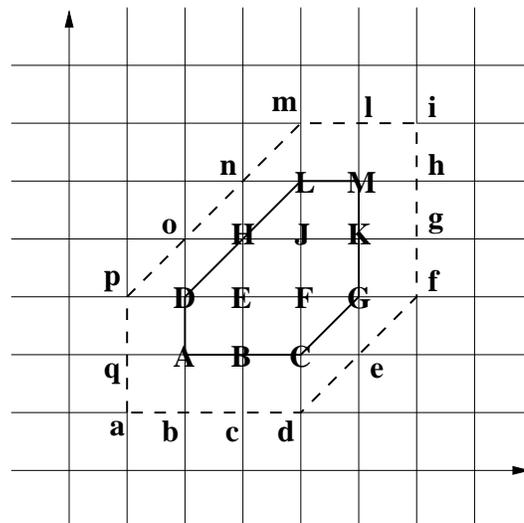


Figura 3.11: Centri delle Box spline M_{222} non nulle sul dominio evidenziato dal tratto continuo.

Condizioni di interpolazione:

$$\begin{aligned}
A \longrightarrow f_A &= \frac{1}{12}a + \frac{1}{12}b + \frac{1}{12}q + \frac{1}{2}A + \frac{1}{12}B + \frac{1}{12}D + \frac{1}{12}E \\
B \longrightarrow f_B &= \frac{1}{12}b + \frac{1}{12}c + \frac{1}{12}A + \frac{1}{2}B + \frac{1}{12}C + \frac{1}{12}E + \frac{1}{12}F \\
C \longrightarrow f_C &= \frac{1}{12}c + \frac{1}{12}d + \frac{1}{12}B + \frac{1}{2}C + \frac{1}{12}e + \frac{1}{12}F + \frac{1}{12}G \\
D \longrightarrow f_D &= \frac{1}{12}q + \frac{1}{12}A + \frac{1}{12}p + \frac{1}{2}D + \frac{1}{12}E + \frac{1}{12}o + \frac{1}{12}H \\
E \longrightarrow f_E &= \frac{1}{12}A + \frac{1}{12}B + \frac{1}{12}D + \frac{1}{2}E + \frac{1}{12}F + \frac{1}{12}H + \frac{1}{12}J \\
F \longrightarrow f_F &= \frac{1}{12}B + \frac{1}{12}C + \frac{1}{12}E + \frac{1}{2}F + \frac{1}{12}G + \frac{1}{12}J + \frac{1}{12}K \\
G \longrightarrow f_G &= \frac{1}{12}C + \frac{1}{12}e + \frac{1}{12}F + \frac{1}{2}G + \frac{1}{12}f + \frac{1}{12}K + \frac{1}{12}g \\
H \longrightarrow f_H &= \frac{1}{12}D + \frac{1}{12}E + \frac{1}{12}o + \frac{1}{2}H + \frac{1}{12}J + \frac{1}{12}n + \frac{1}{12}L \\
J \longrightarrow f_J &= \frac{1}{12}E + \frac{1}{12}F + \frac{1}{12}H + \frac{1}{2}J + \frac{1}{12}K + \frac{1}{12}L + \frac{1}{12}M \\
K \longrightarrow f_K &= \frac{1}{12}F + \frac{1}{12}G + \frac{1}{12}J + \frac{1}{2}K + \frac{1}{12}g + \frac{1}{12}M + \frac{1}{12}h \\
L \longrightarrow f_L &= \frac{1}{12}H + \frac{1}{12}J + \frac{1}{12}n + \frac{1}{2}L + \frac{1}{12}M + \frac{1}{12}m + \frac{1}{12}l \\
M \longrightarrow f_M &= \frac{1}{12}J + \frac{1}{12}K + \frac{1}{12}L + \frac{1}{2}M + \frac{1}{12}h + \frac{1}{12}l + \frac{1}{12}i
\end{aligned}$$

Condizioni al bordo:

$$\begin{aligned}
b \longrightarrow b + D + F + L + 4E &= 2A + 2B + 2H + 2J \\
c \longrightarrow c + E + M + G + 4F &= 2B + 2C + 2J + 2K \\
e \longrightarrow e + B + H + K + 4F &= 2E + 2C + 2G + 2J \\
g \longrightarrow g + J + C + A + 4F &= 2K + 2G + 2B + 2E \\
h \longrightarrow h + F + D + L + 4J &= 2M + 2K + 2H + 2E \\
l \longrightarrow l + K + H + B + 4J &= 2L + 2M + 2E + 2F \\
n \longrightarrow n + E + M + G + 4J &= 2L + 2H + 2F + 2K \\
o \longrightarrow o + A + C + J + 4E &= 2D + 2H + 2B + 2F \\
q \longrightarrow q + H + B + K + 4E &= 2D + 2A + 2F + 2J
\end{aligned}$$

3.3 Interpolazione definita su sottomoduli

Come già osservato nel paragrafo precedente, le Box spline a quattro direzioni non soddisfano la condizione del determinante e quindi le loro traslazioni intere non sono globalmente linearmente indipendenti. In letteratura è stata sviluppata una vera e propria teoria a riguardo. In particolare, l'idea utilizzata da Jetter e Riemenschneider in [44] consiste nel sostituire la griglia intera di \mathbb{Z}^2 con una sottogriglia determinata dal sottomodulo \mathcal{F} nella definizione sia dello spazio che dei punti di interpolazione.

Sia $M_D(\mathbf{x})$ una Box spline associata alla matrice D di dimensioni $s \times n$.

Si consideri il sottomodulo di \mathbb{Z}^s , $\mathcal{F} = F\mathbb{Z}^s \subseteq \mathbb{Z}^s$, dove F è una matrice quadrata di ordine s invertibile. Sia $S_{\mathcal{F}}(D)$ lo spazio generato dalle traslazioni di $M_D(\mathbf{x})$ sul sottomodulo \mathcal{F} :

$$S_{\mathcal{F}}(D) = \langle \{M_D(\cdot - \phi), \quad \phi \in \mathcal{F}\} \rangle.$$

Il problema di interpolazione cardinale per M_D su \mathcal{F} (**CIP** $_{\mathcal{F}}$) può essere così formulato:

Definizione 3.3 (CIP $_{\mathcal{F}}$). Si indichi con il vettore $\mathbf{j} = (j_1, \dots, j_s)$ la posizione dei nodi nella griglia definita dal sottomodulo

$$\mathcal{F} = \{(j_1, \dots, j_s) = F(i_1, \dots, i_s)^t, \text{ con } (i_1, \dots, i_s) \in \mathbb{Z}^s\}.$$

Assegnati i dati $f_{\mathbf{j}} : \mathcal{F} \mapsto \mathbb{R}$, si trovi l'unica funzione $g_{\mathcal{F}}(\mathbf{x}) \in S_{\mathcal{F}}(D)$, con coefficienti $c_{\phi} : \mathcal{F} \mapsto \mathbb{R}$,

$$g_{\mathcal{F}}(\mathbf{x}) = \sum_{\phi \in \mathcal{F}} c_{\phi} M_D(\mathbf{x} - \phi),$$

che interpola i dati sui punti griglia del sottomodulo, cioè

$$g(\mathbf{j}) = f_{\mathbf{j}}, \quad \mathbf{j} \in \mathcal{F}.$$

Una condizione necessaria per l'esistenza e unicità della soluzione è l'iniettività della mappa:

$$\{c_{\phi}\}_{\phi \in \mathcal{F}} \mapsto \sum_{\phi \in \mathcal{F}} c_{\phi} M_D(\cdot - \phi). \quad (3.13)$$

È ovvio che l'iniettività di (3.13) per un sottomodulo \mathcal{F} di \mathbb{Z}^s implica l'iniettività per un qualsiasi sottomodulo \mathcal{F}' di \mathcal{F} . Inoltre se \mathcal{F}' è definito in modo tale che i supporti delle Box spline traslate sono disgiunti, si ha che per una fissata $M_D(\mathbf{x})$ la risoluzione del problema di interpolazione su $\mathcal{F} \subset \mathbb{Z}^s$ implica quella su $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$. In particolare Jetter e Riemenschneider ([44]) hanno dimostrato il seguente teorema.

Teorema 3.2. *Se il problema **CIP** è corretto per M_D , allora, dato il sottomodulo \mathcal{F} generato da una qualsiasi trasformazione invertibile F , anche **CIP** $_{\mathcal{F}}$ è corretto per M_D .*

Dimostrazione. Per i dettagli della dimostrazione si consulti [44]. \square

Nel caso in cui le direzioni della matrice D sono contenute in \mathcal{F} , dimostrare l'iniettività della mappa (3.13) è equivalente a verificare la seguente condizione.

Proposizione 3.3.1 (Forma generale della condizione del determinante). *Se le direzioni della matrice sono contenute nel sottomodulo \mathcal{F} , si ha che il problema **CIP** $_{\mathcal{F}}$ è corretto solo se $|\det Z| = |\det F|$ per ogni base Z contenuta in D .*

Negli altri casi si dimostra la seguente proposizione.

Proposizione 3.3.2. *Sia $M_D(\mathbf{x})$ una Box spline associata alla matrice $D \subseteq \mathbb{Z}^s$ contenente una base Z per il sottomodulo \mathcal{F} di \mathbb{Z}^s . Se per ogni $\xi \in Z$ la mappa (3.13) è iniettiva per $M_{D \setminus \{\xi\}}$ su \mathcal{F} , allora lo è anche per M_D su \mathcal{F} .*

Dimostrazione. Sia $0 \equiv \sum_{\phi \in \mathcal{F}} c_{\phi} M_D(\mathbf{x} - \phi)$, e sia D_{ξ} la derivata lungo la direzione $\xi \in Z$. Allora

$$0 = D_{\xi} \left(\sum_{\phi \in \mathcal{F}} c_{\phi} M_D(\mathbf{x} - \phi) \right) = \sum_{\phi \in \mathcal{F}} (c_{\phi} - c_{\phi - \xi}) M_{D \setminus \xi}(\mathbf{x} + \xi - \phi).$$

Ne segue che $c_{\phi} = c_{\phi - \xi}$, per ogni $\phi \in \mathcal{F}$ e ogni $\xi \in Z$. Questo implica $c_{\phi} = c_0, \forall \phi \in \mathcal{F}$. Di conseguenza

$$0 = \sum_{\phi \in \mathcal{F}} c_{\phi} M_D(\mathbf{x} - \phi) = c_0 \sum_{\phi \in \mathcal{F}} M_D(\mathbf{x} - \phi) = c_0 / |\det Z|,$$

e quindi $c_{\phi} = 0, \forall \phi \in \mathcal{F}$. \square

Corollario 3.3.3. *Sia D come in (2.15) la matrice delle direzioni di una Box spline bivariata. Sia $\mathcal{F} = \{(k, l) : k+l \text{ pari}\} \subset \mathbb{Z}^2$ un sottomodulo di \mathbb{Z}^2 . Pertanto $\mathcal{F} = F\mathbb{Z}^2$ dove*

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

è una matrice non singolare generatrice del sottomodulo. Se $\langle D \rangle = \mathbb{R}^2$, la mappa (3.13) è iniettiva su \mathcal{F} per M_D .

Dimostrazione. - se $\nu_4 = 0$ oppure $\nu_4 \neq 0, \nu_3 = 0$, la condizione del determinante è verificata;

- se $\nu_3 = \nu_4 = 1$ e $\nu_1 = \nu_2 = 0$ la forma generale della condizione del determinante ci permette di giungere al risultato;
- negli altri casi la dimostrazione si completa per induzione su $\nu_3 + \nu_4$ utilizzando la proposizione 3.3.2 con la base $Z = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$.

□

Un altro risultato dimostrato in [44] ci assicura l'esistenza e unicità della soluzione del problema di interpolazione bivariata con Box spline a quattro direzioni.

Teorema 3.3. *Per $\mathcal{F} = \{(k, l) : k + l \text{ pari}\}$, il problema $CIP_{\mathcal{F}}$ è corretto per Box spline associate alla matrice delle direzioni (2.15).*

Dimostrazione. Per la dimostrazione si consulti [44].

□

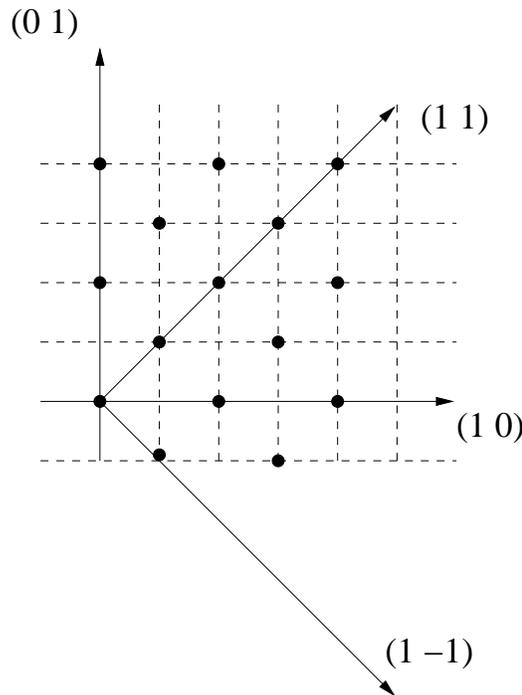


Figura 3.12: Nodi della griglia definita dal sottomodulo \mathcal{F} generato dalla matrice 3.14.

3.3.1 Interpolazione con Box spline bivariata a 4 direzioni

Sia $M_{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}(x_1, x_2)$ una Box spline bivariata di grado m definita sulle quattro direzioni di (2.14). Si consideri il sottomodulo $\mathcal{F} = F\mathbb{Z}^2$ generato dalla matrice (3.14) e un

dominio del tipo

$$\Omega = \{(x_1, x_2) : a1 \leq x_1 \leq a2, \quad b1 \leq x_2 \leq b2, \quad c1 \leq x_2 - x_1 \leq c2, \quad d1 \leq x_2 + x_1 \leq d2\}.$$

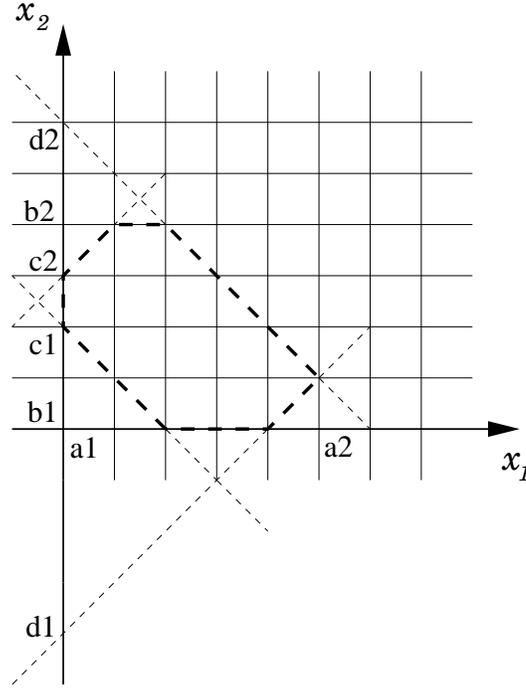


Figura 3.13: Generale dominio Ω .

Lo spazio di Box spline definito su Ω è

$$S_{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4}^{\mathcal{F}}(\Omega) = \left\{ \sum_{(k,l) \in I_{\mathcal{F}}(\Omega)} c_{kl} M_{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4}(x_1 - k, x_2 - l), \quad c_{kl}, x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

con

$$I_{\mathcal{F}}(\Omega) = I_{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4}(\Omega) = \{(k, l) \in \mathcal{F} : M_{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4}(x_1 - k, x_2 - l) \neq 0, \text{ per qualche } x_1, x_2 \in \Omega\}.$$

Il problema di interpolazione anche in questo caso viene così formalizzato:

Dati i valori f_{ij} nei nodi (i, j) del sottomodulo \mathcal{F} contenuti in Ω , trovare una funzione Box spline interpolante $g(x_1, x_2) \in S_{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4}^{\mathcal{F}}(\Omega)$ tale che

$$g(i, j) = f_{ij}, \quad \forall (i, j) \in \Omega \cap \mathcal{F}.$$

In pratica ciò significa determinare i coefficienti della combinazione

$$\sum_{(k,l) \in I_{\mathcal{F}}(\Omega)} c_{kl} M_{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4}(i - k, j - l) = f_{ij}, \quad (3.15)$$

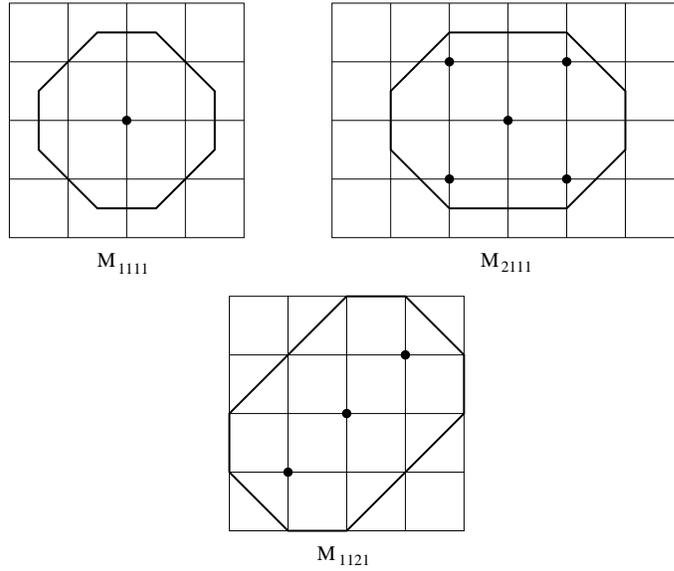


Figura 3.14: Nodi del sottomodulo \mathcal{F} contenuti nel supporto di alcune Box spline bivariate a quattro direzioni.

risolvendo il sistema lineare corrispondente.

La cardinalità dell'insieme $I_{\mathcal{F}}(\Omega)$ coincide con il numero di Box spline \mathcal{F} -traslate non nulle nei nodi (i, j) . In particolare per ogni nodo (i, j) il numero di elementi dell'insieme $\{(k, l) \in \mathcal{F} : M_{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}(i - k, j - l) \neq 0\}$ è uguale al numero di nodi del sottomodulo contenuti nel supporto della Box spline base (vedi Fig. 3.14). Si osservi che per la particolare struttura, esiste un solo elemento ZP non nullo in (i, j) ed è quello centrato nel punto di interpolazione. Il sistema in questo caso si risolve banalmente. Per ottenere interpolanti di grado maggiore, essendo il numero delle equazioni in (3.15) minore del numero dei coefficienti da calcolare, è necessario introdurre le condizioni al bordo in modo analogo a quanto visto per le Box a tre direzioni. In particolare si sono utilizzate condizioni aggiuntive costanti, illustrate, nel caso particolare di domini rettangolari, in Fig. 3.15.

Esempio 3.5. Siano (i, j) i punti di interpolazione appartenenti a $\mathcal{F} \cap \Omega$, dove

$$\Omega = \{(x_1, x_2) : 0 \leq x_1 \leq a, \quad 0 \leq x_2 \leq b, \quad -a \leq x_2 - x_1 \leq b, \quad 0 \leq x_2 + x_1 \leq a + b\},$$

con a e b pari. Costruiamo l'interpolante Box spline utilizzando le \mathcal{F} -traslazioni delle funzioni base M_{2111} .

In questo esempio le Box spline \mathcal{F} -traslate non nulle nel nodo (i, j) sono quelle centrate nei punti

$$(i - 1, j - 1), \quad (i + 1, j - 1), \quad (i, j), \quad (i - 1, j + 1), \quad (i + 1, j + 1).$$

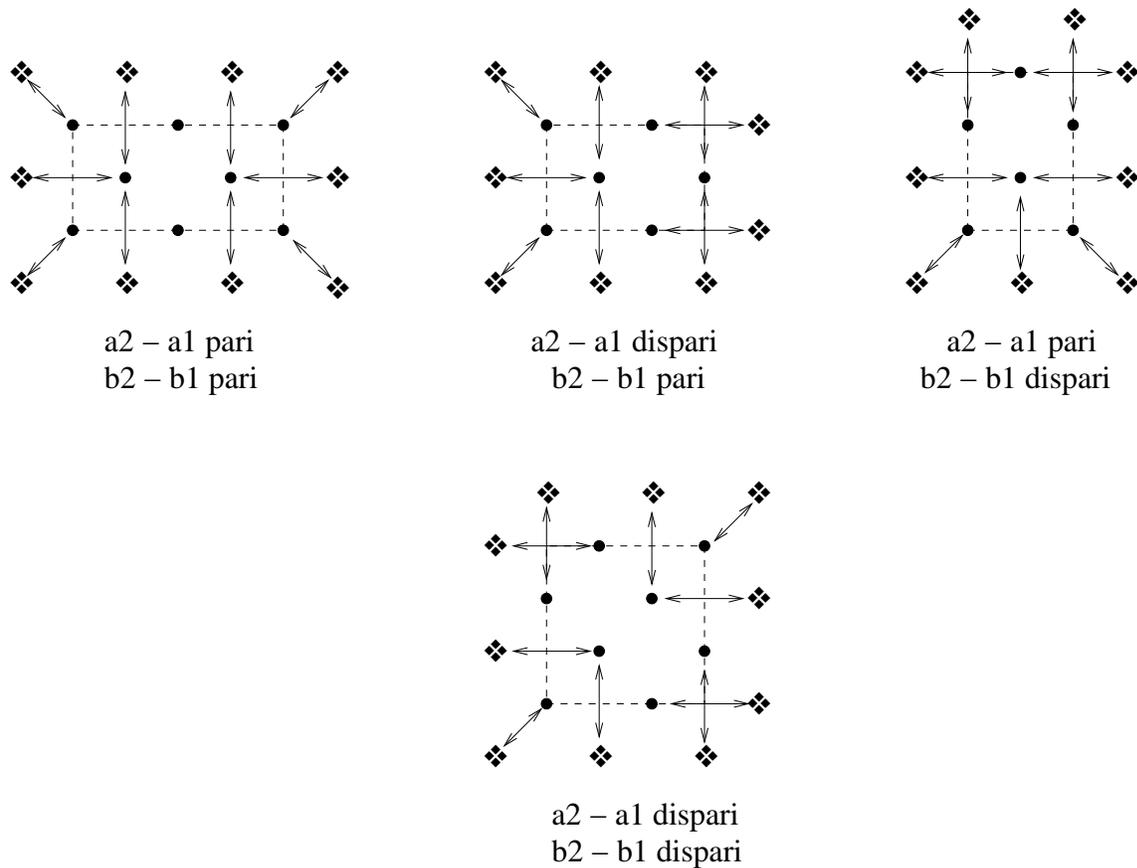


Figura 3.15: Condizioni esterne aggiuntive nel caso di interpolazione con Box spline a quattro direzioni. I coefficienti esterni (quadrato) coincidono con i dati (cerchietto) secondo le corrispondenze indicate dalle frecce.

Nella tabella 3.3 sono riportate le valutazioni nei nodi del sottomodulo delle Box spline a quattro direzioni \mathcal{F} -traslate. I pesi w_1, w_2, w_3, w_4, w_5 indicano, come nel caso di Box spline a tre direzioni, i valori che la funzione centrata nei nodi in corrispondenza del peso, assume in (i, j) (Fig. 3.4). In questo caso la proprietà di partizione dell'unità dei pesi viene così modificata:

$$2(w_1 + w_3) + w_5 = \frac{1}{2},$$

dove $\frac{1}{2} = \frac{1}{|\det F|}$ (confronta (2.31)).

I coefficienti c_{kl} associati ai centri delle funzioni base si ricavano dalla risoluzione del

Box spline	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5
M_{1111}	0	0	0	0	$\frac{1}{2}$
M_{2111}	$\frac{1}{96}$	0	$\frac{1}{96}$	0	$\frac{11}{24}$
M_{1211}	$\frac{1}{96}$	0	$\frac{1}{96}$	0	$\frac{11}{24}$
M_{1121}	0	0	$\frac{1}{24}$	0	$\frac{5}{12}$
M_{1112}	$\frac{1}{24}$	0	0	0	$\frac{5}{12}$
M_{2211}	$\frac{1}{48}$	0	$\frac{1}{48}$	0	$\frac{5}{12}$

Tabella 3.3: Valori assunti da alcune Box spline bivariate a quattro direzioni nei nodi.

sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l}
 c_{-1 \ -1} = f_{0 \ 0} \\
 c_{1 \ -1} = f_{1 \ 1} \\
 \vdots \\
 c_{a+1 \ -1} = f_{a \ 0} \\
 c_{-1 \ -1} \frac{1}{96} + c_{1 \ -1} \frac{1}{96} + c_{0 \ 0} \frac{11}{24} + c_{-1 \ 1} \frac{1}{96} + c_{1 \ 1} \frac{1}{96} = f_{0 \ 0} \\
 \vdots \\
 c_{a-1 \ -1} \frac{1}{96} + c_{a+1 \ -1} \frac{1}{96} + c_{a \ 0} \frac{11}{24} + c_{a-1 \ 1} \frac{1}{96} + c_{a+1 \ 1} \frac{1}{96} = f_{a \ 0} \\
 \vdots \\
 c_{-1 \ 1} = f_{1 \ 1} \\
 \vdots \\
 c_{0 \ 0} \frac{1}{96} + c_{2 \ 0} \frac{1}{96} + c_{1 \ 1} \frac{11}{24} + c_{0 \ 2} \frac{1}{96} + c_{2 \ 2} \frac{1}{96} = f_{1 \ 1} \\
 \vdots \\
 c_{a-2 \ 0} \frac{1}{96} + c_{a \ 0} \frac{1}{96} + c_{a-1 \ 1} \frac{11}{24} + c_{a-2 \ 2} \frac{1}{96} + c_{a \ 2} \frac{1}{96} = f_{a-1 \ 1} \\
 c_{a+1 \ 1} = f_{a-1 \ 1} \\
 \vdots \\
 c_{-1 \ b-1} \frac{1}{96} + c_{1 \ b-1} \frac{1}{96} + c_{0 \ b} \frac{11}{24} + c_{-1 \ b+1} \frac{1}{96} + c_{1 \ b} \frac{1}{96} = f_{0 \ b} \\
 \vdots \\
 c_{a-1 \ b-1} \frac{1}{96} + c_{a+1 \ b-1} \frac{1}{96} + c_{a \ b} \frac{11}{24} + c_{a-1 \ b+1} \frac{1}{96} + c_{a+1 \ b+1} \frac{1}{96} = f_{a \ b} \\
 c_{-1 \ b+1} = f_{0 \ b} \\
 c_{1 \ b+1} = f_{1 \ b-1} \\
 \vdots \\
 c_{a+1 \ b+1} = f_{a \ b}
 \end{array} \right. \quad (3.16)$$

Il sistema derivante dall'imposizione delle condizioni di interpolazione ed eventuali condizioni esterne, anche in questo caso può facilmente essere scritto in forma matriciale

$$Ac = \mathbf{b},$$

dove la matrice A è del tipo (3.12) e pertanto gode delle stesse proprietà. Anche in questo caso è possibile ridurla in forma tridiagonale a blocchi e studiarne la non singolarità nei vari casi particolari.

3.4 Capacità di ricostruzione delle funzioni Box spline bivariate

L'aspetto che interessa evidenziare è la particolare attitudine delle Box spline a ricostruire fedelmente alcuni set di dati che un semplice prodotto tensoriale non sarebbe capace di riprodurre. Si noti che una Box spline è costituita da più patch polinomiali rispetto ad una B-spline prodotto tensoriale dello stesso grado. Infatti in quest'ultimo caso in ogni ipercubo unitario di \mathbb{R}^s vive un unico tratto polinomiale, mentre in una Box spline con $s + 1$ direzioni ci sono ben $s!$ patch polinomiali. La griglia generata, infatti, vede ogni ipercubo unitario suddiviso in $s!$ semplici, in particolare due triangoli per il quadrato in \mathbb{R}^2 , 6 tetraedri per il cubo in \mathbb{R}^3 , ecc. Questa osservazione giustifica la maggiore flessibilità delle Box spline rispetto alle B-spline prodotto tensoriale in ambito di ricostruzione. In questo paragrafo verranno presentati alcuni esempi che rivelano la straordinaria capacità di alcune Box spline bivariate di interpolare set di dati il cui andamento segue la struttura di definizione delle funzioni base stesse.

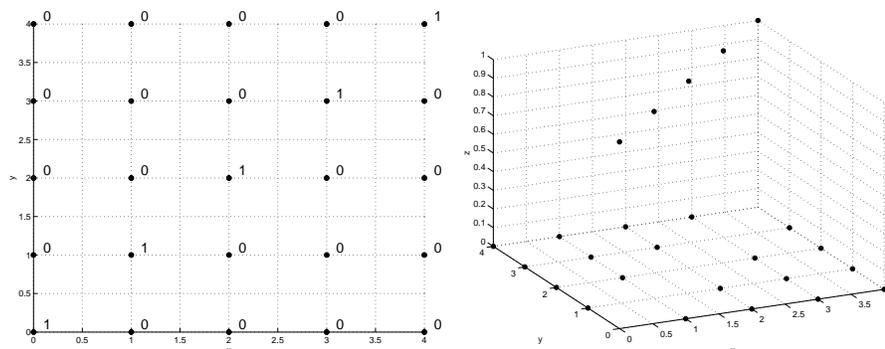


Figura 3.16: Nodi (i, j) dei punti di interpolazione e relativo valore (sinistra). Distribuzione nello spazio dei punti di interpolazione (destra).

Supponiamo, ad esempio, che l'insieme dei punti di interpolazione sia quello illustrato in Fig. 3.16 dove $\Omega = [0, 4] \times [0, 4]$. Utilizzando le classiche B-spline prodotto tensoriale, la superficie risultante assume ondulazioni non desiderate. Poichè i dati sono disposti lungo la direzione $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ è più naturale sfruttare una funzione base che tenga in considerazione l'andamento dei dati e quindi, ad esempio, una Box spline a tre direzioni.

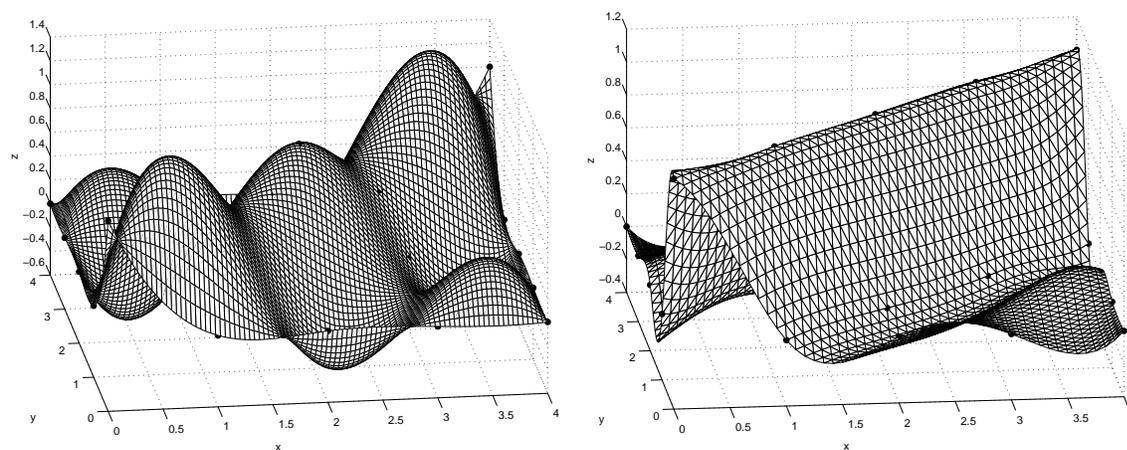


Figura 3.17: Interpolazione con B-spline bicubiche (sinistra). Interpolazione con Box spline M_{222} utilizzando condizioni esterne di tipo *not a knot* (destra).

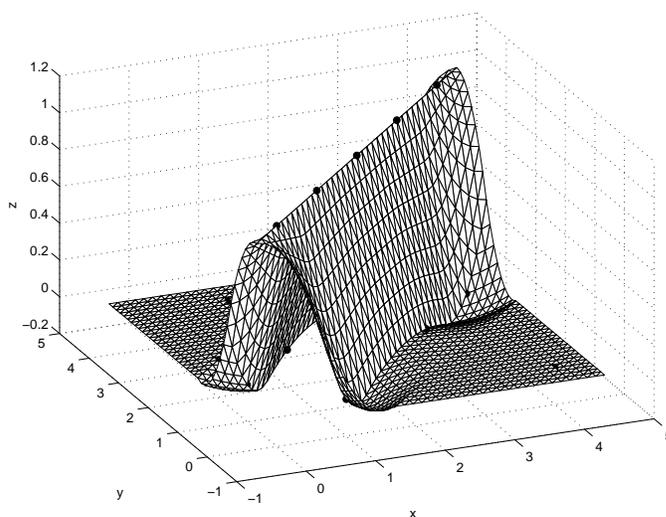


Figura 3.18: Interpolazione con Box spline M_{112} utilizzando condizioni esterne di tipo costante. La funzione base è C^1 lungo la diagonale, ma C^0 lungo le altre direzioni.

La Fig. 3.17 mette a confronto i due tipi di interpolanti, evidenziando in questo caso un migliore comportamento delle funzioni Box. Si osservi in particolare che, cambiando la

molteplicità dei vettori della matrice D , si possono ottenere effetti più o meno spigolosi (Fig. 3.18). Questo è dovuto al fatto che aumentando o diminuendo la molteplicità di una direzione cambia di conseguenza anche il grado di continuità della funzione base lungo quella direzione.

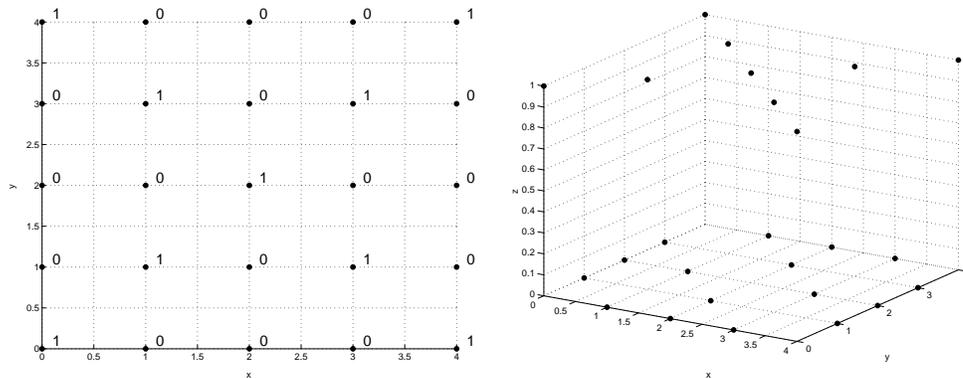


Figura 3.19: Nodi (i, j) dei punti di interpolazione e relativo valore (sinistra). Distribuzione nello spazio dei punti di interpolazione (destra).

Se i dati sono del tipo illustrato in Fig. 3.19, nemmeno con le Box spline a tre direzioni si riescono ad ottenere buoni risultati. In questo caso per generare una superficie che approssimi al meglio l'andamento dei dati è necessario utilizzare interpolanti a quattro direzioni (Fig. 3.20). Come ci assicura il teorema 3.3, l'interpolazione con Box spline a quattro direzioni è corretta se avviene sul sottomodulo \mathcal{F} . In questo esempio, affinché la superficie risultante interpoli tutti i punti di Fig. 3.19, è necessario operare un raffinamento della griglia di \mathbb{Z}^2 di un fattore uguale a $\frac{1}{2}$, cosicché il nuovo insieme di punti di interpolazione contenga l'originale. In questo modo la superficie Box spline generata interpolerà sicuramente anche i dati iniziali.

Osservazione 19. La proprietà delle Box spline (1.16) ci permette di dedurre che, in generale, interpolare sulla griglia del sottomodulo $Q\mathbb{Z}^s$ con Box spline base associate alla matrice D è equivalente ad interpolare sulla griglia di \mathbb{Z}^s con Box spline associate a $Q^{-1}D$. Sia dunque $Q = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$.

L'interpolazione su $Q\mathbb{Z}^2 = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \mathbb{Z}^2 = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \mathcal{F}$, con funzioni Box spline associate alla matrice $D = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$ è equivalente all'interpolazione

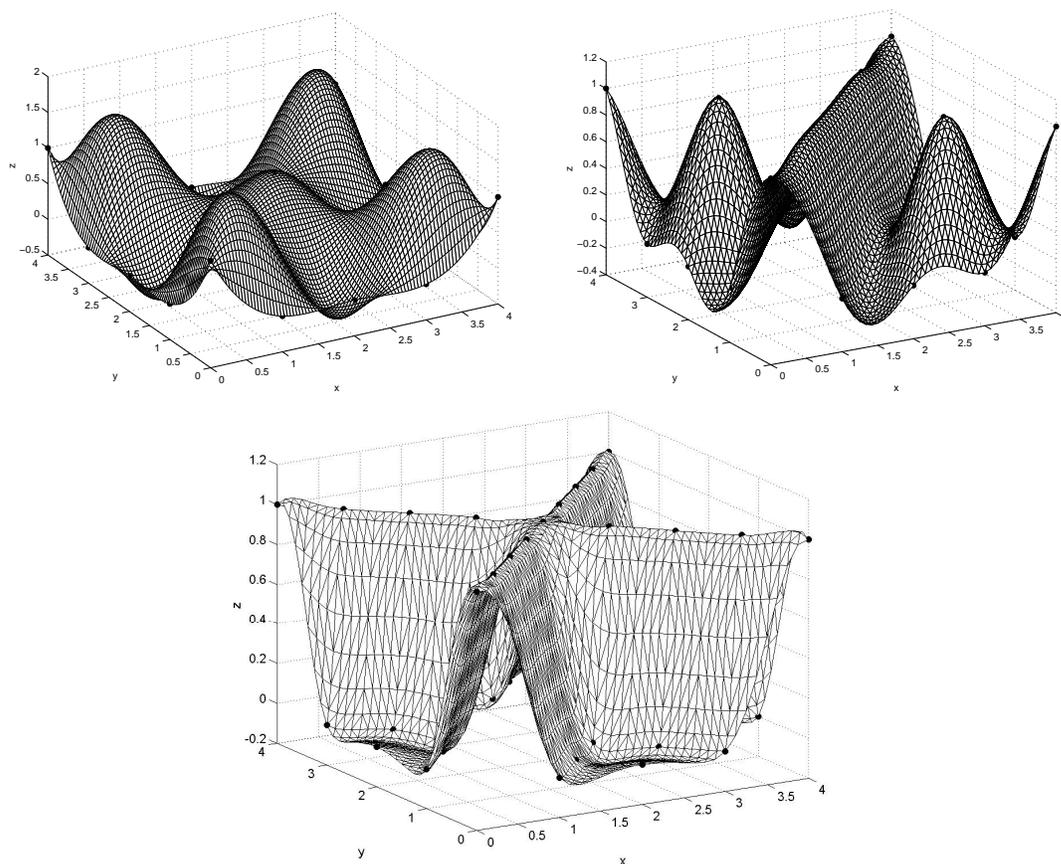


Figura 3.20: Interpolazione con B-spline bicubiche (in alto a sinistra). Interpolazione con Box spline M_{222} utilizzando condizioni esterne di tipo costante (in alto a destra). Interpolazione con Box spline M_{2211} utilizzando condizioni esterne di tipo costante (in basso).

su \mathbb{Z}^2 con Box spline associate a $Q^{-1}D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$, dove Q^{-1} coincide con F .

A sua volta questa equivale ad interpolare su \mathcal{F} con Box spline associata a $FQ^{-1}D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$. Dunque, concettualmente non cambia nulla lavorare con Box spline definite su una griglia regolare non unitaria, a patto che lo siano anche i punti di interpolazione.

Si considerino ora i dati in Fig. 3.21 che seguono le direzioni $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. In questo caso i risultati sono sicuramente più soddisfacenti se si utilizzano le B-spline prodotto tensoriale (Fig. 3.22). Il fatto che i dati da interpolare debbano essere presi sul sottomodulo \mathcal{F} , implica che per ottenere buoni risultati con le Box spline a quattro direzioni, è necessario limitarsi solo a particolari set di dati e precisamente a quelli con

lo stesso andamento delle direzioni diagonali.

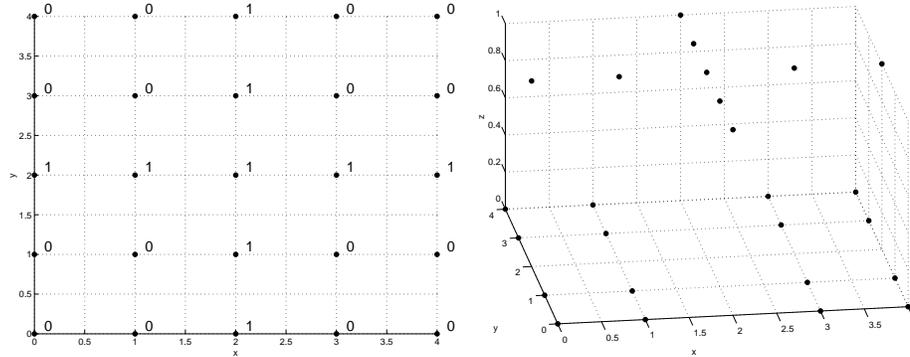


Figura 3.21: Nodi (i, j) dei punti di interpolazione e relativo valore (sinistra). Distribuzione nello spazio dei punti di interpolazione (destra).

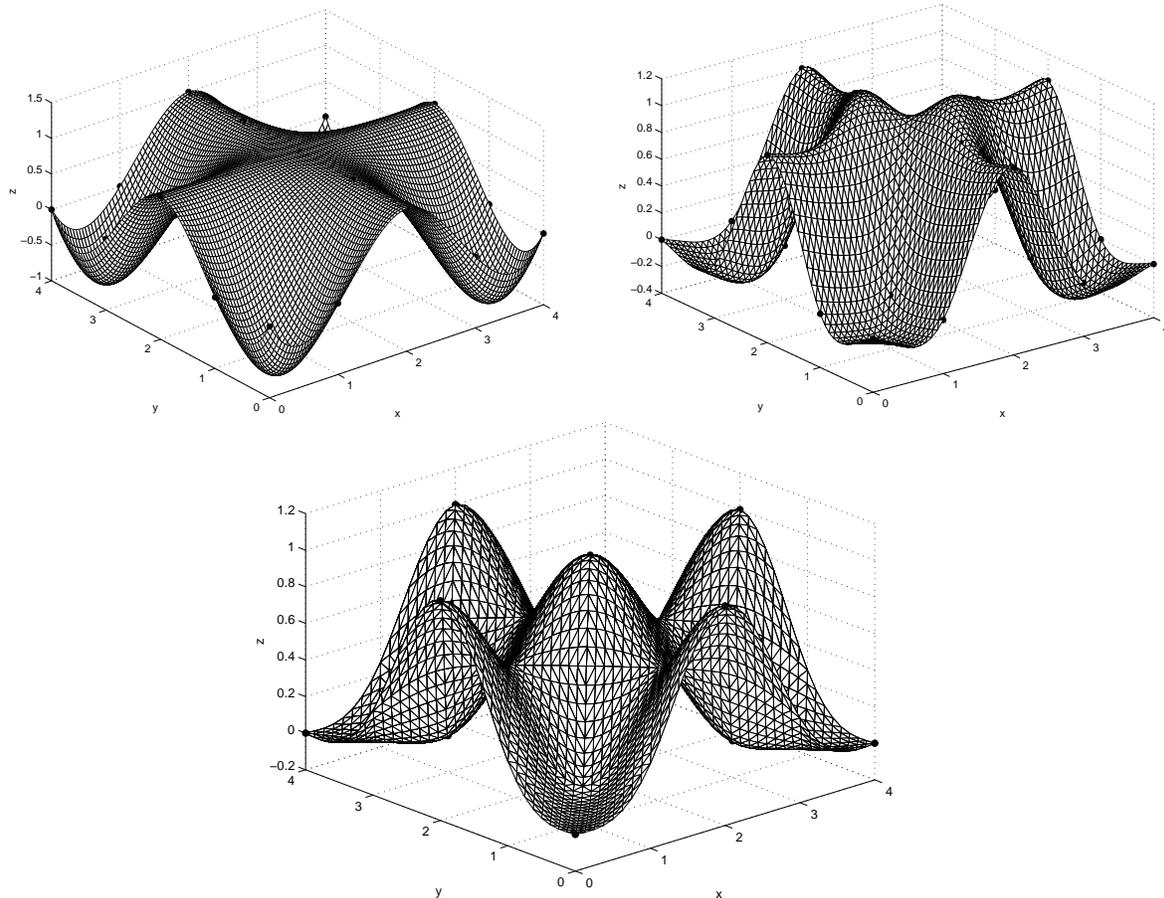


Figura 3.22: Interpolazione con B-spline bicubiche (in alto a sinistra). Interpolazione con M_{222} e condizioni esterne di tipo costante (in alto a destra). Interpolazione con M_{2211} e condizioni esterne di tipo costante (in basso).

Questi esempi hanno dimostrato come la scelta della funzione base sia fortemente influenzata dall'andamento dei dati di interpolazione e come non esista a priori un interpolante migliore rispetto agli altri. Ora, anzichè testare il comportamento delle Box spline su particolari set di dati costruiti in modo opportuno, sceglieremo i dati da interpolare campionando una funzione analitica su una griglia regolare.

Sia $f : [0, 2] \times [0, 1] \mapsto \mathbb{R}$

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} 1 & \text{se } x_2 - x_1 \geq 0.5 \\ 2(x_2 - x_1) & \text{se } 0 \leq x_2 - x_1 \leq 0.5 \\ \frac{1}{2} \left[\cos \left(4\pi \sqrt{\left(x_1 - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(x_2 - \frac{1}{2}\right)^2} \right) + 1 \right] & \text{se } \left(x_1 - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(x_2 - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{16} \\ 0 & \text{altrimenti .} \end{cases} \quad (3.17)$$

la funzione analitica i cui valori campionati su una griglia regolare 9×5 rappresentano i punti di interpolazione. Tale funzione test presenta una discontinuità della derivata prima in due zone diverse; siamo dunque interessati a vedere come interpolanti di natura differente si comportano in prossimità dello “scalino”. I risultati ottenuti con un interpolante B-spline bicubico e una Box spline M_{222} sono illustrati in Fig. 3.24. Si noti come le funzioni Box spline riescano meglio a controllare l'andamento della superficie anche in prossimità della “campana”.

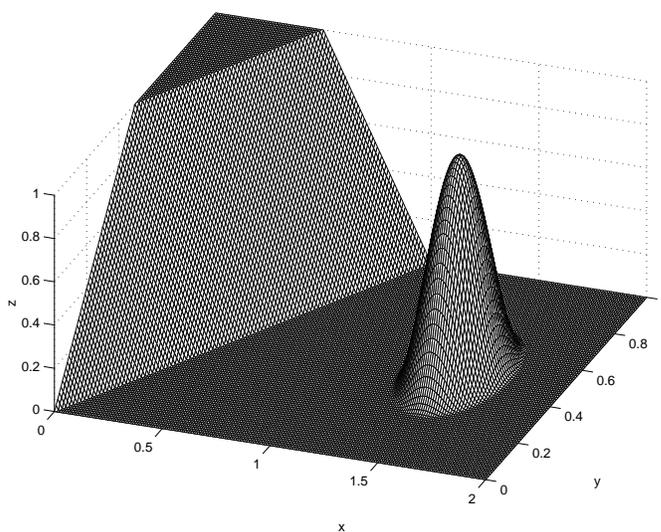


Figura 3.23: Funzione test.

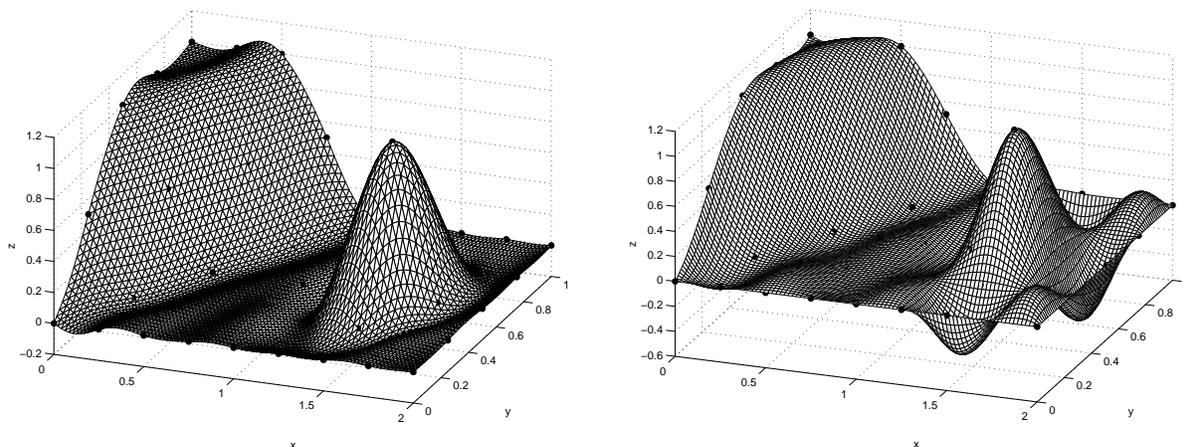


Figura 3.24: Funzione Box spline interpolante (a sinistra). Funzione B-spline interpolante (a destra). I cerchietti indicano i punti di interpolazione campionati su una griglia regolare di $\frac{1}{4}\mathbb{Z}^2$.

3.5 Interpolazione con Box spline trivariate a 4 direzioni

Data la significativa crescita degli ultimi vent'anni nel settore della ricostruzione di superfici e della modellazione solida, il nostro interesse si è focalizzato sullo studio di funzioni trivariate, vedendo nelle Box spline una possibile alternativa agli approcci attuali. L'interesse verso il mondo trivariato è giustificato dal fatto che è sempre più in uso rappresentare oggetti e superfici attraverso funzioni implicite, estraendo uno zero-set dal volume ricostruito.

Dopo aver illustrato nei paragrafi precedenti una tecnica di risoluzione del problema di interpolazione bivariata, risulterà ora più chiaro il nostro approccio verso il caso trivariato, di cui in letteratura non esistono studi particolari, né esempi pratici che mostrino il comportamento delle Box spline al riguardo.

Si prenda dunque in considerazione la Box spline trivariata di grado m , $M_{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}(x_1, x_2, x_3)$ definita sulle quattro direzioni (2.24). Sia

$$S_{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}(\Omega) = \left\{ \sum_{(p,q,r) \in I(\Omega)} c_{pqr} M_{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}(x_1 - p, x_2 - q, x_3 - r), \quad c_{pqr}, x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

lo spazio delle funzioni trivariate traslate sul dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ con

$$I(\Omega) = I_{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}(\Omega) = \{(p, q, r) \in \mathbb{Z}^3 : M_{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}(x_1 - p, x_2 - q, x_3 - r) \neq 0, \text{ per qualche } (x_1, x_2, x_3) \in \Omega\}.$$

La lineare indipendenza di queste funzioni è garantita dal teorema 3.1. Infatti la matrice D associata a queste classi di Box spline trivariate soddisfa la condizione del determinante, poichè ogni base Z di D ha determinante uguale a -1 oppure $+1$.

Come abbiamo già visto nel caso bivariato, nell'interpolazione con Box spline è fondamentale che l'andamento del set di dati sia coerente con le direzioni che definiscono la funzione base. In generale quindi il dominio Ω può essere delimitato dai piani

$$\begin{aligned} x_1 &= \text{const}, & x_2 &= \text{const}, & x_3 &= \text{const}, \\ x_2 - x_1 &= \text{const}, & x_3 - x_1 &= \text{const}, & x_3 - x_2 &= \text{const}. \end{aligned}$$

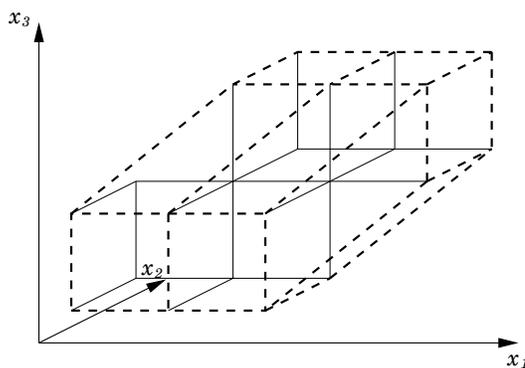


Figura 3.25: Generico dominio Ω .

Poiché concettualmente non vi è alcuna differenza, per semplicità di notazione ho scelto di lavorare con domini a forma di parallelepipedo del tipo

$$\Omega = \{(x_1, x_2, x_3) : a1 \leq x_1 \leq a2, \quad b1 \leq x_2 \leq b2, \quad c1 \leq x_3 \leq c2, \quad (3.18)$$

$$b1 - a2 \leq x_2 - x_1 \leq b2 - a1, \quad c1 - a2 \leq x_3 - x_1 \leq c2 - a1, \quad c1 - b2 \leq x_3 - x_2 \leq c2 - b1\}.$$

I punti di interpolazione coincidono al solito con i nodi della griglia intera (i, j, k) contenuti nel dominio Ω .

Il problema di interpolazione con Box spline trivariate a quattro direzioni diventa:

Dati i valori f_{ijk} nei nodi $(i, j, k) \in \Omega$, trovare un volume Box spline $g(x_1, x_2, x_3) \in S_{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}(\Omega)$ tale che

$$g(i, j, k) = f_{ijk} \quad \forall (i, j, k) \in \Omega \cap \mathbb{Z}^3. \quad (3.19)$$

In altre parole occorre calcolare i coefficienti c_{pqr} della combinazione per cui

$$\sum_{(p,q,r) \in I(\Omega)} c_{pqr} M_{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}(i-p, j-q, k-r) = f_{ijk}, \quad \forall (i, j, k) \in \Omega \cap \mathbb{Z}^3. \quad (3.20)$$

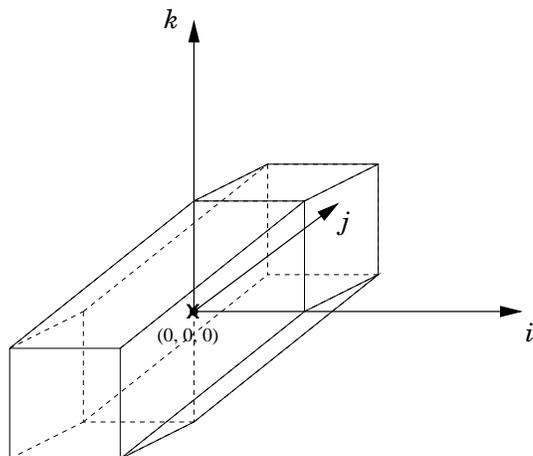


Figura 3.26: L'unica Box spline $M_{1111}(x_1, x_2, x_3) \in S_{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4}(\Omega)$ non nulla in $(0, 0, 0)$ è quella centrata nel nodo stesso.

Esempio 3.6. Siano assegnati i valori f_{ijk} nei punti griglia del parallelepido

$$\Omega = \{(x_1, x_2, x_3) : 0 \leq x_1 \leq a, \quad 0 \leq x_2 \leq b, \quad 0 \leq x_3 \leq c\}.$$

I coefficienti dell'interpolante lineare trivariata si ottengono banalmente imponendo le condizioni (3.20). Come per le Box spline lineari bivariate, l'unica funzione non nulla in (i, j, k) è quella centrata nel punto stesso (Fig. 3.26). In particolare essendo $M_{1111}(0, 0, 0) = 1$, si ha:

$$c_{ijk} = f_{ijk}, \quad \forall (i, j, k) \in \Omega \cap \mathbb{Z}^3.$$

Esempio 3.7. Interpoliamo ora gli stessi dati dell'esempio 3.6 utilizzando funzioni base Box trivariate di grado 2, $M_{2111}(x_1, x_2, x_3)$. In questo caso le Box spline non nulle nel nodo (i, j, k) sono quelle centrate in

$$(i-1, j, k), \quad (i, j, k), \quad (i+1, j, k).$$

Di conseguenza, imponendo le condizioni di interpolazione, si giunge alle seguenti equazioni:

$$c_{i-1jk}M_{2111}(1, 0, 0) + c_{ijk}M_{2111}(0, 0, 0) + c_{i+1jk}M_{2111}(-1, 0, 0) = f_{ijk}$$

$$\forall i = 0, \dots, a \quad j = 0, \dots, b \quad k = 0, \dots, c.$$

Noti i valori f_{ijk} , per calcolare i coefficienti delle funzioni base, ci mancano solamente le valutazioni non nulle nei nodi (i, j, k) delle Box spline traslate sulla griglia di \mathbb{Z}^3 . Tali valori coincidono con i pesi riportati nella tabella 3.4. In particolare, ogni peso

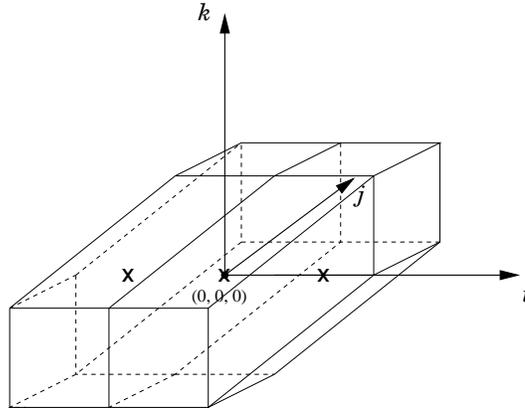


Figura 3.27: Le Box spline $M_{2111}(x_1, x_2, x_3) \in S_{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}(\Omega)$ non nulle in $(0, 0, 0)$ sono quelle con centro indicato dalla crocetta.

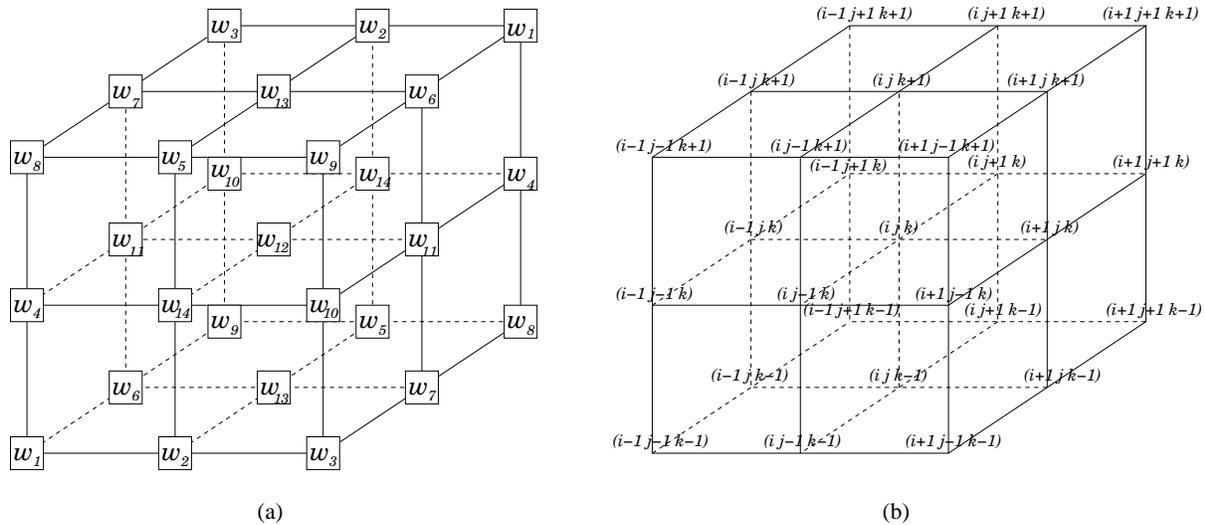


Figura 3.28: (b): Posizione dei centri delle Box spline trivariate non nulle in (i, j, k) . Il peso w_i in (a) indica il valore assunto in (i, j, k) dalla Box spline centrata nel nodo in corrispondenza del peso.

posizionato come in Fig. 3.28-a indica il valore che la funzione Box spline centrata nel nodo corrispondente di Fig. 3.28-b, assume in (i, j, k) .

Per la proprietà di partizione dell'unità si ha che:

$$2(w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + w_5 + w_6 + w_7 + w_8 + w_9 + w_{10} + w_{11} + w_{13} + w_{14}) + w_{12} = 1.$$

In generale, dunque, le condizioni di interpolazione (3.20) possono essere scritte come segue, utilizzando i pesi sopra introdotti:

Box spline	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	w_8	w_9	w_{10}	w_{11}	w_{12}	w_{13}	w_{14}
M_{1111}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
M_{2111}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{4}$	0	0
M_{1211}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\frac{3}{4}$	0	$\frac{1}{8}$
M_{1121}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{8}$	0
M_{1112}	$\frac{1}{8}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\frac{3}{4}$	0	0
M_{2211}	0	0	0	$\frac{1}{24}$	0	0	0	0	0	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{7}{12}$	0	$\frac{1}{12}$
M_{2121}	0	0	0	0	0	$\frac{1}{24}$	0	0	0	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{1}{12}$	0
M_{2112}	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{24}$	0	0	0	0	0	0	0	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{7}{12}$	0	0
M_{1221}	0	$\frac{1}{24}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\frac{7}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$
M_{1122}	$\frac{1}{12}$	0	0	$\frac{1}{24}$	0	0	0	0	0	0	0	$\frac{7}{12}$	$\frac{1}{12}$	0
M_{1212}	$\frac{1}{12}$	0	0	0	0	$\frac{1}{24}$	0	0	0	0	0	$\frac{7}{12}$	0	$\frac{1}{12}$
M_{2221}	$\frac{1}{64}$	$\frac{5}{192}$	0	$\frac{5}{192}$	0	$\frac{5}{192}$	0	0	0	0	$\frac{11}{192}$	$\frac{15}{32}$	$\frac{11}{192}$	$\frac{11}{192}$
M_{2212}	$\frac{11}{192}$	$\frac{5}{192}$	0	$\frac{5}{192}$	0	$\frac{5}{192}$	0	0	0	0	$\frac{11}{192}$	$\frac{15}{32}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{11}{192}$
M_{2122}	$\frac{11}{192}$	$\frac{5}{192}$	0	$\frac{5}{192}$	0	$\frac{5}{192}$	0	0	0	0	$\frac{11}{192}$	$\frac{15}{32}$	$\frac{11}{192}$	$\frac{1}{64}$
M_{1222}	$\frac{11}{192}$	$\frac{5}{192}$	0	$\frac{5}{192}$	0	$\frac{5}{192}$	0	0	0	0	$\frac{1}{64}$	$\frac{15}{32}$	$\frac{11}{192}$	$\frac{11}{192}$
M_{2222}	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{30}$	0	$\frac{1}{30}$	0	$\frac{1}{30}$	0	0	0	0	$\frac{1}{20}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$

Tabella 3.4: Valori assunti da alcune Box spline trivariate nei nodi.

$$\begin{aligned}
f_{ijk} = & w_1(c_{i-1j-1k-1} + c_{i+1j+1k+1}) + w_2(c_{ij-1k-1} + c_{ij+1k+1}) \\
& + w_3(c_{i+1j-1k-1} + c_{i-1j+1k+1}) + w_4(c_{i-1j-1k} + c_{i+1j+1k}) \\
& + w_5(c_{ij-1k+1} + c_{ij+1k-1}) + w_6(c_{i+1jk+1} + c_{i-1jk-1}) \\
& + w_7(c_{i+1jk-1} + c_{i-1jk+1}) + w_8(c_{i-1j-1k+1} + c_{i+1j+1k-1}) \\
& + w_9(c_{i+1j-1k+1} + c_{i-1j+1k-1}) + w_{10}(c_{i+1j-1k} + c_{i-1j+1k}) \\
& + w_{11}(c_{i+1jk} + c_{i-1jk}) + w_{13}(c_{ijk+1} + c_{ijk-1}) \\
& + w_{14}(c_{ij+1k} + c_{ij-1k}) + w_{12}c_{ijk}.
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Affinchè il sistema lineare (3.21) sia quadrato è necessario aggiungere alcune condizioni sui coefficienti nel bordo del dominio, analogamente a quanto mostrato nel caso bivariato. Le condizioni aggiuntive adottate nell'interpolazione trivariata sono di tipo costante e precisamente:

1. a) $c_{ij-1} = f_{ij0} \quad i = 0, \dots, a, j = 0, \dots, b$
 b) $c_{ijc+1} = f_{ijc} \quad i = 0, \dots, a, j = 0, \dots, b$
2. a) $c_{-1jk} = f_{0jk} \quad j = 0, \dots, b, k = 0, \dots, c$
 b) $c_{a+1jk} = f_{ajk} \quad j = 0, \dots, b, k = 0, \dots, c$
3. a) $c_{i-1k} = f_{i0k} \quad i = 0, \dots, a, k = 0, \dots, c$
 b) $c_{ib+1k} = f_{ibk} \quad i = 0, \dots, a, k = 0, \dots, c$
4. $c_{-1-1-1} = f_{000}$
5. $c_{a+1b+1c+1} = f_{abc}$

A seconda di quale Box spline base si utilizza, si adottano solo alcune di queste condizioni. La tabella 3.5 ne riporta alcuni esempi.

BOX SPLINE	CONDIZIONI ESTERNE
M_{2111}	2.
M_{1211}	3.
M_{1121}	1
M_{1112}	1.a) $(i = 0, \dots, a - 1, j = 0, \dots, b - 1)$ 1.b) $(i = 1, \dots, a, j = 1, \dots, b)$ 2.a) $(j = 0, \dots, b - 1, k = 0, \dots, c - 1)$ 2.b) $(j = 1, \dots, b, k = 1, \dots, c)$ 3.a) $(i = 0, \dots, a - 1, k = 0, \dots, c - 1)$ 3.b) $(i = 1, \dots, a, k = 1, \dots, c)$ 4. 5.
M_{2222}	1. 2. 3. 4. 5.

Tabella 3.5: Condizioni esterne per alcune Box spline trivariate a quattro direzioni.

Per convenzione abbiamo ordinato i coefficienti c_{ijk} come segue:

$$c_{-1-1-1} \ c_{0-1-1} \ \dots \ c_{a+1-1-1} \quad c_{-1-10} \ c_{0-10} \ \dots \ c_{a+1-10} \ \dots \ c_{-1-1c+1} \ c_{0-1c+1} \ \dots \ c_{a+1-1c+1} \ \dots$$

$$c_{-1b+1-1} \ c_{0b+1-1} \ \dots \ c_{a+1b+1-1} \quad c_{-1b+10} \ c_{0b+10} \ \dots \ c_{a+1b+10} \ \dots \ c_{-1b+1c+1} \ c_{0b+1c+1} \ \dots \ c_{a+1b+1c+1} \cdot$$

A questo punto abbiamo tutti gli strumenti necessari per costruire la matrice associata al sistema lineare derivante dalle condizioni di interpolazione e dalle condizioni esterne aggiuntive. Analogamente a quanto visto nel caso bivariato è possibile ridurre la matrice del sistema ad una matrice \bar{A} quadrata di ordine pari al numero dei punti di interpolazione. Tale matrice ha una particolare struttura (Fig. 3.29): è tridiagonale a blocchi, dove ogni blocco, nel caso di domini del tipo (3.18), è a sua volta tridiagonale a blocchi e ogni blocco è ancora tridiagonale.

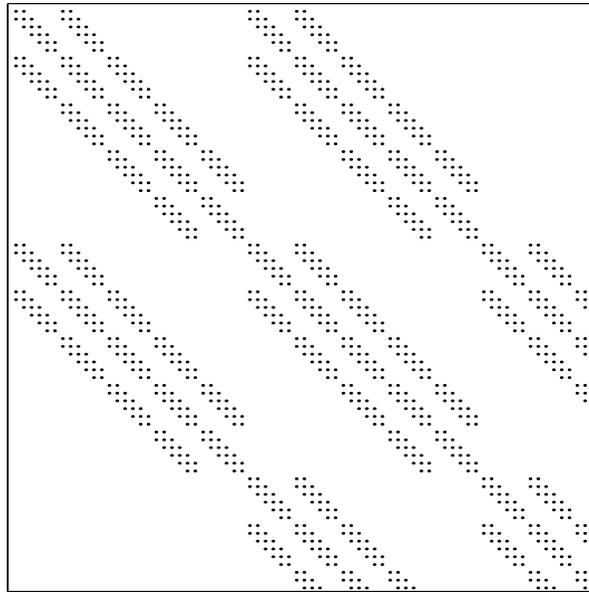


Figura 3.29: Struttura della matrice \bar{A} .

In particolare:

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 & \mathbf{C}_1^t & O & \cdots & O \\ \mathbf{C}_1 & \mathbf{B}_2 & \mathbf{C}_2^t & \ddots & \vdots \\ O & \mathbf{C}_2 & \ddots & \ddots & O \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mathbf{B}_{k-1} & \mathbf{C}_{k-1}^t \\ O & \cdots & O & \mathbf{C}_{k-1} & \mathbf{B}_k \end{bmatrix},$$

con

$$\mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} D_1 & E_1^t & O & \cdots & O \\ E_1 & D_2 & E_2^t & \ddots & \vdots \\ O & E_2 & \ddots & \ddots & O \\ \vdots & \ddots & \ddots & D_{k1-1} & E_{k1-1}^t \\ O & \cdots & O & E_{k1-1} & D_{k1} \end{bmatrix} \quad \mathbf{C}_i = \begin{bmatrix} F_1 & H_1 & O & \cdots & O \\ G_1 & F_2 & H_2 & \ddots & \vdots \\ O & G_2 & \ddots & \ddots & O \\ \vdots & \ddots & \ddots & F_{k1-1} & H_{k1-1} \\ O & \cdots & O & G_{k1-1} & F_{k1} \end{bmatrix}$$

dove

$$\begin{aligned}
 D_i &= \begin{bmatrix} w_{12} & w_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ w_{11} & w_{12} & w_{11} & \ddots & \vdots \\ 0 & w_{11} & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & w_{12} & w_{11} \\ 0 & \cdots & 0 & w_{11} & w_{12} \end{bmatrix} & E_i &= \begin{bmatrix} w_{13} & w_7 & 0 & \cdots & 0 \\ w_6 & w_{13} & w_7 & \ddots & \vdots \\ 0 & w_6 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & w_{13} & w_7 \\ 0 & \cdots & 0 & w_6 & w_{13} \end{bmatrix}, \\
 F_i &= \begin{bmatrix} w_{14} & w_4 & 0 & \cdots & 0 \\ w_{10} & w_{14} & w_4 & \ddots & \vdots \\ 0 & w_{10} & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & w_{14} & w_4 \\ 0 & \cdots & 0 & w_{10} & w_{14} \end{bmatrix} & G_i &= \begin{bmatrix} w_5 & w_8 & 0 & \cdots & 0 \\ w_9 & w_5 & w_8 & \ddots & \vdots \\ 0 & w_9 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & w_5 & w_8 \\ 0 & \cdots & 0 & w_9 & w_5 \end{bmatrix}, \\
 H_i &= \begin{bmatrix} w_2 & w_1 & 0 & \cdots & 0 \\ w_3 & w_2 & w_1 & \ddots & \vdots \\ 0 & w_3 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & w_2 & w_1 \\ 0 & \cdots & 0 & w_3 & w_2 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Anche in questo caso la non singolarità della matrice va esaminata ad ogni particolare scelta del dominio e della funzione Box spline interpolante. Per calcolare dunque i coefficienti delle Box spline della combinazione si procede in modo del tutto analogo al caso bivariato.

3.6 Capacità di ricostruzione delle funzioni Box spline trivariate

La ricostruzione di superfici viste come zero-set di una funzione trivariata $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, nella pratica è stata gestita come segue.

Sia $S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x_1, x_2, x_3) = 0\}$ l'insieme di punti che definisce la superficie. I punti di interpolazione definiti sui nodi della griglia intera $\Omega \cap \mathbb{Z}^3$ assumono valori diversi a seconda della distanza dalla superficie da ricostruire. In particolare, indicando con d_{ijk} la distanza del punto (i, j, k) dalla superficie S , si ha che $f_{ijk} = d_{ijk}$, $\forall (i, j, k) \in \Omega \cap \mathbb{Z}^3$. Molti autori, in modo molto più semplicistico, pongono $f_{ijk} = -1$ se (i, j, k) è esterno alla superficie S e $f_{ijk} = +1$ se invece (i, j, k) è interno alla superficie.

Il problema di interpolare la superficie S diventa quindi quello di costruire un volume che interpoli tutti i dati f_{ijk} e di conseguenza estrarre la isosuperficie a livello 0.

In questa sezione analizzerò il comportamento dei volumi Box spline di interpolazione utilizzati per ricostruire superfici, confrontandoli con il prodotto tensoriale trivariato e una sorta di prodotto tensoriale misto tra una B-spline univariata e una Box spline bivariata. Una prima sperimentazione con semplici set di dati costruiti ad hoc, ci ha permesso di verificare che le Box spline trivariate presentano caratteristiche analoghe a quelle viste per le Box spline bivariate.

Si considerino, ad esempio, i punti di Fig. 3.30. Questi identificano un tubo lungo la direzione diagonale $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Per quanto visto precedentemente è immediato pensare che un'interpolazione Box spline in questo caso possa fornire risultati migliori rispetto ad un prodotto tensoriale trivariato, essendo $e_1 + e_2 + e_3$ una delle direzioni su cui è definita la funzione base (Fig. 3.31).

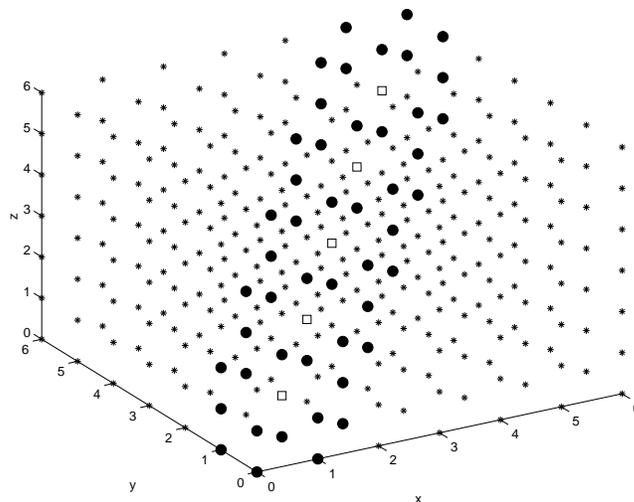


Figura 3.30: Il simbolo \bullet indica i nodi (i, j, k) per cui $f_{ijk} = 0$; i nodi interni al cubo (\square) sono associati a $f_{ijk} = 1$; per quelli esterni ($*$) si ha $f_{ijk} = -1$.

Analogamente si vede che, se il set di dati segue la diagonale del cubo individuata dal vettore $\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ (vedi Fig.3.32), nemmeno le Box spline trivariate a quattro direzioni generano una superficie senza ondulazioni (Fig.3.33). Il problema verrebbe risolto sfruttando le Box spline associate a matrici contenenti questa direzione. In generale è lecito pensare che lavorare con funzioni definite su tutte le possibili direzioni diagonali

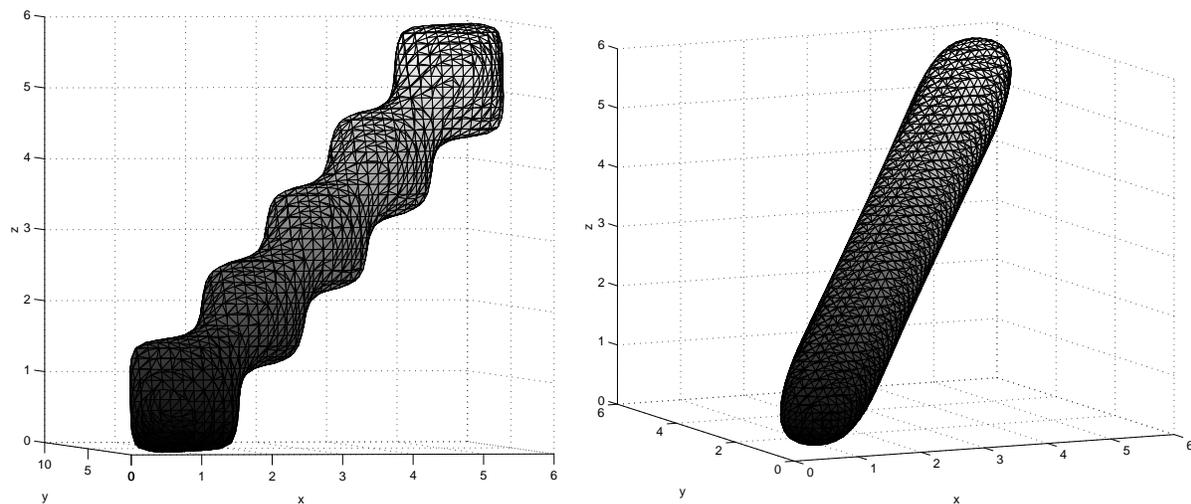


Figura 3.31: Superficie estratta come zero-set dal volume di interpolazione generato dalle funzioni B-spline prodotto tensoriale trivariate (sinistra) e Box spline M_{2222} (destra).

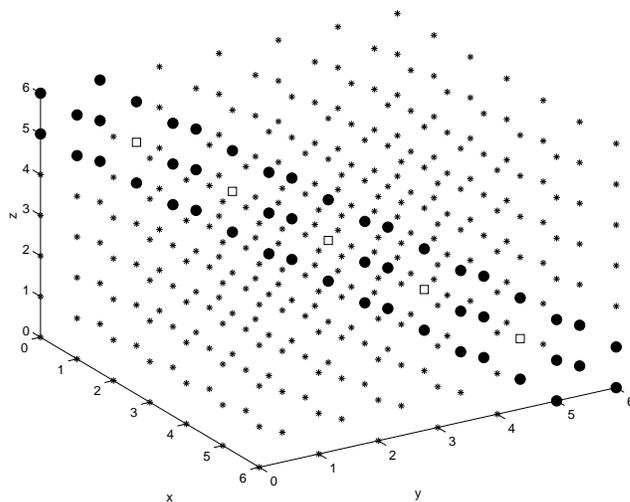


Figura 3.32: Il simbolo \bullet indica i nodi (i, j, k) per cui $f_{ijk} = 0$; i nodi interni al cubo (\square) sono associati a $f_{ijk} = 1$; per quelli esterni ($*$) si ha $f_{ijk} = -1$.

di un cubo ci possa permettere di generare buone superfici interpolanti per una vasta gamma di set di dati. Oggetto di studi futuri può quindi essere l'analisi dettagliata di interpolanti Box spline trivariate a 5-6-7 direzioni, definite rispettivamente dalle matrici $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Le tecniche da utilizzare per la valutazione e rappresentazione grafica di queste classi di Box spline sono analoghe a quelle proposte fino ad ora, con l'aggravante di una tassellazione

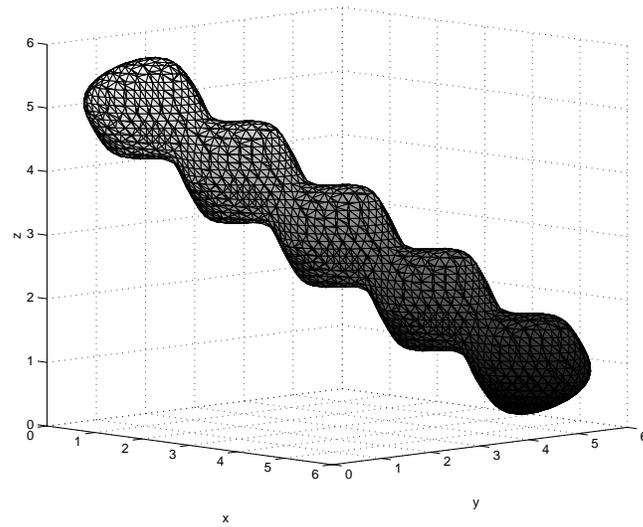


Figura 3.33: Superficie estratta come zero-set dal volume di interpolazione generato dalle funzioni base M_{2222} .

molto più complicata costituita, ad esempio nel caso delle 7 direzioni, da 24 tetraedri per cubo.

Supponiamo ora di voler ricostruire una sfera. I punti di interpolazione sono presi campionando la funzione analitica $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1$ su una griglia $[0, 2] \times [0, 2] \times [0, 2]$ di $\frac{1}{4}\mathbb{Z}^3$. La Fig. 3.34 mostra la isosuperficie a livello 0 estratta dal volume di interpolazione Box spline. Nella Fig. 3.35 sono stati presi in esame set di dati per la ricostruzione di oggetti a forma libera.

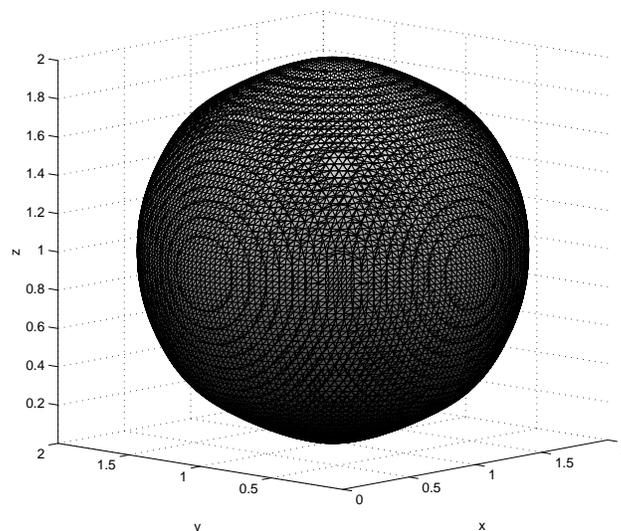


Figura 3.34: Superficie generata utilizzando l'interpolante trivariato M_{2222} .

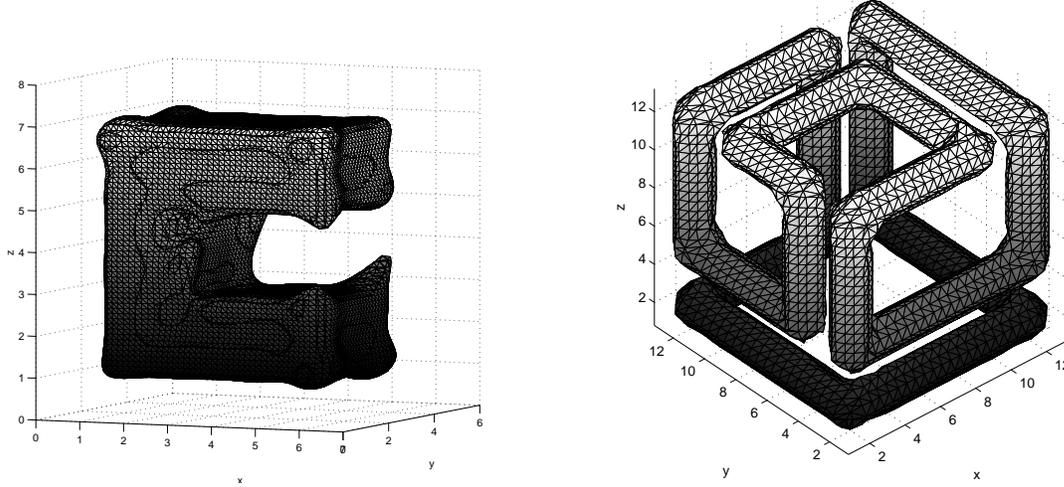


Figura 3.35: Esempi di oggetti a forma libera costruiti con interpolanti Box spline M_{2222} .

3.6.1 Prodotto tensoriale misto

Nella fase di sperimentazione, oltre alle B-spline tricubiche e alle Box spline trivariate $M_{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}(x_1, x_2, x_3)$, sono state analizzate anche funzioni base miste del tipo

$$P(x_1, x_2, x_3) = \sum_{p=1}^n \sum_{\mathbf{q} \in I(x_1, x_2)} c_{p\mathbf{q}} M_{\nu_1\nu_1\nu_3}^m(x_1 - q_1, x_2 - q_2) N_p(x_3) \quad (3.22)$$

dove $I(x_1, x_2) = \{\mathbf{q} \equiv (q_1, q_2) \in \mathbb{Z}^2 \mid M_{\nu_1\nu_1\nu_3}^m(x_1 - q_1, x_2 - q_2) \neq 0\}$ e n il grado della B-spline. Dunque $P(x_1, x_2, x_3)$ non è altro che il prodotto tensoriale di una Box spline bivariata a tre direzioni di grado m ed una B-spline univariata di grado n . Nel caso della definizione (3.22) la Box spline vive sulla griglia costruita sul piano $x_3 = 0$, ma in modo del tutto analogo si possono considerare i seguenti prodotti misti:

$$P(x_1, x_2, x_3) = \sum_{p=1}^n \sum_{\mathbf{q} \in I(x_1, x_3)} c_{p\mathbf{q}} M_{\nu_1\nu_1\nu_3}^m(x_1 - q_1, x_3 - q_3) N_p(x_2),$$

$$P(x_1, x_2, x_3) = \sum_{p=1}^n \sum_{\mathbf{q} \in I(x_2, x_3)} c_{p\mathbf{q}} M_{\nu_1\nu_1\nu_3}^m(x_2 - q_2, x_3 - q_3) N_p(x_1),$$

dove i piani su cui è definita la Box spline bivariata sono rispettivamente $x_2 = 0$ e $x_1 = 0$. Le equazioni che derivano dall'imposizione delle condizioni di interpolazione sono

$$\sum_{p=1}^n \sum_{\mathbf{q} \in I(i, j)} c_{p\mathbf{q}} M_{\nu_1\nu_1\nu_3}^m(i - q_1, j - q_2) N_p(k) = f_{ijk}, \quad \forall (i, j, k) \in \Omega.$$

Ponendo

$$d_p(i, j) = \sum_{\mathbf{q} \in I(i, j)} c_{p\mathbf{q}} M_{\nu_1 \nu_2 \nu_3}^m(i - q_1, j - q_2), \quad \forall (i, j, 0) \in \Omega \quad (3.23)$$

si ha che

$$\sum_{p=1}^n d_p(i, j) N_p(k) = f_{ijk}.$$

Sfruttando questa relazione si calcolano i coefficienti $d_p(i, j)$ che, una volta sostituiti in (3.23), permettono di risolvere il sistema e ottenere i coefficienti $c_{p\mathbf{q}}$ della combinazione.

La ragione per cui si sono considerate anche funzioni di questo tipo è che la loro gestione e valutazione numerica risulta più semplice e veloce rispetto a quella di una Box spline trivariata, e nel caso in cui il set di dati segua le direzioni diagonali delle facce del cubo

ossia $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, i risultati sono comunque soddisfacenti (Fig. 3.36). Tuttavia,

nei casi diversi da quelli contemplati, il prodotto misto non basta per ottenere buoni interpolanti. Solo le Box spline trivariate riescono a cogliere le caratteristiche di alcuni set di dati.

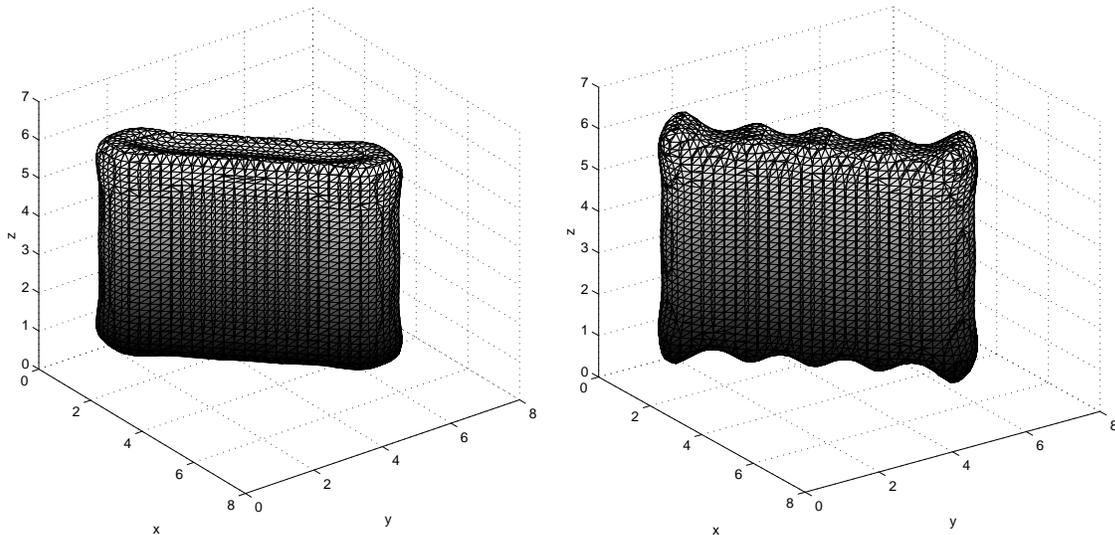


Figura 3.36: Superficie estratta come zero-set dal volume di interpolazione generato dalle funzioni base del tipo (3.22), definite come prodotto tensoriale tra la B-spline univariata cubica e la Box spline M_{222} (sinistra), e dalle B-spline tricubiche (destra).

Capitolo 4

Ricostruzione di superfici a partire da dati “scattered”

4.1 Introduzione

Il problema di costruire un'approssimazione almeno \mathcal{C}^1 a partire da punti scattered è oggetto frequente di studi in svariate aree scientifiche. Esempi comuni sono: elaborazioni di dati meccanici ed ingegneristici, ricostruzione e modellazione di oggetti reali, estrapolazione di informazioni meteorologiche e geologiche. Dopo un excursus generale su quali sono state le tecniche introdotte in passato e le idee elaborate di recente, questo capitolo si propone di sperimentare tali metodi con le Box spline, e di studiare nuove varianti. L'idea di utilizzare funzioni Box spline definite su griglia è avvalorata dal fatto che, in alcuni casi, i dati sperimentali hanno una struttura più simile a punti a griglia piuttosto che a dati scattered. Sfruttare dunque tecniche per la ricostruzione di superfici da punti completamente scattered, in queste situazioni risulta inutile. Le Box spline possono essere una valida alternativa alle funzioni già studiate in letteratura e ampiamente utilizzate in fase di ricostruzione. L'implementazione di quanto analizzato in teoria, ha permesso di fornire esempi e test numerici che valorizzano il lavoro effettuato.

4.2 Metodi numerici per la ricostruzione di superfici

Il problema che da anni ha interessato diversi ricercatori, è la ricostruzione di una funzione continua in due o più variabili a partire da dati scattered, che non soddisfano cioè nessuna particolare condizione di densità e distribuzione nello spazio. In generale si tratta di problemi di grandi dimensioni e dunque di difficile gestione computazionale. In letteratura esistono diversi approcci che cercano di ottimizzare i tempi di esecuzione, pur ottenendo risultati qualitativamente soddisfacenti. In particolare dato l'insieme di N punti distinti $P = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N\}$ in \mathbb{R}^s e l'insieme dei valori $\{f_1, \dots, f_N\}$, si vuole trovare la funzione $F : \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}$ con

$$F(\mathbf{x}_i) = f_i \quad \forall i = 1, \dots, N.$$

Generalmente nelle applicazioni è sufficiente richiedere la continuità \mathcal{C}^1 di F e, dato l'elevato costo computazionale necessario per creare superfici più regolari, molti studi si limitano a questo caso. Il problema di approssimazione di dati scattered nasce dalla necessità di conoscere i valori nei punti dove è impossibile o non conveniente fare misurazioni, ricavare un'approssimazione della derivata o integrale di una data funzione, oppure ottenere una rappresentazione grafica dei dati tramite la superficie approssimante o interpolante. Nel settore della modellazione geometrica tale problema ha acquistato maggiore importanza e attenzione dato il rapido sviluppo delle tecniche di acquisizione dati da scanner 3D. I criteri che assicurano l'efficienza di un metodo di interpolazione di dati scattered includono la riproducibilità di funzioni test, il costo computazionale in fase di *preprocessing* e valutazione, la quantità di memoria occupata, e la visualizzazione grafica della superficie risultante. Spesso l'ottimizzazione di una di queste caratteristiche va a discapito delle altre. L'obiettivo di molti studiosi è stato dunque quello di modificare metodi già esistenti in modo da migliorare le prestazioni di calcolo degli algoritmi, lasciando inalterata la bontà dei risultati, ottenendo quindi un giusto compromesso tra velocità di elaborazione e qualità della rappresentazione grafica.

Generalmente i metodi utilizzati si possono dividere in due grandi categorie. La prima ha come obiettivo quello di generare una funzione parametrica che interpola o approssima i dati iniziali. Al riguardo l'approssimazione lineare a tratti è la tecnica più semplice e popolare in questa classe. Si pensi alla ricostruzione della statua del Michelangelo per la quale, a partire dalla rilevazione di milioni di punti, è stata ricostruita una mesh

[56]. La seconda categoria interpola o approssima i punti acquisiti, determinando una funzione trivariata implicita a valori reali, dove la superficie costruita è definita come suo zero-set. La rappresentazione in forma implicita permette di descrivere topologie complesse attraverso una sola formula e di svolgere le classiche operazioni di modellazione in modo molto semplice. Esiste una parte consistente di lavori ([14], [35]) che sperimentano l'utilizzo di diverse classi di funzioni, evidenziando le caratteristiche più adatte alla ricostruzione di un set di dati piuttosto che un altro.

Circa vent'anni fa, in un esteso articolo ([38]), Franke identificava nelle Radial Basis Function uno dei metodi più accurati e stabili per risolvere il problema di interpolazione di dati scattered. Altri importanti lavori focalizzati sulle RBF sono dovuti a Savchenko e altri [78], Turk e O'Brien [84]. Sfruttando queste tecniche, la funzione implicita è calcolata risolvendo un sistema lineare. Sfortunatamente, poichè le RBF hanno supporto globale, le equazioni derivanti dalle condizioni di interpolazione, conducono ad un sistema lineare denso, con i conseguenti problemi di instabilità e alto costo computazionale. In generale, dunque, questi metodi falliscono poichè l'insieme di dati che ci si trova a gestire consiste in una nuvola di diverse migliaia di punti. I metodi di tipo globale, dove cioè il valore della funzione F in \mathbf{x} dipende da tutti i dati del dominio, sono stati sostituiti da quelli locali dove solo i punti vicini a \mathbf{x} (secondo una distanza prefissata) influenzano il valore $F(\mathbf{x})$. A questo proposito Morse ed altri [60] hanno mostrato come utilizzare funzioni a supporto compatto per ricostruire superfici implicite da dati non organizzati, risolvendo un sistema lineare sparso. Gli algoritmi sviluppati presentavano spesso problemi di robustezza di fronte a set di dati distribuiti in modo non uniforme, dove cioè la densità dei punti variava in modo significativo all'interno del dominio. Un approccio multi-scala come quello proposto da Ohtake [61], sopperisce a questa limitazione, ma risulta non adatto per l'approssimazione di dati affetti da rumore.

Particolare attenzione ha ricevuto il metodo di *partizione dell'unità*, già proposto da Franke e Nielson nel 1980 ([37]) e noto come *Shepard modificato*, ma di recente rivisitato e migliorato da Ohtake ([62]). Sono diversi gli studi che si sono basati su questo approccio e ne hanno analizzato diversi aspetti ([83], [14], [54]). L'idea cardine di questi lavori è tipicamente quella di combinare l'utilizzo di funzioni definite localmente quali RBF, polinomiali a tratti, funzioni quadratiche, con il metodo di partizione dell'unità per ottenere la ricostruzione finale. Questa combinazione dà luogo ad una tecnica robusta ed efficiente, capace di cogliere le particolarità locali della superficie da ricostruire. Una delle proprietà fondamentali di questi metodi è dunque l'abilità nel catturare le

caratteristiche geometriche quali, gli angoli, gli spigoli, le zone piatte, ecc.

In questo capitolo mi sono proposta di analizzare le funzioni Box spline come possibile strumento di ricostruzione a partire da dati completamente scattered o al più quasi a griglia. Nelle applicazioni, infatti, la tipologia di dati che ci si trova ad elaborare, presenta spesso una struttura regolare; i punti, cioè, sono per la maggior parte a griglia e solo in alcune regioni, scattered. Dapprima è stato necessario introdurre un mezzo che ci permettesse di utilizzare le Box spline, funzioni definite su griglia, nell’ambito di una ricostruzione da dati scattered. A questo proposito è stato utilizzato il ben noto algoritmo di *Moving Least Square*, descritto e analizzato nelle sezioni 4.3.1 e 4.3.2, per progettare un metodo per la costruzione di punti su griglia da interpolare con Box spline (sezione 4.3.4). Poichè grandi quantità di dati rendono difficile la gestione delle informazioni con metodi globali, lo studio della ricostruzione di superfici con queste funzioni è stato affrontato anche in un approccio locale, adattando il metodo di partizione dell’unità alle Box spline e proponendo una nuova tecnica, volta a fornire un buon compromesso tra tempi di elaborazione e qualità della ricostruzione (sezione 4.4). Inoltre è stato elaborato un metodo per catturare le feature di una superficie e ricostruirle sfruttando funzioni Box spline differenti (sezione 4.4.3). L’intero capitolo contiene esempi di ricostruzione di funzioni test bivariate e trivariate, sfruttando i metodi descritti. In particolare l’ultima parte è dedicata ad alcuni esempi di ricostruzione a partire dall’acquisizione di dati da scanner.

4.3 Box spline come strumento per la ricostruzione di superfici

Nel capitolo precedente è stato analizzato il comportamento di funzioni Box spline nell’interpolazione cardinale, dove cioè i punti dati sono definiti su un sottoinsieme di \mathbb{Z}^s . Dunque, il primo problema da affrontare in una ricostruzione da dati scattered è la restrizione degli interpolanti di tipo Box spline a lavorare solo su set di dati su griglia. Pertanto, è stata necessaria una prima elaborazione per trasformare i punti distribuiti in modo irregolare nello spazio, in dati su griglia, mantenendo le informazioni originarie. Un approccio standard nella risoluzione di questi problemi è quello, inizialmente proposto da Lancaster e Šalkauskas ([51]), di sfruttare il ben noto algoritmo *Moving Least Square* che genera una superficie approssimante (o interpolante) i dati scattered forniti. L’MLS è una tecnica di approssimazione e interpolazione molto utilizzata per

la ricostruzione meshless; in questo contesto verrà sfruttata per generare punti griglia a partire da dati scattered. Le valutazioni della funzione ottenuta con MLS nei nodi di una griglia regolare, costituiscono i punti da interpolare con Box spline. In questo modo riusciamo a trasferire le informazioni originali sui punti di una griglia e ad applicare poi i metodi di interpolazione Box visti precedentemente.

4.3.1 Algoritmo *Moving Least Square*

In letteratura l'utilizzo di metodi di approssimazione dei minimi quadrati (*least squares approximation*) con polinomi è molto diffuso, ma non per produrre interpolanti. Tuttavia, come mostrato da McLain [59] e in seguito da Lancaster ([50]), l'idea alla base dell'approssimazione dei minimi quadrati può essere applicata per generare interpolanti, introducendo la nozione di *moving least squares approximation* associata ad appropriati pesi con singolarità. Questa tecnica risulta però piuttosto dispendiosa da un punto di vista computazionale e per questo spesso viene combinata con altri metodi.

Approssimazione dei minimi quadrati pesati

Siano $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N$, punti distinti di $\bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^s$, dove $\mathbf{x}_i = (x_i^1, x_i^2, \dots, x_i^s)$, $i = 1 \dots N$. Sia $f : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione da approssimare e f_i il valore assunto in \mathbf{x}_i . Il dominio $\bar{\Omega}$ è la chiusura di un sottoinsieme Ω semplicemente connesso di \mathbb{R}^s . Siano inoltre $b_1(\mathbf{x}), b_2(\mathbf{x}), \dots, b_n(\mathbf{x})$ ($n \leq N$) n funzioni linearmente indipendenti definite su tutto \mathbb{R}^s . In particolare si assumano le seguenti proprietà:

1. $b_1 \equiv 1$,
2. $b_i \in \mathcal{C}^m(\Omega)$, $i = 1, \dots, n$
3. $\{b_i\}_{i=1}^n$ è indipendente su almeno un sottoinsieme di n punti degli N dati in $\bar{\Omega}$.

Per un'approssimazione dei minimi quadrati con polinomi quadratici bivariati, si avrà semplicemente,

$$\begin{aligned} b_1(x, y) &= 1, & b_2(x, y) &= x, & b_3(x, y) &= y, \\ b_4(x, y) &= x^2, & b_5(x, y) &= xy, & b_6(x, y) &= y^2, \end{aligned} \tag{4.1}$$

e in modo simile per polinomi di diverso grado. Ci sono situazioni dove risulta essere più conveniente utilizzare funzioni trigonometriche o esponenziali, ma nella maggior parte delle applicazioni i monomi bastano per ottenere già buoni risultati.

L'obiettivo è quello di trovare una funzione $u \in \mathcal{C}^m$, definita su un dominio contenente il convesso formato da $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N$, tale che $u(\mathbf{x}_i) = f_i, \forall i = 1, \dots, N$. Se si assume u come combinazione lineare delle funzioni base b_1, \dots, b_n

$$u(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n a_j b_j(\mathbf{x}),$$

il problema diventa calcolare i coefficienti a_1, \dots, a_n , indipendenti da \mathbf{x} , in modo che sia minimizzato il funzionale

$$E(u) = \sum_{i=1}^N w_i (u(\mathbf{x}_i) - f_i)^2 = \sum_{i=1}^N w_i \left(\sum_{j=1}^n a_j b_j(\mathbf{x}_i) - f_i \right)^2, \quad (4.2)$$

dove $w_i > 0$ sono i pesi. Un loro aumento definisce l'avvicinamento della superficie approssimante al valore f_i in corrispondenza del punto \mathbf{x}_i . I coefficienti a_1, \dots, a_n si calcolano facilmente risolvendo il sistema di equazioni normali $\frac{\partial E}{\partial a_j} = 0$ per $j = 1, \dots, n$, che in forma matriciale si può scrivere

$$BWB^T \mathbf{a} = BW\mathbf{f} \quad (4.3)$$

dove

- B è una matrice $n \times N$ la cui j -esima riga è $[b_j(\mathbf{x}_1), b_j(\mathbf{x}_2), \dots, b_j(\mathbf{x}_N)]$, $j = 1, \dots, n$,
- $W = \text{diag}[w_1, w_2, \dots, w_N]$ è una matrice diagonale $N \times N$,
- $\mathbf{a} = [a_1, a_2, \dots, a_n]^t$,
- $\mathbf{f} = [f_1, f_2, \dots, f_N]^t$.

Poiché la matrice B è a rango massimo, segue che la matrice BWB^T è non singolare e il sistema (4.3) ammette una ed una sola soluzione.

Approssimazione *moving least square* (MLS)

L'MLS è una variante del metodo dei minimi quadrati, in modo tale che il valore di u in un punto \mathbf{x} sia maggiormente influenzato dai valori f_i corrispondenti ai punti \mathbf{x}_i che sono più vicini a \mathbf{x} . Analogamente, con l'aumentare della distanza di \mathbf{x}_i da \mathbf{x} , l'influenza dei dati su $u(\mathbf{x})$ dovrebbe diminuire. Dunque il funzionale in (4.2) diventa

$$E_{\mathbf{x}}(u) = \sum_{i=1}^N w_i(\mathbf{x}) (u(\mathbf{x}_i) - f_i)^2 = \sum_{i=1}^N w_i(\mathbf{x}) \left(\sum_{j=1}^n a_j b_j(\mathbf{x}_i) - f_i \right)^2, \quad (4.4)$$

dove i pesi w_i ora sono funzioni dipendenti da \mathbf{x} .

L'analisi procede come nel caso precedente, ottenendo dunque un sistema lineare di equazioni normali della forma

$$BW(\mathbf{x})B^T \mathbf{a}(\mathbf{x}) = BW(\mathbf{x})\mathbf{f}, \quad (4.5)$$

dove la differenza essenziale è che

$$W(\mathbf{x}) = \text{diag}[w_1(\mathbf{x}), w_2(\mathbf{x}), \dots, w_N(\mathbf{x})]$$

e dunque $\mathbf{a} \equiv \mathbf{a}(\mathbf{x})$. Assumendo che il rango della matrice B sia massimo e $W(\mathbf{x})$ sia definita positiva, il sistema lineare è non singolare e ammette quindi un'unica soluzione $\mathbf{a}(\mathbf{x}) = [a_1(\mathbf{x}), \dots, a_n(\mathbf{x})]^t$.

La superficie approssimante diventa quindi

$$u(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n a_j(\mathbf{x})b_j(\mathbf{x}).$$

Tuttavia, il grande svantaggio di questo processo è la risoluzione del sistema (4.5) per ogni valore \mathbf{x} in cui si vuole valutare la superficie. Inoltre i pesi $w_1(\mathbf{x}), w_2(\mathbf{x}), \dots, w_N(\mathbf{x})$ devono essere ricalcolati sistematicamente per ogni \mathbf{x} . Poichè lo schema dipende esclusivamente dalla distanza tra i punti considerati, i pesi sono determinati da una funzione decrescente

$$w_i(\mathbf{x}) = w(d),$$

dove $d := d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i) = \sqrt{\sum_{k=1}^s (x^k - x_i^k)^2}$ indica la distanza euclidea tra i punti \mathbf{x} e \mathbf{x}_i .

In generale, il metodo MLS non garantisce l'interpolazione dei dati. Tuttavia una scelta appropriata delle funzioni peso permette di costruire superfici interpolanti con la continuità desiderata. L'idea è di considerare funzioni $w_i(\mathbf{x})$ che tendano all'infinito quando si avvicinano ai punti \mathbf{x}_i , cioè

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i) \rightarrow 0 \implies w_i(\mathbf{x}) \rightarrow \infty.$$

Viceversa, per grandi valori della distanza, w deve smorzare rapidamente il suo andamento, in modo da minimizzare o addirittura eliminare l'influenza dei dati lontani. Questo suggerisce che, almeno per piccoli valori di d , la funzione peso si debba comportare come d^{-2} o d^{-4} . Nei test effettuati sono state prese in considerazione alcune funzioni peso già proposte in letteratura. In particolare

$$w(d) = \frac{e^{-\alpha d^2}}{(d^4 + \varepsilon)}, \quad (4.6)$$

dove il parametro α controlla la rapidità di attenuazione della funzione esponenziale e $\varepsilon > 0$ evita problemi numerici dovuti all'eventuale annullamento del denominatore. Questo valore tuttavia deve essere così piccolo da garantire comunque l'interpolazione. La scelta di w gioca un ruolo fondamentale anche per quanto riguarda la continuità della superficie interpolante che si vuole ottenere. Esiste infatti un teorema ([52]) il quale afferma che, se $w_i(\mathbf{x}) \in \mathcal{C}^l(\Omega)$ e le funzioni $b_j(\mathbf{x}) \in \mathcal{C}^m(\Omega)$, si può concludere che la superficie $u(\mathbf{x}) \in \mathcal{C}^{\min\{m,l\}}(\Omega)$. In particolare, sotto alcune ipotesi riguardanti le funzioni peso, Lancaster e Šalkauskas hanno mostrato come sia possibile raggiungere il grado di continuità desiderato per l'interpolante.

Teorema 4.1. *Sia $b_j(\mathbf{x}) \in \mathcal{C}^m(\Omega)$, $j = 1, \dots, n$ e $w_i(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|^{-\alpha}$, con α intero positivo pari, $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_i$, $1 \leq i \leq N$. Allora $u(\mathbf{x}) \in \mathcal{C}^m(\Omega)$.*

Dimostrazione. Per la dimostrazione si consulti [52]. □

Queste tecniche garantiscono anche la proprietà di riproducibilità, nel senso che, se i dati corrispondono a una funzione $b(\mathbf{x})$ combinazione lineare di $b_1(\mathbf{x}), \dots, b_n(\mathbf{x})$, allora il risultato dell'algoritmo di moving least square è semplicemente $u(\mathbf{x}) = b(\mathbf{x})$. Questa è un'importante proprietà per molte applicazioni. Per esempio, per riprodurre i piani è sufficiente includere tra le funzioni b_1, \dots, b_n i monomi $1, x, y$.

Studiamo ora il comportamento della superficie vicino ai dati, dove le funzioni peso hanno una singolarità. Definiamo

$$v_i(\mathbf{x}) = \frac{w_i(\mathbf{x})}{\sum_{j=1}^N w_j(\mathbf{x})} \quad i = 1, \dots, N. \quad (4.7)$$

Queste funzioni peso normalizzate hanno le seguenti proprietà:

1. $v_i(\mathbf{x}_j) = \delta_{ij}$ (delta di Kronecker) per $i, j = 1, \dots, N$;
2. $0 \leq v_i(\mathbf{x}) \leq 1 \quad \forall \mathbf{x}$ e $v_i(\mathbf{x}) = 0$ se e solo se $\mathbf{x} = \mathbf{x}_j$, $j \neq i$;
3. $\sum_{i=1}^N v_i(\mathbf{x}) = 1 \quad \forall \mathbf{x}$;
4. $v_i(\mathbf{x}) \rightarrow 1/N$ se $d(\mathbf{x}, 0) \rightarrow \infty$.

Segue immediatamente dalle proprietà 1. e 2. che se $v_i(\mathbf{x})$ è differenziabile in \mathbf{x}_i , allora il gradiente di $v_i(\mathbf{x})$ in $\mathbf{x} = \mathbf{x}_j$ è nullo per ogni j . Ne deriva che tutte le derivate

direzionali di $v_i(\mathbf{x})$ valutate in \mathbf{x}_j sono zero. Quindi le funzioni $v_i(\mathbf{x})$ ammettono un massimo locale in corrispondenza di \mathbf{x}_i e un minimo locale in \mathbf{x}_j con $j \neq i$. Si noti che $v_i(\mathbf{x})$ sono differenziabili se lo sono in \mathbf{x}_i tutte le funzioni $w_j(\mathbf{x}), j \neq i$.

MLS Hermite

La tecnica MLS può essere opportunamente generalizzata in modo da garantire un'interpolazione tipo Hermite, dove sia i valori che le derivate vengono interpolati. Supponiamo che la funzione $f : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ da approssimare abbia derivata prima continua su tutto il dominio. Inoltre si considerino i due insiemi di punti $\{\mathbf{x}_i\}_{i=1}^N$ e $\{\mathbf{y}_j\}_{j=1}^M$ del dominio e un insieme di direzioni $\{\mathbf{v}_j\}_{j=1}^M$. Tipicamente i dati \mathbf{x}_i indicano i punti in cui si richiede di interpolare il valore $f_i = f(\mathbf{x}_i)$, mentre \mathbf{y}_j sono i punti in cui la derivata rispetto alla direzione \mathbf{v}_j della superficie generata u coincide con quella della funzione assegnata f , cioè

$$u(\mathbf{x}_i) = f_i \quad \forall i = 1, \dots, N \quad \text{e} \quad \langle \nabla u(\mathbf{y}_j), \mathbf{v}_j \rangle = \langle \nabla f(\mathbf{y}_j), \mathbf{v}_j \rangle \quad \forall j = 1, \dots, M,$$

dove $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$ è il classico prodotto scalare Euclideo in \mathbb{R}^s e in particolare $\langle \nabla f(\mathbf{y}_j), \mathbf{v}_j \rangle$ rappresenta la derivata direzionale della funzione f . Si assume in generale che i valori della funzione e della sua derivata non siano calcolati negli stessi punti, cioè gli insiemi $\{\mathbf{x}_i\}_{i=1}^N$ e $\{\mathbf{y}_j\}_{j=1}^M$ siano diversi.

Il funzionale da minimizzare ora diventa:

$$E_{\mathbf{x}}(u) = \sum_{i=1}^N w_i(\mathbf{x})(u(\mathbf{x}_i) - f_i)^2 + \sum_{j=1}^M t_j(\mathbf{x})(\langle \nabla(u - f)(\mathbf{y}_j), \mathbf{v}_j \rangle)^2. \quad (4.8)$$

Andando a sostituire alla funzione u la sua espressione come combinazione delle funzioni polinomiali, i coefficienti $a_1(\mathbf{x}), \dots, a_n(\mathbf{x})$ si calcolano come unica soluzione del sistema di equazioni normali $\frac{\partial E}{\partial a_j}, j = 1, \dots, n$.

Indichiamo al solito con \mathbf{f} il vettore $[f(\mathbf{x}_1), \dots, f(\mathbf{x}_N)]^t$, con \mathbf{f}' il vettore $[\langle \nabla f(\mathbf{y}_1), \mathbf{v}_1 \rangle, \dots, \langle \nabla f(\mathbf{y}_M), \mathbf{v}_M \rangle]^t$, con $W(\mathbf{x})$ la matrice $\text{diag}[w_1(\mathbf{x}), \dots, w_N(\mathbf{x})]$ e con $T(\mathbf{x})$ la matrice $\text{diag}[t_1(\mathbf{x}), \dots, t_M(\mathbf{x})]$. Scritto in forma matriciale il funzionale (4.8) diventa

$$\begin{aligned} E_{\mathbf{x}}(u) &= \mathbf{a}^t B W(\mathbf{x}) B^t \mathbf{a} - 2\mathbf{a}^t B W(\mathbf{x}) \mathbf{f} + \mathbf{f}^t W(\mathbf{x}) \mathbf{f} + \\ &+ \mathbf{a}^t B_1 T(\mathbf{x}) B_1^t \mathbf{a} - 2\mathbf{a}^t B_1 T(\mathbf{x}) \mathbf{f}' + \mathbf{f}'^t T(\mathbf{x}) \mathbf{f}', \end{aligned}$$

dove B è una matrice $n \times N$ la cui j -esima riga è $[b_j(\mathbf{x}_1), \dots, b_j(\mathbf{x}_N)]$, $j = 1, \dots, n$, mentre B_1 ha dimensione $n \times M$ e la sua k -esima riga è $[\langle \nabla b_k(\mathbf{y}_1), \mathbf{v}_1 \rangle, \dots, \langle \nabla b_k(\mathbf{y}_M), \mathbf{v}_M \rangle]$,

$k = 1, \dots, n$. Minimizzando tale funzionale otteniamo delle equazioni che ci permettono di calcolare il vettore dei coefficienti $\mathbf{a}(\mathbf{x})$. Il sistema assume la seguente forma:

$$(BW(\mathbf{x})B^t + B_1T(\mathbf{x})B_1^t) \mathbf{a}(\mathbf{x}) = BW(\mathbf{x})\mathbf{f} + B_1T(\mathbf{x})\mathbf{f}'.$$

Nelle applicazioni, per semplicità si è assunto $N = M$, $\mathbf{x}_i = \mathbf{y}_i$, $\forall i$ e le funzioni peso uguali: $w_i(\mathbf{x}) = t_i(\mathbf{x})$, $\forall i$.

Come dimostrato in [48] una scelta appropriata dei pesi ci garantisce l'esistenza dell'interpolante di valori e derivate con continuità desiderata, così come illustra il seguente teorema:

Teorema 4.2. *Se le funzioni peso assumono la forma $w_i(\mathbf{x}) = u_i(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|^{-\alpha}$, con $\alpha \in 2\mathbb{N}$ e $b_i(\mathbf{x}) \in \mathcal{C}^m(\overline{\Omega})$, la superficie generata dal metodo *MLS Hermite* risulta appartenere a $\mathcal{C}^m(\overline{\Omega})$, interpolando i valori assegnati e le derivate.*

In modo analogo è possibile trattare problemi di Hermite con derivate di ordine superiore al primo. In questo tipo di approccio, oltre ai valori f_i della funzione da approssimare, è necessario avere anche le derivate direzionali di f calcolate nei punti assegnati. Nei casi studiati, essendo f_i le valutazioni di una funzione assegnata definita analiticamente, abbiamo direttamente calcolato le derivate dalla sua espressione. Tuttavia, nella pratica succede molto più spesso di lavorare con punti appartenenti a superfici di cui non conosciamo un'espressione analitica (si pensi ai dati acquisiti dalla scannerizzazione di un oggetto). In questi casi vengono applicate tecniche standard di stima delle derivate ([1]).

4.3.2 Sperimentazione numerica

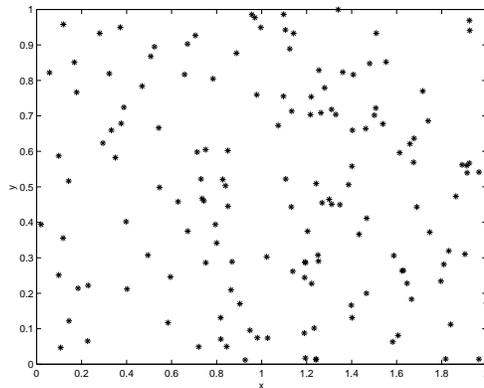


Figura 4.1: Insieme di 150 punti random del dominio.

Per verificare numericamente come la ricostruzione MLS venga influenzata dalla scelta dei vari parametri, applichiamo l'algoritmo ad una funzione test modificando di volta in volta i pesi e il metodo di interpolazione utilizzato. Si considerino i punti scattered di Fig. 4.1. I valori f_1, \dots, f_{150} sono calcolati come le altezze della funzione test $f(x, y)$ definita in (3.17). Nei casi considerati abbiamo calcolato l'errore utilizzando una griglia regolare con 41×21 punti di valutazione. La misura dell'errore è stata ottenuta dal rapporto SSE/SSM, dove SSE è la somma dei quadrati delle deviazioni dai valori della funzione test, e SSM è la somma dei quadrati delle deviazioni delle 1681 valutazioni della funzione test dal loro valor medio. Nelle tabelle che seguono sono riportati i valori di $r^2 = 1 - \text{SSE}/\text{SSM}$. Questo coefficiente può essere interpretato come segue: $r^2 = 0$ è ottenuto da un'approssimazione dei minimi quadrati dei dati con una funzione costante e implica quindi risultati non accurati; $r^2 = 0.9$ è considerata un'approssimazione discreta; $r^2 = 0.95$ indica una buona approssimazione, mentre è molto buona se $r^2 = 0.99$. Se si ottiene $r^2 = 0.9999$ significa essenzialmente che non ci sono errori nei dati empirici.

Variando le funzioni peso, e il grado dei polinomi, nella tabella 4.1 ho messo a confronto l'utilizzo dell'algoritmo MLS con i parametri diversi, calcolando in ogni caso il relativo valore di r^2 . Mentre nella tabella 4.2 sono stati esaminati i valori di r^2 corrispondenti ai metodi MLS e MLS Hermite applicati a set di dati scattered di diversa dimensione, per la generazione di una griglia con un numero di elementi paragonabile a quello dei punti originali. Si osservi che il metodo MLS Hermite richiede un doppio numero di informazioni rispetto alla tecnica MLS classica, dunque è corretto operare un confronto tra i due metodi applicati a set di punti uno doppio dell'altro. I risultati della tabella mostrano che la differenza tra i valori di r^2 è minima. Se si pensa, inoltre, che nella pratica non è sempre banale ottenere una stima delle derivate in ogni punto dato, riteniamo che l'utilizzo della tecnica MLS Hermite non sia sempre conveniente. Nella nostra sperimentazione ci limiteremo ad applicare l'algoritmo MLS di interpolazione dei soli valori. Tuttavia per completezza inseriamo una ricostruzione della funzione test con la tecnica MLS Hermite (Fig. 4.2).

FUNZIONE PESO	POLINOMI	r^2
$\frac{e^{-1/16d^2}}{(d^4+10^{-6})}$	grado 2	0.9700
$\frac{e^{-1/16d^2}}{(d^4+10^{-6})}$	grado 4	0.9800
$\frac{1}{d^4}$	grado 4	0.9795

Tabella 4.1: Valore di r^2 per alcune approssimazioni MLS.

N	griglia	r^2 MLS	r^2 MLS Hermite
75	13×7	0.9378	0.9790
150	17×9	0.9876	0.9925
300	25×13	0.9913	0.9961
600	33×17	0.9961	0.9968

Tabella 4.2: Confronto tra le tecniche MLS e MLS Hermite.

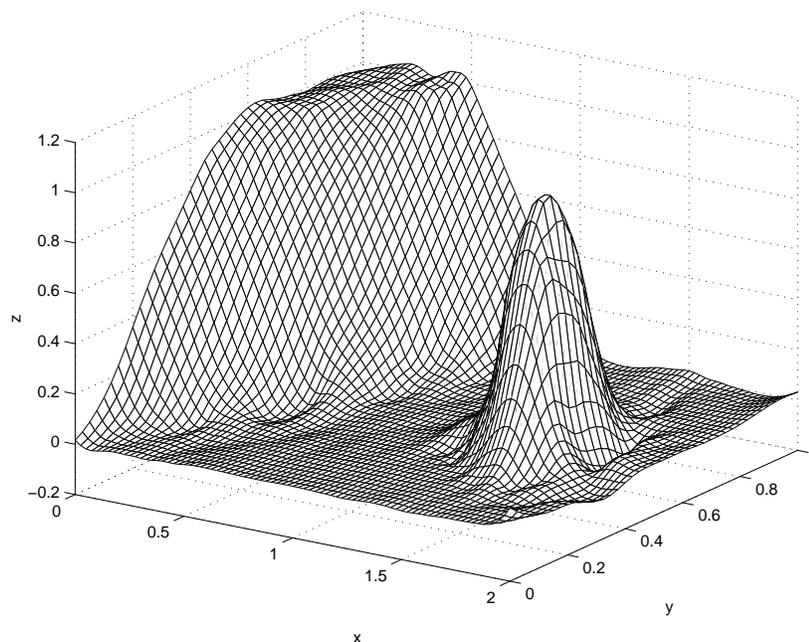


Figura 4.2: Superficie generata dal metodo MLS Hermite con interpolazione della derivata nella direzione (1 1), a partire da 150 dati scattered distribuiti uniformemente sul dominio. Sono state considerate funzioni peso $w_i(\mathbf{x}) = \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i|^4}$ e polinomi di grado ≤ 4 .

4.3.3 Progressive Grid Filling (PGF)

La distribuzione dei punti nello spazio è fondamentale per una buona approssimazione. In prossimità del bordo del dominio se non si ha un sufficiente numero di dati, l'algoritmo MLS genera dei punti di interpolazione che si discostano più o meno fortemente dalla superficie da ricostruire. Per gestire al meglio queste situazioni si è pensato di applicare una tecnica ad hoc che permetta di espandere gradualmente le informazioni presenti, dalle zone ad alta densità di punti a quelle meno dense. L'idea è la stessa

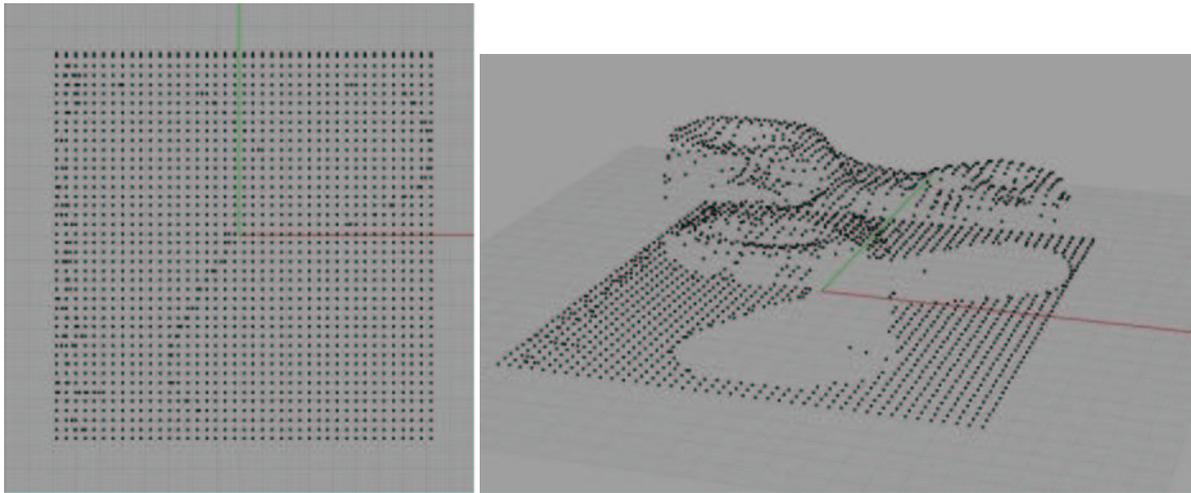


Figura 4.3: Set di dati sperimentale distribuiti nel dominio $[0, 40] \times [0, 41.3]$ (sinistra). Vista prospettica (destra).

che sta alla base della strategia di *Hole Filling* proposta in ([13]). In particolare, la situazione di nostro maggiore interesse è quella di dati che per la maggior parte sono su griglia e ci sono punti aggiuntivi non su griglia, tipicamente vicino al bordo della superficie o dove ci sono forti variazioni di pendenza (vedi ad esempio Fig. 4.3). In queste situazioni si può procedere trascurando i punti non su griglia e interpolando dunque con Box spline i restanti, oppure generando i punti su una griglia più fine tenendo conto di tutte le osservazioni iniziali. In questo caso, applicando il metodo PGF, i punti sulla griglia più fine vengono calcolati in modo progressivo, partendo dalle zone più interne e procedendo verso i bordi, aggiungendo man mano informazioni.

In generale l'idea è quella di applicare l'algoritmo MLS per la valutazione in un punto griglia e aggiungere tale valore al set originale di dati scattered. Partendo dai punti griglia nelle zone più dense di dati e procedendo nelle zone meno dense, le informazioni acquisite ad ogni applicazione dell'algoritmo MLS, permettono di creare una griglia di valori più precisa anche in prossimità del bordo. In pratica, dunque, si utilizza la valutazione in un primo punto griglia attraverso MLS per ampliare il set di informazioni originali. La valutazione nel punto griglia successivo verrà influenzata dai dati iniziali e dai punti griglia generati nei passi precedenti di MLS. Iterando questo procedimento, i punti griglia più vicini al bordo saranno costruiti sfruttando le informazioni originali e quelle acquisite dalle valutazioni successive. Poichè ad ogni passo di MLS il numero dei punti \mathbf{x}_i aumenta di 1, le matrici B e $W(\mathbf{x})$ vengono riaggornate, in modo da

contenere una riga in più relativamente al nuovo punto. Tale procedura è stata progettata e sperimentata per costruire punti su griglia in modo progressivo a partire da un set di dati completamente scattered. La Fig. 4.4 mostra un esempio di set di dati scattered (asterischi) a partire dai quali si vuole costruire un'intera griglia rettangolare 17×9 (i cerchietti di Fig. 4.4). In Fig. 4.5 sono visualizzate le mesh con i vertici ottenuti applicando l'algoritmo MLS (sinistra) e PGF (destra). Gli errori calcolati sono rispettivamente $r^2 = 0.8934$ e $r^2 = 0.9160$.

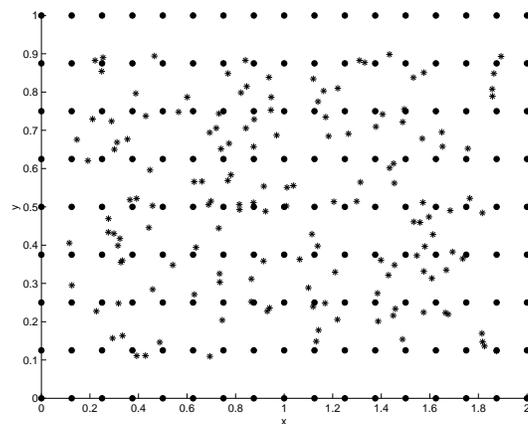


Figura 4.4: Set di 150 punti scattered presi all'interno del rettangolo $[0, 2] \times [0, 1]$ (asterischi). I cerchietti indicano i valori dei punti griglia calcolati con la tecnica PGF.

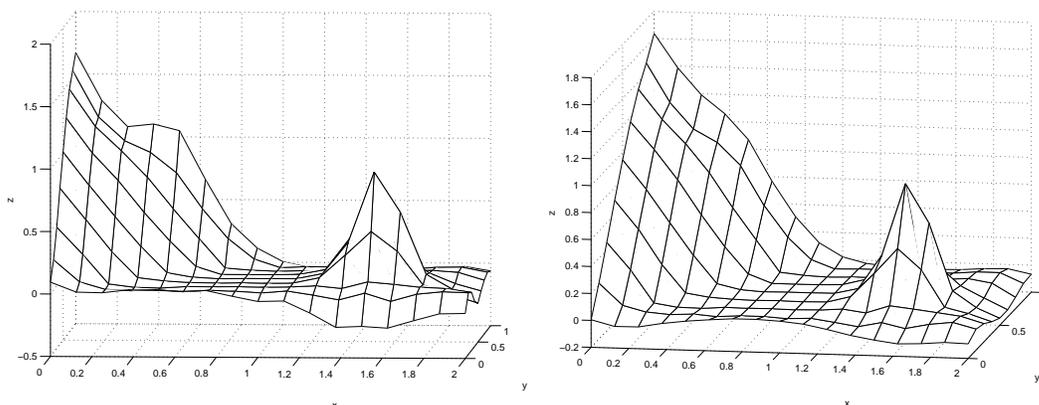


Figura 4.5: Le valutazioni nei punti griglia sono state ottenute con l'algoritmo MLS (sinistra) e PGF (destra).

4.3.4 Metodi composti PGF-interpolazione Box spline

Dato un generico dominio di punti scattered, mediante il metodo PGF, abbiamo calcolato i valori dei punti su una griglia contenuta nel dominio. In questo paragrafo

verranno illustrati alcuni risultati relativi ad una ricostruzione di superfici con Box spline a partire da dati scattered processati con l'algoritmo PGF. Parleremo in questo caso di *metodi composti PGF-Box spline*, intendendo i seguenti passi:



Si considerino i punti scattered di Fig. 4.1. I valori f_1, \dots, f_{150} sono calcolati come le altezze della funzione test $f(x, y)$ definita in (3.17), in corrispondenza dei punti random. Si è utilizzato il metodo PGF considerando l'algoritmo MLS con funzioni peso del tipo (4.6), dove $\alpha = 1/16$, $\varepsilon = 10^{-6}$ e con polinomi di grado 2. A partire dalla griglia 17×9 così generata, si è applicata una interpolazione Box spline, con funzioni base M_{222} . Nella Fig. 4.7 sono mostrati il set di dati a griglia generato, la ricostruzione Box spline e come confronto, una ricostruzione MLS a partire dagli stessi dati scattered.

Si noti che la superficie ottenuta con il metodo composto non è di interpolazione dei dati scattered originali, come invece il metodo MLS diretto. Per generare la superficie MLS, per ogni punto di valutazione (nel caso della Fig. 4.7 sono $41 \times 21 = 861$) è necessario risolvere un sistema lineare di dimensione 150×150 ; utilizzando il metodo composto PGF-Box spline è sufficiente valutare la superficie MLS in $17 \times 9 = 153$ punti (risolvendo ogni volta un sistema lineare $150 + i \times 150 + i$, $i = 0, \dots, 152$) e applicare poi l'interpolazione Box spline. Le ricostruzioni ottenute sono molto simili, ma il tempo di esecuzione del metodo composto risulta molto inferiore. Incrementando il numero di dati scattered tale differenza diventa sempre più evidente (vedi Fig. 4.6).

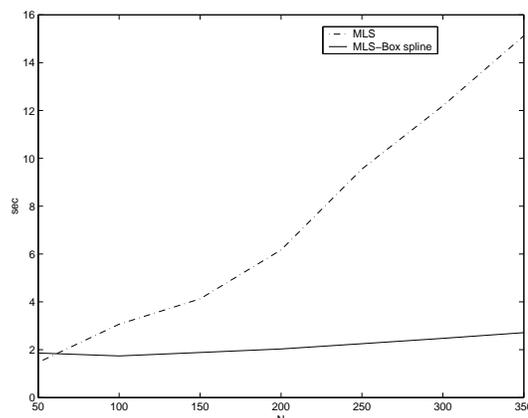


Figura 4.6: Confronto tra i tempi di esecuzione dell'algoritmo MLS e del metodo composto PGF-Box spline nel problema test (3.17).

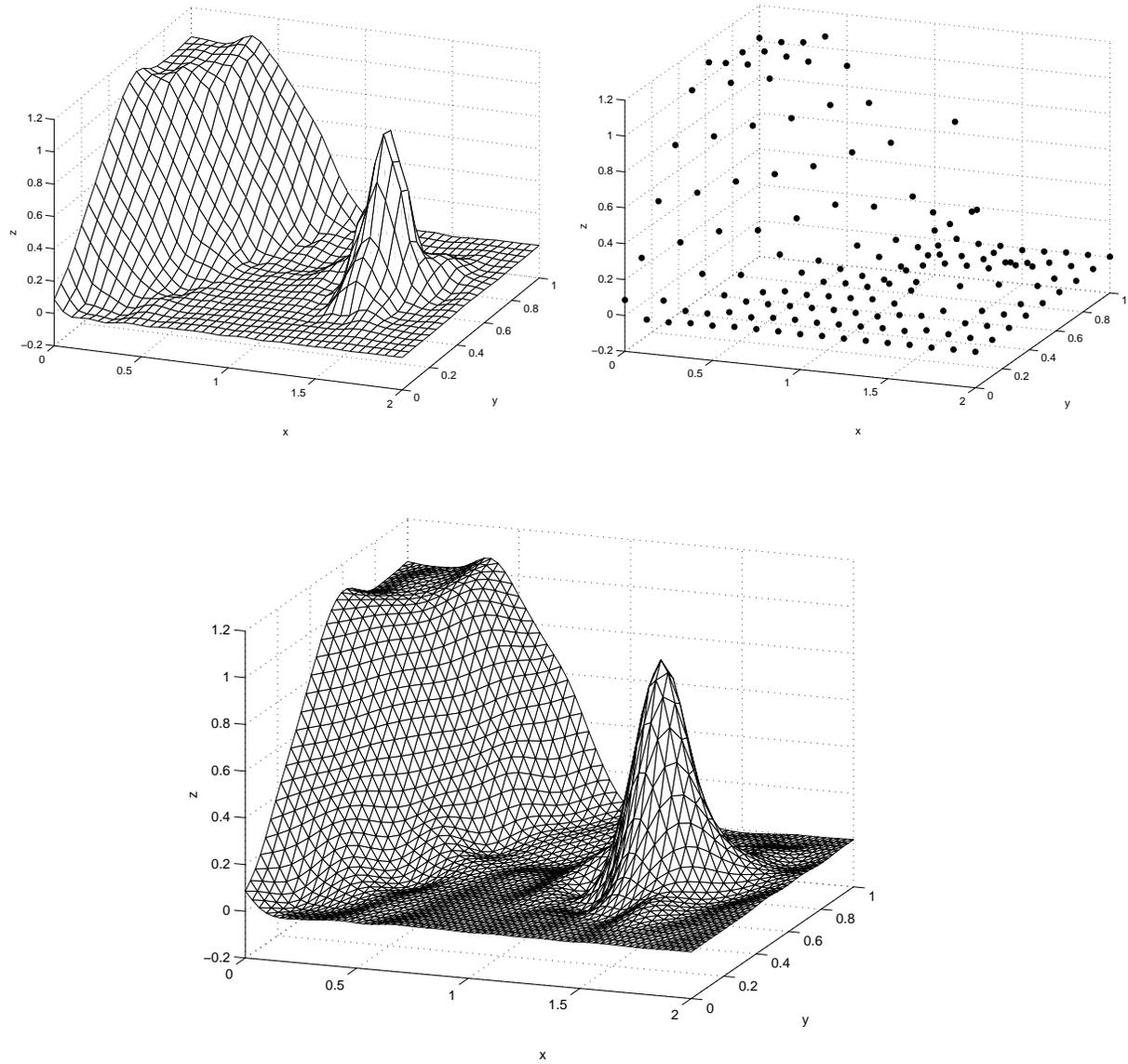


Figura 4.7: In alto a sinistra: superficie 41×21 generata con l’algoritmo MLS; in alto a destra: 17×9 punti generati con PGF e da interpolare; in basso: superficie interpolante Box spline costruita con funzioni base M_{222} e condizioni esterne lineari.

Sono stati effettuati poi ulteriori confronti, su alcune funzioni test bivariate (Fig. 4.8), già esaminate in letteratura e introdotte da Franke ([38], [39]):

$$\begin{aligned}
 F1(x, y) &= \frac{3}{4} \exp\{ -[(9x - 2)^2 + (9y - 2)^2]/4 \} \\
 &+ \frac{3}{4} \exp\{ -(9x + 1)^2/49 - (9y + 1)/10 \} \\
 &+ \frac{1}{2} \exp\{ -[(9x - 7)^2 + (9y - 3)^2]/4 \} \\
 &- \frac{1}{5} \exp\{ -(9x - 4)^2 - (9y - 7)^2 \}
 \end{aligned}$$

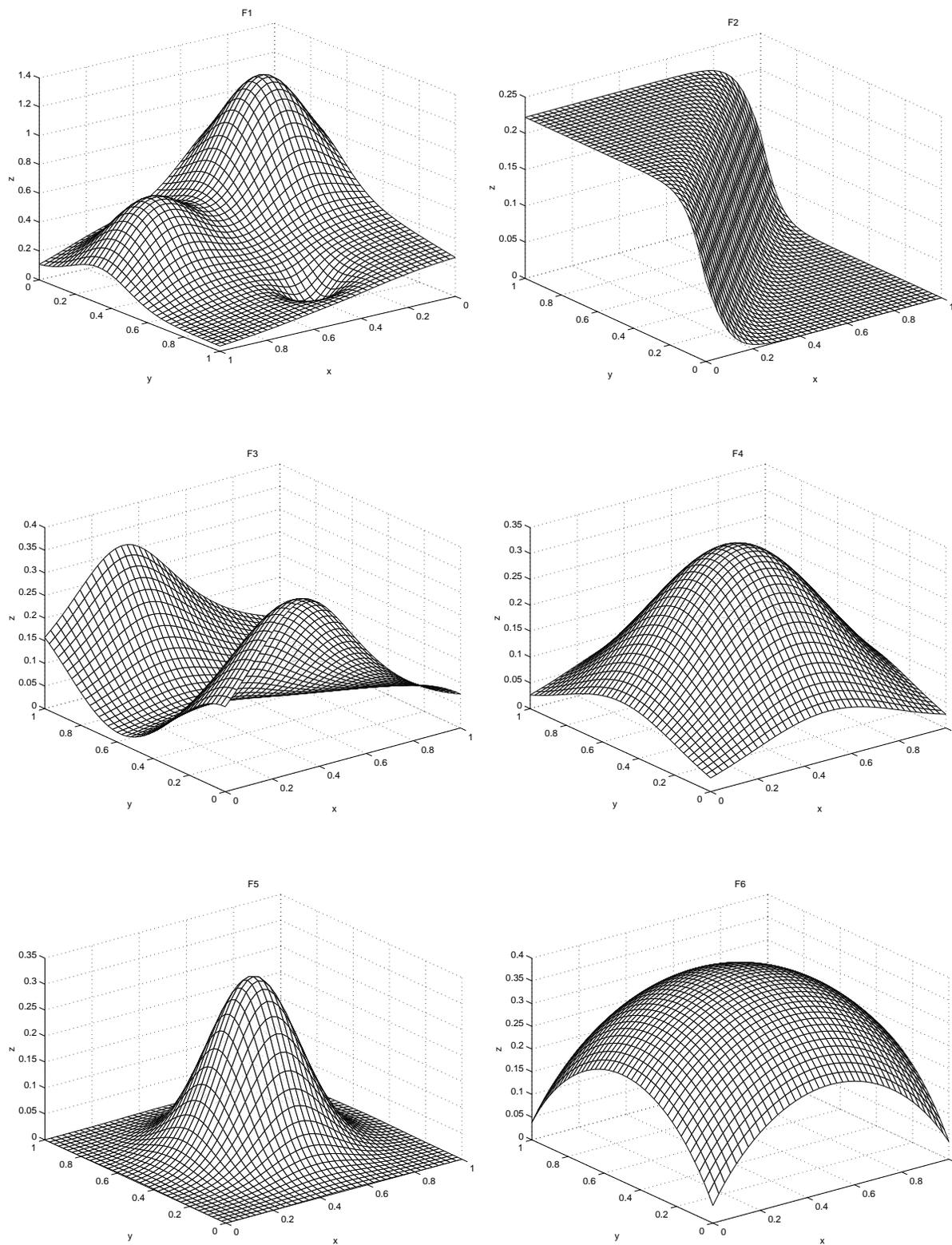


Figura 4.8: Funzioni test bivariate.

$$F2(x, y) = \frac{\tanh(9y - 9x) + 1}{9},$$

$$F3(x, y) = \frac{1.25 + \cos(5.4y)}{6 + 6(3x - 1)^2},$$

$$F4(x, y) = \frac{1}{3} \exp\{-5.0625[(x - 0.5)^2 + (y - 0.5)^2]\},$$

$$F5(x, y) = \frac{1}{3} \exp\{-20.25[(x - 0.5)^2 + (y - 0.5)^2]\},$$

$$F6(x, y) = \frac{1}{9} \sqrt{64 - 81[(x - 0.5)^2 + (y - 0.5)^2]} - 0.5.$$

Abbiamo campionato queste funzioni in differenti insiemi di punti scattered presi in $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$, con diverse distribuzioni nel dominio. In particolare sono stati esaminati insiemi di punti random distribuiti uniformemente e non, nel quadrato unitario (Fig. 4.9-4.10) e chiamati rispettivamente set1, set2, set3.

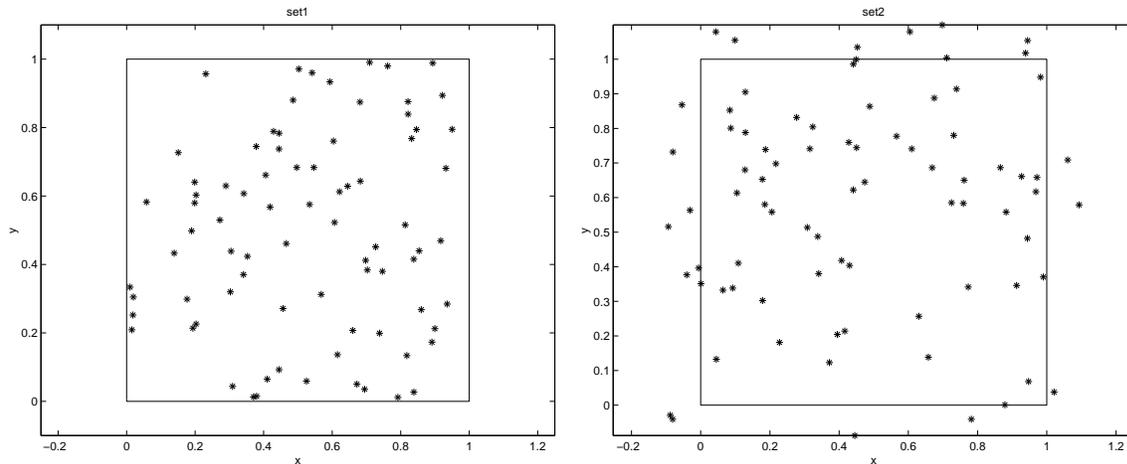


Figura 4.9: A sinistra: insieme di 80 punti random distribuiti uniformemente sul quadrato $[0, 1] \times [0, 1]$; a destra: insieme di 80 punti random distribuiti uniformemente sul quadrato $[-0.1, 1.1] \times [-0.1, 1.1]$.

Per il calcolo dei punti di interpolazione sulla griglia 8×8 , è stato utilizzato il metodo PGF con polinomi di grado 4 e gli stessi pesi dell’esempio precedente. La composizione

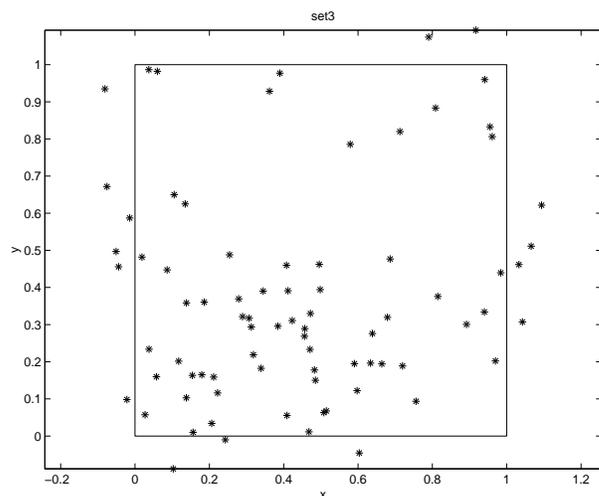


Figura 4.10: Insieme di 80 punti random distribuiti in modo non uniforme sul quadrato $[-0.1, 1.1] \times [-0.1, 1.1]$.

FUNZIONE	set1	set2	set3
$F1$	0.9879	0.9858	0.9872
$F2$	0.9801	0.9840	0.9875
$F3$	0.9959	0.9979	0.9939
$F4$	0.9804	0.9990	0.9947
$F5$	0.4781	0.9695	0.9023
$F6$	0.9962	0.9957	0.9956

Tabella 4.3: Valore di r^2 per alcune funzioni test.

PGF-interpolazione con Box spline M_{222} ha generato le superfici di Fig. 4.11-4.12-4.13. La tabella 4.3 mostra l'errore di approssimazione per le diverse funzioni nei tre casi detti.

Utilizzando le Box spline bivariate a quattro direzioni si è sfruttato il metodo PGF per generare i punti di interpolazione sul sottomodulo \mathcal{F} definito da (3.14). La Fig. 4.14 mostra il risultato della composizione del metodo PGF e dell'interpolazione con Box spline a quattro direzioni M_{1111} . I punti scattered sono quelli di Fig. 4.1. La superficie ottenuta presenta ondulazioni indesiderate in prossimità del gradino, dovute probabilmente alla disposizione dei punti di interpolazione sulla griglia del sottomodulo.

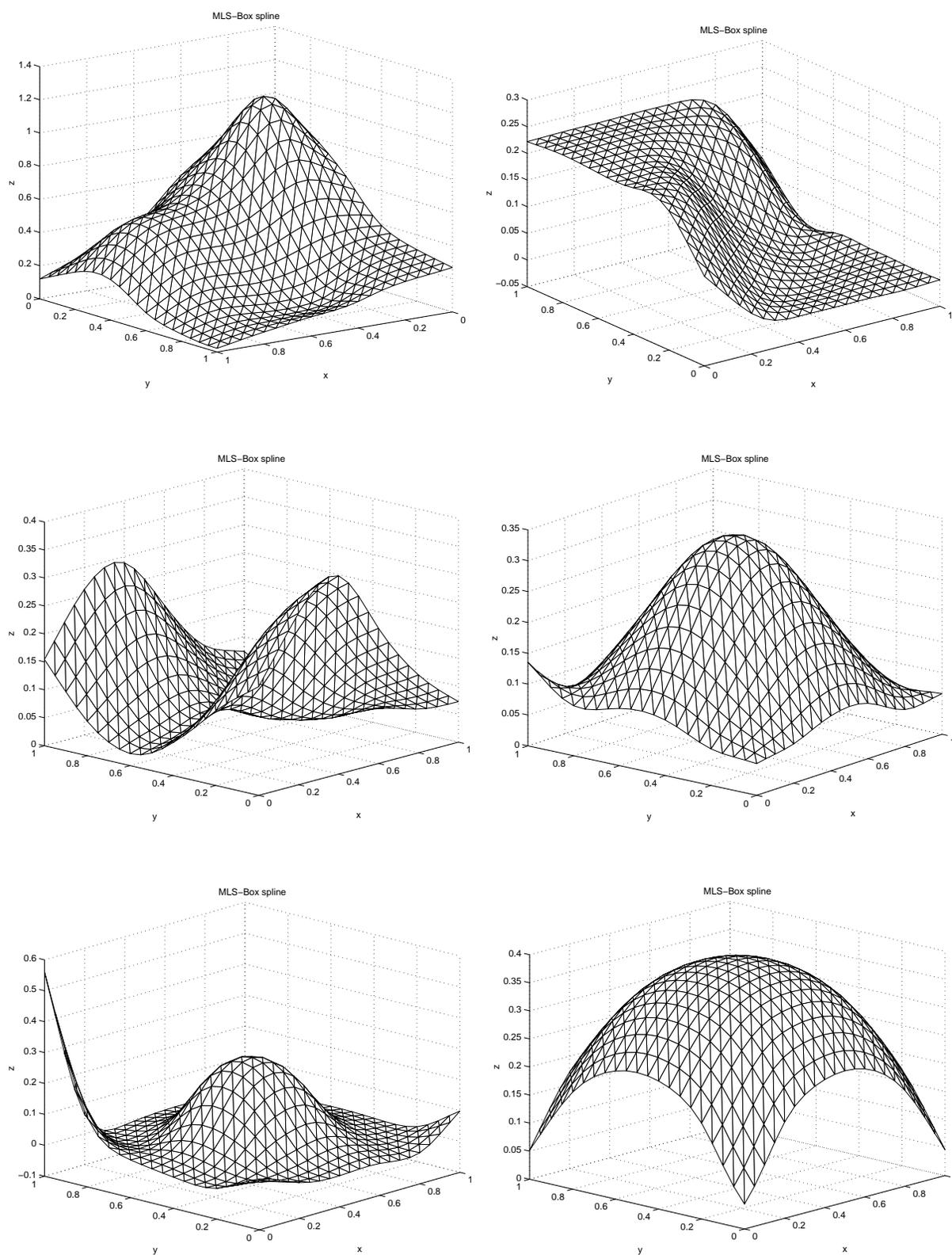


Figura 4.11: Metodo composto PGF-Box spline sui dati dell'insieme set1.

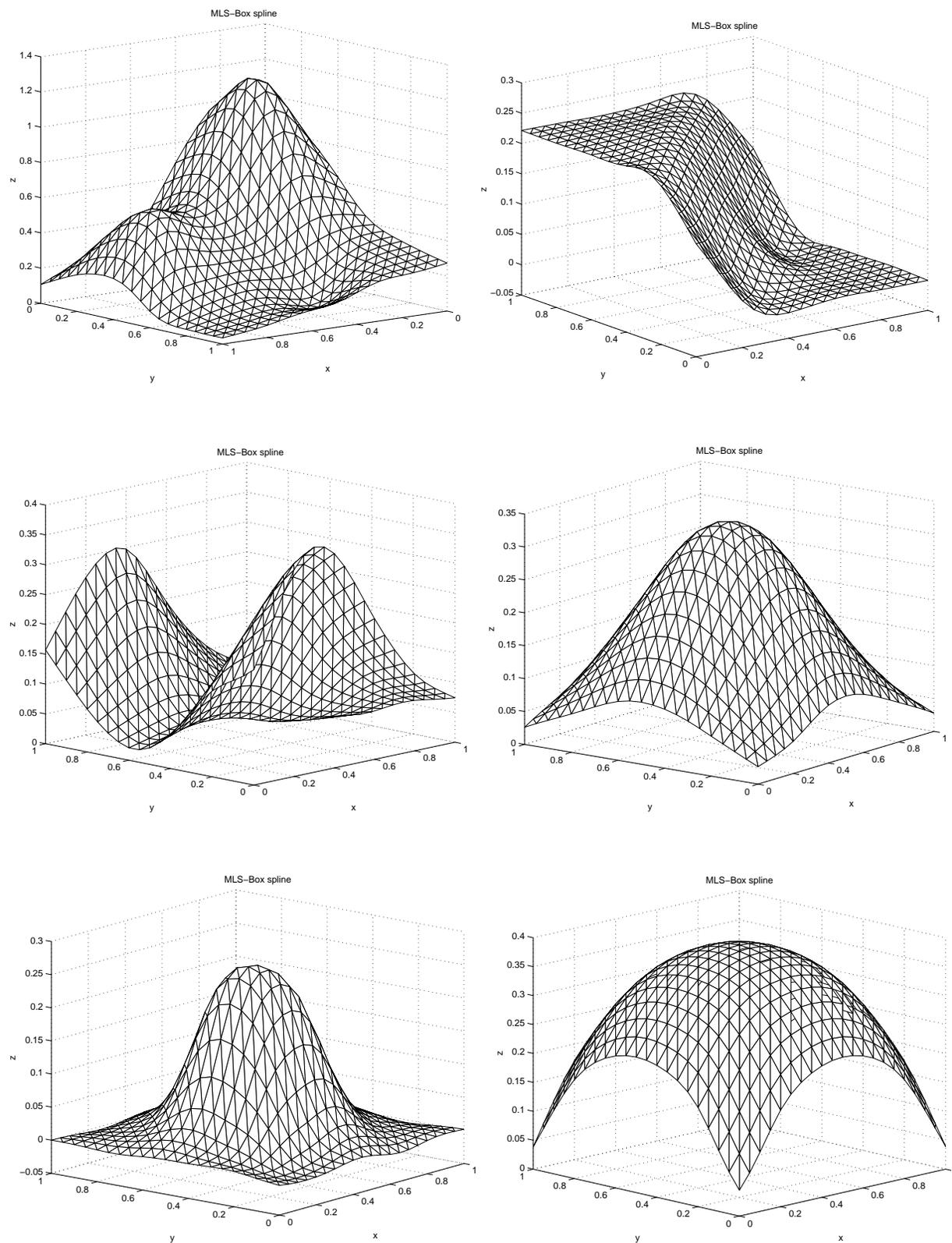


Figura 4.12: Metodo composto PGF-Box spline sui dati dell'insieme set2.

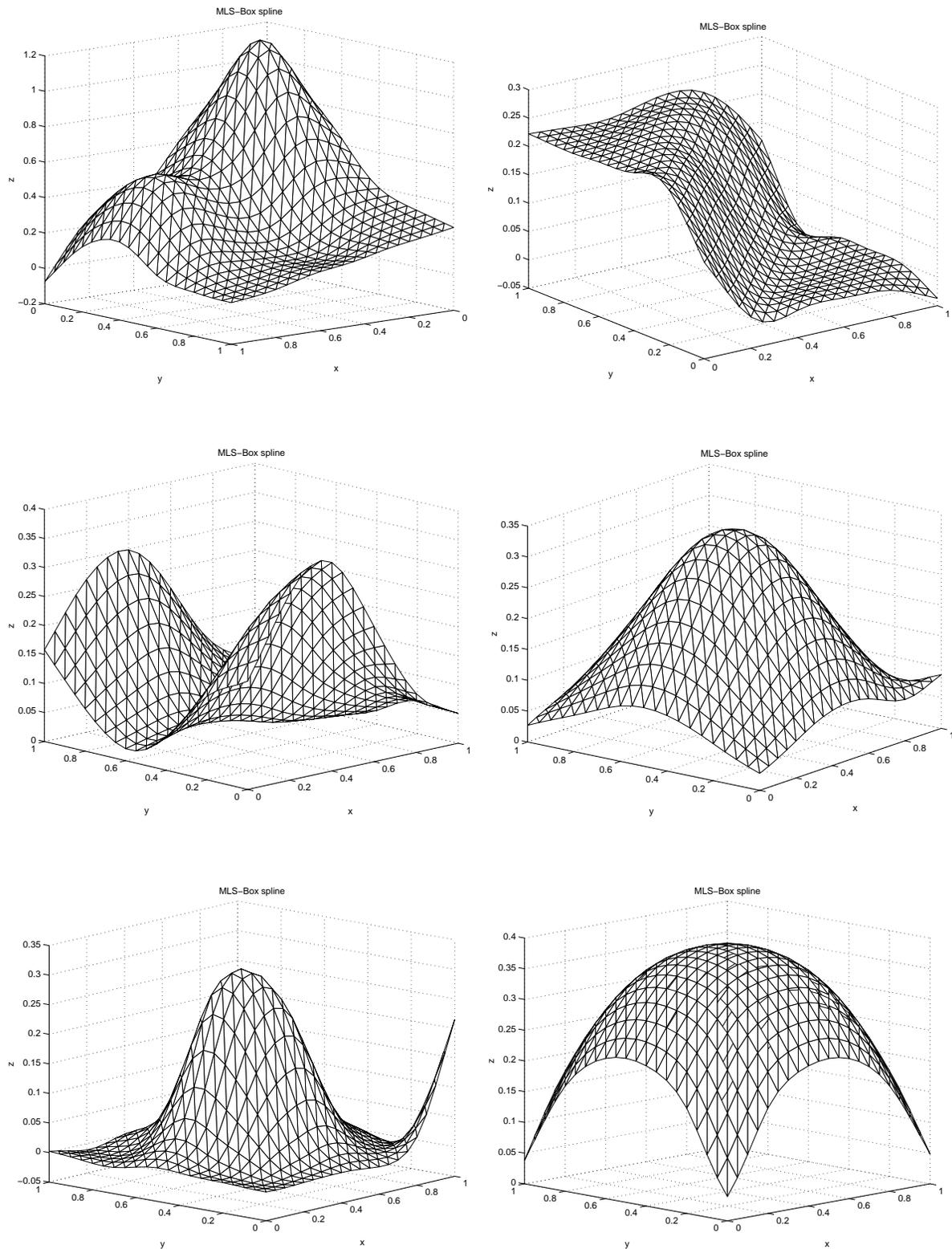


Figura 4.13: Metodo composto PGF-Box spline sui dati dell'insieme set3.

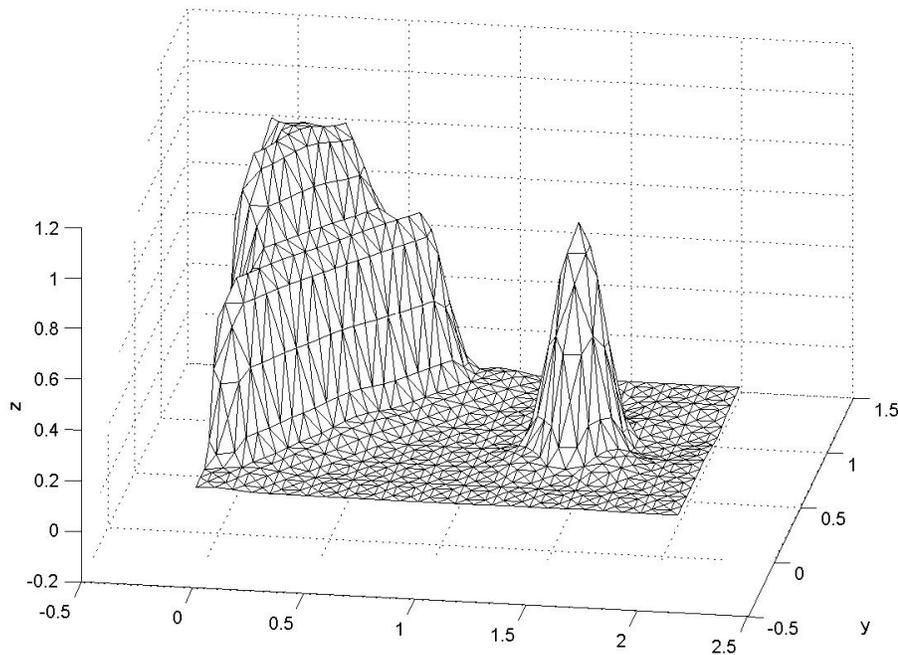


Figura 4.14: Metodo composto PGF-Box spline a quattro direzioni.

Nel caso trivariato si sono prese in considerazione le seguenti funzioni test, visualizzate in Fig. 4.15:

$$F7(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 \quad (x, y, z) \in [-1, 1] \times [-1, 1] \times [-1, 1];$$

$$F8(x, y, z) = \max\{\max\{(x^2 - 1), (y^2 - 1)\}, (z^2 - 1)\} \quad (x, y, z) \in [0, 2] \times [0, 2] \times [0, 2];$$

$$F9(x, y, z) = x^2 + y - z^2 \quad (x, y, z) \in [-1, 1] \times [-1, 1] \times [-1, 1].$$

Ragionando analogamente al caso bivariato, il metodo composto PGF-Box spline consiste nel ricavare i punti di interpolazione sulla griglia dello spazio 3D applicando l'MLS ai dati scattered. Dopodiché, interpolando con Box spline tali valori, si ottiene il volume ricostruito, da cui, estraendo la isosuperficie a livello 0, si ha un'approssimazione della funzione originaria. Il set di dati di sperimentazione è quello di Fig. 4.16. Le superfici di Fig. 4.17-4.18-4.19 sono state ottenute con il metodo composto PGF-Box spline, con funzioni polinomiali quadratiche, pesi uguali a quelli considerati per il caso bivariato, Box spline trivariate M_{2222} . La tabella 4.4 riporta i valori di r^2 per le tre funzioni test.

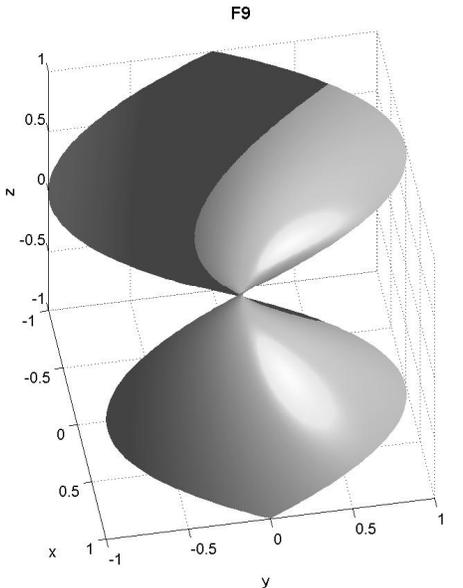
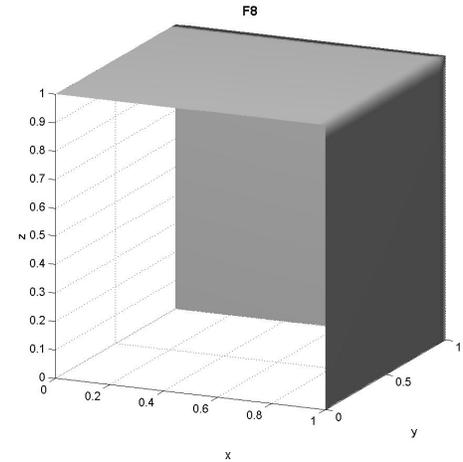
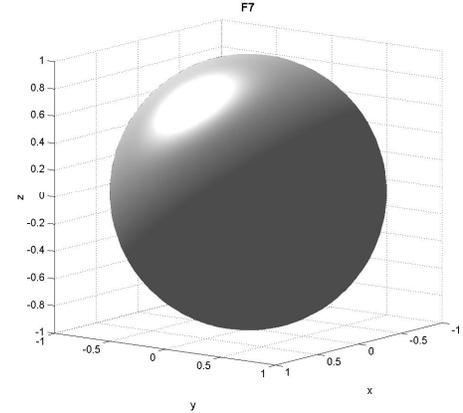


Figura 4.15: Funzioni test trivariate.

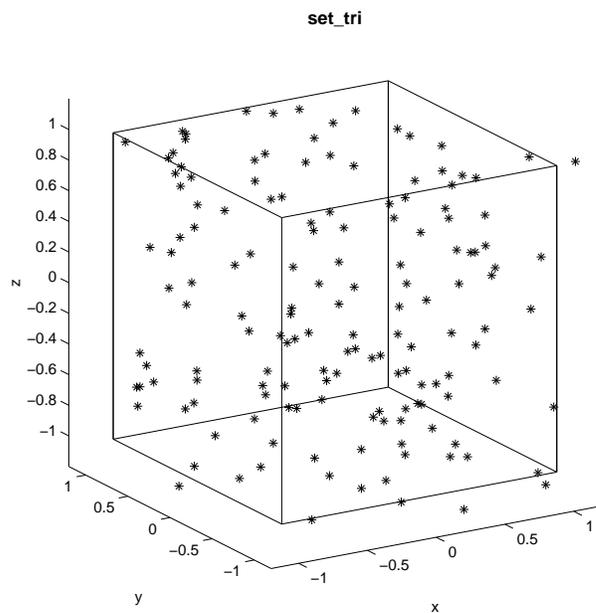


Figura 4.16: Insieme di 150 punti random distribuiti uniformemente.

FUNZIONE	r^2
$F7$	0.9996
$F8$	0.9809
$F9$	0.9928

Tabella 4.4: Valore di r^2 per alcune funzioni test.

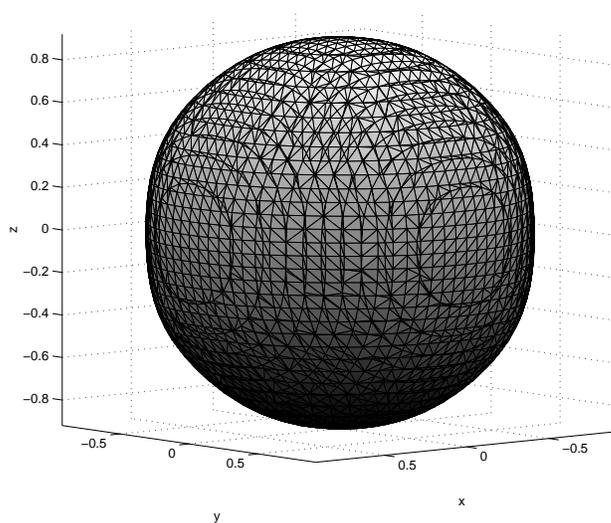


Figura 4.17: Metodo composto PGF-Box spline applicato alla funzione $F7$.

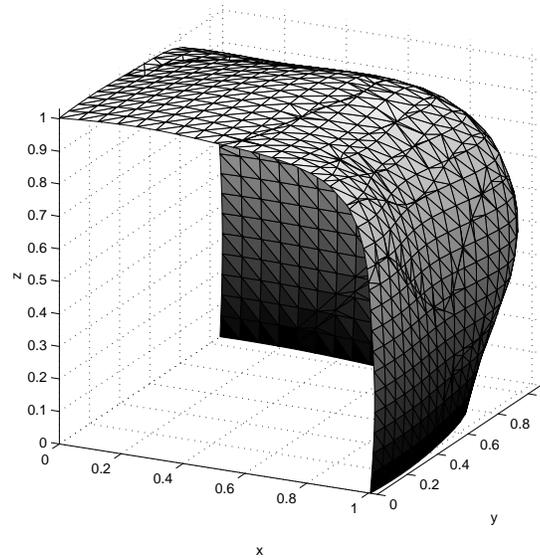


Figura 4.18: Metodo composto PGF-Box spline applicato alla funzione $F8$.

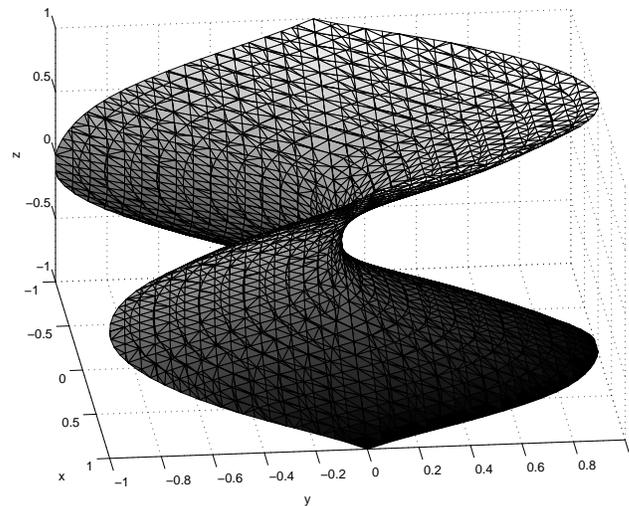


Figura 4.19: Metodo composto PGF-Box spline applicato alla funzione $F9$.

4.4 Partizione dell'unità (POU)

Come già sottolineato all'inizio del capitolo, nelle tecniche di digitalizzazione di oggetti e di ricostruzione, una volta catturati i punti dell'oggetto, non è banale costruire una rappresentazione della superficie che rispecchi fedelmente i dati rilevati. Oltre a ricercare una buona approssimazione dei punti da interpolare e una fedele riproduzione delle caratteristiche dell'oggetto, il metodo di ricostruzione deve essere veloce ed efficiente e organizzato in modo da gestire una grande quantità di dati utilizzando poca memoria.

Inoltre deve essere robusto in presenza di buchi o di zone con una bassa densità di informazioni. Per insiemi di dati di grandi dimensioni, una gestione globale delle informazioni risulta inadeguata da un punto di vista computazionale, poichè per una buona ricostruzione è necessario tener conto di tutti i punti contemporaneamente. Questa considerazione ci ha condotto verso lo studio di approcci locali. Una delle tecniche più diffuse per gestire localmente diverse zone del dominio, è sicuramente il metodo *partition of unity* (POU). Questo consente di lavorare con un numero inferiore di dati alla volta e di evidenziare le caratteristiche di ogni zona. Già alcuni studiosi ([13], [35]) si sono occupati di selezionare e classificare gli andamenti dei punti nelle varie zone, in modo da costruire interpolanti locali appropriati, capaci di cogliere appieno le informazioni dei dati.

L'idea principale dell'approccio POU è quella di dividere il dominio globale su cui è definita la superficie da ricostruire, in sottodomini più piccoli, dove il problema è risolvibile localmente. In altre parole, il difficile problema di gestire un ampio set di dati viene decomposto in più sottoproblemi, le cui soluzioni vengono combinate insieme secondo alcune funzioni peso che miscelano i diversi interpolanti locali in un'unica superficie. Più formalmente, sia $\mathbb{R}^s \supset P = \{\mathbf{x}_i, \quad i = 1, \dots, N\}$ l'insieme dei punti scattered e $\{f_i, \quad i = 1, \dots, N\}$ i rispettivi valori reali. Si consideri il dominio globale Ω che contiene i punti \mathbf{x}_i e lo si divida in N sottodomini $\{\Omega_i\}_{i=1}^N$, con $\Omega \subseteq \bigcup_i \Omega_i$. Sia $\{\overline{W}_i\}_{i=1}^N$, $\overline{W}_i : \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}$ una collezione di funzioni non negative con supporto limitato $\text{supp}(\overline{W}_i) \subseteq \Omega_i$ e tali che $\sum_i \overline{W}_i = 1$ sull'intero dominio Ω . Per ogni Ω_i si ricava l'insieme dei punti scattered contenuti, $P_i = \{\mathbf{x}_j \in P \mid \mathbf{x}_j \in \Omega_i\}$, e si associa l'interpolante relativo $F_i(\mathbf{x})$ con dominio contenente $\text{supp}(\overline{W}_i)$. La soluzione globale viene calcolata come una combinazione di tali funzioni locali secondo le funzioni peso \overline{W}_i , ossia

$$F(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N \overline{W}_i(\mathbf{x}) F_i(\mathbf{x}). \quad (4.9)$$

La proprietà $\sum_i \overline{W}_i = 1$ è ottenuta per un qualsiasi insieme di funzioni W_i attraverso un processo di normalizzazione:

$$\overline{W}_i(\mathbf{x}) = \frac{W_i(\mathbf{x})}{\sum_j W_j(\mathbf{x})}.$$

Siano i sottodomini Ω_i , centrati in \mathbf{x}_i , così definiti:

$$\Omega_i = \{\mathbf{x} : \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|_2 < \rho_i\},$$

dove ρ_i viene scelto in modo che l'unione degli insiemi Ω_i rappresenti un ricoprimento del dominio Ω . Si ha dunque che

$$\mathbf{x}_j \in P_i \Leftrightarrow \|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i\|_2 < \rho_i.$$

Si noti che la possibilità di scegliere un raggio di influenza per ogni dato è fondamentale qualora la distribuzione dei punti non sia uniforme. In questo modo, modificando questo parametro, si assicura comunque un minimo numero di punti \mathbf{x}_i all'interno del sottodominio Ω_i .

Ora definiamo la i -esima funzione peso a supporto compatto come

$$\bar{W}_i(\mathbf{x}) = \frac{W_i(\mathbf{x})}{\sum_{k=1}^N W_k(\mathbf{x})} \quad \text{con } W_i(\mathbf{x}) = \left[\frac{(\rho_i - D_i(\mathbf{x}))_+}{\rho_i D_i(\mathbf{x})} \right]^{\gamma_i}, \quad (4.10)$$

dove $D_i(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|_2$ è la classica distanza euclidea tra \mathbf{x} e il punto \mathbf{x}_i ; il pedice $+$ indica il troncamento a 0 dell'argomento quando $\rho_i - D_i(\mathbf{x}) < 0$, inoltre γ_i è un numero strettamente positivo, che determina la regolarità della i -esima funzione peso. Poichè i pesi considerati sono funzioni troncate, nella sommatoria di (4.9) alcuni contributi sono nulli, dunque si può scrivere

$$F(\mathbf{x}) = \sum_{i \in N_{\mathbf{x}}} \bar{W}_i(\mathbf{x}) F_i(\mathbf{x}), \quad (4.11)$$

dove $N_{\mathbf{x}}$ è l'insieme degli indici dei nodi \mathbf{x}_i tale che $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|_2 < \rho_i$, ossia i dati la cui regione di influenza contiene \mathbf{x} . Le funzioni peso così definite soddisfano alcune proprietà fondamentali per caratterizzare la superficie risultante. In particolare si ha il seguente teorema:

Teorema 4.3. *Le funzioni $\bar{W}_i(\mathbf{x})$ definite in (4.10) soddisfano le seguenti proprietà:*

1. $\bar{W}_i(\mathbf{x}) \geq 0$ per $\mathbf{x} \in \Omega$ e $\text{supp}(\bar{W}_i) \equiv \Omega_i$;
2. $\bar{W}_i(\mathbf{x}_k) = \delta_{ik}$, $i, k = 1, \dots, N$;
3. $\sum_{i \in N_{\mathbf{x}}} \bar{W}_i(\mathbf{x}) = 1$ per $\mathbf{x} \in \Omega$;
4. $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_j} \nabla \bar{W}_i(\mathbf{x}) = 0$, $\forall \mathbf{x}_j \in P$ se $\gamma_i > 1$.

Dimostrazione. Per la dimostrazione si consulti [14].

□

Queste proprietà influenzano pesantemente le caratteristiche dell'interpolante $F(\mathbf{x})$. In particolare la proprietà 2. implica che $F(\mathbf{x}_i) = F_i(\mathbf{x}_i)$, cioè la funzione risultante valutata in un nodo coincide con il valore dell'interpolante locale nel nodo stesso. Quindi si ha che $F(\mathbf{x}_i) = f_i, \forall i = 1, \dots, N$. La proprietà 4. invece garantisce l'interpolazione delle derivate prime parziali delle funzioni F_i nei punti dati. Infatti per $i = 1, \dots, N$

$$\nabla F(\mathbf{x}_i) = \sum_{k \in N_{\mathbf{x}}} [\nabla \bar{W}_k(\mathbf{x}_i) F_k(\mathbf{x}_i) + \bar{W}_k(\mathbf{x}_i) \nabla F_k(\mathbf{x}_i)] = \nabla F_i(\mathbf{x}_i).$$

Inoltre la regolarità di $F(\mathbf{x})$ dipende dalla regolarità delle funzioni interpolanti e delle funzioni peso che hanno contribuito non nullo nella ricostruzione in \mathbf{x} . Precisamente se, per $i = 1, \dots, N$, $F_i \in \mathcal{C}^l(\Omega)$, posto $\gamma = \min_{i \in N_{\mathbf{x}}} \{\gamma_i\}$ e $l = \min_{i \in N_{\mathbf{x}}} \{l_i\}$, abbiamo che $F(\mathbf{x}) \in \mathcal{C}^s$, dove $s = \min\{\gamma, l\}$.

4.4.1 Interpolanti locali Box spline

In letteratura sono stati proposti interpolanti locali di diversa natura ognuno con caratteristiche proprie, vantaggi e svantaggi: le ormai consolidate RBF, le RBF anisotropiche, funzioni bivariate polinomiali quadratiche in coordinate locali, funzioni quadratiche a tratti, ecc. In questa sezione ci siamo proposti di verificare il comportamento di interpolanti Box spline locali, studiando diverse tecniche di partizione dell'unità e mostrando alcuni esempi di possibile applicazione. Come abbiamo già osservato, l'utilizzo di funzioni Box spline prevede un passo iniziale di costruzione della griglia dei punti di interpolazione tramite MLS, che ora avverrà localmente.

Local Progressive Grid Filling (LPGF)

In un contesto di approccio locale, sorge la necessità di generare punti su griglia per effettuare interpolazioni Box spline locali; analogamente a quanto fatto si applica un processo PGF locale, dove cioè i punti generati su griglia sono influenzati dai dati iniziali interni ad un cerchio di raggio ρ e dai punti su griglia precedentemente generati. In un contesto di MLS locale, quale quello in cui siamo, in letteratura ([52]) vengono suggerite funzioni peso troncate così da garantire un'influenza locale dei dati e la regolarità delle funzioni peso. A questo proposito sia $m_i(\mathbf{x}), i = 1, \dots, N$ una funzione con le seguenti proprietà:

1. $m_i \in \mathcal{C}^l(\Omega)$, è strettamente positiva su Ω_i , dove $\bar{\Omega}_i$ è il suo supporto, compatto e semplicemente connesso.

2. Per ogni $\mathbf{x} \in \bar{\Omega}$ esistono $i_1, \dots, i_k, k \geq n$ indici dipendenti da \mathbf{x} , tali che $\mathbf{x} \in \bigcap_{j=1}^k D_{i_j}$ e $\{\mathbf{x}_{i_1}, \dots, \mathbf{x}_{i_k}\}$ contiene un sottoinsieme di n punti su cui $\{b_i\}_{i=1}^n$ è indipendente.

Nel caso di sola approssimazione è sufficiente scegliere funzioni peso $w_i = m_i$ perchè siano assicurate le proprietà di regolarità richieste. Normalizzando le funzioni peso secondo la definizione (4.7) si ottengono $v_i \in \mathcal{C}^l(\Omega)$ e non negative. La condizione 2 garantisce la sua definizione positiva e quindi l'esistenza di un'unica soluzione.

Nelle applicazioni è conveniente scegliere come D_i un disco aperto di raggio ρ centrato in \mathbf{x}_i . In questo modo gli unici punti che interverranno nel calcolo della superficie saranno quelli per cui $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\| < \rho$. Chiaramente il raggio ρ è scelto in modo da soddisfare le condizioni 1-2. Può essere utile rendere ρ dipendente da i , in modo da trattare più accuratamente problemi in cui la densità dei punti varia in maniera significativa da regione a regione.

Nel caso di interpolazione, come già visto, è necessario introdurre nelle funzioni peso una singolarità in corrispondenza dei punti \mathbf{x}_i . A questo proposito è possibile generalizzare la scelta del Teorema 4.1, ponendo

$$w_i(\mathbf{x}) = m_i(\mathbf{x}) \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|^{-\alpha_i}, \quad \alpha_i \in 2\mathbb{N}$$

dove m_i soddisfa 1-2. I teoremi visti precedentemente continuano quindi a valere, assicurando l'esistenza di un interpolante di classe \mathcal{C}^k , dove k è il minimo tra il grado di continuità delle funzioni peso e della classe di funzioni in cui si approssima.

Osservazione 20. Spesso risulta conveniente definire i pesi $w_i(\mathbf{x})$ come traslazioni di funzioni standard $w(\mathbf{x})$, cioè $w_i(\mathbf{x}) = w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)$, $i = 1, \dots, N$.

Seguono alcuni esempi di funzioni peso troncate utilizzate nella nostra sperimentazione:

$$w1(\mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{\rho^2}{\mathbf{x}^2} \cos^2\left(\frac{\pi\mathbf{x}}{2\rho}\right) & \text{per } |\mathbf{x}| \leq \rho \\ 0 & \text{per } |\mathbf{x}| > \rho \end{cases}, \quad (4.12)$$

$$w2(\mathbf{x}) = \begin{cases} \left(\frac{\rho - |\mathbf{x}|}{\rho|\mathbf{x}|}\right)^\gamma & \text{per } |\mathbf{x}| \leq \rho \\ 0 & \text{per } |\mathbf{x}| > \rho \end{cases}, \quad (4.13)$$

$$w3(\mathbf{x}) = \frac{\rho}{\mathbf{x}^2} \left(1 - \frac{|\mathbf{x}|}{\rho}\right)_+^2. \quad (4.14)$$

I metodi che seguono differiscono tra loro nella scelta delle funzioni peso e nella suddivisione del dominio in più zone. Il primo consiste nel metodo POU di interpolazione

o approssimazione con funzioni Box spline. Il secondo è volto a migliorare l'efficienza e la velocità dell'algoritmo, mantenendo tuttavia una buona qualità di ricostruzione della superficie.

Metodo I

Nel metodo POU il dominio viene suddiviso in sottodomini Ω_i , $i = 1, \dots, N$ centrati nei punti scattered \mathbf{x}_i . Per ogni Ω_i considereremo come interpolante locale $F_i(\mathbf{x})$ (vedi (4.11)) una Box spline $M_i(\mathbf{x})$; la sua costruzione necessita di una prima rielaborazione dei dati che permette di passare da punti scattered a punti su griglia. Analogamente a quanto visto nei paragrafi precedenti, sfruttiamo l'algoritmo LPGF per riportare i dati scattered all'interno di Ω_i su punti di $h\mathbb{Z}^s$. È possibile scegliere il numero dei punti di interpolazione campionati sulla superficie MLS modificando il valore di h (vedi Fig. 4.20 in alto). La Box spline M_i generata approssima i valori dei punti dell'insieme P_i . Come già osservato, nel metodo composto PGF-Box spline non si ha una effettiva interpolazione dei dati, a causa del passaggio intermedio di moving least square. Questo semplicemente perché le Box spline interpoleranno i punti su griglia e non i punti originali. Tuttavia, facendo coincidere uno dei punti su griglia con un punto scattered, sarà garantita l'interpolazione dei dati originali. Stabilito il raggio di influenza ρ_i del dato \mathbf{x}_i e fissato il valore h di raffinamento della griglia, si costruisce un set di punti su griglia contenente \mathbf{x}_i (vedi Fig. 4.20 in basso).

Si osservi inoltre che il supporto della funzione Box spline locale non è necessariamente rettangolare. Con l'algoritmo PGF, tipicamente, calcoliamo i valori sui punti di una griglia di $h\mathbb{Z}^s$ solo dove occorrono e non obbligatoriamente su tutto il supporto della funzione Box spline. Poiché le funzioni peso hanno supporto compatto coincidente con il disco Ω_i , i punti delle Box spline locali, esterni a tale sottodominio, non verranno affatto considerati. La strategia PGF, nei casi in cui si ha scarsità di informazione su una regione del disco (vedi Fig. 4.21), garantisce una ricostruzione più fedele all'andamento dei dati rispetto ad utilizzare un semplice MLS.

Osservazione 21. Per garantire la soluzione dell'interpolazione locale si può pensare di definire un set di configurazioni standard di punti griglia per cui numericamente si è dimostrata l'unicità della soluzione.

Riassumiamo i passaggi principali del metodo I:

- Definire il raggio di influenza di ogni nodo \mathbf{x}_i , in modo da garantire il ricoprimento di tutto il dominio;

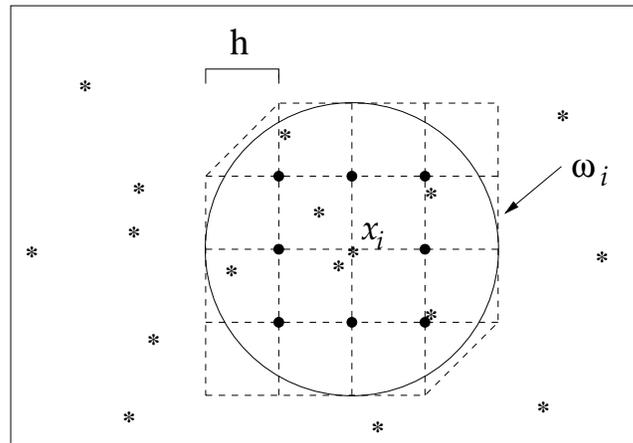
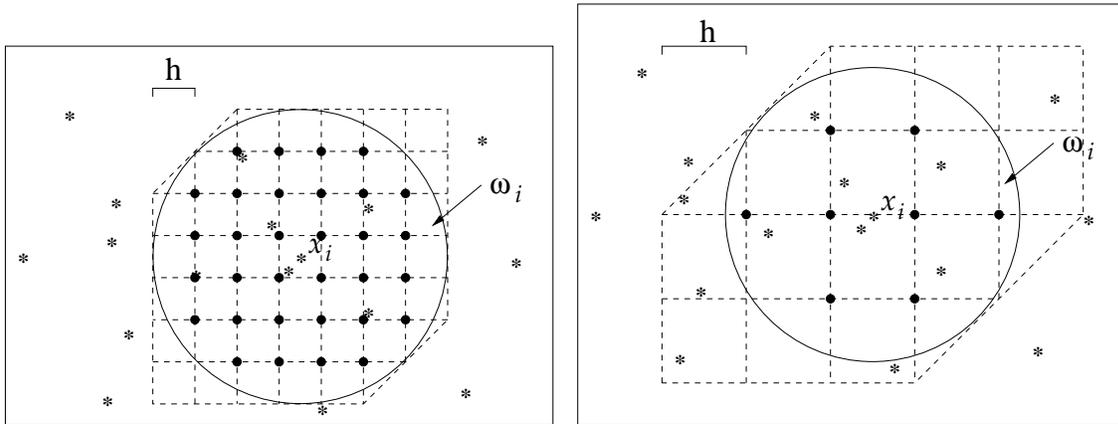


Figura 4.20: Disco di influenza Ω_i e punti sulla griglia $h\mathbb{Z}^2$ (cerchietti) generati con PGF (in alto); se uno dei punti della griglia coincide con il dato \mathbf{x}_i la funzione Box spline locale ne interpolerà il valore (in basso).

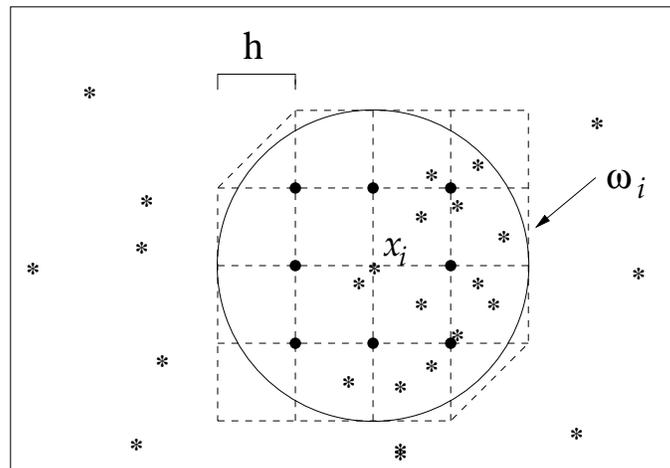


Figura 4.21: Distribuzione non uniforme dei punti all'interno del disco di influenza. In questi casi è particolarmente vantaggioso utilizzare l'algoritmo PGF per il calcolo dei punti griglia.

- applicare l'algoritmo PGF locale per generare i punti di interpolazione su griglia e calcolare l'interpolante Box spline M_i relativo al sottodominio;
- per ogni punto di valutazione identificare gli indici dei dati vicini secondo il raggio ρ_i e per ognuno di questi calcolare $\overline{W}_i(\mathbf{x})$ come in (4.10) ed $M_i(\mathbf{x})$;
- ottenere il valore di $F(\mathbf{x})$ sfruttando la definizione (4.11).

Metodo II

Il metodo I analizzato da diversi studiosi e applicato utilizzando differenti tipologie di funzioni peso e interpolanti locali, presenta il problema di dover gestire un numero di interpolanti pari al numero di punti di interpolazione definiti sul dominio. Una questione di importanza non trascurabile se si pensa alla mole di dati che ci si trova ad affrontare in un problema di ricostruzione. L'idea che si è pensato di sviluppare, è dunque quella di suddividere il dominio Ω in un numero di sottodomini Z_j tipicamente inferiore rispetto al numero di dati da interpolare, costruire dunque su ogni sottodominio un interpolante Box spline e combinarli poi attraverso funzioni peso non negative con supporto Z_j che tengano conto della distribuzione dei punti e delle zone in cui è suddiviso il dominio.

Più precisamente, dato l'insieme dei punti di interpolazione scattered $P = \{\mathbf{x}_i, i = 1, \dots, N\}$, si individui per ognuno un raggio di influenza ρ_i , tale che gli insiemi $\Omega_i = \{\mathbf{x} : \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|_2 < \rho_i\}$ costituiscano un ricoprimento del dominio Ω , in altre parole $\Omega \subseteq \bigcup_{i=1}^N \Omega_i$. I dischi di influenza possono essere calcolati sfruttando diverse strategie: ad esempio imponendo che ogni regione Ω_i contenga gli np punti più vicini, dove np è ricavato in modo da garantire il ricoprimento del dominio. Come nella maggior parte dei casi di ricostruzione in cui ci siamo imbattuti, i punti di interpolazione sono in maggioranza a griglia e solo in particolari zone e in prossimità del bordo, sono scattered. In queste situazioni il raggio di influenza ρ_i coincide con la distanza di \mathbf{x}_i dal punto griglia più vicino. Il ricoprimento è dunque assicurato e la struttura dei dischi è piuttosto regolare.

Generiamo ora le zone su cui verranno costruite le funzioni interpolanti, a partire dai dischi Ω_i . Assegnati gli insiemi di indici I_j , definiamo

$$Z_j = \bigcup_{i \in I_j} \Omega_i, \quad j = 1, \dots, nz, \quad nz \ll N.$$

La funzione interpolante risulta essere una combinazione di Box spline secondo alcune

funzioni peso costruite in modo opportuno:

$$F(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{nz} \bar{W}_j(\mathbf{x}) M_j(\mathbf{x}), \quad (4.15)$$

dove ogni Box spline $M_j(\mathbf{x})$ interpola i punti contenuti nella zona Z_j corrispondente. Le funzioni peso $\bar{W}_j(\mathbf{x})$ sono definite in modo tale che assicurino l'interpolazione dei punti originari, garantiscano le proprietà di continuità della funzione risultante, mantengano le caratteristiche dei singoli interpolanti in ogni zona e, nelle regioni di intersezione, pesino opportunamente i contributi delle funzioni Box spline interessate. Precisamente:

$$\bar{W}_j(\mathbf{x}) = \frac{\sum_{k \in I_j} \frac{1}{n_k} W_k(\mathbf{x})}{\sum_{i=1}^{nz} \sum_{k \in I_i} \frac{1}{n_k} W_k(\mathbf{x})} \quad (4.16)$$

dove n_k è la cardinalità dell'insieme $\{j : \mathbf{x}_k \in Z_j\}$, in altre parole $\forall k = 1, \dots, N$, n_k rappresenta il numero di zone che contengono \mathbf{x}_k . Le funzioni W_k sono scelte in modo tale che il loro supporto coincida con Ω_k . Come suggerisce [62], per generare funzioni $F(\mathbf{x})$ approssimanti è possibile utilizzare le B-spline quadratiche $b(t)$ nel seguente modo:

$$W_k(\mathbf{x}) = b\left(\frac{3D_k(\mathbf{x})}{2\rho_k}\right).$$

Tuttavia, se è richiesta l'interpolazione dei dati, è necessario definire le funzioni peso in modo differente. Analogamente al metodo I abbiamo sfruttato i pesi proposti in [37], [70]:

$$W_k(\mathbf{x}) = \left[\frac{(\rho_k - D_k(\mathbf{x}))_+}{\rho_k D(\mathbf{x})} \right]^{\gamma_k}.$$

Entrambe le funzioni hanno supporto sferico centrato in \mathbf{x}_k e raggio ρ_k . Nella sperimentazione ci siamo limitati ad utilizzare quest'ultima definizione.

Osservazione 22. Si osservi che, essendo W_k a supporto compatto definito dal raggio di influenza ρ_k , la sommatoria in 4.16 si riduce alla seguente forma:

$$\text{se } \mathbf{x} \in \bigcup_{i=1}^{sz} \Omega_i \quad \text{allora} \quad \bar{W}_j(\mathbf{x}) = \frac{\sum_{k \in \{1, \dots, sz\} \cap I_j} \frac{1}{n_k} W_k(\mathbf{x})}{\sum_{i=1}^{nz} \sum_{k \in \{1, \dots, sz\} \cap I_i} \frac{1}{n_k} W_k(\mathbf{x})},$$

essendo nullo il contributo dei punti \mathbf{x}_k “lontani” dal punto di valutazione \mathbf{x} .

Le funzioni peso \overline{W}_j godono delle seguenti proprietà:

1. $\overline{W}_j(\mathbf{x}) \geq 0$, $\text{supp}\overline{W}_j \equiv Z_j$
2. $\sum_{j=1}^{nz} \overline{W}_j(\mathbf{x}) = 1, \forall \mathbf{x} \in \Omega$;
3. $\overline{W}_j(\mathbf{x}) \begin{cases} = 1 & \text{se } \mathbf{x} \in Z_j, \mathbf{x} \notin Z_i, i \neq j \\ = 0 & \text{se } \mathbf{x} \notin Z_j \\ \in (0, 1) & \text{se } \mathbf{x} \in \bigcap_{i=1}^{sz} Z_i, j \in \{1, \dots, sz\} \end{cases}$

Queste proprietà seguono immediatamente dalla definizione e ci garantiscono che la funzione risultante interpola i punti scattered, infatti

$$F(\mathbf{x}_k) = \sum_{j=1}^{nz} \overline{W}_j(\mathbf{x}_k) M_j(\mathbf{x}_k) = f_k \sum_{j=1}^{nz} \overline{W}_j(\mathbf{x}_k) = f_k.$$

Inoltre si osserva che se \mathbf{x} appartiene ad un unico disco Ω_i le funzioni peso \overline{W}_j , $j = 1, \dots, nz$ sono costanti e precisamente

$$\overline{W}_j(\mathbf{x}) \begin{cases} = \frac{1}{n_i} & \text{se } \mathbf{x} \in Z_j \\ = 0 & \text{se } \mathbf{x} \notin Z_j, \end{cases}$$

dove n_i è il numero di zone che contengono il punto \mathbf{x}_i e quindi il disco Ω_i . In questo modo solo gli interpolanti che vivono nella zona interessata danno contributo non nullo alla valutazione nel punto. Inoltre, poichè \mathbf{x} appartiene ad un unico disco Ω_i , eventualmente condiviso da più zone, risulta influenzato da un solo punto scattered ed è dunque logico che i contributi degli interpolanti siano uguali e costanti in tutta la regione interessata. In particolare, se il disco appartiene ad un'unica zona, la funzione risultante $F(\mathbf{x})$ coincide con l'interpolante ivi definito.

Invece, nel caso in cui il punto di valutazione \mathbf{x} appartenga all'intersezione di più dischi Ω_i contenuti in diverse zone, il contributo di ogni interpolante sarà proporzionale al numero dei punti scattered "vicini" a \mathbf{x} contenuti nella zona. Cioè il peso $\overline{W}_j(\mathbf{x})$ è maggiore quanto più è grande il numero di punti \mathbf{x}_k della zona Z_j vicini. In questo modo, oltre alla suddivisione in zone, i pesi \overline{W}_j tengono in considerazione anche della distribuzione dei punti di interpolazione.

Osservazione 23. Questo metodo risulta essere una generalizzazione del metodo I. Se si considerano, infatti, N zone Z_j , si ha che ogni disco Ω_i costituisce una ed una sola

zona, quindi $n_i = 1, \forall i = 1, \dots, N$ e la definizione (4.15) diventa

$$F(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^N \bar{W}_j(\mathbf{x}) M_j(\mathbf{x}),$$

dove

$$\bar{W}_j(\mathbf{x}) = \frac{W_j(\mathbf{x})}{\sum_{i=1}^N W_i(\mathbf{x})}.$$

Ritroviamo dunque le stesse funzioni peso utilizzate nel metodo I.

Per comprendere meglio come si calcolano queste funzioni peso studiamo il seguente esempio:

Esempio 4.1. Prendiamo in considerazione la situazione illustrata in Fig. 4.22.

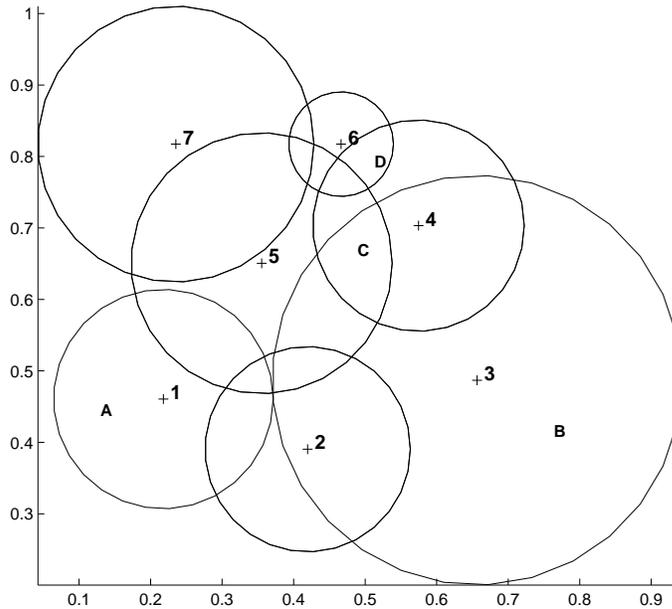


Figura 4.22: Punti scattered e dischi $\Omega_i, i = 1, \dots, 7$.

Siano assegnati i punti $\mathbf{x}_i, i = 1, \dots, 7$ e i rispettivi raggi di influenza ρ_i . Siano definite poi le seguenti zone:

$$Z_1 = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3 \cup \Omega_5 \quad Z_2 = \Omega_3 \cup \Omega_4 \cup \Omega_5 \quad Z_3 = \Omega_2 \cup \Omega_4 \cup \Omega_5 \cup \Omega_6 \cup \Omega_7.$$

Studiamo il comportamento delle funzioni peso $\bar{W}_j, j = 1, 2, 3$ in alcune delle regioni definite da questa suddivisione.

$A \in \Omega_1 \Rightarrow A \in Z_1:$

$$- \bar{W}_1 = \frac{W_1}{W_1} = 1,$$

$$- \bar{W}_2 = \frac{0}{W_1} = 0,$$

$$- \bar{W}_3 = \frac{0}{W_1} = 0;$$

$B \in \Omega_3 \Rightarrow B \in Z_1 \cap Z_2:$

$$- \bar{W}_1 = \frac{\frac{1}{2}W_3}{\frac{1}{2}W_3 + \frac{1}{2}W_3} = \frac{1}{2},$$

$$- \bar{W}_2 = \frac{\frac{1}{2}W_3}{\frac{1}{2}W_3 + \frac{1}{2}W_3} = \frac{1}{2},$$

$$- \bar{W}_3 = 0;$$

$C \in \Omega_3 \cap \Omega_4 \cap \Omega_5 \Rightarrow C \in Z_1 \cap Z_2 \cap Z_3:$

$$- \bar{W}_1 = \frac{\frac{1}{2}W_3 + \frac{1}{3}W_5}{\frac{1}{2}W_3 + \frac{1}{3}W_5 + \frac{1}{2}W_3 + \frac{1}{2}W_4 + \frac{1}{3}W_5 + \frac{1}{2}W_4 + \frac{1}{3}W_5} = \frac{\frac{1}{2}W_3 + \frac{1}{3}W_5}{W_3 + W_4 + W_5},$$

$$- \bar{W}_2 = \frac{\frac{1}{2}W_3 + \frac{1}{2}W_4 + \frac{1}{3}W_5}{\frac{1}{2}W_3 + \frac{1}{3}W_5 + \frac{1}{2}W_3 + \frac{1}{2}W_4 + \frac{1}{3}W_5 + \frac{1}{2}W_4 + \frac{1}{3}W_5} = \frac{\frac{1}{2}W_3 + \frac{1}{2}W_4 + \frac{1}{3}W_5}{W_3 + W_4 + W_5},$$

$$- \bar{W}_3 = \frac{\frac{1}{2}W_4 + \frac{1}{3}W_5}{\frac{1}{2}W_3 + \frac{1}{3}W_5 + \frac{1}{2}W_3 + \frac{1}{2}W_4 + \frac{1}{3}W_5 + \frac{1}{2}W_4 + \frac{1}{3}W_5} = \frac{\frac{1}{2}W_4 + \frac{1}{3}W_5}{W_3 + W_4 + W_5};$$

$D \in \Omega_4 \cap \Omega_6 \Rightarrow C \in Z_2 \cap Z_3:$

$$- \bar{W}_1 = \frac{0}{\frac{1}{2}W_4 + \frac{1}{2}W_4 + W_6} = 0,$$

$$- \bar{W}_2 = \frac{\frac{1}{2}W_4}{\frac{1}{2}W_4 + \frac{1}{2}W_4 + W_6} = \frac{\frac{1}{2}W_4}{W_4 + W_6},$$

$$- \bar{W}_3 = \frac{\frac{1}{2}W_4 + W_6}{\frac{1}{2}W_4 + \frac{1}{2}W_4 + W_6} = \frac{\frac{1}{2}W_4 + W_6}{W_4 + W_6}.$$

Le Fig. 4.23-4.24 mostrano come sono fatte le funzioni peso $\bar{W}_i(\mathbf{x})$, $i = 1, 2, 3$. Si noti come la loro somma su tutto il dominio identificato dai punti scattered sia proprio 1.

4.4.2 Sperimentazione numerica: esempi e risultati

Al fine di illustrare le caratteristiche dei metodi esposti, includiamo i risultati ottenuti dalla loro applicazione ad alcuni set di dati. Questi esempi sono solo una parte delle prove effettuate, sulle quali si basano le nostre conclusioni, ma chiariscono le proprietà dell'uno o dell'altro metodo.

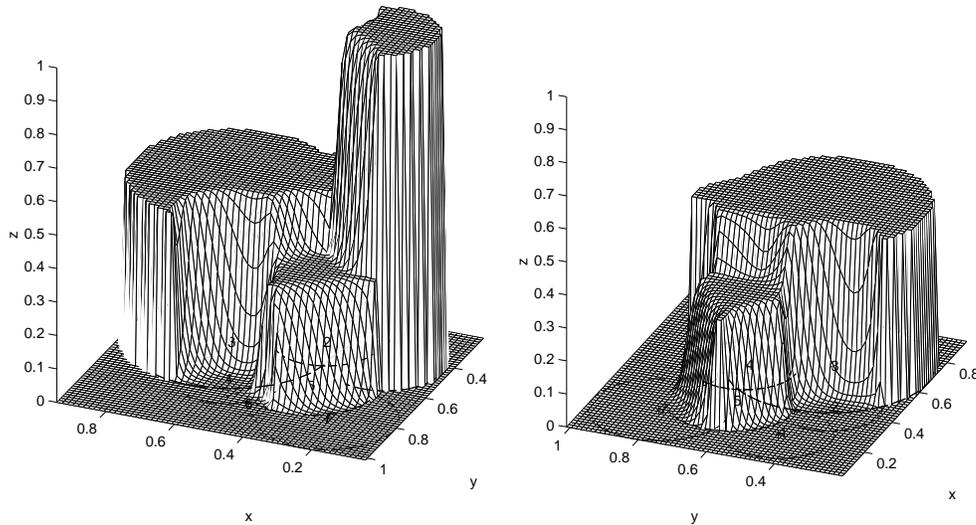


Figura 4.23: Le funzioni peso $\bar{W}_1(\mathbf{x})$ (a sinistra), $\bar{W}_2(\mathbf{x})$ (a destra).

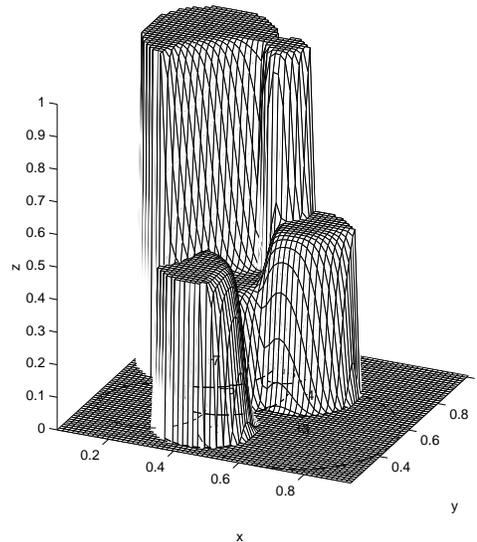


Figura 4.24: La funzione peso $\bar{W}_3(\mathbf{x})$.

Caso bivariato

Sono stati presi in considerazione principalmente due tipi di set di dati: uno completamente scattered, A1 (vedi Fig. 4.25) e uno quasi a griglia, A2 (vedi Fig. 4.26). Ciascuno dei due insiemi consiste in 60 punti sul rettangolo $[0, 2] \times [0, 1]$. I dati f_i corrispondono alle ordinate della funzione (3.17). Inizialmente si è considerato il set di dati A1 ed applicato il metodo I, dove per ogni punto è stata individuata una regione di influenza di raggio ρ_i , calcolato in modo da contenere almeno 10 dati. In ogni zona

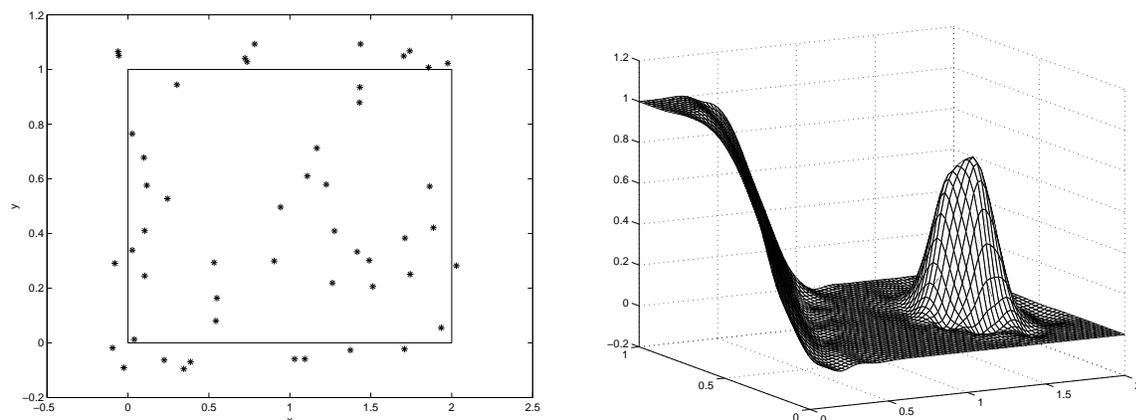


Figura 4.25: Sinistra: A1; destra: superficie generata con il metodo I.

è stato utilizzato il metodo PGF con polinomi di grado 2 e funzioni peso (4.13) con $\gamma_i = 2, \forall i$. Le Box spline interpolanti utilizzate sono quelle bivariate a tre direzioni M_{222} . La superficie ottenuta è quella di Fig. 4.25 a destra.

Relativamente al set di dati A2 di Fig. 4.26 i 60 punti sono per la maggior parte a griglia e solo alcuni scattered. Applicare il metodo I in questa situazione, come prima consiste in una fase di grigliatura locale dei dati mediante PGF e nell'utilizzo di interpolanti Box spline locali. La superficie ottenuta è quella di Fig. 4.26 a destra.

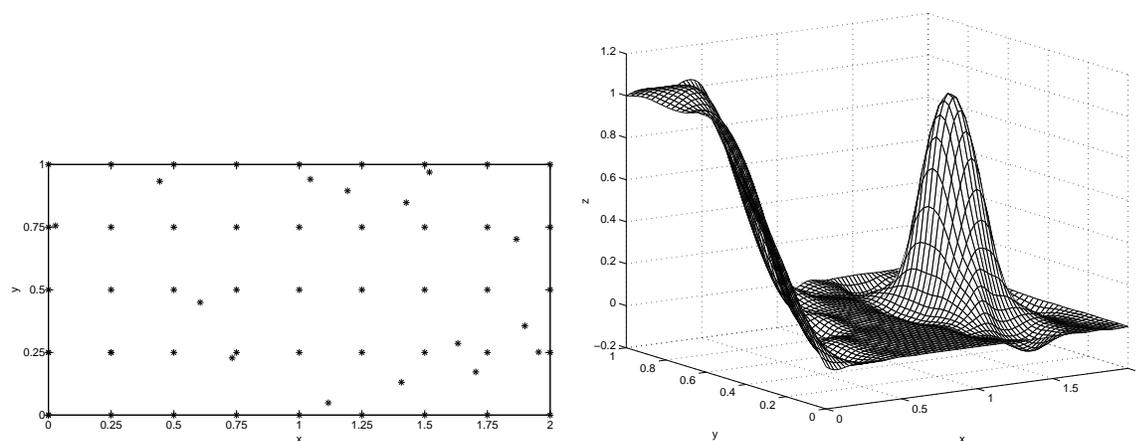


Figura 4.26: Sinistra: A2; destra: superficie generata con il metodo I.

In questi test il numero di punti è di gran lunga inferiore ai casi di set di dati ricavati dalla scannerizzazione di oggetti veri. Tuttavia, nel metodo I sono già emersi inconvenienti per quanto riguarda l'ingombro di memoria e il tempo di calcolo soprattutto nella ricostruzione di superfici di cui si hanno molte valutazioni sperimentali. Si pensi, infatti, che per ogni punto dato è necessario applicare l'algoritmo PGF e poi generare localmente una Box spline che interpola i dati vicini. Con l'aumentare, dunque, dei

punti di interpolazione aumenta considerevolmente anche il costo computazionale, rendendo lento il processo di ricostruzione. Pertanto risulta più efficiente un approccio locale a zone, dove il dominio viene suddiviso in un numero di sottodomini inferiore al numero di dati. Su tutte le zone individuate si genera la funzione Box spline che interpola i punti interni alla regione. In questo modo si ripete tale operazione un numero di volte molto inferiore al numero dei punti dati.

Decomposizione del dominio

Per la suddivisione del dominio in zone, in fase di sperimentazione sono state adottate in particolare due strategie. La prima, che segue il metodo proposto da Franke in [39], consiste nel decomporre il dominio in regioni rettangolari e definire le zone Z_j come unione dei dischi con centro i punti contenuti in ogni rettangolo individuato. Precisamente, si considerino in $\Omega \subset \mathbb{R}^s$ le osservazioni $\mathbf{x}_i \equiv (x_i^1, x_i^2, \dots, x_i^s)$ e siano

$$\begin{aligned} d_1 &= \{\tilde{x}_0^1 < \tilde{x}_1^1 < \dots < \tilde{x}_M^1\}, \\ d_2 &= \{\tilde{x}_0^2 < \tilde{x}_1^2 < \dots < \tilde{x}_M^2\}, \\ &\vdots \\ d_s &= \{\tilde{x}_0^s < \tilde{x}_1^s < \dots < \tilde{x}_M^s\}, \end{aligned}$$

s decomposizioni rispettivamente degli intervalli $[\tilde{x}_0^1, \tilde{x}_M^1]$, $[\tilde{x}_0^2, \tilde{x}_M^2]$, \dots , $[\tilde{x}_0^s, \tilde{x}_M^s]$, dove $\tilde{x}_0^j = \min_{i=1, \dots, N} \{x_i^j\}$ e $\tilde{x}_M^j = \max_{i=1, \dots, N} \{x_i^j\}$, $i = 1, \dots, N$. Il numero M è determinato in modo tale che ogni regione contenga approssimativamente un prefissato numero di dati.

Le regioni così definite

$$R_j = [\tilde{x}_k^1, \dots, \tilde{x}_{k+2}^1] \times [\tilde{x}_k^2, \dots, \tilde{x}_{k+2}^2] \times \dots \times [\tilde{x}_k^s, \dots, \tilde{x}_{k+2}^s] \quad k = 0, \dots, M-2, \quad (4.17)$$

costituiscono il punto di partenza per generare le zone Z_j , $j = 1, \dots, nz$, introdotte precedentemente. Per ogni regione, infatti, si individuino i punti scattered \mathbf{x}_i contenuti e di ognuno si consideri il disco s -dimensionale di influenza di raggio ρ_i . La zona Z_j è definita come unione di tali dischi costruiti a partire dai dati appartenenti alla regione R_j .

L'altro approccio consiste nel generare le zone Z_j partendo dagli np punti più vicini di ogni dato scattered. Precisamente sia I_1 l'insieme degli indici dei punti più vicini al primo punto \mathbf{x}_1 . La cardinalità di questo insieme sarà in generale maggiore o al più

uguale a np . La zona Z_1 viene definita come l'unione dei dischi centrati nei dati con indice contenuto in I_1 . Si consideri ora l'indice k più piccolo non appartenente a I_1 , e, analogamente a prima, sia I_2 l'insieme degli indici degli np punti scattered più vicini a \mathbf{x}_k . In generale $I_1 \cap I_2 \neq \emptyset$ e $I_1 \cup I_2 \subseteq \{1, \dots, N\}$. Si continua il procedimento fino a quando $I_1 \cap \dots \cap I_{nz} \equiv \{1, \dots, N\}$. In questo modo le zone generate hanno tra loro intersezione non nulla e inoltre ricoprono l'intero dominio.

Applichiamo ora il metodo II per interpolare il set di dati scattered A1 e il set di dati quasi a griglia A2. In particolare per questi esempi è stata utilizzata la seconda tecnica proposta per la suddivisione del dominio in zone, dove è stato scelto $np = 10$. Il numero delle zone individuate è 9. Dopo aver costruito su ogni sottodominio i punti di interpolazione su griglia tramite PGF, sono stati calcolati gli interpolanti Box spline locali e poi combinati attraverso le funzioni peso (4.16). Le superfici ottenute sono quelle di Fig. 4.27.

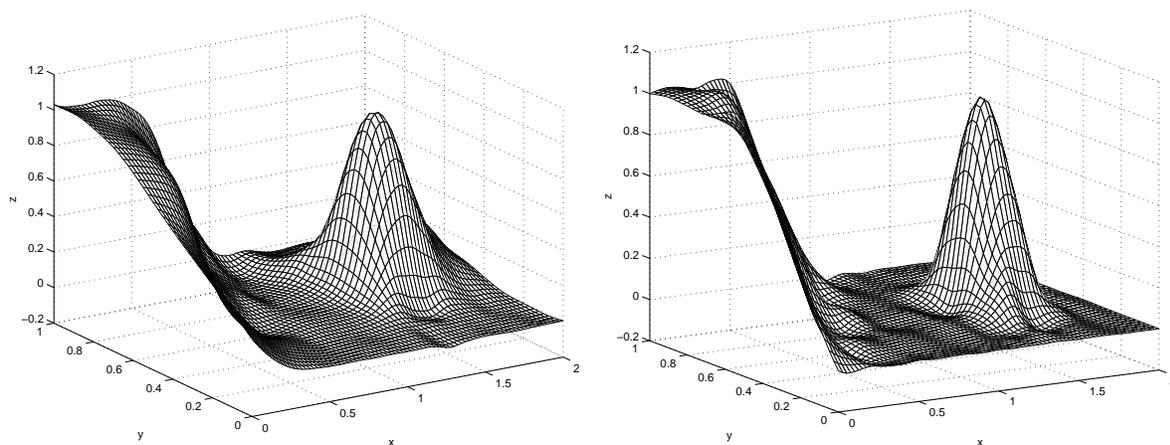


Figura 4.27: Metodo II applicato al set di dati A1 (sinistra) e A2 (destra).

I metodi I-II applicati alle funzioni di Franke forniscono i risultati indicati nelle tabelle 4.5-4.6.

Le Box spline bivariate utilizzate sono le quartiche M_{222} . A fronte dei risultati ottenuti, possiamo dire che il metodo II, risulta un buon compromesso tra costo computazionale dell'algoritmo e qualità della ricostruzione. Aumentando il numero di zone, aumentano gli interpolanti locali e pertanto migliora la qualità della superficie risultante, a discapito dei tempi di elaborazione più alti. Nel caso limite in cui $nz = N$, ossia il numero di zone coincide con il numero dei punti di interpolazione, il metodo II corrisponde esattamente al metodo I.

set A1		
FUNZIONE	METODO I	METODO II
$F1$	0.9794	0.9880
$F2$	0.9660	0.9709
$F3$	0.9881	0.9731
$F4$	0.9973	0.9858
$F5$	0.9830	0.9663
$F6$	0.9994	0.9988

Tabella 4.5: Valore di r^2 per alcune funzioni test.

set A2		
FUNZIONE	METODO I	METODO II
$F1$	0.9929	0.9885
$F2$	0.9873	0.9839
$F3$	0.9973	0.9944
$F4$	0.9988	0.9964
$F5$	0.9912	0.9816
$F6$	0.9994	0.9991

Tabella 4.6: Valore di r^2 per alcune funzioni test.

Caso trivariato

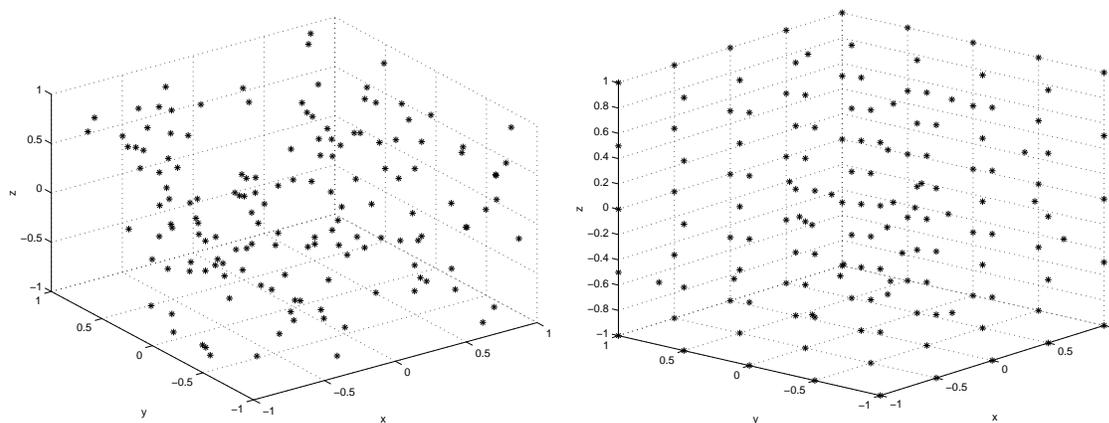


Figura 4.28: Set di dati nello spazio 3D, completamente scattered (sinistra), quasi a griglia (destra).

Un confronto tra i metodi I e II è stato effettuato anche su funzioni test trivariate per la ricostruzione di superfici definite come zero set di volumi $f(x, y, z)$. Negli esempi

proposti i dati f_i , $i = 1, \dots, 150$ sono stati calcolati come valori assunti dalle funzioni $F7$, $F8$, $F9$ nei punti (x_i, y_i, z_i) rispettivamente su $[-1, 1]^3$, $[0, 2]^3$, $[-1, 1]^3$. È stato considerato sia il caso di dati completamente scattered (Fig. 4.28 a sinistra), sia quello di dati per la maggior parte a griglia (Fig. 4.28 a destra), situazione che rientra spesso nelle applicazioni pratiche di ricostruzione di superfici. Le regioni di influenza di ogni punto sono state individuate, in modo da contenere almeno 10 dati. La Fig. 4.29 mostra le isosuperfici a livello 0 estratte dal volume trivariato ricostruito a partire dai dati sfruttando il metodo I. Per generare le griglie locali, è stato utilizzato l'algoritmo PGF con funzioni polinomiali di grado 2 e funzioni peso del tipo 4.13. Le Box spline interpolanti sono le trivariate M_{2111} . Se si suddivide il dominio dei dati in zone, utilizzando la prima strategia descritta nel paragrafo 4.4.2, il metodo II fornisce i risultati di Fig. 4.30. Le zone individuate, in questo caso, sono 27 e precisamente quelle costruite a partire dalla seguente decomposizione dell'intervallo $[-1, 1]$,

$$d_1 = d_2 = d_3 = \{-1, -0.5, 0, 0.5, 1\},$$

oppure dell'intervallo $[0, 2]$,

$$d_1 = d_2 = d_3 = \{0, 0.5, 1, 1.5, 2\}.$$

Nel caso in cui il set di dati sia quasi a griglia, applicando i metodi I e II si ottengono le superfici visualizzate in Fig. 4.31 e Fig. 4.32.

I test numerici sono stati effettuati anche sulle seguenti funzioni, introdotte da Renka come estensioni delle funzioni bivariate di Franke a tre variabili:

$$\begin{aligned} F10(x, y, z) &= \frac{3}{4} \exp\{ -[(9x - 2)^2 + (9y - 2)^2 + (9z - 2)^2]/4 \} + \\ &+ \frac{3}{4} \exp\{ -[(9x + 1)^2]/49 - (9y + 1)/10 - (9z + 1)/10 \} + \\ &+ \frac{1}{2} \exp\{ -[(9x - 7)^2 + (9y - 3)^2 + (9z - 5)^2]/4 \} - \\ &- \frac{1}{5} \exp\{ -(9x - 4)^2 - (9y - 7)^2 - (9z - 5)^2 \} \quad (x, y, z) \in [0, 1]^3; \end{aligned}$$

$$F11(x, y, z) = [\tanh(9z - 9y - 9x) + 1]/9 \quad (x, y, z) \in [0, 1]^3;$$

$$F12(x, y, z) = \left[\frac{5}{4} + \cos\left(\frac{27}{5}y\right) \right] \cos(6z)/[6 + 6(3x - 1)^2] \quad (x, y, z) \in [0, 1]^3;$$

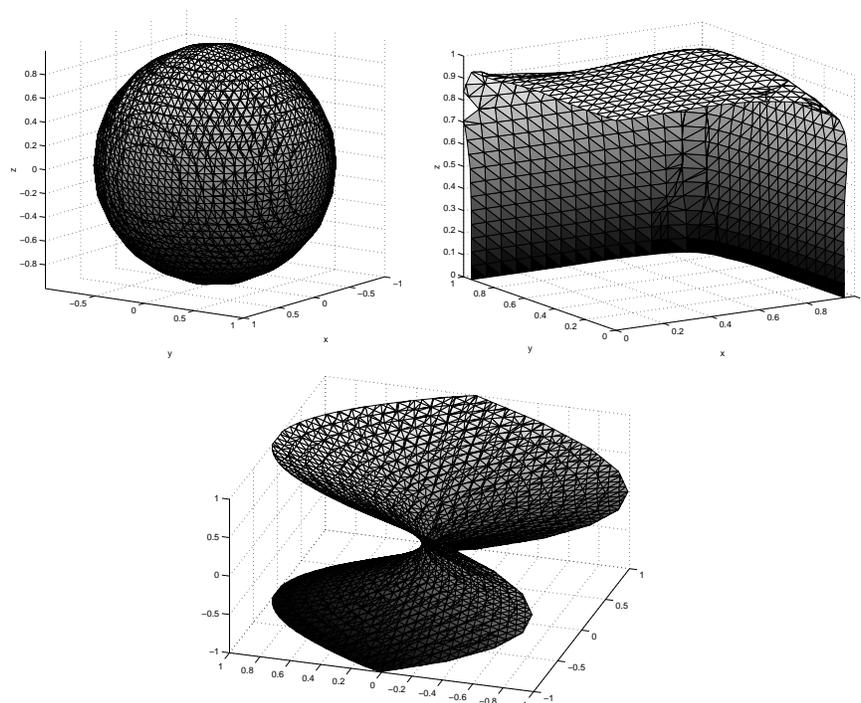


Figura 4.29: Metodo I e set di dati completamente scattered.

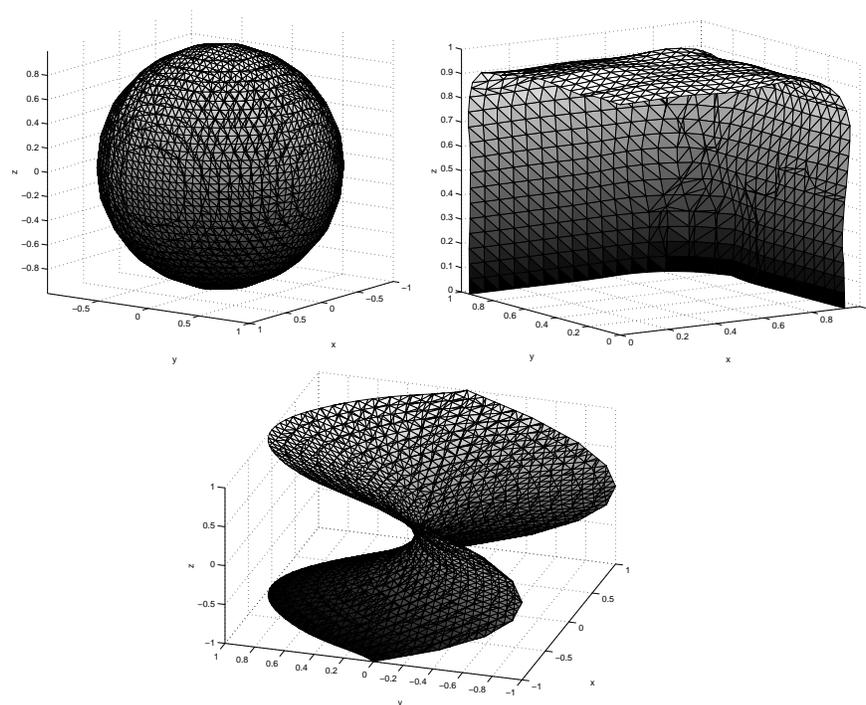


Figura 4.30: Metodo II e set di dati completamente scattered.

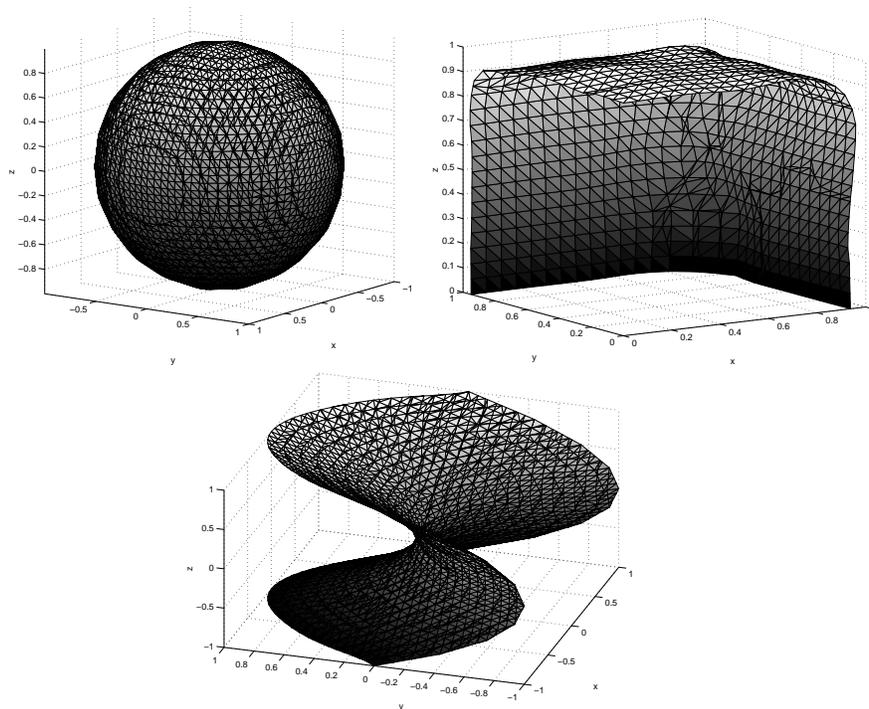


Figura 4.31: Metodo I e set di dati quasi a griglia.

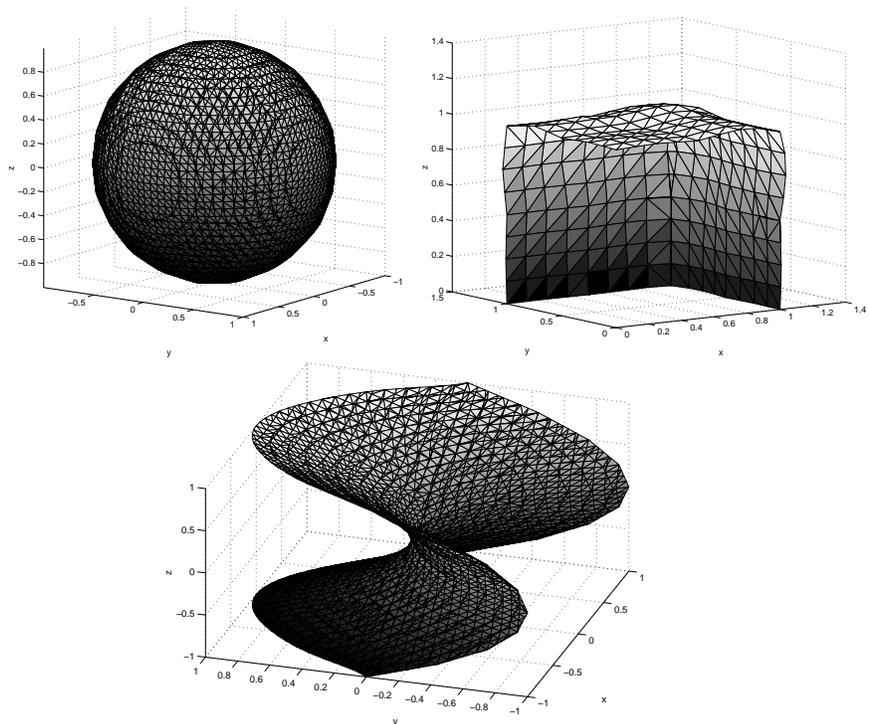


Figura 4.32: Metodo II e set di dati quasi a griglia.

$$F13(x, y, z) = \exp \left\{ -\frac{81}{16} \left[\left(x - \frac{1}{2} \right)^2 + \left(y - \frac{1}{2} \right)^2 + \left(z - \frac{1}{2} \right)^2 \right] \right\} / 3 \quad (x, y, z) \in [0, 1]^3;$$

$$F14(x, y, z) = \exp \left\{ -\frac{81}{4} \left[\left(x - \frac{1}{2} \right)^2 + \left(y - \frac{1}{2} \right)^2 + \left(z - \frac{1}{2} \right)^2 \right] \right\} / 3 \quad (x, y, z) \in [0, 1]^3;$$

Nelle tabelle 4.7-4.8 sono riportati i valori di r^2 relativi ai due metodi esposti sopra, applicati al caso trivariato, utilizzando gli stessi parametri e criteri visti sopra. Il metodo II risulta un buon compromesso tra il potere di approssimazione e il tempo di esecuzione. Mantenendo, infatti un valore di approssimazione piuttosto alto, si riduce abbondantemente il tempo di esecuzione dell'algoritmo. Si osservi come in alcuni casi il metodo II fornisca gli stessi risultati del metodo I, seppure vengano generati un minor numero di interpolanti locali.

Set di 150 punti scattered distribuiti in modo uniforme		
FUNZIONE	METODO I	METODO II
<i>F7</i>	0.9981	0.9981
<i>F8</i>	0.9912	0.9872
<i>F9</i>	0.9996	0.9996
<i>F10</i>	0.9501	0.9044
<i>F11</i>	0.9332	0.9078
<i>F12</i>	0.9326	0.8538
<i>F13</i>	0.9701	0.9062
<i>F14</i>	0.9003	0.8021

Tabella 4.7: Valore di r^2 per alcune funzioni test.

4.4.3 Ricostruzione delle feature di una superficie

Nel capitolo precedente abbiamo visto come particolari classi di interpolanti Box spline siano maggiormente adatte per alcuni set di dati piuttosto che per altri. Alcuni esempi hanno cioè evidenziato come la struttura a direzioni delle funzioni Box influenzi pesantemente la ricostruzione. In altre parole, è necessario individuare la direzione che l'andamento generale dei dati segue e utilizzare la funzione più adatta a tale andamento. Ma se la disposizione dei dati segue due direzioni principali differenti? Si consideri ad esempio i punti di Fig. 4.33. Questi identificano un “asterisco”, dove sono presenti

Set di 150 punti quasi a griglia		
FUNZIONE	METODO I	METODO II
$F7$	0.9982	0.9982
$F8$	0.9962	0.9960
$F9$	0.9997	0.9993
$F10$	0.9850	0.9662
$F11$	0.9767	0.9691
$F12$	0.9512	0.9473
$F13$	0.9922	0.9799
$F14$	0.9358	0.9136

Tabella 4.8: Valore di r^2 per alcune funzioni test.

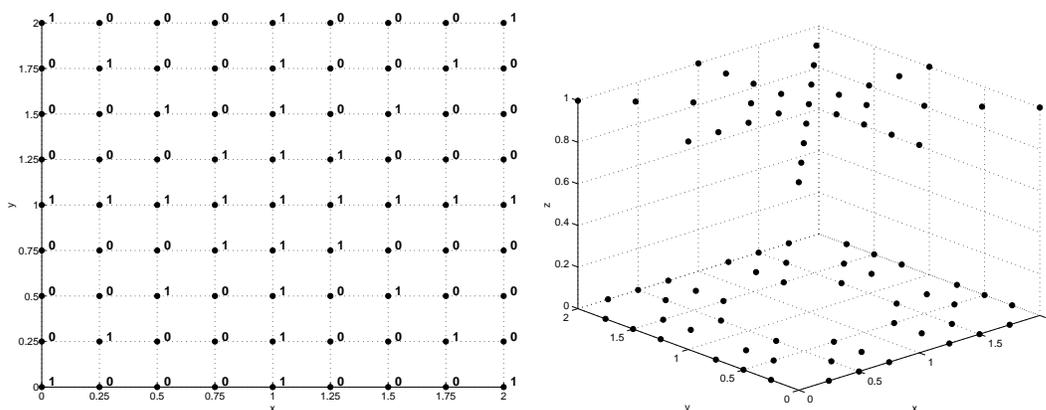


Figura 4.33: Nodi (i, j) dei punti di interpolazione e relativo valore (sinistra). Distribuzione nello spazio dei punti di interpolazione (destra)

sia le direzioni diagonali che quelle parallele agli assi. Utilizzando l'unico interpolante Box spline bivariato a due oppure a quattro direzioni non si ottengono buoni risultati (Fig. 4.34).

L'idea è quindi quella di estrarre due set di dati da quello originale, uno contenente i punti che seguono le direzioni $(1\ 0)$ e $(0\ 1)$ e l'altro le direzioni $(1\ 1)$ e $(1\ -1)$, utilizzare in modo appropriato entrambi gli interpolanti Box spline e combinarli alla fine secondo funzioni peso studiate ad hoc. Sia $\Omega = [0, 2] \times [0, 2]$, P l'insieme dei punti da interpolare mostrato in Fig. 4.33 a destra assieme ai rispettivi valori f_i (Fig. 4.33 sinistra). Si considerino i due insiemi P_1 e P_2 di Fig. 4.35.

Indichiamo con $M_1(x, y)$ la Box spline prodotto tensoriale definita su Ω interpolante

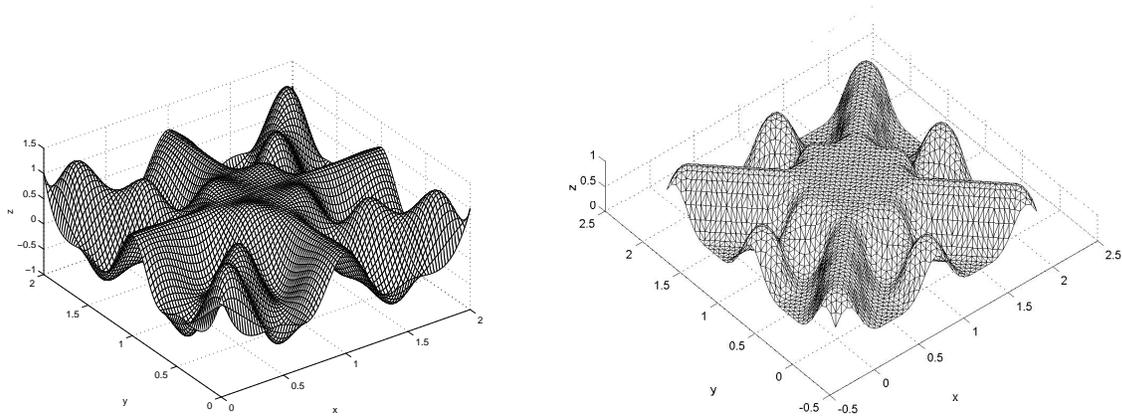


Figura 4.34: Sinistra: interpolazione con B-spline bicubiche; destra: interpolazione con Box spline bivariate M_{11111} .

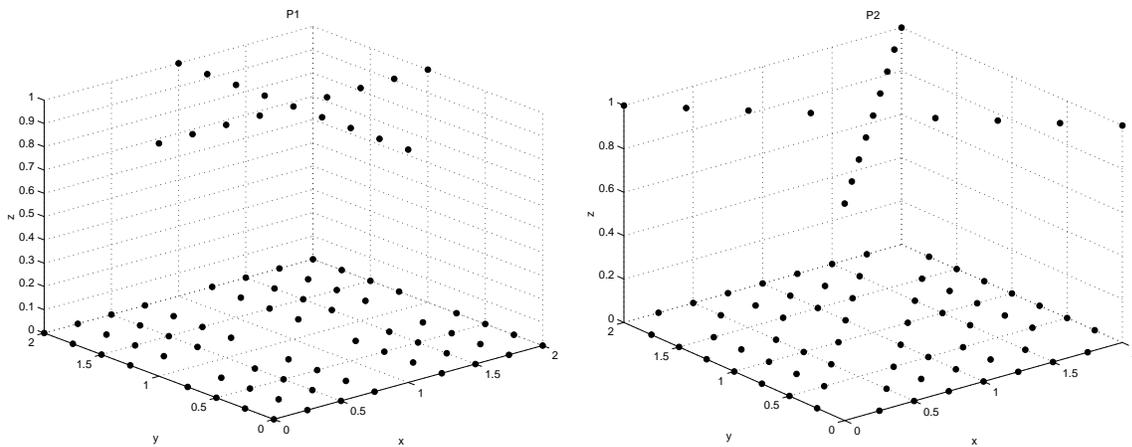


Figura 4.35: Insiemi di dati P1 e P2.

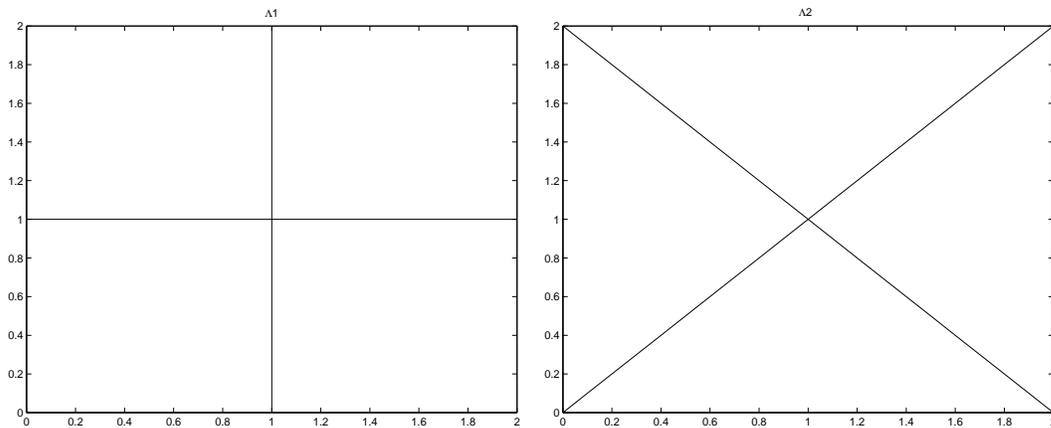


Figura 4.36: Insiemi Λ_1 e Λ_2 .

i punti dell'insieme P_1 e con $M_2(x, y)$ la Box spline a quattro direzioni definita sullo stesso dominio, interpolante i punti del sottomodulo \mathcal{F} definito da (3.14), appartenenti

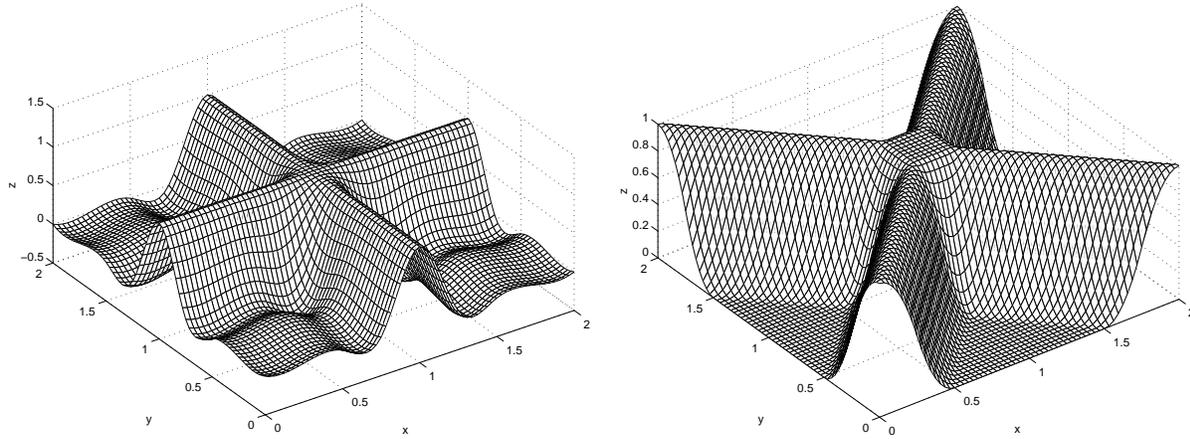


Figura 4.37: Interpolanti M_1 e M_2 .

all'insieme P_2 (vedi Fig. 4.37). La funzione risultante è definita come segue:

$$F(x, y) = \bar{W}_1(x, y)M_1(x, y) + \bar{W}_2(x, y)M_2(x, y),$$

dove

$$\bar{W}_1(x, y) = \frac{d_2^2 + \varepsilon/2}{d_1^2 + d_2^2 + \varepsilon}, \quad \bar{W}_2(x, y) = \frac{d_1^2 + \varepsilon/2}{d_1^2 + d_2^2 + \varepsilon},$$

con $\varepsilon > 0$ e

$$d_1 \equiv d_1(x, y) = \min\{\|(x, y) - (\bar{x}, \bar{y})\|_2 : (\bar{x}, \bar{y}) \in \Lambda_1\},$$

$$d_2 \equiv d_2(x, y) = \min\{\|(x, y) - (\bar{x}, \bar{y})\|_2 : (\bar{x}, \bar{y}) \in \Lambda_2\}.$$

Λ_1 e Λ_2 rappresentano lo scheletro dell'andamento dei due set di dati (vedi Fig. 4.36).

$$\Lambda_1 = \{(x, y) : y = 1, x \in [0, 2]\} \cup \{(x, y) : x = 1, y \in [0, 2]\},$$

$$\Lambda_2 = \{(x, y) : y - x = 0, x \in [0, 2]\} \cup \{(x, y) : y = 2 - x, x \in [0, 2]\}.$$

Se $(x_k, y_k) \in P_1 \Rightarrow d_1 = 0$ e quindi

$$\begin{aligned} F(x_k, y_k) &= \bar{W}_1(x_k, y_k)M_1(x_k, y_k) + \bar{W}_2(x_k, y_k)M_2(x_k, y_k) \\ &= \underbrace{\frac{d_2^2 + \varepsilon/2}{d_2^2 + \varepsilon}}_{\substack{\downarrow \varepsilon \rightarrow 0 \\ 1}} M_1(x_k, y_k) + \underbrace{\frac{\varepsilon/2}{d_2^2 + \varepsilon}}_{\substack{\downarrow \varepsilon \rightarrow 0 \\ 0}} M_2(x_k, y_k) \end{aligned}$$

$$\implies F(x_k, y_k) = M_1(x_k, y_k).$$

Analogamente si vede che se $(x_k, y_k) \in P_2$ allora $F(x_k, y_k) = M_2(x_k, y_k)$. Negli altri punti del dominio Ω la funzione risulta essere una media pesata dei due interpolanti. Per (x, y) vicino a Λ_1 il valore di d_1 sarà molto piccolo e quindi $\bar{W}_1 \sim 1$, mentre per (x, y) vicino a Λ_2 il valore di d_2 sarà prossimo allo 0 e quindi $\bar{W}_2 \sim 1$. Nel punto $(1, 1)$, presente sia in Λ_1 che in Λ_2 i pesi valgono entrambi $\bar{W}_1 \equiv \bar{W}_2 = \frac{1}{2}$. Si noti inoltre che i pesi \bar{W}_1 e \bar{W}_2 godono della proprietà di partizione dell'unità, essendo

1. $\bar{W}_1(x, y) \geq 0, \bar{W}_2(x, y) \geq 0, \forall (x, y) \in \Omega;$
2. $\bar{W}_1(x, y) + \bar{W}_2(x, y) = 1, \forall (x, y) \in \Omega.$

In questo modo vengono mantenute le buone proprietà di entrambi gli interpolanti (vedi Fig. 4.38).

Osservazione 24. L'approccio utilizzato per interpolare il set di dati di Fig. 4.33 è diverso da quelli illustrati fino ad ora. Infatti il dominio Ω in questo caso non viene suddiviso in zone, ma dalla stessa regione vengono estratti due set di dati differenti su cui vengono costruiti i due diversi interpolanti Box spline. Vengono poi fusi in un'unica superficie attraverso i pesi definiti sopra.

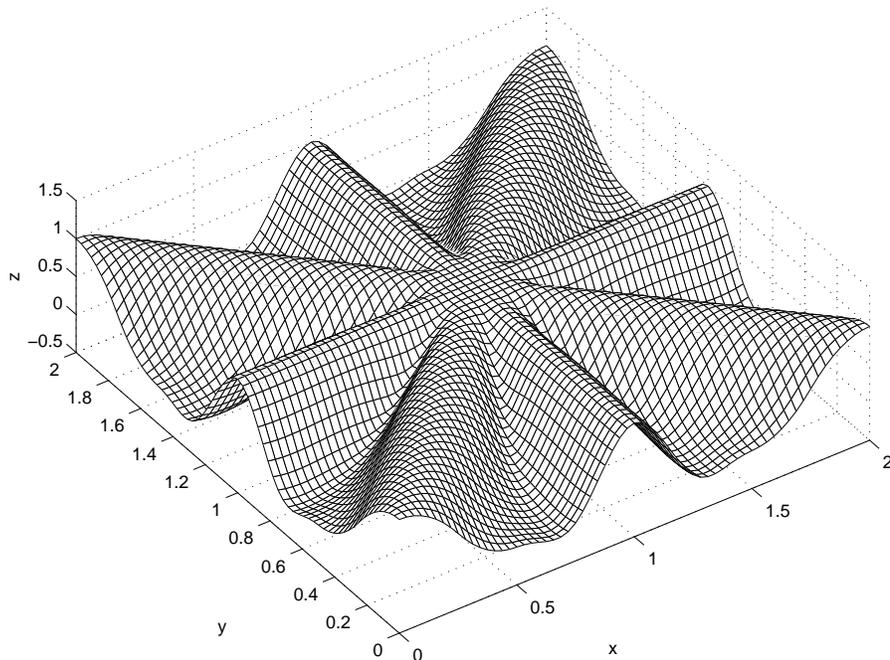


Figura 4.38: Utilizzo degli interpolanti Box spline a due e a quattro direzioni in un approccio POU.

4.4.4 Dall'acquisizione dei dati alla ricostruzione del modello

Negli esempi mostrati finora sono stati utilizzati dati ottenuti dalla valutazione di una funzione analitica bivariata e trivariata in punti distribuiti in modo casuale o più o meno regolare nel dominio. Ora siamo interessati a testare la ricostruzione Box spline su dati ricavati dalla scannerizzazione di un oggetto reale. Nel campo della Computer Aided Geometric Design l'approccio tipicamente utilizzato è quello di rilevazione dei dati dell'oggetto tramite scanner 3D, ricostruzione del modello al computer, adottando spesso approcci locali, e infine modellazione della forma. Pertanto gli scanner 3D sono diventati un indispensabile strumento di produzione industriale. Essi infatti stanno definendo le nuove frontiere dell'innovazione nell'animazione grafica, nella prototipazione di oggetti, nel reverse engineering. Danno la possibilità di effettuare scansioni di innumerevoli tipologie di oggetti che possono essere convertiti in modelli digitali 3D per poi essere usati in svariate applicazioni, dalla Computer Grafica al CAD/CAM.

In particolare nella nostra sperimentazione abbiamo utilizzato lo scanner 3D PICZA, il quale attraverso un sensore acquisisce, all'interno dell'area di scansione, i dati dell'oggetto su una griglia definita da un passo prefissato sull'asse delle ascisse e sull'asse delle ordinate. In fase di acquisizione, in prossimità di bordi, il software elabora un raffinamento della griglia per individuare in modo più preciso i punti dell'oggetto. Tale operazione viene effettuata anche nelle zone vicino ad eventuali buchi o dove l'altezza dell'oggetto subisce brusche variazioni. Il set di dati che ne ricaviamo è dunque per la maggior parte a griglia, eccetto in alcune parti, dove possiamo avere dati scattered. In questa situazione, risulta giustificata la nostra scelta di studiare tecniche di ricostruzione con funzioni Box spline, particolarmente adatte per l'interpolazione di punti a griglia, ma efficaci anche in presenza di dati scattered. Nelle prove fino ad ora effettuate sono stati presi in considerazione sempre domini rettangolari nel caso bivariato e cubici nel caso trivariato. In realtà i metodi proposti valgono per domini ben più generali, tagliati cioè da direzioni diverse da quelle individuate dagli assi cartesiani. Nelle applicazioni questo aspetto risulta molto importante in quanto permette di limitare l'area che l'oggetto ricopre, evitando calcoli inutili nelle zone in cui non interessa la ricostruzione della superficie.

In questo paragrafo mostriamo due differenti esempi di ricostruzione nel caso bivariato. Nel primo siamo interessati alla ricostruzione di un bassorilievo di un angioletto in terracotta. L'acquisizione con scanner ha permesso di ottenere una range-image di

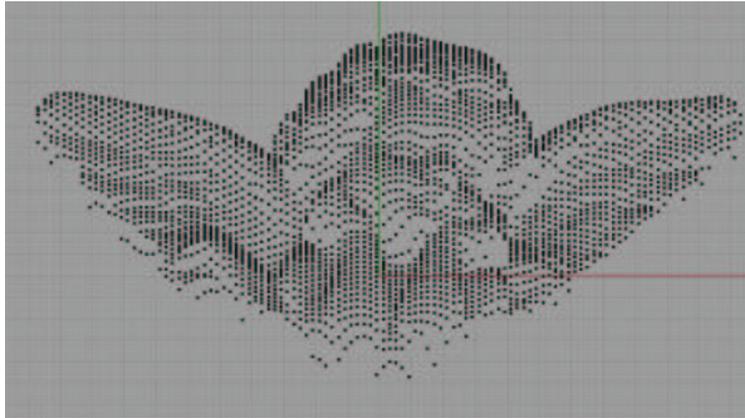


Figura 4.39: Set di dati acquisito per la ricostruzione.

circa 9000 punti (griglia 115×65 più punti fuori griglia). Molti di questi punti non sono informativi in quanto esterni al bassorilievo di interesse; dopo una fase di filtraggio abbiamo ottenuto i 3479 punti mostrati in Fig. 4.39. Si tratta di punti su griglia. L'esempio in questione vuole misurare la capacità di ricostruzione del metodo II. I dischi di influenza Ω_i sono definiti a partire da ogni punto dato, come il cerchio centrato in \mathbf{x}_i e raggio unitario. In questo modo il ricoprimento dell'intero dominio è garantito. Le zone in cui è stato suddiviso sono 6 come mostrato in Fig. 4.40.

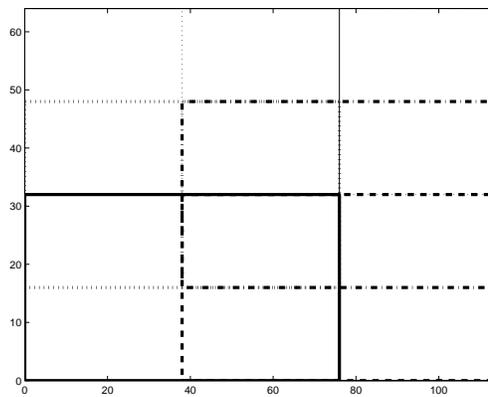


Figura 4.40: Suddivisione del dominio in zone.

In ogni zona si hanno delle interpolazioni locali di punti su griglia, ma non a formazione rettangolare. Come funzioni interpolanti locali abbiamo utilizzato le Box spline bivariate a tre direzioni M_{222} . Nella Fig. 4.41 è mostrata la ricostruzione ottenuta. Si osservi che la qualità della ricostruzione cambia considerevolmente dalla parte destra alla parte sinistra dell'oggetto. Questo è dovuto essenzialmente alla scelta dell'interpolante locale. Essendo, in questo caso una Box spline a tre direzioni, si vede come

l'ala destra dell'angelo, che segue indicativamente la direzione $(1, 1)$, viene ricostruita senza ondulazioni indesiderate, cosa che non avviene nell'ala sinistra.

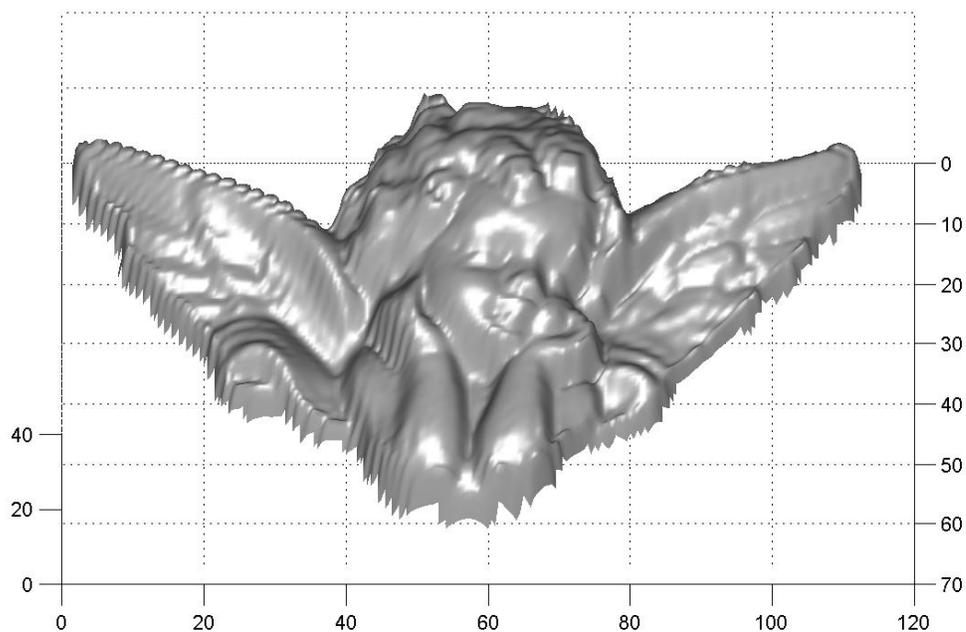


Figura 4.41: Ricostruzione con Box spline.

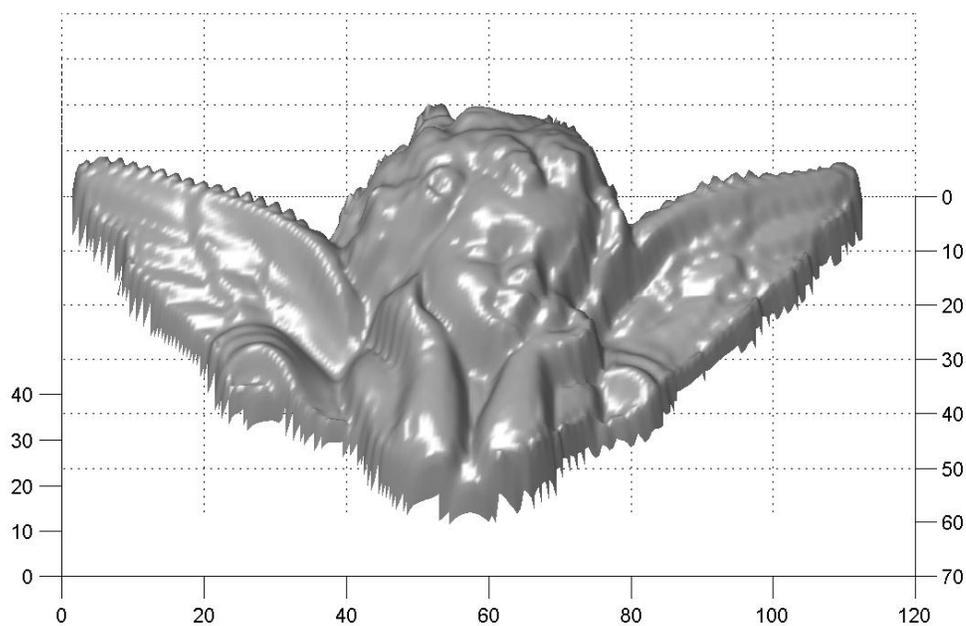


Figura 4.42: Ricostruzione con B-spline prodotto tensoriale.

L'esempio di confronto con B-spline prodotto tensoriale è stato realizzato sempre con il metodo II sulle stesse zone, ma in ognuna è stata usata una interpolazione prodotto

tensoriale con B-spline cubiche; per far questo si sono generati con il metodo PGF punti su griglia aggiuntivi così da formare una griglia rettangolare. La ricostruzione finale è stata poi limitata alla regione dei dati come la precedente. Nella Fig. 4.42 è mostrata la ricostruzione ottenuta. Dal confronto delle due ricostruzioni appare chiaramente come il risultato ottenuto con Box spline sia migliore nella direzione privilegiata $(1, 1)$, ma nettamente peggiore nelle altre direzioni (si osservi l’ala sinistra in cui l’andamento dei dati è $(1, -1)$). Nelle Fig. 4.43-4.44 è mostrato lo stesso ingrandimento di un particolare del volto dell’angioletto ottenuto con i due metodi; dalle relative mesh si evince come la ricostruzione Box spline di questo particolare sia più adeguata rispetto alla ricostruzione ottenuta con il prodotto tensoriale.

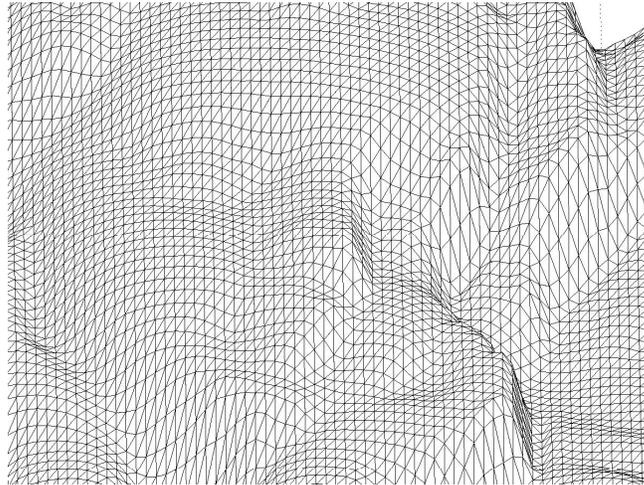


Figura 4.43: Particolare della superficie ricostruita con Box spline.

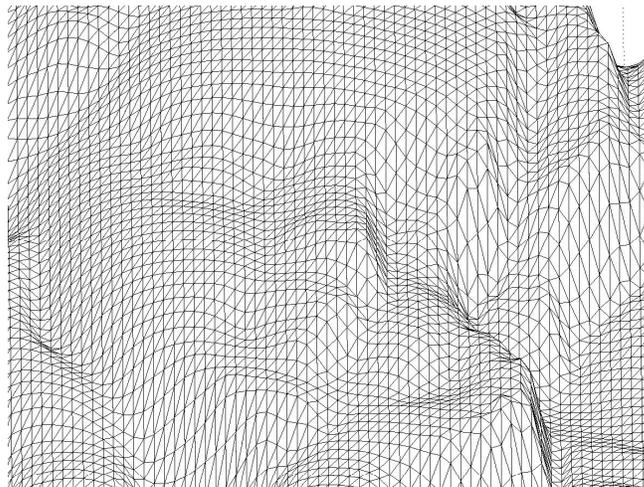


Figura 4.44: Particolare della superficie ricostruita con B-spline prodotto tensoriale.

Una ricostruzione dello stesso set di dati con Box spline a quattro direzioni presenta un comportamento analogo, ma in generale peggiore. Si può pensare dunque di migliorare la ricostruzione individuando le zone in maniera da localizzare le feature dell'oggetto e nello scegliere differenti interpolanti Box spline a seconda dell'andamento dei dati. Tra i propositi futuri di ricerca rientra l'approfondimento di questo aspetto, in modo da arricchire il quadro di studio riguardante la ricostruzione con Box spline.

Nel secondo esempio abbiamo acquisito una forma in plastica con la caratteristica di avere bordi molto ripidi; in questo caso si vuole misurare la capacità di ricostruzione del metodo II in zone di forte variazione di pendenza. L'acquisizione con scanner ha permesso di ottenere una range-image di circa 2000 punti (griglia 41×40 più punti fuori griglia) (vedi Fig. 4.3). Volendo in questo esempio ricostruire l'intero oggetto (base più rialzo), siamo interessati all'intero set di dati acquisito che servirà per generare punti su una griglia più fine di quella di acquisizione per gli interpolanti locali. Anche in questo caso il metodo utilizzato ha fatto uso di una suddivisione in 6 zone dello stesso tipo visto per l'esempio precedente. Il ricoprimento del dominio è garantito se si considera Ω_i come prima, ossia il disco centrato in \mathbf{x}_i e raggio unitario. Le Box spline interpolanti utilizzate sono le funzioni M_{222} .

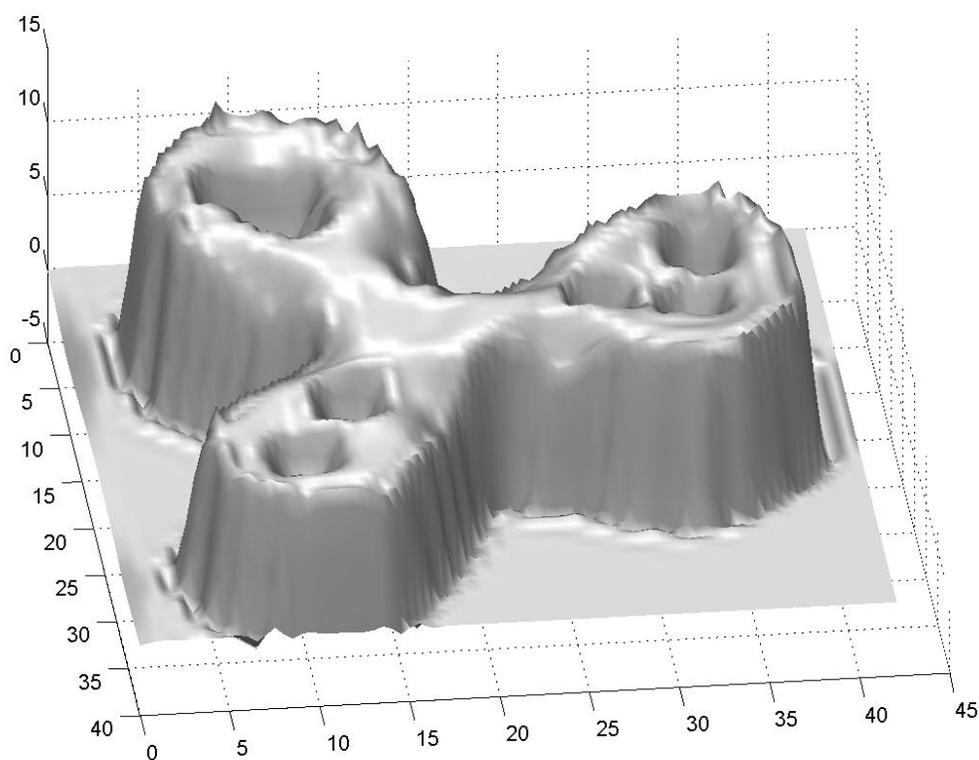


Figura 4.45: Ricostruzione con Box spline.

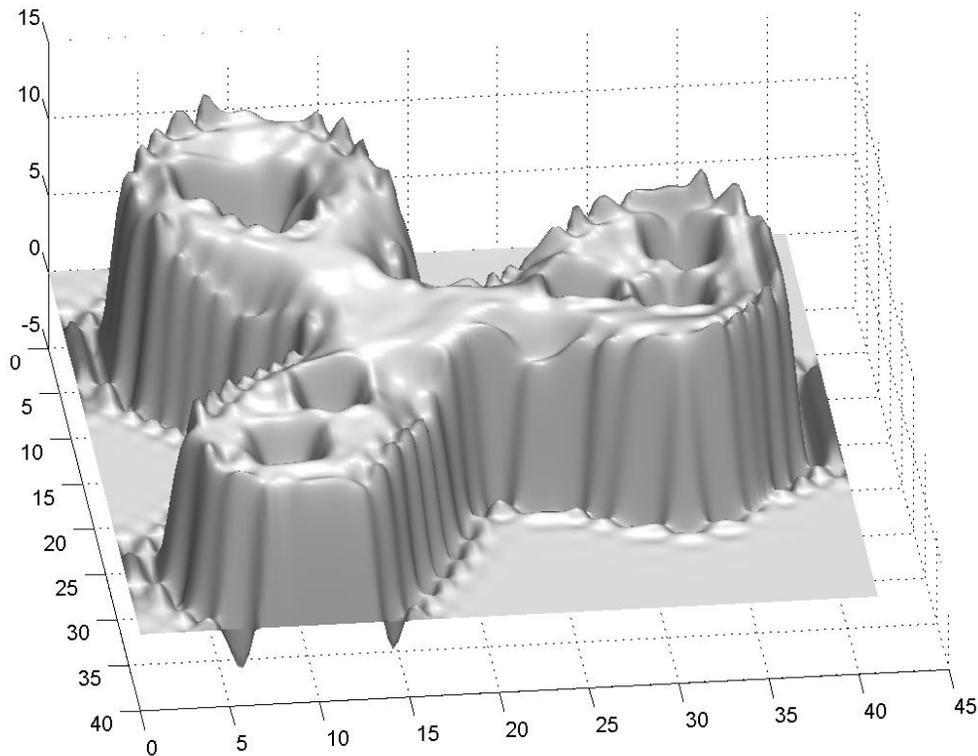


Figura 4.46: Ricostruzione con B-spline prodotto tensoriale.

Nella Fig. 4.45 è mostrata la ricostruzione ottenuta. Nella Fig. 4.46 è mostrata la ricostruzione con B-spline cubiche prodotto tensoriale dello stesso set di dati, ottenuta sempre con il metodo II sulle stesse zone.

Dal confronto fra le due ricostruzioni si evince come l'utilizzo delle Box spline sia estremamente più affidabile in zone con forte pendenza dei dati, rispetto alle B-spline prodotto tensoriale.

Come ultimo esempio viene mostrata una ricostruzione ottenuta con il metodo II, ma a partire da una nuvola di punti. La fase di acquisizione è consistita nella rilevazione di più range-image e nelle fasi di filtraggio e allineamento, in modo da ottenere un'unica nuvola di punti nello spazio 3D. I punti così acquisiti sono stati rielaborati attraverso il software *ply2vri*, sviluppato dalla Stanford University, che permette di generare una griglia 3D di valori. In particolare, è stata prodotta una griglia $[0, 22] \times [0, 34] \times [0, 7]$ di valori di distanza dalla superficie di interesse. Per ogni punto è stata individuata una sfera di influenza di raggio unitario in base al quale è stata fatta una suddivisione in 6 zone dell'intero dominio. Sono state considerate le funzioni Box spline trivariate di grado 2, M_{2111} . In Fig. 4.47 è mostrata la ricostruzione ottenuta.

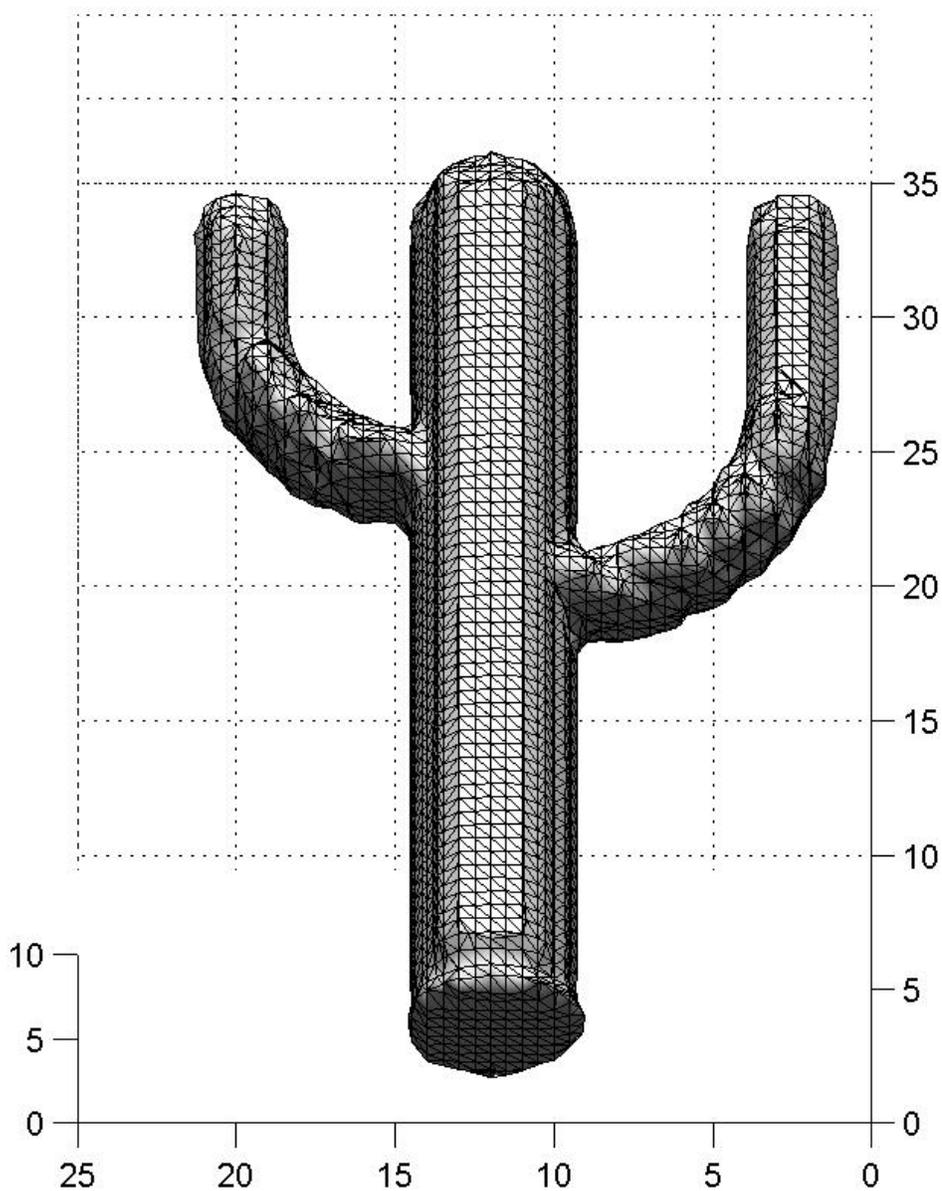


Figura 4.47: Esempio di ricostruzione con Box spline trivariate a partire da una nuvola di punti 3D.

In Fig. 4.48 è mostrata la ricostruzione dello stesso set di dati con B-spline cubiche prodotto tensoriale trivariato, ottenuta sempre con il metodo II sulle stesse zone. Confrontando le due ricostruzioni si evince come anche in questo caso l'utilizzo di Box spline porta a risultati qualitativamente migliori di quelli ottenuti con il prodotto tensoriale trivariato.

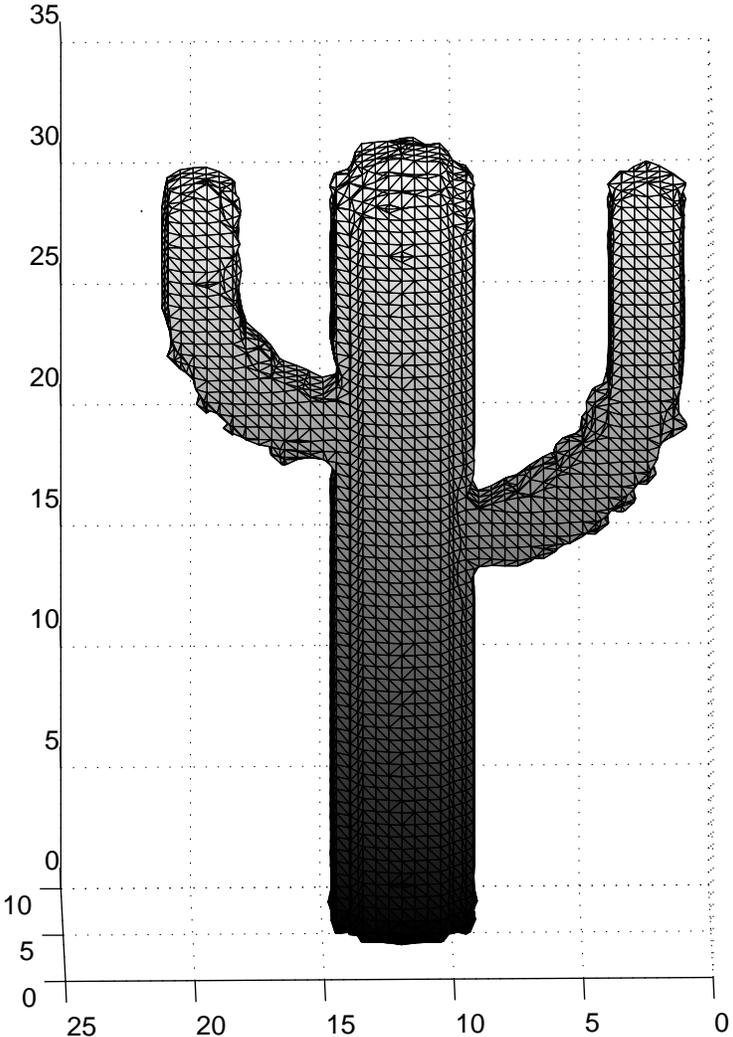


Figura 4.48: Esempio di ricostruzione con B-spline prodotto tensoriale trivariato a partire da una nuvola di punti 3D.

Conclusioni

La necessità di lavorare con oggetti sempre più complicati e con superfici a topologia arbitraria, ha spinto la ricerca verso la formulazione di nuove teorie che permettessero di estendere quanto di basilare e assodato c'era per le funzioni spline. Lo studio delle Box spline rientra nell'ottica di voler soddisfare queste esigenze. In particolare, in questa trattazione mi sono occupata di studiare l'aspetto applicativo delle Box spline bivariate e trivariate per la ricostruzione di superfici.

Il primo capitolo ha ripreso le definizioni e le proprietà principali delle Box spline, sottolineando lo stretto legame con le B-spline, di cui questa classe di funzioni è una generalizzazione a più variabili e a più direzioni. Il primo passo verso l'utilizzo delle Box spline nelle applicazioni, è stato quello di individuare uno strumento valido ed efficiente per la loro valutazione. Ci siamo dunque occupati della progettazione e sviluppo di un algoritmo (MDDS) per la valutazione esatta, con le caratteristiche di stabilità ed efficienza a basso costo computazionale e facilmente generalizzabile a più dimensioni. Sebbene l'algoritmo e gli esempi presentati siano limitati a classi particolari di Box spline bivariate e trivariate, lo schema computazionale sfrutta un'idea facilmente adattabile in linea di principio a qualsiasi Box spline. Questo algoritmo di valutazione è alla base di tutto il mio lavoro di ricerca in quanto ha permesso di costruire combinazioni di funzioni Box spline e utilizzarle poi in un problema di interpolazione cardinale, cioè di dati definiti su griglia. Al riguardo, i lavori esistenti in letteratura sono focalizzati sull'aspetto teorico dell'esistenza ed unicità della soluzione del problema di interpolazione, soffermandosi quasi esclusivamente sul caso bivariato. Nel capitolo 3 ci siamo proposti di sperimentare numericamente il comportamento delle Box spline in ambito di ricostruzione, trattando in particolare il problema di interpolazione trivariata, di cui non esistono esempi pratici in letteratura. I confronti tra i risultati ottenuti dimostrano l'attitudine di particolari classi di funzioni Box spline ad interpolare set di dati specifici. Tuttavia, non ci siamo limitati allo studio di interpolanti per set di dati a griglia. Infatti, nelle applicazioni e in particolare nell'acquisizione di dati da scanner,

i punti rilevati sono in parte a griglia e in alcune regioni scattered. Nel capitolo 4 abbiamo analizzato tecniche di interpolazione e approssimazione di dati scattered con funzioni Box spline, utilizzando un metodo (Progressive Grid Filling) che permette di costruire i punti griglia in modo progressivo, procedendo iterativamente con un MLS a partire dalle regioni con un maggior numero di osservazioni, verso le zone con lacune. Nei problemi pratici di ricostruzione di superfici, la difficoltà di gestire una enorme quantità di dati in modo compatto ed efficiente, ci ha suggerito di adottare un approccio locale di approssimazione/interpolazione, in modo da ridurre le dimensioni del problema originale e da assicurare una fedele ricostruzione delle feature della superficie. Al riguardo è stato rivisitato il metodo di partizione dell'unità nell'ottica di interpolazione con Box spline (metodo I). Inoltre è stata proposta una tecnica alternativa di interpolazione a zone, volta ad abbassare ulteriormente i costi computazionali e i tempi di esecuzione per una ricostruzione (metodo II). I test e le prove effettuate dimostrano che tale tecnica risulta essere un buon compromesso tra la qualità della ricostruzione e l'efficienza dell'algoritmo. Riassumendo, i contributi originali apportati da questa tesi sono:

- progettazione e sviluppo dell'algoritmo MDSS per la valutazione esatta di Box spline;
- sperimentazione di modellazione con Box spline bivariate e trivariate;
- analisi del problema di interpolazione bivariata e trivariata con Box spline; studio di casi test volti a definire le caratteristiche di ricostruzione di alcune funzioni Box interpolanti;
- progettazione dell'algoritmo PGF per l'utilizzo di Box spline nell'ambito della ricostruzione di superfici a partire da dati “scattered”;
- introduzione di un nuovo metodo locale volto a migliorare le prestazioni di calcolo nell'interpolazione di grandi quantità di dati con Box spline.

Bibliografia

- [1] H. Akima, *A method of bivariate interpolation and smooth surface fitting for irregularly distributed data points*, ACM Trans. Math. Soft. 4,2 (1978)
- [2] M. Alexa, J. Behr, D. Cohen-Or, S. Fleishman, D. Levin, C. T. Silva *Computing and rendering point set surfaces*, IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics, **9** 1, (2003), pp. 3-18
- [3] M. Alexa, J. Behr, D. Cohen-Or, S. Fleishman, D. Levin, C. T. Silva *Point set surfaces*, IEEE Transactions 2001, (2001), pp. 21-28
- [4] E. Arge, M. Dæhlen, A. Tveito, *Box spline interpolation; a computational study*, Journal of Computational and Applied Mathematics **44** (1992), pp. 303-329
- [5] E. Arge, M. Dæhlen, *Grid point interpolation on finite regions using C^1 box spline*, SIAM J. Numer. Anal. **29** 4 (1992), pp. 1136-1153
- [6] T. Asahi, K. Ichige, R. Ishii, *A new formulation for discrete box splines reducing computational cost and its evaluation*, IEICE Trans. Fundamentals, Vol. E84-A, No. 3, March 2001
- [7] R.E. Barnhill, R.P. Dube, F.F. Little *Properties of Shepard's surfaces*, Rocky Mt J. Math. **13** 2, (1983), pp. 365-382
- [8] J. Berchtold, I. Voiculescu, A. Bowyer, *Multivariate Bernstein-form polynomials*, Technical Report No. 31/98, School of Mechanical Engineering, University of Bath
- [9] J. Bloomenthal, C. Bajaj, J. Blinn, M. P. Cani-Gascuel, A. Rockwood, B. Wyvill, G. Wyvill, *Introduction to implicit surfaces*, Morgan Kaufmann (1997)
- [10] W. Boehm, *Calculating with box splines*, Computer Aided Geometric Design **1**(2) (1984), 149-162

-
- [11] B. D. Bojanov, H. A. Hakopian, A. A. Sahakian, *Spline functions and multivariate interpolations*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (1993)
- [12] G. Casciola, E. Franchini, L. Romani, *The mixed directional difference-summation algorithm for generating the Bézier net of a trivariate four-direction Box-spline*, accettato in *Numerical Algorithms* (2005). Una implementazione dell'algoritmo è stata sottomessa alla "libreria NUMERALGO"
- [13] G. Casciola, D. Lazzaro, L. B. Montefusco, S. Morigi, *Fast surface reconstruction and hole filling using Radial Basis Functions*, *Numerical Algorithms* **39** 1-3, (2005)
- [14] G. Casciola, D. Lazzaro, L. B. Montefusco, S. Morigi, *Shape preserving surface reconstruction using locally anisotropic RBF interpolants*, apparirà in *Computer and Mathematics with Applications*
- [15] Y.-S. Chang, K.T. McDonnell, H. Qin, *A new solid subdivision scheme based on box splines*, *Proceedings of the 7th ACM Symposium on Solid Modeling and Applications* (2002), 226-233
- [16] C.K. Chui, M.J. Lai, *Computation of box-splines and B-splines on triangulations of nonuniform rectangular partitions*, *Approximation Theory & its Applications* **3** (1987), 37-62
- [17] C.K. Chui, *Multivariate Splines*, CBMS Lectures Series 54, SIAM, Philadelphia (1988)
- [18] C.K. Chui, M.J. Lai, *Algorithms for generating B-nets and graphically displaying spline surfaces on three- and four- directional meshes*, *Computer Aided Geometric Design* **8** (1991), 479-493
- [19] C.K. Chui, H. Diamond, L.A. Raphael, *Interpolation by multivariate splines*, *Mathematics of Computation* **51** 183 (1988), pp.203-218
- [20] E. Cohen, T. Lyche, R. Riesenfeld, *Discrete box splines and refinement algorithms*, *Computer Aided Geometric Design* **1** (1984), 131-141
- [21] M. Dæhlen, *On the evaluation of box splines*, in: T. Lyche, L. Schumaker (Eds.), *Mathematical Methods in Computer Aided Geometric Design*, Academic Press N.Y. (1989), 167-179

-
- [22] M. Dæhlen, Tom Lyche, *Bivariate interpolation with quadratic box splines*, Mathematics of Computation **51** 183 (1988), pp. 219-230
- [23] M. Dæhlen, *An example of bivariate interpolation with translates of C^0 -quadratic box-splines on a three direction mesh*, Computer Aided Geometric Design **4** (1987), pp. 251-255
- [24] W. Dahmen, C.A. Micchelli, *Recent progress in multivariate splines*, in: C.K. Chui, L.L. Schumaker, J.D. Ward (Eds.), Approximation Theory IV, Academic Press, New York (1983), 27-121
- [25] W. Dahmen, C.A. Micchelli, *Translates of multivariate splines*, Linear Algebra Appl. **52/53** (1983), pp. 217-234
- [26] W. Dahmen, C.A. Micchelli, *Subdivision algorithms for the generation of box spline surfaces*, Computer Aided Geometric Design **1** (1984), pp. 115-129
- [27] W. Dahmen, *Bernstein-Bézier representation of polynomial surfaces*, in Extension of B-spline curve algorithms to surfaces, Siggraph 86 Lecture Notes, ACM New York
- [28] C. de Boor, K. Höllig, *Recurrence relations for multivariate B-splines*, Proc. Amer. Math. Soc. **85** (1982), 397-400
- [29] C. de Boor, K. Höllig, *B-splines from parallelepipeds*, J. Analyse Math. **42** (1982), 99-115
- [30] C. de Boor, *B-form basics*, in: G. Farin (Ed.), Geometric Modeling: Applications and New Trends, SIAM Publication, Philadelphia (1987), 131-148
- [31] C. de Boor, *On the evaluation of box splines*, Numerical Algorithms **5** (1993), 5-23
- [32] C. de Boor, K. Höllig, S. Riemenschneider, Box splines (Springer Verlag, Berlin, 1993)
- [33] C. de Boor, K. Höllig, S. Riemenschneider, *Bivariate cardinal interpolation*, in: C.K. Chui, L.L. Schumaker, J.D. Ward (Eds.), Approximation Theory IV, Academic Press, New York (1983), pp. 359-363
- [34] C. de Boor, R. De Vore, *Approximation by smooth multivariate splines*, Trans. Amer. Math. Soc., **276** (1983), pp. 775-788

- [35] H. Q. Dinh, G. Slabaugh, G. Turk, *Reconstructing surfaces using anisotropic basis functions*, International Conference on Computer Vision (2001), pp. 606-613
- [36] R. Franke, *A critical comparison of some methods for interpolation of scattered data*, NPS-53-79-003, Dept. of Mathematics, Naval Postgraduate School, Monterey (1979)
- [37] R. Franke, G. Nielson, *Smooth interpolation of large sets of scattered data*, International Journal for numerical methods in engineering, **15** (1980), pp. 1691-1704
- [38] R. Franke, *Scattered data interpolation: tests of some methods*, Mathematics of computation, **38** 157 (1982), pp. 181-200
- [39] R. Franke, *Smooth surface approximation by a local method of interpolation at scattered points*, Report Naval Postgraduate School, 57-78-008, (1978)
- [40] T. Goodman, J. Peters, *Bézier nets, convexity and subdivision on higher dimensional simplices*, Computer Aided Geometric Design **12**(1) (1995), 53-65
- [41] W.J. Gordon, J.A. Wixom, *Shepard's method of metric interpolation to bivariate and multivariate interpolation*, Mathematics of Computation **32** 141 (1978), pp. 253-264
- [42] K. Höllig, *Box splines*, in: C.K. Chui, L.L. Schumaker, J.D. Ward (Eds.), Approximation Theory V, Academic Press, New York (1986), 71-95
- [43] K. Jetter, *A short survey on cardinal interpolation by Box splines*, in: C. K. Chui, L. L. Schumaker, F. I. Utreras, Eds. Topics in Multivariate Approximation (Academic Press, New York, 1987), pp. 125-139
- [44] K. Jetter, S. Riemenschneider, *Cardinal interpolation, submodules and the 4-direction mesh*, Constructive Approximation, **3** (1987), pp. 169-188
- [45] R. Q. Jia, *Local linear independence of the translates of a box spline*, Constructive Approximation, **1** (1985), pp.175-182
- [46] R. Q. Jia, N. Sivakumar, *On the linear independence of integer translates of box splines with rational directions*, Linear Algebra and its Applications **135** (1990), pp. 19-31

- [47] L. Kobbelt, *Stable evaluation of box splines*, Numerical Algorithms **14**(4) (1997), pp. 377-382
- [48] Z. Komargodsky, D. Levin, *Hermite type moving-least-squares approximations*, apparirà in Computer and Mathematics with Applications
- [49] M.J. Lai, *Fortran subroutines for B-nets of box splines on three- and four-directional meshes*, Numerical Algorithms **2** (1992), 33-38
- [50] P. Lancaster, *Moving weighted least-squares methods*, in Polynomial and spline approximation (B. N. Sahney, Ed.), NATO Advanced Study Institute Series C, Reidel, Dordrecht, (1979), pp. 91-102
- [51] P. Lancaster, K. Šalkauskas, *Curve and surface fitting, an introduction*, Academic Press, Londra, (1986)
- [52] P. Lancaster, K. Šalkauskas, *Surfaces generated by moving least squares methods*, Mathematics of Computation, **37** 155, (1981), pp. 141-158
- [53] D. Lasser, *Bernstein-Bézier representation of volumes*, Computer Aided Geometric Design **2**(1-3) (1985), 145-150
- [54] D. Lazzaro, L. B. Montefusco, *Radial basis function for the multivariate interpolation of large scattered data sets*, Journal of Computational and Applied Mathematics **140** (2002), pp. 521-536
- [55] D. Levin, *The approximation power of moving least-squares*, Mathematics of Computation, **67** 224, (1998), pp. 1517-1531
- [56] M. Levoy, K. Pulli, B. Curless, S. Rusinkiewicz, D. Koller, L. Pereira, M. Ginzton, S. Anderson, J. Davis, J. Ginsberg, J. Shade, D. Fulke, *The digital Michelangelo project: 3D scanning of large statues*, Proceedings SIGGRAPH 2000, (2000), pp. 131-144
- [57] C. T. Loop, *Smooth subdivision surfaces based on triangles*, tesi di Master, Dipartimento di Matematica, Università di Utah, (1987)
- [58] M.D. Mc Cool, *Optimized evaluation of Box splines via the inverse FFT*, Proceedings of Graphics Interface, Canadian Information Processing Society, Québec (1995), 34-43

- [59] D. H. McLain, *Drawing contours from arbitrary data points*, Comput. Journal, **17**, (1974), pp. 318-324
- [60] B. S. Morse, T. S. Yoo, P. Rheingans, D. T. Chen, K. R. Subramanian, *Interpolating implicit surfaces from scattered surface data using compactly supported radial basis function*, Proceedings of Shape Modeling International, (2001)
- [61] Y. Ohtake, A. Belyaev, H. P. Seidel, *Multi-scale approach to scattered data interpolation with compactly basis functions*, Proceedings of Shape Modeling International, (2003)
- [62] Y. Ohtake, M. Alexa, A. Belyaev, G. Turk, H. P. Seidel, *Multi-level partition of unity implicits*, ACM Transactions on Graphics (TOG), **22** 3, (2003), pp. 463-470
- [63] J. Peters, *Evaluation of multivariate Bernstein polynomials*, CMS Technical Report No. 91-1, University of Wisconsin
- [64] J. Peters, *Evaluation and approximate evaluation of the multivariate Bernstein-Bézier form on a regularly partitioned simplex*, ACM Trans. Math. Softw. **20**(4) (1994), 460-480
- [65] J. Peters, *C^2 surfaces built from zero sets of the 7-direction box spline*, Proceedings of the sixth IMA Conference on the Mathematics of Surfaces (1994), 463-474
- [66] J. Peters, M. Wittman, *Blending basic implicit shapes using trivariate box splines*, Proceedings of the fourth ACM Symposium on Solid Modeling and Applications (1997), 195-205
- [67] M. J. D. Powell, *Piecewise quadratic surface fitting for contour plotting*, Software for Numerical Mathematics, D. J. Evans, ed., Academic Press, (1974), pp. 253-271
- [68] M. J. D. Powell, M. A. Sabin, *Piecewise quadratic approximation on triangles*, ACM Trans. Math. Software **3** (1977), pp. 316-325
- [69] H. Prautzsch, W. Boehm, *Box Splines*, in: G. Farin, J. Hoschek, M.-S. Kim (Eds.), Handbook of Computer Aided Geometric Design (2002), Chapter 10
- [70] R. J. Renka, *Multivariate interpolation of large sets of scattered data*, ACM Transactions on Mathematical Software, **14** 2, (1988), pp. 139-148

- [71] R. J. Renka, R. Brown, *Algorithm 792: accuracy tests of ACM algorithms for interpolation of scattered data in the plane*, ACM Transactions on Mathematical Software, **25** 1, (1999), pp. 78-94
- [72] R. J. Renka, *Algorithm 660 QSHEP2D: quadratic Shepard method for bivariate interpolation of scattered data*, ACM Transactions on Mathematical Software, **14** 2, (1988), pp. 149-150
- [73] S.D. Riemenschneider, *Multivariate cardinal interpolation*, in: C.K. Chui, L.L. Schumaker, J.D. Ward (Eds.), *Approximation Theory VI: Volume 2*, Academic Press, New York (1989), 561-580
- [74] A. Ron, *A necessary and sufficient condition for the linear independence of the integer translates of a compactly supported distribution*, Constructive Approximation **5** (1989), pp. 297-308
- [75] A. Ron, N. Sivakumar, *The approximation order of box spline spaces*, Proceedings of the American Mathematical Society **117** 2 (1993), pp. 473-482
- [76] M.A. Sabin, *The use of piecewise forms for the numerical representation of shape*, Tanulmányok 60/1977, MTA Szamitastechnikai es Automatizalasi Kutato Intezet (Budapest, 1976)
- [77] M.A. Sabin, *Boundary conditions for the 3-direction Box spline*, Lecture Notes in Computer Science 2768-Springer 2003, Michael J. Wilson, Ralph R. Martin, eds., *Mathematics of surfaces*, 10th IMA International Conference, Leeds, UK, September 15-17 2003, Proceedings pp. 244-261
- [78] V. V. Savchenko, A. Pasko, O. G. Okunev, T. L. Kunii, *Function representation of solids reconstructed from scattered surface points and contours*, Computer Graphics Forum, **14** 4 (1995), pp. 181-188
- [79] L.L. Schumaker, W. Volk, *Efficient evaluation of multivariate polynomials*, Computer Aided Geometric Design **3**(2) (1986), 149-154
- [80] D. Shepard, *A two-dimensional interpolation function for irregularly spaced data*, Proceedings of the 23rd National Conference, ACM, New York, (1968), pp.517-523
- [81] J. Stoeckler, *Cardinal interpolation with translates of shifted bivariate box-splines*, in: T. Lyche, L. Schumaker (Eds.), *Mathematical Methods in Computer Aided Geometric Design*, Academic Press N.Y. (1989), 583-592

- [82] J. Sun, K. Zhao, *On the structure of Bézier nets*, J. Computational Math. **5** (1987), 376-383
- [83] I. Tobor, P. Reuter, C. Schlick, *Efficient reconstruction of large scattered geometric datasets using the partition of unity and radial basis function*, Journal of WSCG **12** 1-3, (2004),
- [84] G. Turk, J. O'Brien, *Variational implicit surfaces*, Technical Report GIT-GVU-99-15, Georgia Institute of Technology, (1998)
- [85] P. Zwart, *Multivariate splines with nondegenerate partitions*, SIAM J. Numer. Anal. **10** (1973), pp. 665-673