



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PALERMO

Dottorato di Ricerca in
*Storia e Didattica delle Matematiche, Storia e Didattica della Fisica,
Storia e Didattica della Chimica*
Dipartimento di Matematica e Informatica
Settore Scientifico Disciplinare: MAT/04

LA CONSAPEVOLEZZA DELL'INSEGNANTE DELLA DIMENSIONE SEMIO-COGNITIVA DELL'APPRENDIMENTO DELLA MATEMATICA

LA DOTTORESSA
MAURA IORI

IL COORDINATORE
Prof. AURELIO AGLIOLO GALLITTO

IL TUTOR
Prof. ALDO BRIGAGLIA

IL CO-TUTOR
Prof. BRUNO D'AMORE

CICLO XXIV
2015

Sunto

Questa tesi affronta un problema poco studiato, almeno direttamente, dalla ricerca internazionale in didattica della matematica: la consapevolezza dell'insegnante degli aspetti semiotici e cognitivi dell'apprendimento della matematica. L'obiettivo è quello di evidenziare il grado di consapevolezza che l'insegnante di matematica (di scuola primaria e secondaria in Italia) manifesta: (1) del livello a cui si colloca ciò che l'istituzione propone come oggetto matematico e del livello a cui si colloca ciò che l'istituzione propone come rappresentazione semiotica di quell'oggetto; (2) dei diversi aspetti di una rappresentazione semiotica sui quali lo studente che la gestisce con difficoltà e lo studente in grado di gestirla si focalizzano; (3) dei conflitti semiotici generati dai contenuti (*representamen* in senso peirceano) di rappresentazioni semiotiche simili per qualche aspetto. A tale scopo, in questo studio, l'approccio semio-cognitivo introdotto da Raymond Duval è stato integrato localmente con altri approcci semiotici alla didattica della matematica, in particolare con quello semiotico-interpretativo di tradizione peirceana e con la teoria antropologica della didattica introdotta da Yves Chevallard. Seguendo il paradigma di ricerca pragmatista, la metodologia si è basata su un disegno di ricerca a metodi misti, in tal caso principalmente qualitativo, in modo da ottenere le migliori opportunità di risposta alle domande di ricerca. I risultati della ricerca mostrano chiaramente la necessità di una formazione iniziale e in servizio degli insegnanti che includa argomenti di semiotica, in particolare una riflessione professionale sul ruolo che la gestione semiotica gioca nella costruzione cognitiva degli oggetti matematici, nella valutazione dei processi di apprendimento degli studenti e, più in generale, delle situazioni d'aula. Questa tesi apre dunque uno spiraglio interessante non solo nel mondo della ricerca in didattica della matematica ma anche nel mondo della formazione degli insegnanti.

Abstract

This thesis addresses a problem relatively little studied in the international research field of mathematics education: The teacher's awareness of semiotic and cognitive aspects of learning mathematics. The aim is to highlight the degree of awareness that the mathematics teacher (of primary and secondary school in Italy) shows about: (1) the level at which what the institution proposes as a mathematical object is placed, and the level at which what the institution proposes as a semiotic representation of that object is placed; (2) the different aspects of a semiotic representation on which the student able to handle the representation and the student who handles the representation with difficulty may focus; (3) the semiotic conflicts generated by the contents (*representamen* in the Peircean sense) of semiotic representations similar in some respects. For this purpose, in this study, the semio-cognitive approach introduced by Raymond Duval was locally integrated with other semiotic approaches to mathematics education, in particular with the semiotic-interpretive approach of the Peircean tradition and the anthropological theory of the didactics introduced by Yves Chevallard. Embracing the pragmatist research paradigm, the methodology was based on a mixed methods research design, in this case mainly qualitative, in order to obtain the best opportunities of answering the research questions. The research results clearly show the need for initial and in-service teacher training that includes topics of semiotics, specifically a professional reflection on the role that the semiotic handling plays in the cognitive building of the mathematical objects as well as in the assessment of learning processes and classroom situations in general. Therefore, this thesis opens an interesting window not only in the world of research in mathematics education but also in the world of teacher training.

A mio padre

Ringraziamenti

Un sentito ringraziamento va a tutti coloro che, a vario titolo, hanno reso possibile la realizzazione di questa tesi.

Ringrazio in particolare tutti gli insegnanti che hanno accettato di sottoporsi alla prova, e tutti coloro con i quali ho avuto la possibilità di discutere la tesi, in generale e nei dettagli.

Un ringraziamento particolare va al Prof. Raymond Duval, che con i suoi preziosi chiarimenti e suggerimenti ha fornito un contributo scientifico significativo e determinante al contenuto di questa tesi.

Un ringraziamento del tutto speciale va al Prof. Bruno D'Amore, che ha sempre creduto con convinzione, forza ed entusiasmo, in questo mio lavoro. In ogni momento, mi ha accompagnato, guidato, indirizzato e sostenuto con molta professionalità, pazienza e dedizione, con preziosi consigli e rilevanti contributi scientifici. Con molta gentilezza e generosità mi ha accolto e guidato anche a Bogotá e a Medellín durante il periodo di formazione, per me indimenticabile.

A tutti loro va la mia gratitudine e la mia stima. Senza la loro disponibilità e il loro aiuto questa tesi non sarebbe mai stata scritta o non sarebbe risultata della stessa qualità scientifica. Eventuali errori o imprecisioni sono comunque imputabili soltanto a me. A tutti loro un grazie sincero.

Indice

INTRODUZIONE	1
1.1 PREMESSA.....	1
1.2 PROBLEMA DI RICERCA.....	3
1.3 STRUTTURA DELLA TESI	5
QUADRO TEORICO	7
2.1 INTRODUZIONE	7
2.2 OGGETTI, SEGNI E RAPPRESENTAZIONI	7
2.2.1 <i>Oggetti e concetti</i>	9
2.2.2 <i>Tipologie di oggetti</i>	15
2.2.3 <i>Natura degli oggetti matematici</i>	18
2.2.4 <i>Segni e rappresentazioni</i>	21
2.2.4.1 <i>Agostino</i>	23
2.2.4.2 <i>Leibniz</i>	23
2.2.4.3 <i>Peirce</i>	24
2.2.4.4 <i>Frege</i>	30
2.2.4.5 <i>Piaget</i>	32
2.2.4.6 <i>Osservazioni</i>	35
2.2.5 <i>Sistema di segni di de Saussure</i>	38
2.2.6 <i>Due modi opposti di concepire i segni</i>	41
2.2.7 <i>Approccio semio-cognitivo</i>	44
2.2.8 <i>Approccio semiotico-culturale</i>	46
2.2.9 <i>Approccio onto-semiotico</i>	48
2.3 SISTEMI SEMIOTICI E REGISTRI DI RAPPRESENTAZIONE	52
2.3.1 <i>Sistemi semiotici e altri sistemi</i>	54
2.3.2 <i>Analisi funzionale e analisi strutturale</i>	57
2.3.3 <i>Classificazione dei registri di rappresentazione</i>	61
2.3.4 <i>Apprendimento e mobilitazione di registri di rappresentazione</i>	62
2.4 DIMENSIONE SEMIO-COGNITIVA DELL'APPRENDIMENTO DELLA MATEMATICA	63

2.5 ATTIVITÀ MATEMATICHE E PROCESSI DI COMPrensIONE SOTTOSTANTI	67
2.6 COMPLESSITÀ SEMIO-COGNITIVA DELLE ATTIVITÀ MATEMATICHE	76
2.7 PUNTO DI VISTA MATEMATICO E PUNTO DI VISTA SEMIO-COGNITIVO.....	83
PROCESSO DI RICERCA	89
3.1 INTRODUZIONE.....	89
3.2 DOMANDE DI RICERCA	89
3.3 IPOTESI DI RICERCA	90
3.4 APPROCCIO ALLA RICERCA	92
3.5 RICERCA QUALITATIVA.....	92
3.6 PARADIGMA DI RICERCA	98
3.6.1 <i>Paradigma positivista</i>	100
3.6.2 <i>Paradigma post-positivista</i>	100
3.6.3 <i>Paradigma critico</i>	101
3.6.4 <i>Paradigma costruttivista</i>	102
3.6.5 <i>Paradigma partecipativo</i>	103
3.6.6 <i>Paradigma pragmatista</i>	106
3.7 APPROCCI INTERPRETATIVI ALLA RICERCA QUALITATIVA	112
3.7.1 <i>Indagine ermeneutica</i>	112
3.7.2 <i>Indagine naturalistica</i>	114
3.7.3 <i>Interazionismo simbolico</i>	117
3.7.4 <i>Fenomenologia</i>	120
3.7.5 <i>Fenomenografia</i>	123
3.8 METODOLOGIA.....	125
3.8.1 <i>Disegno di ricerca</i>	126
3.8.2 <i>Metodi</i>	131
3.8.3 <i>Questionario di ricerca</i>	133
3.8.4 <i>Procedura di campionamento</i>	158
3.8.5 <i>Considerazioni etiche</i>	159
3.8.6 <i>Raccolta dei dati</i>	160
3.8.7 <i>Partecipanti alla ricerca</i>	161
RISULTATI DI RICERCA.....	163
4.1 INTRODUZIONE.....	163
4.2 RIFLESSIONI SULLE DOMANDE DEL QUESTIONARIO	163
4.3 ANALISI E INTERPRETAZIONE DEI DATI.....	168
4.3.1 <i>Oggetti e rappresentazioni</i>	168

4.3.1.1	<i>Scuola primaria</i>	169
4.3.1.2	<i>Scuola secondaria di primo grado</i>	175
4.3.1.3	<i>Scuola secondaria di secondo grado</i>	176
4.3.1.4	<i>Dalla scuola primaria alla scuola secondaria</i>	180
4.3.2	<i>Rappresentazioni e registri di rappresentazione</i>	183
4.3.2.1	<i>Scuola primaria</i>	184
4.3.2.2	<i>Scuola secondaria di primo grado</i>	187
4.3.2.3	<i>Scuola secondaria di secondo grado</i>	189
4.3.2.4	<i>Dalla scuola primaria alla scuola secondaria</i>	191
4.3.3	<i>Aspetti di una rappresentazione che ne favoriscono la comprensione</i>	196
4.3.4	<i>Aspetti di una rappresentazione che ne ostacolano la comprensione</i>	199
4.3.5	<i>Conflitti semiotici generati da contenuti di rappresentazioni</i>	204
CONCLUSIONI.....		217
5.1	INTRODUZIONE.....	217
5.2	RISPOSTE ALLE DOMANDE DI RICERCA.....	219
5.2.1	<i>Oggetti, rappresentazioni e registri di rappresentazione</i>	219
5.2.2	<i>Aspetti di una rappresentazione che ne favoriscono la comprensione</i>	220
5.2.3	<i>Aspetti di una rappresentazione che ne ostacolano la comprensione</i>	221
5.2.4	<i>Conflitti semiotici generati da contenuti di rappresentazioni</i>	222
5.3	IMPLICAZIONI E RIFLESSIONI DIDATTICHE.....	223
5.4	LIMITAZIONI DELLO STUDIO E RACCOMANDAZIONI PER LA RICERCA FUTURA.....	224
5.5	CONCLUSIONE.....	227
APPENDICE A LETTERA DI INVITO.....		229
APPENDICE B QUESTIONARI.....		231
B.1	SCUOLA PRIMARIA.....	231
B.2	SCUOLA SECONDARIA DI PRIMO GRADO.....	254
B.3	SCUOLA SECONDARIA DI SECONDO GRADO.....	277
APPENDICE C SINTESI DEI DATI.....		301
C.1	SCUOLA PRIMARIA.....	301
C.2	SCUOLA SECONDARIA DI PRIMO GRADO.....	320
C.3	SCUOLA SECONDARIA DI SECONDO GRADO.....	335
BIBLIOGRAFIA.....		349

1 Introduzione

1.1 Premessa

Le ricerche sulla dimensione semio-cognitiva del processo di apprendimento della matematica sono relativamente recenti, risalgono agli anni '90, e si sono focalizzate per lo più sullo studente, assumendo spesso implicitamente che le difficoltà di natura semiotica e cognitiva evidenziate dallo studente nelle attività matematiche, ovvero le difficoltà dello studente nella gestione delle rappresentazioni semiotiche degli oggetti matematici emergenti dalle attività matematiche, siano anche quelle evidenziate dall'insegnante nell'analisi delle produzioni matematiche dello studente o nella trasposizione didattica di determinati contenuti.

Un episodio al riguardo ha attirato particolarmente la mia attenzione e mi ha fatto molto riflettere, al punto da spingermi ad approfondire i miei studi e a inserire la mia ricerca nel filone semiotico della didattica della matematica. L'episodio risale al 2009, durante l'Esame di Stato di quell'anno, in un liceo scientifico (corso sperimentale, indirizzo PNI) della provincia di Modena.¹ Mi trovavo in quella scuola come commissario esterno d'esame. Tra i quesiti della seconda prova scritta, di matematica, di quell'anno si trovava il seguente:

Quesito 5. Si considerino le seguenti espressioni:

$$\frac{0}{1}; \frac{0}{0}; \frac{1}{0}; 0^0$$

A quali di esse è possibile attribuire un valore numerico? Si motivi la risposta.

Tra le risposte al quesito, ha attirato a un certo punto la mia attenzione quella di uno studente che, riferendosi alla quarta espressione, ha scritto: “ 0^0 è una forma indeterminata. Infatti può essere uguale a 0 oppure a 1”. Durante il colloquio lo studente in questione ha tentato di spiegare la sua risposta al quesito nei termini seguenti: “Zero alla zero, nella maggior parte dei casi, è uguale a zero, ma qualche volta può essere

¹ L'indirizzo PNI (Piano Nazionale di Informatica) era una sezione sperimentale, attiva dall'anno scolastico 1991-92 all'anno scolastico 2010-2011 in alcune scuole secondarie di secondo grado italiane, che aveva lo scopo di migliorare la preparazione scientifica degli allievi, soprattutto in matematica, fisica e informatica.

uguale a uno... Ci hanno sempre detto che *un qualunque numero elevato alla zero dà uno!*”.

Il caso è emblematico. Evidenzia tutta la complessità dei processi di comprensione sottostanti la gestione delle rappresentazioni semiotiche di oggetti matematici. In particolare mostra quanto sia tutt'altro che spontanea e lineare la comprensione del ruolo giocato dalle componenti di una rappresentazione semiotica legate, per esempio, ad aspetti iconico-qualitativi (aspetti concreti o di somiglianza della rappresentazione con qualcos'altro di concreto), iconico-strutturali (aspetti della rappresentazione legati alla sua costruzione, a proprietà o a teoremi), di analogia (aspetti della rappresentazione posti in rapporto, non necessariamente di somiglianza iconica, con il linguaggio quotidiano o l'esperienza sensibile), indicali (aspetti di rinvio a qualcos'altro, come a un'operazione da svolgere, a un'altra rappresentazione, a un altro oggetto matematico, o a proprietà), simbolici (aspetti convenzionali della rappresentazione, come quelli legati a notazioni, definizioni, regole o vincoli d'uso).

La scelta e l'uso di rappresentazioni semiotiche richiede indubbiamente la massima cautela e attenzione; “complementi” non voluti o inattesi da parte dello studente possono rimanere a lungo celati dietro alle usuali attività matematiche, diventando sempre più difficili da modificare o da evitare con il passare degli anni. Sembra allora assolutamente urgente una condivisione, da parte di ricercatori e insegnanti, degli aspetti problematici sopra evidenziati, una loro analisi e interpretazione, attraverso studi e ricerche specifiche che possano fornire, sia all'insegnante sia allo studente, nuove chiavi di lettura per riconoscere, evitare o almeno limitare gli ostacoli che le differenti componenti di una rappresentazione semiotica possono frapporre alla comprensione dei contenuti matematici. Come afferma Bagni (2009b):

è, non lo dimentichiamo, il soggetto, con il suo background socio-culturale, che interpreta il segno sottolineando, in esso, una o un'altra componente. E da tale scelta dipendono i vari comportamenti e, in ultima analisi, le diverse forme (e livelli) di apprendimento. (Bagni, 2009b, p. 162)

Se il soggetto in questione è l'insegnante ci si può allora porre, in generale, la seguente domanda: L'insegnante è consapevole della dimensione semiotica e cognitiva del processo di apprendimento della matematica? In particolare, anche in relazione al caso sopra riportato, ci si può chiedere: A quali aspetti di una rappresentazione semiotica l'insegnante riconduce le difficoltà dello studente nella gestione della rappresentazione?

Su quali aspetti della rappresentazione l'insegnante ritiene che lo studente in difficoltà focalizzi maggiormente la sua attenzione?

La scelta dell'argomento di ricerca di questa tesi è dovuta in gran parte al desiderio e alla voglia di comprendere più a fondo le difficoltà di natura semiotica e cognitiva che un soggetto incontra nelle attività matematiche, allo speciale interesse per gli approcci di ricerca di tipo semiotico e cognitivo alla didattica della matematica e, allo stesso tempo, al desiderio di fornire un contributo alla ricerca in didattica della matematica che possa colmare alcune lacune o risolvere alcune questioni aperte presenti nella letteratura, suggerire ulteriori approfondimenti e specifici percorsi di ricerca.

L'incontro con studiosi e ricercatori di fama internazionale, gli interessanti spunti di riflessione, chiarimenti e suggerimenti da loro generosamente forniti, la lettura dei loro lavori di ricerca, insieme a quelli di altri studiosi e ricercatori che hanno fornito contributi di estrema rilevanza e grande successo sull'argomento, si sono rivelati fondamentali anzi decisivi nell'orientare e calibrare la ricerca.

1.2 Problema di ricerca

L'obiettivo generale di questa ricerca è stato quello di evidenziare la consapevolezza, o non consapevolezza, dell'insegnante su una particolare dimensione del processo di apprendimento della matematica, quella semiotica e allo stesso tempo cognitiva (semio-cognitiva), della quale le ricerche e gli studi pionieristici di Duval (1988a, 1988b, 1988c, 1993) hanno rivelato tutta l'importanza e l'efficacia per la comprensione delle difficoltà ricorrenti (non riconducibili a fattori affettivi, emozionali, psicologici, pedagogici o sociali) che lo studente incontra nel processo di apprendimento della matematica.² In particolare, si è cercato di evidenziare il grado di consapevolezza che l'insegnante ha:

1. del livello a cui si colloca l'oggetto matematico e del livello a cui si collocano le sue rappresentazioni semiotiche nelle attività matematiche, più precisamente, del

² Duval (2011) fa notare che le difficoltà globali e ricorrenti nell'apprendimento della matematica, quelle che si manifestano a livello di un anno o ciclo di studi, sono legate soprattutto alla risoluzione di problemi, al ragionamento, alla visualizzazione geometrica, alla visualizzazione grafica, al trasferimento di conoscenze da una data situazione a un'altra. Esse sono completamente differenti dalle difficoltà locali, legate al particolare contenuto matematico (nozione, procedura etc.) appena introdotto. Tuttavia le prime sono spesso ricondotte a o confuse con le seconde. Per questo motivo, molti studi e lavori di ricerca tendono a spiegare le prime per mezzo delle seconde.

livello a cui si colloca ciò che l'istituzione propone come oggetto matematico e del livello a cui si colloca ciò che l'istituzione propone come mezzo semiotico per la trasposizione didattica dell'oggetto matematico;³

2. dei diversi aspetti di una rappresentazione semiotica sui quali lo studente in grado di gestirla può focalizzarsi;
3. dei diversi aspetti di una rappresentazione semiotica sui quali lo studente che la gestisce con difficoltà può focalizzarsi;
4. dei conflitti semiotici generati dai contenuti (*representamen*) di rappresentazioni semiotiche simili per qualche aspetto.⁴

Il problema della consapevolezza dell'insegnante degli aspetti semiotici e cognitivi dell'apprendimento della matematica costituisce un aspetto poco esplorato dalla ricerca, almeno in maniera diretta, ma di grande interesse e di estrema importanza, a livello sia teorico sia pratico, per intervenire in modo professionale sulle difficoltà di natura semiotica e cognitiva che lo studente e l'insegnante si trovano in qualche modo a gestire insieme, evitando di affidarsi ingenuamente al buon senso, all'esperienza, al compagno o al collega "più esperto". Tale consapevolezza permette, da una parte, una riflessione più profonda e generale sulle ragioni semiotiche e cognitive delle difficoltà che lo studente incontra nel processo di apprendimento della matematica e, dall'altra parte, una riflessione più consapevole e critica sulla formazione dell'insegnante.

La ricerca, durata oltre due anni, si è focalizzata sull'insegnante di scuola primaria e di scuola secondaria di primo e di secondo grado, in Italia. L'approccio alla ricerca, di tipo prettamente qualitativo e di natura pragmatista, si è basato su un disegno di ricerca con metodi misti (adeguatamente definiti e descritti nel capitolo 3).

Nel corso della ricerca, l'approccio semio-cognitivo di Duval è stato *integrato localmente* – nel senso attribuito da Prediger, Bikner-Ahsbals, e Arzarello (2008) e da Radford (2008b) alle strategie di connessione (*networking*) di approcci teorici differenti – con altri approcci semiotici alla didattica della matematica, in particolare con quello

³ Il termine "istituzione", come fa notare Chevallard (1995, 2005), è da intendere in senso non burocratico come "un insieme di atti o di idee interamente istituito che gli individui si trovano di fronte o che si impone loro in qualche modo" (Mauss & Fauconnet, 1901, p. 168), oppure nel senso attribuito da Douglas (1986): "un gruppo sociale legittimato" (p. 46). In altre parole, è da intendere come l'insieme dei modi di agire o di pensare prestabiliti entro determinati gruppi sociali o enti, in particolare entro le scuole, le università o i centri di ricerca.

⁴ Per la definizione esatta del termine "*representamen*" si rimanda al paragrafo 2.2.4.3.

semiotico-interpretativo di tradizione peirceana, per un'analisi più ampia e profonda dei dati di ricerca, oltre che dell'episodio sopra riportato (par. 1.1).

1.3 Struttura della tesi

La tesi è costituita da cinque capitoli. Nel primo capitolo si introduce l'argomento della ricerca, motivandone la scelta, e si delimita l'ambito in cui si colloca la ricerca, in particolare l'obiettivo generale della ricerca e l'approccio di ricerca. Nel secondo capitolo si sintetizza il quadro teorico di riferimento, ovvero la letteratura ritenuta più rilevante e adatta, tra quella esaminata, per inquadrare il problema di ricerca. Nel terzo capitolo si descrive il processo di ricerca, introducendo le domande e le ipotesi di ricerca, l'approccio alla ricerca, il paradigma di ricerca, la metodologia e i metodi scelti per rispondere alle domande di ricerca. Nel quarto capitolo si presentano i risultati di ricerca, in particolare i dati più rilevanti e critici al fine di poter rispondere in maniera significativa alle domande di ricerca. Nel quinto capitolo, sulla base dei dati presentati nel capitolo precedente, si forniscono le risposte alle domande di ricerca e si confrontano le risposte con le ipotesi di ricerca. Si presentano inoltre le principali implicazioni didattiche, le maggiori limitazioni dello studio, e alcune raccomandazioni per la ricerca futura. Nelle appendici si riportano la lettera di invito contenente la richiesta di consenso informato per la partecipazione alla ricerca, il questionario somministrato agli insegnanti (nelle sue diverse versioni in funzione dell'ordine di scuola di appartenenza) e una sintesi delle risposte degli insegnanti alle domande del questionario. Tutte le citazioni in italiano di autori non italiani sono traduzioni nostre.

2 Quadro teorico

2.1 Introduzione

In questo capitolo si descrive il quadro teorico di riferimento della ricerca, ovvero la letteratura ritenuta più rilevante, tra quella studiata, per il problema di ricerca preso in esame (par. 1.2).

2.2 Oggetti, segni e rappresentazioni

La nozione di oggetto matematico è molto dibattuta, non del tutto condivisa, soprattutto perché varia al variare del punto di vista adottato in matematica, filosofia, storia ed epistemologia della matematica, così come in didattica della matematica (D'Amore, 2001a; Davis & McGowen, 2001; Duval, 1998a, 1998b; Font, Godino, & Gallardo, 2013; Godino & Batanero, 1998; Otte, 2003; Panza, 2009; Radford, 2002b, 2004; Steinbring, 2006; per citare solo alcuni autori che si sono occupati del tema). Ciò che oggi sembra specifico e irrinunciabile, nelle attività matematiche e nei processi cognitivi sottostanti tali attività, è la componente semiotica (Duval, 1993, 1995, 2001).

I segni, le rappresentazioni e le loro relazioni con gli oggetti a cui le rappresentazioni rinviano sono al centro delle attività matematiche (D'Amore, 2001a, 2001b; Duval, 1998a, 1998b, 1999). Una loro analisi profonda e articolata si rivela dunque necessaria e cruciale per poter intervenire efficacemente sui processi di apprendimento. Su di essi si focalizza gran parte dell'attuale ricerca internazionale in didattica della matematica, seppur da punti di vista diversi, con approcci differenti, a seconda del tipo di analisi (semio-cognitiva, semiotico-culturale, pedagogica, onto-semiotica etc.) effettuata, o degli specifici aspetti indagati.⁵ Occorre infatti tener presente

⁵ Una importante raccolta di punti di vista, studi e ricerche precedenti agli anni '90, soprattutto in ambito psicologico e pedagogico, sul tema della rappresentazione e sui problemi che essa solleva nell'insegnamento-apprendimento della matematica è quella di Janvier (1987).

che la specificità dell'oggetto indagato (Duval, 2009a), delle forme di attività dalle quali l'oggetto emerge (D'Amore, 2001a; Godino, 2002), o delle forme di pensiero e di riflessione che esso veicola (Radford, 2009) è determinante ai fini dell'indagine stessa. Un oggetto matematico è completamente differente da un oggetto sperimentale, per esempio della Fisica, della Biologia, o della Chimica (Duval, 1999). In altre parole, non si può elaborare un unico modello di acquisizione o di costruzione di conoscenza, un modello che sia indipendente dal tipo di conoscenza in gioco, e questo si è rivelato soprattutto grazie agli studi pionieristici di Duval (1993). Analogamente, se si considera l'attività matematica come una specifica forma culturale di riflessione e di azione che differisce dalle altre forme di attività non tanto per il suo contenuto o per la natura generale dei suoi oggetti ma per il tipo di pensiero o di ragionamento, culturalmente e storicamente determinato, che veicola (Radford, 2009), l'approccio semiotico-culturale (Radford, 2003a) è quello che fornisce, a nostro avviso, risposte più efficaci, mirate e precise.

In tutti i casi, non è possibile parlare di segni, rappresentazioni e oggetti senza tener conto delle caratteristiche della conoscenza matematica e, più in generale, della conoscenza scientifica.

Come evidenzia Raymond Duval (2006c, 2011), ci sono diversi modelli che si possono utilizzare per l'analisi dei segni e del loro ruolo nel funzionamento generale dell'attività scientifica e nella comunicazione, di cui due strettamente legati alla fondazione della "semiotica" come disciplina: il modello di Charles Sanders Peirce (1839 – 1914) e quello di Ferdinand de Saussure (1857 – 1913). Di notevole rilievo, inoltre, seppur non strettamente legato alla fondazione della semiotica come disciplina, il contributo del matematico, logico e filosofo tedesco Friedrich Ludwig Gottlob Frege (1848 – 1925), soprattutto per quanto concerne i processi semiotici descrittivi-produttori di nuove conoscenze in matematica, processi che per Frege sono strettamente legati a quelli di denominazione-indicazione, sulla base, come vedremo, della distinzione fondamentale tra senso (*Sinn*) e significato (*Bedeutung*) di un segno.

Tali modelli saranno presi in esame, senza però entrare troppo nei dettagli, nel paragrafo 2.2.4. (Per altri aspetti concettuali e storici della disciplina semiotica e per approfondire la sua presenza nella didattica si rinvia a: D'Amore, Fandiño Pinilla, & Iori, 2013).

2.2.1 *Oggetti e concetti*

In matematica si parla in generale di “oggetti” quando si vuole evidenziare la particolare *realtà* delle entità studiate, create, costruite o indagate dal matematico, oppure di “concetti” quando si vuole evidenziare il risultato di un atto di pensiero, ovvero, come suggerisce l’etimologia della parola “concetto” (dal sostantivo maschile latino *conceptus*, che significa letteralmente “feto”, “prodotto del concepimento”, e dal verbo *concipere*, composto da *cum* e *capere*, “prendere insieme”, “accogliere in sé”), la produzione interna di pensiero da una parte, e collezione di una pluralità di elementi in una singola unità, o generalità, dall’altra parte (Cassin, Apter, Lezra, & Wood, 2014).

Nel complesso, dunque, il nome latino rinvia al “risultato dell’atto di concepimento o generazione della mente nel suo staccarsi dall’immediatezza delle impressioni sensibili e delle rappresentazioni particolari e nel suo giungere ad una significazione universale” (D’Amore, 1999, p. 195). Le impressioni sensibili e le rappresentazioni particolari sono l’effetto prodotto sui sensi dalle cose, dalla realtà esterna in senso ingenuo; in altre parole, il significato della parola “cosa” è da ricondurre a quello evidenziato nella *Metafisica* di Aristotele, ovvero a ciò che presenta le tre caratteristiche seguenti: tridimensionalità, accessibilità a più sensi umani contemporaneamente (vista, udito, olfatto, tatto, gusto), separabilità materiale da altre “cose” (D’Amore, 2000a, 2000b; Duval, 1998a).

La parola “concetto”, nel suo significato etimologico, nasconde dunque un certo “realismo ingenuo”, dove quell’ “ingenuo” non vuol dire “ingenuo”, “di senso comune”, ma si riferisce al *Naïven Realismus* così definito da Wilhelm Schuppe (1836 – 1913) (*Grundriss der Erkenntnistheorie und Logik*, 1894), cioè quello per cui si riconosce l’indipendenza concettuale dell’oggetto conosciuto dall’atto (psichico) con il quale viene conosciuto (D’Amore, 2005c).

Anche la parola “oggetto”, come la parola “concetto”, deriva dal latino. In Cassin et al. (2014) si legge che il latino classico ha già il participio perfetto di *obiicio*, “gettare o collocare davanti”, “essere opposto”, “contrapporre”. Il sostantivo maschile latino *objectus* è usato per riferirsi a “ciò che è posto prima”, a “ciò che sta davanti”, a un ostacolo, a un’apparizione, al corpo interposto tra l’occhio e la cosa che si vuole vedere, cioè a ciò che ostacola la visione. Il termine *objectum* è utilizzato in particolare da Agostino d’Ippona (354 – 430) nell’ambito dell’antica teoria della visione, quella che risale agli antichi Greci. In tale teoria, la visione è generata dall’incontro tra i “raggi”

(“fuoco visivo” o “luce”) emanati dagli occhi, combinati con la luce dell’ambiente, e i “raggi” (“fuoco”, “effluvi” o “colori”) emanati dalle cose. Agostino utilizza l’espressione *corpus obiectum* per designare non la cosa guardata, l’obiettivo della visione, ma ciò che, gettato davanti agli occhi, interrompe i raggi visivi, impedendo la trasparenza della visione (Cassin et al., 2014).

Il concetto di “oggetto” emerge quando nel sostantivo neutro *obiectum* confluiscono due significati: quello di “ostacolo per la visione” adottato da Agostino, e quello associato da Aristotele (per esempio in: *Sull’anima*, libro III; *Categorie*, capitolo X; *Metafisica*, libro V) al termine greco *αντικείμενα* (*antikeímena*, che etimologicamente significa “ciò che è posto di fronte”) per designare gli opposti, i contrari, o più in generale una relazione reciproca tra due entità o fenomeni, come quella tra il conoscibile e la conoscenza, tra la capacità di conoscere o di desiderare e ciò che tale capacità permette di far conoscere o desiderare, relazione che anche Platone (in particolare nella *Repubblica*, libro IV) esprime, ma mediante perifrasi, non avendo un nome specifico per designarla (Cassin et al., 2014). Come nel seguente passo:

Forse, allora, l’aver sete in sé difficilmente può essere desiderio di altro che di ciò che esso è per natura, di bevanda in sé e, quindi, l’aver fame in sé è desiderio di cibo in sé? Così, egli disse, ciascun desiderio in sé lo è solamente di ciascuna cosa in sé di cui lo è per natura. (Platone, *Repubblica*, 4.437e).

In termini “moderni”: ciascun desiderio in sé lo è soltanto del suo *oggetto* naturale.

La combinazione dei due significati, quello di ostacolo interposto e quello di relazione tra la capacità di conoscere e ciò che si conosce, si manifesta quando Pseudo-Grossatesta (ca. 1175 – 1253), citando il testo di Aristotele *Sull’anima*, traduce *antikeímena* non con *opposita*, come fece Giacomo da Venezia nella prima metà del XII secolo, ma con *obiecta* (Baur, 1912). “Questa è la traduzione che divenne comune nella seconda metà del XIII secolo, e che fu adottata da Guglielmo di Moerbeke nella sua versione di *Sull’anima*” (Cassin et al., 2014, pp. 724-725).

La combinazione nel termine *obiectum* dei due significati, quello di derivazione agostiniana e quello di derivazione aristotelica, si manifesta chiaramente nel XIII secolo, determinando una svolta decisiva:

Ciò che è conosciuto non è più la faccia della cosa stessa, ma l’ostacolo contro cui lo sguardo collide, che depriva la sua attività della sua stessa trasparenza. (...) La cosa conosciuta emerge come un oggetto; il problema

della conoscenza è gradualmente separato dall'essere della cosa. (Cassin et al., 2014, p. 725)

La parola “oggetto”, da un punto di vista etimologico, designa dunque non solo ciò che sta di fronte, l'ostacolo interposto, ma anche ciò contro cui collide e si riflette il “raggio” emesso dall'intelletto, quindi ciò che è riconosciuto come risultato dell'atto del conoscere, ovvero della relazione tra il soggetto e ciò su cui il soggetto focalizza la sua attenzione. Tale relazione diventa un problema centrale in tutta la filosofia della conoscenza, in particolare in quella di Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646 – 1716):

Non tantum enim res ipsae, sed et rerum ideae semper animo distincte observari neque possunt neque debent, et itaque compendii causa signa pro ipsis adhibentur (Non soltanto le cose stesse, ma anche le idee delle cose non sempre possono, né devono, essere osservate distintamente, e quindi in luogo di esse, per ragioni di brevità [*compendii causa*], si utilizzano segni). (Leibniz, GP, VII, 204)⁶

Ma, a differenza di René Descartes (1596 – 1650) e di Thomas Hobbes (1588 – 1679), in Leibniz il ruolo dei segni non è ristretto a funzioni mnemoniche, evocative, di abbreviazione o condensazione, pedagogiche o comunicative. I segni, in Leibniz, hanno un ruolo cognitivo straordinario, fondamentale in tutte le operazioni mentali; accompagnano il ragionamento matematico, come ogni pensiero, in modo da renderlo “visibile”; sono strumenti di invenzione, di scoperta e di dimostrazione; servono al giudizio, così come all'algebra e all'aritmetica; sono essenziali al pensiero, anzi costituiscono la forma stessa del pensiero (Dascal, 1987). Leibniz elabora allora il progetto di un linguaggio formale e universale, la *characteristica universalis*, in grado di esprimere i pensieri umani e di porre fine a ogni tipo di disputa, ricorrendo, per l'appunto, al calcolo. Uno dei suoi scopi principali è la realizzazione di una *ars inveniendi* (arte dell'invenzione o della scoperta di nuove verità) e di una *ars judicandi* (arte del giudizio o della validazione) applicabili a tutte le scienze (C, 36-37).⁷ Tale linguaggio dovrebbe esprimere, attraverso le relazioni formali tra i segni (*caratteri*) che lo costituiscono, le analoghe relazioni tra gli oggetti (cose, idee o pensieri) a cui sono associati, in modo tale

⁶ GP = Gerhardt, C. I. (Ed.), *Die Philosophischen Schriften von Gottfried Wilhelm Leibniz*, 7 vols, Berlin: Weidmann, 1875-1890. Reprint, Hildesheim: Olms, 1965.

⁷ C = Couturat, L. (Ed.), *Opuscules et Fragments Inédits de Leibniz*, Paris: Felix Alcan, 1903. Reprint, Hildesheim: Olms, 1966.

da rendere i segni “caratteristici” degli oggetti a cui corrispondono. In altre parole, la manipolazione dei segni, secondo determinate regole, dovrebbe evidenziare o rispecchiare le proprietà degli oggetti corrispondenti e le loro relazioni con altri oggetti. Tuttavia, come evidenzia Dascal (1987), Leibniz considera il riferimento agli oggetti denotati non come una condizione centrale e indispensabile per l’uso corretto dei segni, ma come una pura possibilità, del tutto marginale rispetto alla manipolazione dei segni. In particolare, in una lettera a Mariotte (1676), Leibniz afferma che in algebra non si arriva mai al punto di passare dai caratteri (segni) agli oggetti, ma si rimane sempre al livello dei caratteri e delle loro mutue relazioni. Anche nella sua critica alla teoria dei segni di Thomas Hobbes (1588 – 1679), Leibniz chiarisce che il valore dei simboli in algebra è essenziale, tutt’altro che ausiliario. Al contrario di quanto sostiene Hobbes, le idee corrispondenti ai simboli utilizzati in un ragionamento algebrico non possono essere evocate o richiamate alla mente ad ogni passo; se la mente dovesse ad ogni passo risalire alle idee evocate, il ragionamento prima o poi si bloccherebbe:

Si semel nobis conscii simus verba distincte constanterque ordinasse, suffecerit cogitationibus caecis uti ad distincte ratiocinandum. Hinc Symbolica illa recentiorum Analysis, quicquid etiam contradicat Hobbius, tanti est ad celeriter et secure ratiocinandum usus (Se solo fossimo consapevoli di ordinare le parole in modo distinto e coerente, i pensieri ciechi sarebbero sufficienti per ragionare in modo distinto. Questo è il motivo per cui la moderna Analisi Simbolica – nonostante le critiche di Hobbes – è così utile per ragionare in modo veloce e sicuro). (Leibniz, A, VI, ii, 481)⁸

In Leibniz è dunque essenziale che nel ragionamento algebrico, e non solo in quello algebrico, il pensiero sia “cieco”, cioè che la mente si concentri soltanto sui segni e sulle operazioni da svolgere, senza preoccuparsi di interpretarli ad ogni passo, o di evocare i loro significati. In questo senso, in Leibniz, il ragionamento è una pura manipolazione di segni (Dascal, 1987).

Leibniz sembra così anticipare in qualche modo la nozione semantica di *valore* introdotta da de Saussure: il valore di un segno è strettamente legato alle relazioni di opposizione che il segno ha con gli altri segni del sistema a cui appartiene; non è qualcosa

⁸ A = Gottfried Wilhelm Leibniz, *Sämtliche Schriften und Briefe*, herausgegeben von der Preussischen (Deutschen) Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Reihe 6. Darmstadt 1923, Leipzig 1938, Berlin 1950 - (seguito da volume, parte, pagina).

di esterno al sistema considerato. Leibniz, tuttavia, non adotta pienamente tale posizione, sebbene sembri spesso sul punto di farlo (Dascal, 1987). Egli oscilla tra la tesi dell'autonomia e quella della non autonomia dei segni rispetto alle cose o alle idee evocate, avvicinandosi a una concezione di calcolo puramente formale e di sistema di segni nel quale il valore dei segni non dipende dalla loro interpretazione, ma dalle loro relazioni di opposizione entro il sistema. Tuttavia, in Leibniz l'interpretazione dei segni di un sistema risulta pur sempre qualcosa di "esterno" al sistema, non dipendente esclusivamente dalle relazioni tra i segni. In alcuni casi, comunque, in Leibniz invece di essere l'oggetto (cosa, idea o pensiero) a dare senso al segno, è soltanto l'uso dei segni, la loro manipolazione secondo regole opportune, a permettere l'accesso a un oggetto matematico. Dascal (1987) afferma che nelle *Note di Parigi*, una collezione di frammenti che Leibniz scrive a Parigi (1672-1676):

Leibniz crede che il possesso di una immagine sensibile o di una definizione algebrica di cerchio abbia lo stesso valore di scoprire con l'esperienza che un oggetto circolare *esiste*. In questo senso, la formazione e la manipolazione dei caratteri sostituisce l'esperienza ogni volta che quest'ultima è irrealizzabile. (Dascal, 1987, p. 53)

In matematica, infatti, non è possibile l'esperienza diretta, cioè l'accesso multisensoriale, diretto o strumentale (attraverso microscopi, telescopi, sensori etc.), agli oggetti di conoscenza. Un oggetto matematico, non avendo rinvii ostensivi, non può essere identificato con un *oggetto reale*, una *cosa*, cioè con un *oggetto* dal punto di vista del realismo ingenuo; in altre parole, in matematica la concettualizzazione non può basarsi sulla realtà concreta (D'Amore, 2000b, 2003). Da qui la necessità di ricorrere, per l'attività matematica, a particolari sistemi semiotici, con funzioni non solo di comunicazione e di presa di coscienza di qualcosa, del risultato di un atto di pensiero, ma anche di trasformazione dei segni o delle rappresentazioni semiotiche che li costituiscono.

Segni e rappresentazioni semiotiche sono in un primo momento, per chi se li trova di fronte, macchie d'inchiostro su un foglio di carta, tracce di gesso sulla lavagna ..., *cose* nel vero senso della parola. La loro *cosità* gioca un ruolo del tutto rilevante per chi cerca in qualche modo di utilizzarli, chiedendosi in primo luogo "Che *cosa* sono?", e poi semmai "Che *cosa* rappresentano?" o "A che *cosa* servono?". Il realismo *ingenuo*, ma per nulla ingenuo, di chi comincia a gestire segni e rappresentazioni semiotiche di oggetti matematici ha dunque una sua ragion d'essere, a cui l'adulto, l'insegnante, spesso non

presta particolare attenzione, ritenendolo in ogni caso una fase transitoria, prima o poi superabile, del processo di apprendimento o della costruzione di concetti. Ma a volte non è così, il realismo ingenuo non viene superato, ostacolando fortemente la costruzione del senso delle rappresentazioni semiotiche degli oggetti che emergono dai contesti o dai problemi presi in esame. Nella ricerca in didattica della matematica, così come nel processo empirico di insegnamento-apprendimento della matematica, il problema del senso degli oggetti matematici è certamente inevitabile, fondamentale e di primaria importanza. D'Amore (1999a, 2006a) e Radford (2004) lo evidenziano chiaramente nei seguenti termini:

Già in diversi lavori della fine degli anni '80 - '90, dichiaravo che, mentre il matematico può fare a meno di interrogarsi sul senso degli oggetti matematici che usa e sul senso che ha la conoscenza matematica, lo studioso di didattica non può farne a meno (...). Non posso quindi che aver piacere della conferma che trovo in Radford (2004): “Si può sopravvivere bene facendo matematica senza adottare alcuna esplicita ontologia, cioè una teoria che tratti della natura degli oggetti matematici. (...) La situazione è profondamente diversa quando parliamo di conoscenza matematica. (...) Le questioni teoriche circa i contenuti della conoscenza e il modo in cui un contenuto viene trasmesso, acquisito o costruito ci ha condotto al punto in cui non possiamo più a lungo evitare di prendere in seria considerazione l'ontologia”. È precisamente a causa di questa convinzione che ho dedicato molto tempo allo studio della conoscenza concettuale. (D'Amore, 2006a, pp. 559-560)

La natura degli oggetti matematici e delle loro rappresentazioni è, come è sempre stata, molto dibattuta, ma di estremo interesse per l'insegnamento-apprendimento.

La parola “concetto” può essere identificata con la parola “idea” (in greco εἶδος [*eidōs*], “forma visibile”, “aspetto”, “apparenza”, e in seguito “forma distintiva”, “natura costitutiva”; dal verbo ὁράω [*horàō*], “vedere”),⁹ dunque può essere identificata con una

⁹ Come rileva Francis E. Peters (1967), il termine greco *eidōs* era inizialmente utilizzato, in particolare da Omero, per denotare “ciò che uno vede”, “apparenza”, “forma”, riferita di solito al corpo. Dai tempi di Erodoto (484 – 425), l'uso del termine *eidōs*, e del termine affine *idea*, che era entrato anch'esso nell'uso, è stato ampliato per denotare una “proprietà caratteristica” o un “tipo”. Platone utilizza il termine *eide* per denotare qualcosa di esterno, una realtà soprasensibile e la base della conoscenza vera (*episteme*). Nel seguito, invece, il termine *idea* assume sempre più il significato di entità mentale, di contenuto del pensiero o di rappresentazione mentale di un oggetto; prima con Agostino e poi con Leibniz e Descartes. (Per approfondire tali aspetti si veda: Radford, 2004).

rappresentazione mentale, oppure con la parola “immagine”, o con la parola “segno”, ostacolando, in molti casi fortemente, come vedremo, la costruzione cognitiva e la gestione di conoscenze matematiche.

Della natura dei concetti si sono occupati illustri filosofi e sono stati scritti numerosi lavori; impossibile citarli tutti. Le definizioni che si trovano nei dizionari, seppur simili, forniscono interpretazioni o accezioni diverse che evidenziano tutte l'enorme complessità e problematicità che accompagna da sempre ogni tentativo di caratterizzare la natura dei concetti. (Per approfondire si veda: D'Amore, 1999, 2001a).

In matematica e in didattica della matematica si preferisce comunque parlare di “oggetti matematici” piuttosto che di “concetti matematici”, per l'esigenza epistemologica fondamentale che caratterizza tutta la conoscenza scientifica, e in modo particolare la matematica, vale a dire: non confondere un oggetto di conoscenza (un oggetto matematico, nel nostro caso) con una sua rappresentazione (Duval, 1993, 1995). Perché in matematica è soltanto *attraverso* (e non prima né dopo) le rappresentazioni semiotiche che è possibile un accesso cognitivo agli oggetti matematici, essendo impossibile, lo ripetiamo, un riferimento di tipo ostensivo a tali oggetti. In altre parole, l'accesso agli oggetti matematici non è un evento successivo alla, o una conseguenza della gestione di rappresentazioni semiotiche, ma un evento concomitante di essa. Da qui la necessità di tener conto della dimensione *semio-cognitiva* (semiotica e cognitiva) che caratterizza tutti i processi di insegnamento-apprendimento della matematica.

2.2.2 *Tipologie di oggetti*

Quando si parla di “oggetto” si tende spesso a confondere, anche nel contesto didattico, quattro realtà differenti (Duval, 2009a):

- l'oggetto come *cosa* (in greco: *πρᾶγμα* [*pragma*], in latino: *res*),¹⁰ cioè l'oggetto concreto, fisico, accessibile attraverso i sensi (nel senso espresso nella *Metafisica* di Aristotele), direttamente o strumentalmente;

¹⁰ Come riportato in Cassin et al. (2014), la parola greca *pragma* (tradotta in latino con *res*, spesso unita a *causa*) ha inizialmente un significato legale e retorico (Aristotele, *Topici* 1.18, 108a21; *Retorica* 3.14, 1415b4). Essa designa non solo la realtà concreta e individuale data o immediatamente presente (esterna alla mente), ma anche il fatto o lo stato di cose in questione, il problema dibattuto, o l'argomento di

- l'oggetto *intenzionale*, vale a dire ciò su cui si focalizza l'attenzione, ciò a cui si punta, ciò che si percepisce, ciò che è immediatamente e direttamente notato (proprietà, forma, colore, suono etc., vale a dire aspetti strutturali o simbolici inerenti l'oggetto, e aspetti qualitativi o concreti non inerenti l'oggetto) ogni volta che si dirige l'attenzione verso qualcosa, cioè l'oggetto di un atto (intenzionale) di significazione;
- l'oggetto *fenomenologico*, vale a dire l'oggetto così come appare nella coscienza e che permette al soggetto di riconoscerlo nelle sue occorrenze; oggetto complesso per il suo carattere predefinito da una parte e per la sua apertura e incompletezza dall'altra parte (Lanfredini, 2006);
- l'oggetto *di conoscenza*, vale a dire l'invariante, indipendentemente dal suo eventuale modo di "esistere" qualunque cosa ciò voglia dire, di molteplici rappresentazioni possibili, in particolare:
 - l'oggetto *sperimentale*, cioè l'invariante causale di una molteplicità di fenomeni osservati (rappresentazioni non-semiotiche);
 - l'oggetto *matematico*, cioè l'invariante operatorio o logico-discorsivo di una molteplicità di rappresentazioni semiotiche.

Più in generale, la parola "oggetto" racchiude in sé tre esigenze fondamentali, differenti e specifiche, per l'analisi della conoscenza (Duval, 2009a):

- l'esigenza pratica di manipolazione [inseparabile dalla nozione di oggetto come *cosa*, e al centro di diversi studi di Jean Piaget (1896 – 1980), ma non solo];
- l'esigenza fenomenologica propria di ogni atto di coscienza [quella di intenzionalità, o direzionalità, ovvero di essere sempre diretto a qualcosa subendone gli attributi, cioè all'oggetto *così com'è inteso*, evidenziata da Edmund Husserl (1859 – 1938), 1900-01];
- l'esigenza epistemologica comune a tutta la conoscenza (quella di non confondere gli oggetti di conoscenza con le loro rappresentazioni, che si trova anche in Platone, *Repubblica*, VI, 509d-510b).

un discorso, il motivo o il risultato di un'attività (πραξις [*praxis*], da πράσσω [*prassó*], "agire", "fare"), ovvero la cosa in relazione a un'azione.

Le rappresentazioni semiotiche che possono focalizzare l'attenzione di un individuo su aspetti completamente opposti (dati visivi, oggetti concreti o invarianti) sono oggetti fenomenologici transitori (Duval, 2006b). Per esempio, un'equazione lineare in due variabili e la rappresentazione grafica di una retta sono due rappresentazioni semiotiche che rinviano ad aspetti completamente opposti. In esse si riconosce un medesimo oggetto matematico solo a condizione che l'attenzione si focalizzi su qualche loro invariante (le relazioni rappresentate), dunque non solo sui loro dati visivi e sulla loro organizzazione percettiva (Duval, 2006b). L'oggetto a cui rinvia una particolare organizzazione percettiva o sintattica, di una figura o di una frase, è invece un oggetto intenzionale. Per esempio ciascuno degli oggetti (forme o figure) che un individuo "vede" in una configurazione di unità figurali sovrapposte o giustapposte o in una "figura ambigua" costituisce un oggetto intenzionale. Il disegno in Figura 2.1 può per esempio rinvia a una particolare configurazione di sei triangoli, a un esagono, alla rappresentazione di un cubo "scheletrato" (visto dall'alto o dal basso), o alla rappresentazione di una piramide "scheletrata" a base esagonale (vista dall'alto o dal basso). Analogamente, una particolare interpretazione semantica di una frase che descrive un problema costituisce un oggetto intenzionale. (Per approfondire si veda per esempio: Baber, 2011).

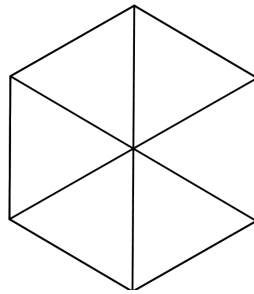


Figura 2.1 *Che cosa rappresenta?*

Nell'insegnamento-apprendimento della matematica si fa riferimento sia a oggetti di conoscenza (oggetti matematici) sia a oggetti intesi come *cose*, sia a oggetti fenomenologici e intenzionali; spesso tra loro confusi. La posizione (implicitamente o esplicitamente) assunta da insegnanti e studenti, sugli oggetti matematici ha un ruolo non trascurabile, anzi cruciale, nell'insegnamento-apprendimento.

2.2.3 *Natura degli oggetti matematici*

Il problema della natura degli oggetti matematici viene qui descritto sinteticamente soprattutto dal punto di vista della didattica della matematica, dunque non in tutta la sua complessa e problematica generalità. Si tratta di un problema scottante e di straordinario interesse per l'insegnamento-apprendimento soprattutto perché, come si è detto, gli oggetti matematici non possono essere visti, mostrati, e tantomeno manipolati: non sono oggetti come *cose* (par. 2.2.2). Ciò che è possibile vedere, manipolare, trasformare e interpretare sono soltanto le loro rappresentazioni semiotiche.

Le posizioni assunte al riguardo sono differenti, dipendono dalle concezioni epistemologiche manifestate (anche in forma non del tutto consapevole) sulla matematica e sulla sua didattica. Si distinguono tuttavia due posizioni fondamentali: quella realista e quella pragmatista (D'Amore, 2001a).

Secondo la posizione realista gli oggetti matematici sono le entità alle quali fanno riferimento gli asserti matematici (cioè gli asserti formulati nel linguaggio di una qualche teoria matematica); esistono indipendentemente dalle attività degli esseri umani, dal

tempo e dalla cultura.¹¹ Il platonismo costituisce una particolare versione del realismo (designata a volte dal termine *realismo ontologico*) che si contraddistingue per la tesi che asserisce l'esistenza degli oggetti astratti su cui vertono le teorie matematiche (Panza & Sereni, 2010). In particolare, “il platonismo aritmetico è la tesi che asserisce che gli asserti aritmetici parlano di un certo dominio di oggetti astratti identificati con i numeri naturali” (Panza & Sereni, 2010, p. 24). La matematica appare quindi come un mondo popolato da oggetti astratti, eterni, immutabili ed esistenti indipendentemente dall'essere umano. Gli oggetti di tale mondo si caratterizzano “non perché soddisfano un qualche criterio generale di matematicità, ma semplicemente in quanto si sarà stabilito che una certa teoria, generalmente considerata matematica, verte su di essi” (Panza & Sereni, 2010, pp. 23-24). In altri termini, perché un oggetto sia matematico è necessario che vi sia una teoria matematica in cui esso goda di certe proprietà. Solo in tal caso si può dire che è un oggetto di tale teoria, in particolare è l'oggetto che codifica tutte le proprietà di cui esso gode in essa, ovvero è la reificazione di tali proprietà (Panza & Sereni, 2010).

Dunque, secondo la posizione realista nella sua versione del platonismo, la matematica è una realtà, i suoi oggetti sono preesistenti alle teorie che vertono su di essi, ma spetta al matematico, anzi alla comunità matematica, identificare gli oggetti da studiare e ai quali dedicare una teoria.

In generale, secondo il realista, il significato è “una relazione convenzionale tra segni ed entità concrete o ideali che esistono indipendentemente dai segni linguistici” (Godino & Batanero, 1994, par. 2). In particolare, il significato di una rappresentazione semiotica di un oggetto matematico è indipendente dai suoi usi e dai contesti che la coinvolgono. È l'uso a reggersi sul significato, e non viceversa.

Numerosi sono i matematici che hanno manifestato, e che manifestano tuttora, una visione di tipo realista sulla natura degli oggetti matematici. Un esempio si trova in una lettera del 13 maggio 1894 del matematico francese Charles Hermite (1822 – 1901) al matematico olandese Thomas J. Stieltjes (1856 – 1894):

credo che i numeri e le funzioni dell'analisi non siano il prodotto arbitrario della nostra mente; penso che esistano al di fuori di noi con lo stesso carattere di necessità delle cose della realtà oggettiva, e che noi li incontriamo o li

¹¹ Il termine “teoria” è qui utilizzato per far riferimento a un insieme di *asserti* (enunciati che asseriscono qualcosa, cioè che hanno la funzione di dire che certe cose stanno in un certo modo) accettati da un'intera comunità scientifica. Ovviamente, che certi asserti o certe teorie siano matematiche dipende dal fatto che la comunità matematica li o le accetti come tali.

scopriamo, e li studiamo come fanno i fisici, i chimici, gli zoologi ecc. (Baillaud & Bouget, 1905, p. 398)

Giusti (1999) la commenta nei termini seguenti:

L'affermazione [di Hermite] è piuttosto netta, ma l'idea non è sbagliata; in un certo senso infatti (...) i nuovi oggetti che di tanto in tanto vanno ad estendere il territorio matematico esistevano già prima che venissero scoperti; solo non esistevano in quanto oggetti, ma come procedure empiriche e come metodi dimostrativi. (Giusti, 1999, p. 76)

Ancor prima, Descartes manifesta una visione decisamente realista:

Come, per esempio, quando io immagino un triangolo, sebbene forse non ci sia in alcun luogo del mondo una tale figura fuori del mio pensiero, e non ci sia mai stata, essa possiede tuttavia una certa determinata natura, o forma, o essenza, la quale è immutabile ed eterna, né io l'ho inventata, né dipende dal mio spirito in alcun modo; come appare chiaro dal fatto che si possono dimostrare diverse proprietà di questo triangolo, e cioè che i suoi tre angoli sono uguali a due retti, che l'angolo più grande è sotteso al lato più grande, ed altre simili, le quali ora, che lo voglia o no, riconosco chiaramente in esso, sebbene non vi avessi pensato prima in alcun modo, quando per la prima volta mi sono immaginato un triangolo; e pertanto non si può dire che le abbia inventate io. (Descartes, 1641, *Quinta Meditazione*)

In didattica della matematica, la posizione pragmatista (D'Amore, 2001a; D'Amore & Godino, 2006) risolve il problema della natura degli oggetti matematici ispirandosi al punto di vista antropologico (Chevallard, 1992, 1999) nei termini seguenti:

Gli oggetti matematici devono essere considerati come simboli di unità culturali, emergenti da un sistema di usi legati alle attività matematiche che realizzano gruppi di persone e che dunque evolvono con il trascorrere del tempo. Nella nostra concezione, quel che determina l'emergere progressivo degli "oggetti matematici" è il fatto che, nel seno di certe istituzioni, si realizzino determinati tipi di pratiche e che il "significato" di tali oggetti sia intimamente legato ai problemi affrontati ed alle attività realizzate dagli esseri umani, non potendosi ridurre il significato dell'oggetto matematico alla sua mera definizione matematica. (D'Amore & Godino, 2006, p. 26)

Gli oggetti matematici emergono dai problemi che si affrontano e dai contesti sociali e culturali che li animano; il loro significato è determinato dall'insieme dei loro usi e dunque, fondamentalmente, dall'attività umana.

2.2.4 *Segni e rappresentazioni*

Non è possibile parlare di rappresentazioni e di segni in matematica senza tener conto delle possibilità di accesso agli oggetti matematici. La mancanza di un doppio accesso agli oggetti matematici porta quasi inevitabilmente a confondere una certa rappresentazione di un certo oggetto matematico con l'oggetto stesso (Duval, 1993), generando ostacoli alla comprensione per un gran numero di studenti, ma non solo. Come mai?

La conoscenza, e dunque il processo di comprensione, inizia con la presa di coscienza di una distinzione epistemologica (non semiotica) fondamentale (Figura 2.2), quella tra:

- *rappresentazione (non-semiotica)* e oggetto

e tra:

- *segno* e oggetto

dove per *rappresentazione (non-semiotica)* intendiamo ciò che (in relazione a qualcos'altro) un dato sistema fisico, naturale o biologico (non-semiotico) produce automaticamente, in maniera non intenzionale, e non per soddisfare una funzione di comunicazione (come per esempio l'immagine prodotta dall'apparato visivo, l'immagine prodotta da uno specchio, l'immagine prodotta da un dispositivo fotografico, oppure dalla mente); mentre per *segno* intendiamo una entità (parola, disegno, gesto etc.) intenzionalmente prodotta all'interno di un dato sistema semiotico per soddisfare una funzione di comunicazione.

Spesso, inoltre, si tende a non distinguere gli oggetti (in senso generale) e l'intervento umano su di essi, intervento che è sempre storicamente e culturalmente determinato. Riteniamo opportuno inserire anche questa distinzione, che in un certo senso include anche quella tra segno e oggetto.

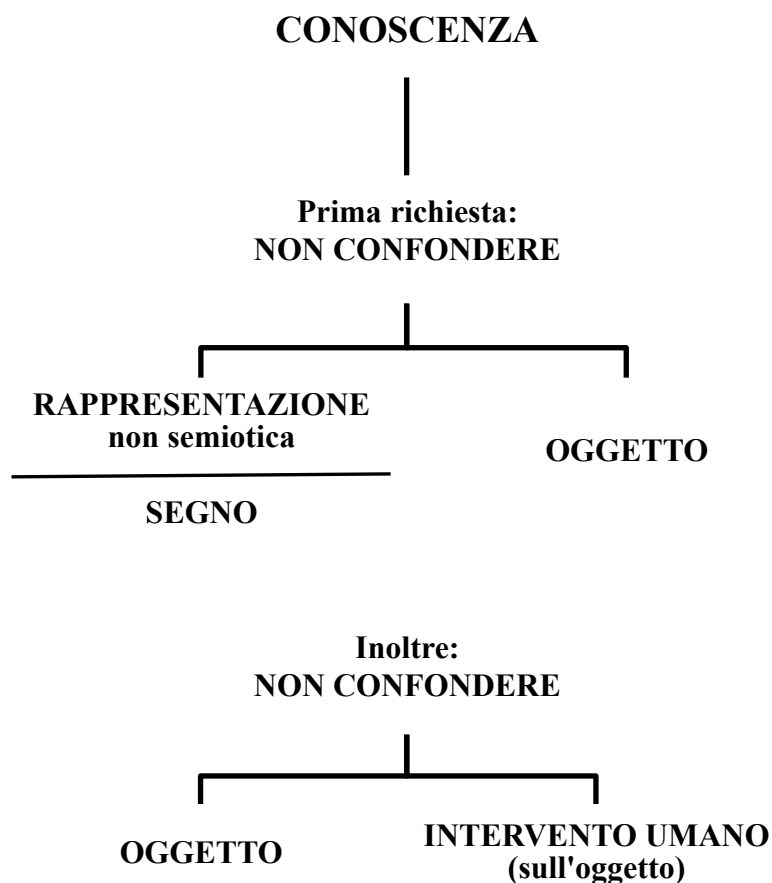


Figura 2.2 *Esigenze epistemologiche della conoscenza*

Nota. Figura adattata da R. Duval (comunicazione personale, 26 giugno, 2013).

È però soprattutto in matematica che si tende a confondere un segno (o una rappresentazione) con l'oggetto/gli oggetti a cui il segno può rinvviare (in algebra o nei linguaggi formali, per esempio). Ma non solo, anche in didattica della matematica, in alcuni casi, si confonde un segno (o una rappresentazione) con l'oggetto/gli oggetti a cui il segno può rinvviare.

Ma che cosa distingue una rappresentazione da un segno? Che cos'è una rappresentazione? Che cos'è un segno?

Duval (2006c) afferma che le definizioni di segno o di rappresentazione sulle quali si basano diverse teorie, utilizzate anche nella ricerca in didattica, mettono tutte in evidenza la funzione cognitiva di evocazione o di sostituzione che un dato elemento svolge rispetto a un altro elemento non avente lo stesso status epistemologico del primo. Alcune definizioni o descrizioni tra le più rilevanti sono le seguenti [quelle di Agostino, di Peirce e di Piaget sono riportate in parte anche in Duval (2006c)].

2.2.4.1 Agostino

In Agostino d'Ippona o di Tagaste (354 – 430):

Signum est enim res, praeter speciem quam ingerit sensibus, aliud aliquid ex se faciens in cogitationem venire (Il segno è qualcosa che, al di là del suo aspetto sensibile, fa venire in mente qualcosa di diverso da sé). (Agostino, *De doctrina christiana*, II, 1.1)

L'attenzione di Agostino è tutta focalizzata sul veicolo del segno (*aliquid*) e sul referente (*aliquo*), anche se presuppone sempre una mente: il segno è qualcosa, un dato sensoriale, che si può percepire per qualcos'altro che al momento non si può percepire con i sensi, e che dunque è equivocato nella mente. Il suo significato può essere stabilito o espresso per mezzo di altri segni, puntando il dito verso qualcosa oppure attraverso parole o gesti. Si va comunque sempre da segno a segno, mai da segno a significato. I segni non possono mostrare direttamente un significato (di natura puramente mentale).

Riguardo alla relazione tra segno e oggetto (*cosa*), Agostino riconosce che occorre conoscere innanzitutto l'oggetto per poter dire che un dato segno è segno di quell'oggetto. In altri termini, si impara non dai segni, ma dalle cose; la conoscenza delle cose viene prima della conoscenza dei segni: “Quando infatti mi è dato un segno, se mi trova nella non conoscenza della cosa di cui è segno, non mi può insegnare nulla, ma se la so già, allora che cosa imparo mediante il segno?” (Agostino, *De magistro*, 10, 115). Il segno può indicarci dove guardare (funzione deittica o ostensiva) per vedere e quindi imparare (funzione cognitiva), oppure può avere una funzione evocativa, cioè richiamare alla mente un concetto, un significato, o un'immagine (*De magistro*, 10, 168). (Per approfondire si veda: D'Amore, Fandiño Pinilla, & Iori, 2013; D'Amore, Fandiño Pinilla, Iori, & Matteuzzi, 2013).

2.2.4.2 Leibniz

Intorno al 1672, in una tavola di definizioni, Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716) introduce la seguente definizione di segno (Dascal, 1987):

Signum est quod nunc sentimus et alioquin cum aliquo connexum esse ex priore experientia nostra vel aliena judicamus [Un segno è ciò che sentiamo (percepiamo) ora e che, inoltre, consideriamo (*judicamus*) connesso a

qualcos'altro, in virtù di un'esperienza precedente, nostra o di qualcun altro].

(Leibniz, A, VI, ii, 500)

In Leibniz la funzione primaria del segno è dunque ancora quella di evocare qualcos'altro nella mente di un interprete. Tuttavia, come Dascal (1987) fa notare, affinché qualcosa, diciamo *x*, funzioni come segno devono essere soddisfatte due condizioni:

- a) *x* (il veicolo del segno) deve essere percepito da *z* (l'interprete) in un dato istante *t*;
- b) *x* deve evocare, nella mente di *z*, *y* (qualcos'altro) in virtù di una certa corrispondenza esistente per *z* tra *x* e *y*.

Leibniz, come si è detto, concepisce un linguaggio ideale (*characteristica universalis*) costituito da elementi di base (*caratteri*) che rappresentano un certo numero di concetti “primitivi” che egli chiama “l'alfabeto del pensiero umano”. Tutti i concetti “complessi” risultano da una combinazione di tali elementi di base, isomorfi ai concetti primitivi da essi rappresentati. Egli era infatti fortemente convinto nella possibilità di costituire un'algebra del pensiero e di poter dimostrare la verità o falsità di qualsiasi argomento mediante l'applicazione di un calcolo (*calculus ratiocinator*), ovvero di un determinato sistema di regole per la combinazione dei caratteri in formule e per la loro trasformazione.¹² (Su questi temi si veda anche: D'Amore, 1979-80).

2.2.4.3 Peirce

Anche la concezione di segno di Charles Sanders Peirce (1839 – 1914) evidenzia un terzo elemento, ma tale elemento, l'*interpretante*, non è da confondere con l'interprete del segno, come evidenzia una delle sue definizioni più rilevanti e illuminanti:¹³

A sign, or *representamen*, is something which stands to somebody for something in some respect or capacity. It addresses somebody, that is, creates in the mind of that person an equivalent sign or perhaps a more developed sign. That sign which it creates I call the *interpretant* of the first sign. The sign stands for something, its *object*. It stands for that object, not in all respects, but in reference to a sort of idea, which I have sometimes called the *ground* of the *representamen* (Un segno, o *representamen*, è qualcosa che per

¹² “*Calculus* vel *operatio* consistit in relationum productione facta per transmutationes formularum, secundum leges quasdam praescriptas factis” (Un calcolo o una operazione consiste nella produzione di relazioni per mezzo di trasformazioni di formule, effettuate secondo certe leggi prescritte) (Leibniz, *Fundamenta calculi ratiocinatoris*, 1688; A, VI, 4, 921).

¹³ Le considerazioni del presente paragrafo si basano su: D'Amore, Fandiño Pinilla, & Iori (2013).

qualcuno sta per qualcosa sotto qualche aspetto o capacità. Si rivolge a qualcuno, ossia crea nella mente di quella persona un segno equivalente, o forse un segno più sviluppato. Quel segno che crea lo chiamo *interpretante* del primo segno. Il segno sta per qualcosa: il suo *oggetto*. Sta per quell'oggetto non sotto tutti gli aspetti, ma in riferimento a una specie di idea, che a volte ho chiamato *ground* [base] del *representamen*). (Peirce, CP 2.228, 1897)¹⁴

Tale definizione, come la precedente (par. 2.2.4.2), presuppone una situazione di comunicazione: un segno è un segno solo in una situazione di comunicazione, cioè di condivisione di un certo sistema semiotico. Senza una tale condivisione non sarebbe infatti possibile alcuna comunicazione, alcuna interpretazione. E senza interpretazione un segno sarebbe vuoto, cioè non potrebbe funzionare come segno: “Nessun segno può funzionare come tale se non è interpretato in un altro segno” (Peirce, CP 8.225n10, 1904). L'interpretazione di un segno richiede infatti per Peirce una certa *conoscenza collaterale* (si veda per esempio: CP 6.318, 6.338, 8.314, ca. 1909) al segno e al sistema di segni, cioè un tipo di conoscenza ottenuta da altre esperienze precedenti con ciò che il segno denota, insieme a un tipo di conoscenza ottenuta per *familiarità* con il sistema di segni. Si parla dunque di approccio *semiotico-interpretativo* per riferirsi all'approccio semiotico di tradizione peirceana alla didattica della matematica.

Nella semiotica di Peirce un segno (*representamen*) è sempre in relazione o vincolato a un oggetto, dunque non può essere concepito indipendentemente da un oggetto. Un segno ha una funzione sia rappresentativa (in quanto mezzo per rinviare a un oggetto), sia epistemologica (in quanto mezzo per costituire o generare conoscenza) (Hoffmann & Roth, 2007). L'oggetto, ovvero ciò a cui il segno/*representamen* rinvia, può essere di due tipi (CP 8.343, 1908):

- *immediato*, cioè l'oggetto così com'è rappresentato dal segno;
- *dinamico*, cioè l'oggetto realmente efficiente, ma non immediatamente presente, ciò che guida la produzione del segno, e di cui l'*oggetto immediato* rappresenta soltanto un particolare aspetto.

Per esempio, quando si vuole far riferimento a un triangolo generico, spesso si usa disegnare una linea spezzata chiusa costituita da tre segmenti che rinvia immediatamente a un triangolo scaleno; in termini semiotici, il triangolo disegnato è un interpretante del

¹⁴ CP x.xxx (volume.paragrafo) = *Collected Papers of Charles Sanders Peirce*.

representamen “triangolo” (in lingua naturale) il cui *oggetto immediato* è l’oggetto matematico “triangolo scaleno”, ma il cui *oggetto dinamico* è l’oggetto matematico “triangolo” (entrambi gli oggetti, ricordiamolo, sono inaccessibili ai sensi).

L’interpretante di un segno può in ogni caso diventare a sua volta il *representamen* di un nuovo segno che rinvia allo stesso *oggetto dinamico*, sotto qualche aspetto, attraverso un nuovo *oggetto immediato* e un nuovo interpretante, e così via. Riprendendo l’esempio precedente, il disegno del triangolo scaleno (interpretante del *representamen* “triangolo”) può diventare a sua volta il *representamen* di un nuovo segno che rinvia allo stesso *oggetto dinamico* “triangolo”, ma che ha come *oggetto immediato* l’oggetto matematico “triangolo ottusangolo” (Figura 2.3) oppure l’oggetto matematico “triangolo acutangolo”, e così via.

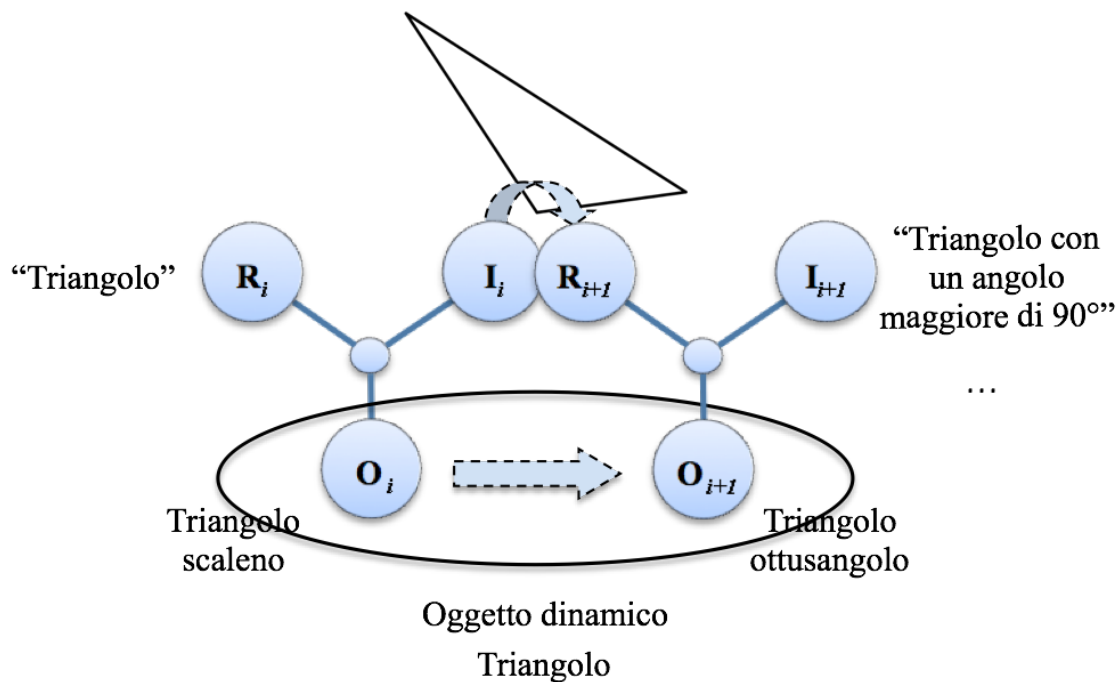


Figura 2.3 Un esempio di processo semiotico-interpretativo

Peirce suggerisce qui un processo di *semiosi* (ovvero un’azione segnica che si realizza nella formazione di nuove relazioni triadiche) *potenzialmente* infinito, ma che la vita pratica inevitabilmente interrompe, in qualche modo, con un particolare interpretante. Peirce (CP 4.536, 1906) distingue tre tipi di interpretanti:

- l’*interpretante immediato*, ovvero il primo effetto che un segno può produrre sul suo interprete, una potenzialità semantica [per esempio, quando l’insegnante punta

il dito indice della mano destra alla lavagna, l'effetto prodotto può essere quello di guardare la lavagna e vedere solo il disegno del triangolo scaleno (ottusangolo o acutangolo) al quale l'insegnante sta puntando il dito];

- l'*interpretante dinamico*, cioè l'effetto realmente prodotto su un suo interprete (per esempio, guardare la lavagna in generale, in risposta al puntamento del dito);
- l'*interpretante finale*, cioè il risultato interpretativo a cui si arriva se il segno è sufficientemente considerato [per esempio, guardare il disegno del triangolo scaleno (ottusangolo o acutangolo) al quale l'insegnante ha puntato il dito e riconoscere in esso un triangolo generico, o meglio l'oggetto matematico "triangolo"].

I tre poli della relazione segnica (*representamen*, oggetto, interpretante) rinviano rispettivamente alle tre categorie sulle quali Peirce fonda la sua *faneroscopia* o fenomenologia:¹⁵

- *Firstness* (Primità): pura qualità, sensazione, idea, possibilità di esistenza, vaghezza; pura possibilità segnica;
- *Secondness* (Secondità): reazione, resistenza, fatto, realizzazione, singolarità, esperienza; mero fatto segnico;
- *Thirdness* (Terzità): rappresentazione, mediazione, abitudine, legge, generalità; legge segnica.

Sulla base di queste tre categorie e della relazione che il *representamen* di un segno ha con l'oggetto (dinamico) a cui si riferisce, Peirce distingue tre tipi fondamentali di segno/*representamen*: icona, indice e simbolo.

Un'*icona* è principalmente un segno di Primità; è un segno/*representamen* che possiede una certa somiglianza con il suo oggetto (EP 1:226, 1885; EP 2:273, 1903).¹⁶ Peirce (CP 2.277, ca. 1902) tenta di chiarire questa "somiglianza" introducendo tre tipi di *representamen* iconici:

- *immagine* (somiglianza all'oggetto per semplici qualità);
- *diagramma* (somiglianza all'oggetto di tipo strutturale o relazionale);¹⁷

¹⁵ "La faneroscopia è la descrizione del *phaneron*; e per *phaneron* io intendo il totale collettivo di ciò che è, in qualche modo o senso, presente alla mente, indipendentemente dal suo corrispondere o no a qualcosa di reale" (CP 1.284, 1905).

¹⁶ EP x:xxx (volume:pagina) = *The Essential Peirce*.

¹⁷ Il termine *diagramma*, dal greco διάγραμμα (*diagramma*), "disegno", deriva dal verbo διαγράφω (*diagrafo*) "disegnare", "tracciare", comp. di διά (*dia*) "attraverso", "per", "per mezzo di" e γράφω (*grafo*) "descrivere", "dipingere", "disegnare", "scrivere"; è utilizzato per indicare "ciò che è tracciato da linee" (Harper, 2001-2012). L'uso di tale termine, da parte di Peirce, non è in alcun modo ristretto alle rappresentazioni grafiche; esso differisce da quello comune che contrappone il diagramma inteso come

- *metafora* (somiglianza all'oggetto mediante la rappresentazione di un parallelismo con qualcos'altro).¹⁸

In particolare, sia le frasi, sia le figure geometriche, sia le formule algebriche sono, in Peirce, dei diagrammi in quanto rappresentano particolari relazioni:

Così una formula algebrica è un'icona, ed è resa tale dalle regole di commutazione, associazione e distribuzione dei simboli. Chiamare un'espressione algebrica icona può sembrare a prima vista una classificazione arbitraria; perché potrebbe altrettanto bene o ancora meglio essere considerata come un segno convenzionale composto. Ma non è così: perché una proprietà altamente distintiva dell'icona è che attraverso osservazione diretta di essa si possono scoprire riguardo al suo oggetto verità nuove oltre a quelle che sono sufficienti a determinare la costruzione dell'icona stessa. (Peirce, CP 2.279, ca. 1895)

rappresentazione grafica o pittorica alla rappresentazione effettuata all'interno del sistema di rappresentazione, o registro, "lingua naturale". Tale distinzione, come evidenzia Hoffmann (2010), non esiste per Peirce. Secondo Peirce, anche le frasi e le equazioni sono diagrammi. Un diagramma ha soltanto due caratteristiche fondamentali: rappresenta relazioni ed è "effettuato su un sistema di rappresentazione perfettamente coerente" (CP 4.418, ca. 1903). Da qui il suo carattere *iconico*. Tuttavia, un diagramma è un *representamen* in cui giocano un ruolo importante anche gli indici, la cui funzione è di dirigere l'attenzione verso qualcosa (sono indici anche le variabili nelle equazioni), e i simboli, la cui relazione con gli oggetti a cui si riferiscono è definita da una legge o da una convenzione.

¹⁸ Il *Webster's Third New International Dictionary* fornisce la seguente definizione di *metafora*: "una figura retorica in cui una parola o frase che denota letteralmente un tipo di oggetto o idea è utilizzata al posto di un'altra per suggerire una somiglianza o analogia tra loro" (<http://www.merriam-webster.com/dictionary>). La metafora richiede dunque sempre il linguaggio; può avere una funzione di designazione oppure di descrizione, ma è sempre nel verbale, nel registro linguistico; si tratta di un'analogia, ma non tutte le analogie sono metafore (R. Duval, comunicazione personale, 28 giugno, 2013). L'etimologia del termine *metafora* [dal greco μεταφορά (*metaforà*), comp. di μετά (*meta*), "oltre", "dopo", "tra", e φέρω (*fērō*), "portare", indica in generale un "trasferimento da un luogo all'altro" (Nöth, 1995)]. Una prima teorizzazione della metafora è fornita da Aristotele, nella *Poetica* e nella *Retorica*. Nella *Poetica* (1457b), in particolare, Aristotele definisce la metafora come un trasferimento del nome proprio di una cosa a un'altra, un trasferimento che può essere dal genere alla specie, dalla specie al genere, da specie a specie o per analogia. Ma il suggerimento principale che fornisce Aristotele nella *Poetica*, come evidenzia Eco (2007), è che per comprendere una metafora occorre saper scorgere le somiglianze, il simile nel dissimile (1459a). Per Aristotele, dunque, la metafora ha un'importante funzione cognitiva, è uno strumento di conoscenza, non un puro ornamento del discorso (Eco, 2007). Questa funzione cognitiva, che la cultura medievale non fu in grado di recepire (Eco, 2007), viene in seguito riconosciuta, riesaminata ed evidenziata in numerosi studi, in particolare da Lakoff e Johnson (1980), che concepiscono la metafora, in senso ampio, come una mappatura, un'applicazione (in senso matematico), tra due domini concettuali, attraverso la quale uno dei due domini, il dominio obiettivo (*target domain*), è compreso in termini dell'altro, il dominio sorgente (*source domain*). La comprensione di una metafora si basa quindi sull'insieme delle corrispondenze tra gli elementi del dominio sorgente e gli elementi del dominio obiettivo. Il dominio sorgente è, in generale, più legato all'esperienza sensibile rispetto al dominio obiettivo, che risulta più astratto e meno delineato. L'iconicità della metafora, per Lakoff e Johnson (1980), si basa sui fatti di esperienza, nasce da un processo creativo e implica somiglianze, tra oggetti anche apparentemente completamente differenti, la cui percezione dipende da codici culturali. In altri termini, le metafore non sono naturali e universali, ma culturalmente determinate (Nöth, 1995). Sull'uso dell'oggetto "metafora" in didattica della matematica veda: Font, Godino, Planas, & Acevedo (2010).

Il diagramma ha dunque un ruolo fondamentale nello sviluppo di conoscenze.

Un *indice* è principalmente un segno di Secondità (EP 2:274, 1903). È un segno (*representamen*) che è realmente influenzato dall'oggetto con cui è in relazione (EP 2:9, ca. 1894). Esso permette di focalizzare l'attenzione dell'interprete sull'oggetto. Per esempio: le lettere utilizzate convenzionalmente per designare i vertici di un triangolo, il dito indice teso della mano destra per dirigere l'attenzione verso qualcosa, un riga graduata, una fotografia, il lampo in relazione al tuono, oppure i termini deittici (*questo, quello, qui, là, prima, dopo, adesso* etc.).

Un *simbolo* ha principalmente la natura della Terzità.¹⁹ In particolare, è un segno (*representamen*) il cui rapporto con l'oggetto rappresentato è definito da una legge o convenzione (EP 2:9, ca. 1894; EP 2:292, 1903). In ciò esso si collega al contesto storico-culturale dal quale emerge. Per esempio: le parole, le frasi, il segno “ π ” utilizzato per rappresentare il rapporto tra la lunghezza della circonferenza e quella del diametro di un cerchio.

D'altra parte – come Peirce stesso evidenzia – puri simboli, pure icone e puri indici, non esistono. Un diagramma ha infatti componenti non solo iconiche, ma anche indicali e simboliche. Più importante, però, è il suo carattere iconico, che risulta dal fatto che un diagramma, prima di tutto, rappresenta relazioni:

Un *Diagramma* è un *representamen* che è prevalentemente un'icona di relazioni ed è aiutato a esserlo da convenzioni. Anche gli indici vengono più o meno utilizzati. Esso dovrebbe essere effettuato sulla base di un sistema di rappresentazione perfettamente coerente, fondato su un'idea di base semplice e facilmente intelligibile. (Peirce, CP 4.418, 1903)

¹⁹ Ricordiamo che il termine σύμβολον (*symbolon*) nella cultura greca antica indicava il perfetto combaciare delle due parti di un oggetto che spezzato e poi ricomposto provava l'esistenza di un accordo e dunque costituiva un segno di riconoscimento. Si trattava di un oggetto (un pezzo di legno o una tessera di terracotta) che veniva spezzato a conclusione di un patto o accordo tra due famiglie o in seguito all'ospitalità data a, o ricevuta da, una delle due famiglie. Esso diventava dunque un segnale di riconoscimento per ciascuna delle due famiglie che conservava una delle due parti; il perfetto combaciare delle due parti era la dimostrazione dell'accordo fra i due contraenti. Il termine σύμβολον (*symbolon*) deriva infatti dal verbo συμβάλλω (*symbollo*), composto di σύν (*syn*) “insieme” e βάλλω (*ballo*) “lanciare”, “gettare”, con il significato complessivo di “mettere insieme”. Si noti che la parola italiana *simbolo* deriva dal latino *symbolum*, che a sua volta deriva dal greco σύμβολον (*symbolon*), con appunto il significato etimologico di “mettere insieme”; il contrario di σύμβολον (*symbolon*) è διάβολον (*diávolon*), “diavolo”, che deriva da διαβάλλω (*diaballo*) “gettare attraverso”, “scagliare contro”, “calunniare”, “separare”, composizione di *dia* “attraverso” e *ballo* “gettare”, “lanciare” (si veda: Pianigiani, 1907). Dunque il diavolo è il contrario, il nemico del simbolo.

Il sistema di rappresentazione sulla base del quale si costruisce un diagramma è “un particolare sistema di simboli – un tipo di linguaggio perfettamente regolare e molto limitato” (CP, 2.559). Si discosta pertanto dal sistema di segni saussuriano (par. 2.2.5).

A differenza delle altre icone, il diagramma, essendo costruito secondo regole e convenzioni di un certo sistema di rappresentazione, include solo gli elementi e le relazioni disponibili in quello stesso sistema di rappresentazione, e dunque è quest’ultimo che determina sia gli esperimenti possibili con il diagramma, sia i risultati necessari di tali esperimenti.

Tutto il ragionamento matematico è diagrammatico e (...) tutto il ragionamento necessario è ragionamento matematico, per quanto semplice possa essere. Per ragionamento diagrammatico intendo un ragionamento che costruisce un diagramma secondo un precetto espresso in termini generali, compie esperimenti su tale diagramma, ne nota i risultati, si assicura che esperimenti simili compiuti su qualsiasi diagramma costruito secondo lo stesso precetto avrebbero i medesimi risultati, ed esprime ciò in termini generali. Questa è stata una scoperta di non poca importanza, in quanto mostra che tutta la conoscenza senza eccezione proviene dall’osservazione. (Peirce, 1902, pp. 91-92)

La conoscenza matematica è in tal modo considerata come una conoscenza osservativa, alla stregua di tutte le altre conoscenze scientifiche di scienze naturali. Il matematico sperimenta, osserva i risultati degli esperimenti condotti e controlla la generalità dei risultati, come il fisico e qualsiasi altro scienziato.

2.2.4.4 Frege

Di grande interesse, soprattutto per la comprensione dei processi semiotici e cognitivi alla base delle attività matematiche, la distinzione evidenziata da Gottlob Frege (1848 – 1925) tra il contenuto (*sense* o *Sinn*) di un segno e l’oggetto (significato o *Bedeutung*) a cui il segno fa riferimento, distinzione che spiega la molteplicità delle designazioni, ovvero dei segni che possono riferirsi al medesimo oggetto:

Ora sembra ovvio, pensando a un segno [*Zeichen*] (nome, combinazione di parole, caratteri), collegare ad esso non soltanto l’oggetto a cui il segno si riferisce, che si può chiamare *significato* [*Bedeutung*] del segno, ma anche ciò

che vorrei chiamare il *sensio* [*Sinn*] del segno, che include il modo in cui l'oggetto viene dato. (...) Il collegamento regolare tra un segno, il suo senso e il suo significato è tale che a un dato segno corrisponda un senso determinato, e a questo a sua volta un significato determinato, mentre a un dato significato (cioè a un dato oggetto) non corrisponde sempre un unico segno. (Frege, 1892, pp. 26-27)

Frege prende dunque in esame la possibilità che il linguaggio offre di poter designare, denotare, nominare o evocare un medesimo oggetto (*Bedeutung*) mediante differenti espressioni o segni (*Zeichen*). Tali espressioni non hanno lo stesso senso (*Sinn*) ma possono essere sostituite l'una all'altra in un enunciato senza cambiarne il valore di verità, in quanto hanno lo stesso significato (*Bedeutung*). Tra gli esempi forniti da Frege vi sono le espressioni aritmetiche come 2^4 , 4^2 e $4 \cdot 4$, che hanno tutte diverso senso (*Sinn*) ma lo stesso significato (*Bedeutung*), il numero 16 (Frege, 1891). Anche il punto di intersezione delle tre mediane, a , b e c , di un triangolo può essere designato con sensi (*Sinne*) differenti, in particolare come il punto di intersezione tra la prima e la seconda mediana (a e b), o come il punto di intersezione tra la seconda e la terza mediana (b e c) (Frege, 1892). Analogamente, le espressioni “stella del mattino” e “stella della sera”, altro esempio ben noto fornito da Frege (1892), costituiscono due differenti modi di presentazione del medesimo pianeta (Venere); hanno dunque sensi (*Sinne*) differenti ma lo stesso significato (*Bedeutung*).

Frege (1892) distingue poi nettamente l'oggetto (il significato o *Bedeutung*) e il contenuto (*sensio* o *Sinn*) di un segno [*Zeichen*] dall'idea [*Vorstellung*] o “immagine interna” [*inneres Bild*], personale e soggettiva, del segno:

Il significato e il senso di un segno devono essere distinti dall'idea associata. Se il significato di un segno è un oggetto percepibile attraverso i sensi, la mia idea di esso è un'immagine interna, che nasce dal ricordo delle impressioni sensoriali da me provate e dalle attività, sia interne sia esterne, da me svolte. (...) L'idea è soggettiva: l'idea dell'uno non è quella dell'altro. (...) Il significato di un nome proprio è l'oggetto che designiamo con esso; l'idea che ne abbiamo è invece del tutto soggettiva. Fra l'una e l'altra sta il senso, che non è più soggettivo come l'idea, ma non coincide neppure con l'oggetto stesso. (Frege, 1892, pp. 29-30)

In Frege dunque il significato [*Bedeutung*] e il senso [*Sinn*] di un segno [*Zeichen*] sono entità oggettive, non psicologiche, a differenza dell'idea o rappresentazione [*Vorstellung*] associata, che è soggettiva e non intersoggettivamente accessibile.

Frege è comunque interessato, più che alla natura dei segni, alle caratteristiche della produzione semiotica che garantiscono l'acquisizione di nuove conoscenze in matematica, ovvero alla possibilità cognitiva di sostituire segni con altri segni in una espressione (matematica o linguistica) *salva veritate*.²⁰ Egli assume le scritture simboliche dell'algebra e dell'analisi a modello di tutte le rappresentazioni utilizzabili in matematica, non riconoscendo l'importanza di altri sistemi semiotici in matematica (Duval, 2011).

2.2.4.5 Piaget

Jean Piaget (1896 – 1980) utilizza la nozione di rappresentazione come “evocazione di oggetti assenti” (Piaget, 1936) per caratterizzare le ultime fasi dell'intelligenza senso-motoria. In seguito (1945), in *La formation du symbole chez l'enfant: imitation, jeu et rêve, image et représentation*, afferma:

Si utilizza, in effetti, il termine “rappresentazione” in due sensi ben differenti. In senso ampio, la rappresentazione si confonde col pensiero, cioè con ogni intelligenza che non si appoggi più semplicemente sulle percezioni e sui movimenti (intelligenza senso-motoria), ma su un sistema di concetti o di schemi mentali. In senso stretto, essa si riduce all'immagine mentale o al ricordo-immagine, cioè all'evocazione simbolica di realtà assenti. (Piaget, 1945, p. 68)

Furth (1968) evidenzia che Piaget utilizza il termine “rappresentazione” sia in senso attivo, per designare un'azione: il “rendere presente una cosa per mezzo di...” (*rem praesentem facere*), sia in senso passivo, per designare lo strumento di mediazione (il veicolo di rappresentazione). Nel primo caso la persona è il soggetto dell'azione e tale azione richiede uno strumento di mediazione; nel secondo caso, lo strumento di mediazione diventa il soggetto della frase, ovvero “qualcosa sta al posto di qualcos'altro”. In particolare, in base a quanto sopra riportato, Piaget distingue tra rappresentazione in senso stretto e rappresentazione in senso ampio.

²⁰ In *Über Sinn und Bedeutung*, riferendosi al principio di sostituibilità, Frege (1892) cita Leibniz: “Eadem sunt, quae mutuo substitui possunt, salva veritate” (Leibniz, *Die Philosophische Schriften*. VII, p. 219). (Per approfondire si veda: Bagni, 2006; D'Amore, Fandiño Pinilla, Iori, & Matteuzzi, 2013).

Nel senso stretto, la rappresentazione è un'immagine mentale di una realtà assente, una evocazione simbolica, dunque presuppone una differenziazione tra significante e significato. Quest'ultima è alla base di ciò che Piaget nei primi scritti chiama *funzione simbolica* e poi *funzione semiotica* (nel senso psicologico del termine), ovvero la capacità, che il bambino manifesta intorno ai 2 anni, di rappresentare un oggetto o un evento che non è presente (significato) attraverso un altro oggetto che è presente (significante) (Lenninger, 2006), vale a dire, la capacità di rappresentare una realtà (nascosta, assente o immaginaria) per mezzo di un significante (espressione) che è distinto dal significato (contenuto). Tale capacità si manifesta, per esempio, attraverso il linguaggio, l'imitazione differita, il gioco simbolico, il disegno, l'immagine mentale. Piaget, dunque, a differenza di Hjelmslev, usa la parola "funzione" non per indicare una specifica relazione di dipendenza o una corrispondenza tra oggetti, ma per indicare una capacità, quella di utilizzare qualcosa al posto di qualcos'altro che non è presente.

Nel senso ampio, la rappresentazione si manifesta in qualunque tipo di pensiero che non si basi interamente su un coinvolgimento percettivo o motorio; si tratta del pensiero operatorio che comincia a manifestarsi dopo lo stadio senso-motorio (a partire dai 2 anni).

È anche chiaro che questi due tipi di rappresentazioni, ampie e strette, presentano delle relazioni tra loro: il concetto è uno schema astratto mentre l'immagine è un simbolo concreto, ma, sebbene il pensiero non si riduca a un sistema di immagini, è possibile che ogni pensiero sia accompagnato da immagini, poiché, se pensare consiste nel collegare delle significazioni, l'immagine è un "significante" e il concetto un "significato". (Piaget, 1945, p. 68)

In Piaget (1945) l'immagine in quanto evocazione simbolica, in quanto simbolo, è un significante che si riferisce al pensiero; in altre parole, la rappresentazione in senso stretto ha il suo significato nella rappresentazione in senso ampio (Furth, 1994).

Piaget chiama dunque "rappresentazione simbolica o per immagini" (o semplicemente "simboli" o "immagini") la rappresentazione in senso stretto; chiama invece "rappresentazione concettuale" la rappresentazione in senso ampio, il pensiero. Inoltre, rileva:

Si noti anche che, e questo è fondamentale, in accordo con la terminologia dei linguisti, dobbiamo riservare il termine "simbolo" ai significanti "motivati", vale a dire a quelli che presentano una relazione di somiglianza con il

significato, in opposizione ai “segni” che sono “arbitrari” (vale a dire convenzionali o socialmente imposti). (Piaget, 1945, pp. 68-69)

Piaget considera dunque i simboli come segni iconicamente motivati, non convenzionali (come per esempio l'immagine di un cerchio) distinguendoli dai segni arbitrari, convenzionali non-iconici (come le lettere utilizzate in un'espressione algebrica). Ma per Piaget e Inhelder (1966), come fa notare Fischbein (1993), le immagini interagiscono profondamente con i concetti, soprattutto nel caso delle operazioni geometriche, dove gli aspetti concettuali (ciò che è simbolizzato attraverso operazioni spaziali) e figurali (immagini mentali di natura simbolica) si fondono tra loro:

Sembra che Piaget e Inhelder abbiano avuto anche l'intuizione della totale fusione tra gli aspetti concettuali e quelli figurali nel caso speciale del pensiero geometrico. (...) Tuttavia, essi non hanno tratto implicazioni generali, né teoriche né didattiche, da questa conclusione. Nel loro lavoro rimane una osservazione marginale. (Fischbein, 1993, p. 154)

In Fischbein (1993) tale fusione costituisce invece un aspetto centrale. Le figure geometriche sono concepite in termini di entità mentali aventi proprietà sia concettuali (come quelle di idealità, astrazione, generalità) sia figurali (come quelle spaziali imposte, derivate, o controllate da definizioni, assiomi o teoremi di un certo sistema assiomatico); costituiscono in tal senso dei “concetti figurali”. Operare con tali entità non è dunque semplice:

Molti errori che gli studenti compiono nel loro ragionamento geometrico possono essere spiegati da questo tipo di scissione (o mancanza di congruenza) tra l'aspetto concettuale e quello figurale dei concetti figurali. La struttura figurale può dominare le dinamiche del ragionamento invece di essere controllata dai corrispondenti vincoli formali. (...) Immagini e concetti interagiscono nell'attività cognitiva di una persona (un bambino o un adulto) a volte cooperando altre volte entrando in conflitto. (...) Di conseguenza, uno dei compiti principali dell'educazione matematica (nel campo della geometria) è quello di creare tipi di situazioni didattiche che richiedano sistematicamente una stretta cooperazione tra i due aspetti, fino alla loro fusione in oggetti mentali unitari. (Fischbein, 1993, pp. 160-161)

Si tratta di una cooperazione che, come vedremo (par. 2.5), dal punto di vista semio-cognitivo si traduce in una coordinazione di registri semiotici.

2.2.4.6 Osservazioni

Le definizioni di segno sopra riportate hanno qualcosa in comune. Tutte lasciano implicita l'esigenza epistemologica fondamentale, non banale nel caso degli oggetti matematici, di non confondere una rappresentazione o un'immagine con ciò che essa rappresenta, oppure un segno con ciò a cui esso rinvia. Inoltre, non specificano come la funzione cognitiva di "evocare" o di "stare al posto di qualcosa" possa essere soddisfatta da un punto di vista strutturale (Duval, 2006c). Le teorie che assumono tali definizioni privilegiano solo alcune delle relazioni fondamentali costitutive dei segni e delle rappresentazioni semiotiche, senza alcuna analisi strutturale significativa del loro funzionamento. Tali relazioni riguardano principalmente l'elemento che svolge la funzione di evocazione (segno o rappresentazione) e ciò che viene evocato (oggetto). Si tratta di relazioni di:

1. *somiglianza* tra il contenuto di un segno o di una rappresentazione e l'oggetto evocato [sulla base della conservazione delle "relazioni di vicinanza" tra gli elementi che compongono nel loro insieme il contenuto del segno o della rappresentazione e quelli dell'oggetto rappresentato (seguendo il criterio proposto da Bresson, 1987)];
2. *causalità*, tra l'occorrenza di un fenomeno e quello che può esserne la causa; ciò può avvenire secondo due tipologie opposte:
 - effetto → causa: ciò che funziona come segno o rappresentazione risulta un effetto di ciò che evoca (come un sintomo, una impronta, il fumo causato da un fuoco etc.);oppure di tipo:
 - causa → effetto: ciò che funziona come segno o rappresentazione agisce come causa o come stimolo di un'azione (come la luce rossa di un semaforo e, più in generale, ciò che funge da segnale o che dipende da un codice);
3. *riferimento* (relazione tra un'espressione e l'oggetto che essa designa) attraverso un'operazione discorsiva intenzionale di designazione [che può essere di tipo: designazione pura, categorizzazione semplice, determinazione o descrizione (Duval,

1995). Per esempio in: “Sia P il punto di intersezione delle diagonali del parallelogramma ABCD” si riconoscono operazioni di designazione pura (“P”, “ABCD”), di categorizzazione semplice (“punto”, “intersezione”, “diagonali”, “parallelogramma”), di determinazione (“il”) e di descrizione (“di”, “delle”, “del”).

In particolare, la classificazione (icona, indice e simbolo) dei segni/*representamen*, che Peirce ha introdotto sulla base della relazione che il *representamen* ha con il suo oggetto di riferimento, si fonda sulla relazione di somiglianza e su quella di causalità. Precisamente, l'*icona* mette in evidenza una relazione di somiglianza, l'*indice* una relazione di causalità (di tipo: effetto \rightarrow causa), il *simbolo* una relazione che non è né di somiglianza né di causalità, ovvero una relazione posta in modo puramente convenzionale.

Tale classificazione non risulta tuttavia sufficientemente discriminante nell'analisi di tutte le attività matematiche e delle loro produzioni. Non permette per esempio di distinguere fra loro le icone che evidenziano una struttura di tipo “diagramma”, le equazioni, le formule, le figure geometriche, i grafici etc.

Inoltre, la definizione triadica di segno alla base di tale classificazione si identifica con quella di rappresentazione, essendo un segno/*representamen* sempre in relazione con un oggetto, e presuppone la priorità cognitiva ed epistemologica dell'oggetto rispetto a qualsiasi rappresentazione.

In matematica, però, le rappresentazioni semiotiche svolgono un ruolo spesso prioritario rispetto agli oggetti matematici; in assenza di rappresentazioni semiotiche non è concepibile alcuna attività matematica.

Ma questo non è tutto.

Come evidenzia Duval (2006c), ci sono situazioni in cui i segni non evocano di per sé alcun oggetto, ma sostituiscono semplicemente altri segni, come in algebra quando si utilizzano lettere per sostituire un dato insieme di possibili valori numerici, oppure nei codici che correlano termine a termine due liste di elementi (sulla teoria dei codici si veda, per esempio: Eco, 1975, 1984). In tali situazioni: “La relazione di riferimento di un segno o di una combinazione di segni a un oggetto risulta da un'operazione discorsiva di designazione” (Duval, 2006c, p. 52).

Ci sono dunque segni, come le lettere in algebra, le notazioni matematiche, le parole e le loro combinazioni in espressioni, enunciati o formule, che rinviano a un

oggetto matematico soltanto attraverso operazioni discorsive di designazione (per esempio: “Sia r il raggio della circonferenza...”). Fra tali segni (parole, caratteri e loro combinazioni) ce ne sono alcuni che possono essere sostituiti l’uno all’altro, in una frase o in una formula, senza modificarne il valore di verità. Si tratta dei segni *referenzialmente equivalenti*, nel senso di Frege (1892), cioè dei segni con *sensi* (*Sinne*) differenti ma con lo stesso *significato* (*Bedeutung*), identificato, come si è detto, con l’oggetto. In altre parole, si tratta delle rappresentazioni con contenuti differenti ma che rinviano allo stesso oggetto come, per esempio: $3/4$, $0,75$ e $0,74\bar{9}$. Frege (1892) sottolinea che è proprio la possibilità di sostituire segni referenzialmente equivalenti, dunque l’invarianza referenziale fra segni differenti, a spiegare e a determinare il progresso e il carattere deduttivo del ragionamento in matematica, ovvero la produzione di nuove conoscenze. “Questo dimostra che Frege considerava come un progresso della conoscenza, sia matematica sia non matematica, il fatto di riconoscere due rappresentazioni differenti come due rappresentazioni di un medesimo oggetto” (Duval, 1998a, p. 154).

Ma qual è l’origine della distinzione tra *Sinn* e *Bedeutung*? Tale distinzione, come rileva Duval (1998a, 2008, 2011), è introdotta da Frege per rispondere al dilemma epistemologico sollevato da Kant riguardo al ragionamento in matematica, che deve essere sia logicamente rigoroso (come lo sono i *giudizi analitici*, necessariamente *a priori*, cioè indipendenti dall’esperienza, che non forniscono nuove informazioni essendo semplicemente esplicativi) sia scientificamente produttore di nuove conoscenze (come i *giudizi sintetici* dipendenti dall’esperienza, cioè *a posteriori*). Kant, per sfuggire al dilemma, spiega che la matematica è composta da giudizi sintetici *a priori*, ovvero dipendenti da un’esperienza *a priori* (quella dello spazio e del tempo); da qui il suo carattere di universalità e di necessità.

Frege riformula la questione di Kant confrontando la tautologia $a = a$ con l’equivalenza $a = b$ alla base dei calcoli e dei ragionamenti matematici: “ a ” e “ b ” hanno *sensi* (*Sinne*) differenti, ovvero presentano contenuti tra loro differenti, ma rinviano allo stesso oggetto (*Bedeutung*), sempre che l’uguaglianza $a = b$ sia vera, *salva veritate*. Il processo di sostituzione che permette il calcolo, e più in generale il ragionamento in matematica, si basa proprio sulla distinzione tra il senso (*Sinn*) e il significato (*Bedeutung*) di un segno, ovvero tra il contenuto di una rappresentazione e l’oggetto rappresentato. Tale distinzione permette a Frege di spiegare come un calcolo non-

tautologico sia possibile, e di affermare in generale che l'aritmetica, come la logica, è ampliativa cioè estende la nostra conoscenza, dunque ha un carattere *sintetico*.

In modo analogo, la distinzione di Frege permette a Duval di spiegare come una rappresentazione semiotica possa essere convertita in un'altra rappresentazione semiotica, anche se il contenuto della rappresentazione iniziale (in un dato registro) non ha nulla in comune con quello della rappresentazione finale (in un altro registro).

2.2.5 *Sistema di segni di de Saussure*

La definizione seguente, che ha determinato una svolta importante nella storia della semiotica, è anch'essa fondamentale non solo per l'analisi delle produzioni linguistiche, ma anche per la comprensione dei processi semiotici e cognitivi che caratterizzano le attività matematiche:

Il segno linguistico unisce non una cosa e un nome, ma un concetto e un'immagine acustica. Quest'ultima non è il suono materiale, cosa puramente fisica, ma la traccia psichica di questo suono (...). Chiamiamo *segno* la combinazione di un concetto e di un'immagine acustica. (De Saussure, 1916, pp. 66-67)

Tuttavia:

Considerare un termine semplicemente come l'unione di un certo suono con un certo concetto è assai fuorviante. Definirlo in questo modo sarebbe come isolare il termine dal suo sistema; significherebbe assumere che si può partire dai termini e costruire il sistema facendone la somma quando, al contrario, si deve partire dal tutto interdipendente per ottenere attraverso l'analisi i suoi elementi. (De Saussure, 1916, p. 113)

Il segno (linguistico) per Ferdinand de Saussure (1857 – 1913) non è dunque concepibile al di fuori del suo sistema e non ha nulla di materiale; soltanto la sua produzione orale o scritta, ovvero la sua occorrenza, lo rende oggetto sensibile. Esso ha una struttura diadica: unisce in maniera indissolubile il significante (*immagine acustica*) e il significato (*concetto*), due entità mentali indipendenti da qualsiasi oggetto esterno, al di fuori del sistema.

La semiologia di de Saussure, come evidenzia Nöth (1995), “opera totalmente all’interno del sistema di segni. Poiché solo un sistema semiologico fornisce una struttura al mondo altrimenti amorfo, l’oggetto referenziale è escluso da considerazioni semiotiche” (p. 61).

La distinzione significante-significato, che si applica solo ai segni linguistici (non ai simboli matematici né ai segni puramente grafici o visuali), non deve dunque essere confusa con la funzione cognitiva di evocazione di un oggetto assente, che il segno sostituisce (Duval, 2006c). In altre parole, il segno non può essere concepito al di fuori del sistema di segni (la *langue*) di cui fa parte:

La *langue* è un sistema di termini interdipendenti in cui il valore di ciascun termine risulta solo dalla presenza simultanea degli altri (...) L’idea o sostanza fonica che un segno contiene è meno importante degli altri segni che lo circondano. (...) Tra loro vi è solo *opposizione*. L’intero meccanismo del linguaggio (...) si basa su opposizioni di questo tipo e sulle differenze foniche e concettuali che esse implicano. (De Saussure, 1916, pp. 114-121)

La lingua è considerata come un sistema in cui il valore di ciascun elemento (segno) è determinato dal gioco di opposizioni tra gli elementi del sistema, indipendentemente da qualsiasi riferimento a un oggetto.

La definizione di de Saussure, pur rimanendo vincolata alla linguistica, si distacca notevolmente dalle definizioni classiche, attribuendo un ruolo prioritario non al segno in quanto tale ma al sistema di segni: un segno funziona come segno soltanto all’interno di un sistema; più precisamente, un segno può essere riconosciuto come segno soltanto per le relazioni di opposizione che esso ha con altri segni di un dato sistema. Il senso di un segno è strettamente-indissolubilmente legato al sistema nel quale esso funziona come segno.

Emerge qui una quarta relazione costitutiva dei segni (diversa dalle relazioni di somiglianza, di causalità e di riferimento sopra riportate), ovvero la relazione di *opposizione alternativa* tra elementi di un sistema.

Un esempio: “1”, di per sé, non è un segno; non è un segno se non si specifica il sistema in cui lo si considera. È un segno nel sistema binario (per la sua opposizione alla cifra “0” del sistema binario), oppure nel sistema decimale (per la sua opposizione alle altre nove cifre del sistema decimale) etc.; al di fuori del sistema da cui riceve il valore di segno è soltanto una macchia, priva di senso, non rappresenta alcun numero, nulla.

Un altro esempio interessante è il seguente. Nella lingua Shuar, il numero sette si scrive 7 e si legge “tsenken”, cioè “bastone con un gancio per raccogliere la frutta”, con la forma, appunto, della cifra 7. Dunque “7” di per sé non è un segno, bisogna dargli un contesto; nel contesto contadino (sistema della lingua naturale) è un “tsenken”, nel contesto aritmetico (sistema decimale) è un sette (per approfondire si veda: D’Amore, 2002c).

D’altra parte, il segno “1” del sistema binario o di quello decimale costituisce anche una rappresentazione semiotica del numero “uno” e si oppone ad altri tipi di rappresentazioni del medesimo numero prodotte da sistemi differenti, come quelle ottenute mediante abaci, *reglettes*, gesti, fiammiferi o sassolini, che funzionano non come segni, ma come *pseudo-oggetti* manipolabili concretamente, ovvero come marchi-unità. Tali rappresentazioni di tipo “concreto” o iconico svolgono principalmente una funzione di supporto visivo o materiale per alcune particolari operazioni. Esse richiedono in ogni caso l’articolazione con la lingua naturale o una scrittura simbolica (cioè con un registro semiotico) per esplicitare o effettuare le operazioni. (Per approfondire si veda: Duval, 2006c).

In modo analogo, le rappresentazioni del numero “nove” in un sistema di numerazione posizionale, per esempio nel sistema decimale, così come si oppongono alle rappresentazioni iconiche del numero “nove” ottenute mediante *reglettes*, indipendentemente dalla disposizione spaziale delle *reglettes*, si oppongono anche alle rappresentazioni del medesimo numero nel sistema di numerazione latino, che non è né posizionale, né additivo, ma qualcosa di intermedio. In tale sistema di numerazione, infatti, il principio di addizione, utilizzato per esempio in III, VI, XII, è spesso accompagnato dal principio di sottrazione, nel caso in cui un segno sia posto alla sinistra di un altro di valore maggiore, come in IX, XC, CM. In qualche caso però si utilizza anche il principio di moltiplicazione, in base al quale VM non starebbe per 1000 - 5, ma per 5000 (Cajori, 2007). In altre parole, il valore dei segni non varia allo stesso modo a seconda delle loro posizioni. In ogni caso, i segni del sistema di numerazione latino si caratterizzano sia per i loro valori oppositivi agli altri segni del sistema sia per le regole organizzatrici che determinano il loro uso e le loro combinazioni per la designazione di numeri. A differenza dei sistemi di numerazione posizionali, le rappresentazioni nel sistema di numerazione latino, come le rappresentazioni iconiche ottenute mediante abaci, *reglettes*, fiammiferi o sassolini, non richiedono l’uso di un segno specifico per designare

un posto vuoto, il numero “zero”, rendendo le operazioni piuttosto difficoltose o complesse. (Per approfondire si veda: D’Amore & Matteuzzi, 1976).

2.2.6 *Due modi opposti di concepire i segni*

Da quanto sopra rilevato, emergono fondamentalmente due modi completamente differenti di concepire i segni e dunque le produzioni matematiche:

1. *Prima di de Saussure*

L’approccio ai segni è principalmente epistemologico: i segni sono considerati isolati (in assenza di sistemi semiotici) e rapportati all’oggetto a cui rinviano sulla base di relazioni di:

- somiglianza (relazione iconica) o no (relazione convenzionale)
- causalità (relazione indicale) o no (relazione iconica o convenzionale)
- riferimento, attraverso una operazione discorsiva intenzionale di designazione (irriducibile alla relazione di somiglianza o di causalità).

La significazione è una di queste tre relazioni (di somiglianza, causalità o di riferimento) tra segno e oggetto. Si riduce alle prime due in Peirce, alla terza in Frege.

In ogni caso, prima di de Saussure, ci sono soltanto segni e non sistemi semiotici. E i segni non sono completamente distinti dalle rappresentazioni, in quanto la loro principale funzione è ridotta a quella delle rappresentazioni: stare al posto di altri oggetti o evocare oggetti assenti.

In particolare, in Descartes, come evidenzia Dascal (1987), il ruolo dei segni nel ragionamento deduttivo e, più in generale, nel pensiero, si riduce a una funzione puramente evocativa, mnemonica o di condensazione. Ad avere un ruolo rilevante non è la capacità di manipolare segni, ma la capacità di usare la ragione, di comprendere oggetti puramente mentali rappresentati o presentati alla mente, oggetti che sono in qualche modo nelle idee. “Dei miei pensieri, alcuni sono come le immagini delle cose, ed è solo a quelli che spetta il nome di idea: come quando mi rappresento un uomo, una chimera, il cielo, un angelo, o Dio stesso” (Descartes, 1852, pp. 72-73).

La relazione tra segno (rappresentazione o idea) e oggetto rappresentato è di tipo puramente causale: “ciò che costituisce [*être objectif*] un’idea deve avere una causa reale” (Descartes, 1852, p. 606). Come evidenzia Furth (1968):

Per Descartes l’idea è *ciò che* noi conosciamo, l’oggetto diretto del conoscere. Ha la sua causa fattuale efficiente nella cosa reale che entra nei nostri sensi. La sua causa formale, cioè, ciò che spiega la natura specifica dell’idea, si fonda sull’idea generale del sé come soggetto conoscente nel quale sono implicite tutte le possibile idee. (Furth, 1968, p. 144)

In particolare, come afferma Duval (1998a), per Descartes una rappresentazione è prodotta o dal soggetto stesso o da un oggetto esistente al di fuori del soggetto. Se il soggetto è la sola causa del contenuto della rappresentazione, il contenuto della rappresentazione non corrisponde a un oggetto esistente; o almeno il soggetto non può averne alcuna certezza. Se il soggetto non è la sola causa del contenuto della rappresentazione, vi è un oggetto che, oltre ad essere la causa reale della rappresentazione, corrisponde al contenuto della rappresentazione. Ma questa corrispondenza può essere più o meno completa a seconda della rappresentazione e dell’oggetto. In ogni caso, la relazione tra rappresentazione e oggetto, per Descartes, è una relazione di causalità, non di riferimento.

2. *Dopo de Saussure*

L’approccio ai segni è principalmente strutturalista: ad avere un ruolo prioritario non sono i segni in quanto tali ma i sistemi semiotici. Un segno è un segno solo in un sistema semiotico, vale a dire solo in opposizione ad altri segni.

L’uso dei segni non è subordinato agli oggetti che i segni possono designare ma è vincolato al sistema semiotico che li produce, ovvero alla struttura di opposizioni interne che si considera, o che si ritiene più adeguata o efficace in determinati contesti, anche da un punto di vista meramente segnico. Tale struttura determina le possibilità di trasformazione dei segni all’interno del sistema, cioè la funzione cognitiva di *trattamento* per la produzione di nuove conoscenze. Il riferimento di un segno a un oggetto risulta soltanto da una operazione esplicita di designazione, non da una relazione di causalità.

Quale approccio è più appropriato per l'analisi delle attività matematiche e più in particolare delle produzioni degli studenti?

La scelta fra l'approccio semiotico basato sulla classificazione dei segni (di tradizione peirceana) e quello basato sulla classificazione dei sistemi semiotici (di tradizione saussureana) risulta cruciale per l'analisi cognitiva dei processi di apprendimento in matematica, perché la concezione di segno cambia completamente nei due casi.

Nel primo caso i segni sono considerati indipendentemente da qualsiasi sistema semiotico e il criterio di classificazione si basa sulla relazione tra il contenuto di un segno/*representamen* e l'oggetto a cui si riferisce; si ottengono così tre tipi di segni in corrispondenza della relazione di somiglianza (icona), della relazione di causalità inversa (indice), oppure nel caso si postuli una relazione in modo puramente convenzionale (simbolo) tra il contenuto di un segno/*representamen* e un oggetto.

Nel secondo caso i segni funzionano solo in opposizione ad altri segni, ovvero all'interno di un sistema semiotico, indipendentemente da qualsiasi riferimento a un oggetto. Il criterio di classificazione si basa sulle funzioni cognitive soddisfatte dai tipi di trasformazione (trattamenti) che si possono effettuare all'interno del sistema semiotico; si ottengono in tal modo, come vedremo, quattro tipi di registri semiotici.

R. Duval, nel corso di una conversazione durata vari giorni (nel giugno del 2013) e di successivi scambi di lettere (nel settembre del 2013), ha evidenziato che nella classificazione dei segni di Peirce non c'è alcuna distinzione tra la lingua naturale e le scritture dei numeri (struttura triadica) e i linguaggi formali o certe notazioni simboliche (struttura diadica) e nessuna distinzione tra diagrammi (struttura diadica) e figure geometriche (struttura triadica o diadica a seconda del funzionamento della figura nella situazione geometrica presa in esame) (per approfondire si veda: Duval, 1994). Questo è il motivo per cui i problemi sistematici di conversione delle rappresentazioni semiotiche, cioè della loro trasformazione in un tipo differente (di un altro registro), che emergono nei processi di apprendimento della matematica, non possono essere formulati e analizzati nella teoria dei segni di Peirce. Inoltre, in tale teoria, non c'è alcuna distinzione tra le lingue e l'uso produttivo delle lingue (discorso). Questo è il motivo per cui il riferimento (livello del discorso) è implicitamente incluso nella definizione di simbolo (livello del linguaggio algebrico e formale). In altre parole, la relazione di riferimento è assimilata a

un'operazione di designazione di una variabile, di un'incognita, di un punto su una retta etc. cioè a una codifica, senza tener conto del ruolo della lingua naturale e dei linguaggi formali nelle operazioni di designazione attraverso enunciati o espressioni.²¹

Nel primo approccio, inoltre, i segni sono sempre concepiti in relazione a un oggetto e dunque confusi con le rappresentazioni. In matematica, invece, ci sono segni che non rinviano ad alcun oggetto specifico, o che rinviano a oggetti differenti da un punto di vista fenomenologico. Basti pensare alle configurazioni geometriche nelle quali si possono riconoscere unità figurali differenti, giustapposte o sovrapposte. In altre parole, la relazione tra i segni e gli oggetti a cui rinviano non è una relazione di causalità, ma una relazione di riferimento, che risulta da un'operazione discorsiva intenzionale di designazione (Duval, 2011).

L'approccio di de Saussure, esteso a tutti i sistemi semiotici utilizzati in matematica e integrato con quello di Frege, risulta dunque più efficace e interessante per l'analisi delle produzioni matematiche, non solo degli studenti.

2.2.7 Approccio semio-cognitivo

Nell'approccio semio-cognitivo di Duval, un oggetto matematico, come si è detto, è l'invariante (operatorio oppure logico-discorsivo) di una molteplicità di rappresentazioni semiotiche. L'oggetto di conoscenza emerge dunque dal riconoscimento che due o più rappresentazioni sono rappresentazioni di un "medesimo oggetto" anche se i loro contenuti non hanno nulla in comune. La pratica umana rimane comunque la caratteristica distintiva esistenziale di un oggetto matematico.

In Duval l'oggetto matematico non è una questione di realismo alla Platone; la fede nella sua pre-esistenza non è necessaria, non serve. Come si è detto, è sufficiente pensarlo come emergente dal riconoscimento di una equivalenza referenziale di rappresentazioni semiotiche anche non semanticamente congruenti (cioè non "simili" per qualche aspetto, ovvero relativamente distanti da un punto di vista cognitivo). Come, per esempio, $2 \cdot 3$, $\sqrt{36}$, $42/7$, $1+2+3$, ...

R. Duval (comunicazione personale, 20 aprile, 2012) asserisce che nessuna interpretazione filosofica (di tipo realista o idealista, costruttivista o platonica, ...) può

²¹ Ringrazio il prof. Raymond Duval per avermi dato il permesso di rendere pubbliche alcune sue risposte a mie domande, con considerazioni personali.

essere indotta dalla sua caratterizzazione cognitiva degli oggetti matematici e dell'attività semiotica, il che sembra chiudere la questione.

Per la comprensione dei processi di apprendimento della matematica, la questione rilevante che si presenta non è se gli oggetti matematici vengano prima o dopo le attività matematiche, prima o dopo le pratiche istituzionali o personali, oppure prima o dopo le loro rappresentazioni semiotiche, ma è:

Come non confondere un oggetto matematico con una sua rappresentazione semiotica se non è possibile accedere all'oggetto matematico senza produrre (implicitamente o esplicitamente) una rappresentazione semiotica? (Duval, 2001, 2006c).

Il problema della comprensione della matematica nasce anzitutto da questa questione; questione che in Duval assume la forma di un vero e proprio paradosso cognitivo (per approfondire tale aspetto si veda: D'Amore, Fandiño Pinilla, Iori, & Matteuzzi, 2013). Questa sfida che tutti devono affrontare in matematica è trascurata da numerosi modelli semiotici e cognitivi di analisi dei processi di apprendimento. In particolare, nell'approccio pragmatista di tradizione peirceana e negli approcci costruttivistici piagetiani si assume implicitamente che i processi cognitivi di apprendimento siano identici in ogni campo di conoscenza, in matematica come in biologia, fisica, chimica etc. Ma tra la matematica e le altre discipline scientifiche vi è un profondo divario per quanto concerne le modalità di accesso agli oggetti di conoscenza, divario che è di ordine sia epistemologico (perché le modalità di accesso dipendono dalla natura degli oggetti di conoscenza) sia cognitivo (come riconoscere uno stesso oggetto di conoscenza in rappresentazioni differenti? Quali operazioni cognitive sono richieste per comprendere e apprendere la matematica?).

La modalità di accesso agli oggetti matematici è radicalmente differente dalla modalità di accesso agli oggetti di conoscenza delle altre discipline scientifiche. In tutte le discipline scientifiche, tranne in matematica, ci sono due modalità di accesso agli oggetti di conoscenza: multisensoriale, diretto o strumentale; e semiotico, attraverso l'uso intenzionale di un sistema di segni. In matematica, invece, l'accesso agli oggetti di conoscenza è soltanto semiotico, attraverso rappresentazioni semiotiche; non è possibile alcun accesso multisensoriale (Figura 2.4).

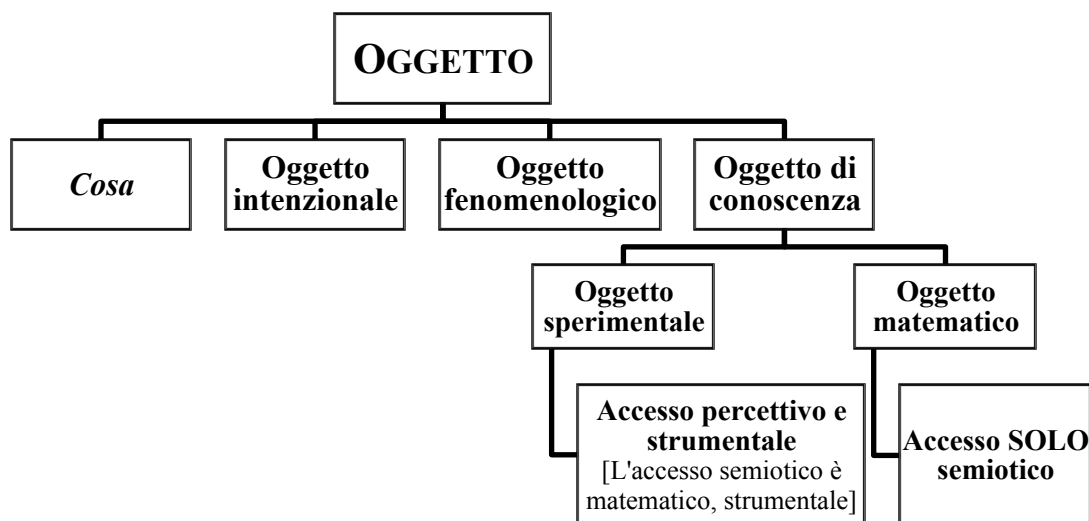


Figura 2.4 *Tipologie di oggetti e modalità di accesso agli oggetti di conoscenza*
 Nota. Figura adattata da R. Duval (comunicazione personale, 26 giugno, 2013).

Per l’insegnamento-apprendimento della matematica, dunque, la questione di come si possa accedere agli oggetti matematici diventa cruciale, ed è strettamente connessa con quella dei processi semio-cognitivi specificamente mobilitati in matematica. Perché in matematica la costruzione della conoscenza (*dimensione cognitiva*) è strettamente legata alla capacità di produrre o scegliere opportune rappresentazioni semiotiche, di trattare tali rappresentazioni all’interno di un dato registro e di convertire le rappresentazioni da un registro a un altro (*dimensione semiotica*) (D’Amore, 2001b; D’Amore, Fandiño Pinilla, & Iori, 2013). Da qui la necessità di prendere coscienza di tali processi per poter comprendere e affrontare le difficoltà di comprensione che l’insegnamento della matematica inevitabilmente solleva in ogni ordine di scuola.

2.2.8 *Approccio semiotico-culturale*

Nell’approccio semiotico-culturale di Luis Radford (2003a), che si fonda sulla teoria dell’oggettivazione (Radford, 2002a, 2006d, 2013a, 2014), gli oggetti matematici sono concepiti come “modelli fissi” di attività, “fissi” non in natura, non nella mente, ma nella pratica sociale, ovvero come dei suoi invarianti:

dal punto di vista di un’antropologia epistemologica, il modo nel quale io ritengo che l’enigma degli oggetti matematici possa essere risolto è considerare gli oggetti matematici come modelli fissi di attività incorporati

nel regno sempre mutevole della pratica sociale mediata e riflessiva. (Radford, 2004, p. 21)

“In questo contesto, gli oggetti matematici sono forme concettuali di attività mediata riflessiva, storicamente, socialmente e culturalmente incorporata” (Radford, 2006a, p. 59). Gli oggetti matematici si rivelano non attraverso segni o rappresentazioni ma attraverso forme di azione e di pensiero codificate storicamente e culturalmente, forme di attività nelle quali si utilizzano anche segni: “in generale, i materiali concreti e gli artefatti non possono rivelare la concettualità che sono tenuti a individuare. Essi devono essere incorporati in una *attività* (un particolare) che renda apparente la concettualità di cui sono portatori” (Radford, 2013a, p. 28).

Nell’approccio semiotico-culturale di Radford (2001), di tradizione post-Vygotskijana (Radford, 2003b), i segni svolgono un doppio ruolo nella cognizione, permettendo agli individui di muoversi lungo due direzioni interconnesse: una “tecnica”, come mezzi o strumenti per trattare un oggetto di conoscenza, e l’altra “sociale” – nella quale si colloca il significato – come mezzi che rendono possibile la comunicazione tra gli individui.

Il significato è sempre un costruito a due facce, soggettivo e culturale; è un processo nel quale soggetto e oggetto si modificano a vicenda, e nel quale la conoscenza soggettiva e quella oggettiva si fondono tra loro. I segni non sono, in ogni caso, puri indicatori dell’attività mentale, ma parti costitutive del pensare e la conoscenza è concepita come il prodotto di una prassi riflessiva cognitiva mediata. Come Radford (2004) evidenzia:

l’uso di segni e di artefatti altera le nostre modalità di ricezione degli oggetti del mondo, vale a dire i segni e gli artefatti alterano il modo in cui gli oggetti ci sono dati attraverso i sensi. L’inevitabile risultato è questo: la mediazione altera la nostra capacità cognitiva di essere colpiti dalle cose e rende questa capacità cognitiva (e perciò la conoscenza) culturalmente dipendente. (Radford, 2004, p. 21)

In tale approccio, dunque, la conoscenza è concepita come una forma di riflessione codificata storicamente e culturalmente; gli oggetti di conoscenza sono pure possibilità che acquisiscono realtà soltanto attraverso l’attività, confondendosi con essa. L’apprendimento è teorizzato come un processo di *oggettivazione*:

Nel nostro contesto, oggettivazione indica un processo che ha per scopo di mostrare qualche cosa (un oggetto) a qualcuno. Quali sono i mezzi per mostrare l'oggetto? Sono quelli che chiamo *mezzi semiotici di oggettivazione*. Sono oggetti, artefatti, termini linguistici, in generale segni che si utilizzano per rendere visibile un'intenzione e per condurre a termine un'azione. (Radford, 2005, p. 203)

Si tratta di un processo sociale, mediato semioticamente, di progressiva e critica presa di coscienza di sistemi di idee, significati culturali, forme di pensiero etc. (Radford, 2013a).

La natura generale degli oggetti matematici pone, secondo Radford (2005), un problema epistemologico fondamentale: "Il problema epistemologico si può sintetizzare nella domanda seguente: come possiamo giungere alla conoscenza di questi oggetti generali, dal momento che non abbiamo accesso a questi oggetti se non attraverso rappresentazioni che ci facciamo di essi?" (p. 195). Si tratta di un'ulteriore formulazione di quello che in Duval (2001) costituisce un paradosso cognitivo (par. 2.2.7).

2.2.9 Approccio onto-semiotico

Nell'approccio onto-semiotico (Godino & Batanero, 1994; Godino, Batanero, & Font, 2007), che estende, come D'Amore e Godino (2006) dimostrano, la teoria antropologica della didattica (Chevallard, 1991, 1992, 1999),²² la nozione di oggetto matematico è completamente differente da quella sulla quale si fonda l'approccio semio-cognitivo di Duval: "noi usiamo la parola oggetto in senso ampio per significare qualsiasi entità coinvolta in qualche modo in una attività o pratica matematica e che possa essere separata o individualizzata" (Font, Godino, & Gallardo, 2013, par. 6.1).²³ Le pratiche matematiche possono essere specifiche di una persona (*pratiche personali*) o condivise entro

²² La teoria antropologica della didattica (Chevallard, 1992), che nasce dagli studi sulla trasposizione didattica (Chevallard, 1985), ovvero sull'adattamento del Sapere (accademico, accettato dalla comunità di matematici) al sapere da insegnare, si focalizza sulla dimensione istituzionale della conoscenza matematica, ovvero sulle pratiche che una data istituzione considera appropriate per l'insegnamento-apprendimento della matematica. La conoscenza di un oggetto da parte di un soggetto non è vista in termini di relazione personale all'oggetto, bensì in termini di relazione istituzionale all'oggetto, di relazione rispetto a ciò che una data istituzione definisce, accetta o riconosce come conoscenza. Uno dei limiti principali della teoria antropologica è la identificazione tra soggetto e istituzione, il che le impedisce di focalizzarsi sul singolo individuo, sugli aspetti cognitivi dell'apprendimento, e dunque sul fenomeno dell'insegnamento-apprendimento in tutta la sua complessità e problematicità.

²³ Una *pratica* è una qualsiasi azione svolta o espressione (linguistica o di altro tipo) prodotta da qualcuno per risolvere un problema matematico, comunicare la soluzione ad altre persone, validare e generalizzare la soluzione ad altri contesti e problemi (Godino & Batanero, 1998).

un'istituzione (*pratiche istituzionali*), operative o discorsive (D'Amore, Godino, 2006). Gli autori propongono in particolare la seguente tipologia di *oggetti matematici primari*:

- *elementi linguistici*: termini, espressioni, notazioni, grafici etc. nei loro vari registri (scritto, orale, gestuale etc.)
- *situazioni/problemi*: applicazioni extra-matematiche, compiti, esercizi, esempi etc.
- *concetti/definizioni*: introdotti mediante definizioni o descrizioni, esplicite o altro (retta, punto, numero, media, funzione etc.)
- *proposizioni*: asserzioni su concetti etc.
- *procedure*: algoritmi, operazioni, tecniche di calcolo etc.
- *argomenti*: asserzioni utilizzate per validare o spiegare proposizioni e procedure, deduttive o di altro tipo.

Gli oggetti primari coinvolti nei o emergenti dai sistemi di pratiche formano *configurazioni*, ovvero reti di oggetti, che possono essere *cognitive* (reti di oggetti personali) o *socio-epistemiche* (reti di oggetti istituzionali) (D'Amore & Godino, 2006).

In tale approccio gli oggetti matematici selezionati o condivisi da un'istituzione (intesa come *comunità di pratica*) diventano *oggetti istituzionali*, mentre gli oggetti che emergono da sistemi di pratiche personali diventano *oggetti personali*. In altre parole, i primi derivano da una relazione istituzionale all'oggetto (relazione istituzione-oggetto), mentre i secondi da una relazione personale all'oggetto (relazione soggetto-oggetto). (Per approfondire tali aspetti si veda anche: D'Amore, 2001a; D'Amore & Godino, 2006; Font, Godino, & D'Amore, 2007, 2010).

La distinzione tra oggetto e segno, nell'approccio onto-semiotico, è relativa, basata su una relazione temporanea, in quanto ciò che è un segno in un dato momento può diventare un oggetto in un altro momento, o viceversa (Font, Godino, & Gallardo, 2013). Un soggetto può dunque identificare segno e oggetto oppure differenziarli a seconda dei casi, o di ciò che risulta più opportuno o conveniente in una data situazione. Tuttavia, secondo Font, Godino, e Gallardo (2013), la possibilità di differenziare un segno da un oggetto permette al soggetto di stabilire una corrispondenza (*funzione semiotica*) tra due insiemi di cui uno (l'insieme di partenza) costituisce il *piano dell'espressione*, mentre l'altro (l'insieme di arrivo) il *piano del contenuto*. Tutto ciò sulla base dell'idea di Hjelmslev (1943) di *funzione segnica* (limitata alle produzioni linguistiche), che Eco (1975) descrive anche in termini di *funzione semiotica*. In particolare, in Eco (1975), un

segno è considerato come costituito da uno o più elementi di un piano dell'espressione (*antecedente*) correlati a uno o più elementi di un piano del contenuto (*conseguente*).

Ogni qualvolta si dà correlazione di questo tipo, riconosciuta da una società umana, si ha segno. (...) *Un segno non è un'entità semiotica fissa* ma piuttosto il luogo di incontro di elementi mutuamente indipendenti, provenienti da due diversi sistemi e associati da una correlazione codificante. Propriamente parlando non vi sono segni, ma funzioni segniche (Hjelmslev, 1943). (Eco, 1975, p. 73)

In linea con tale posizione, D'Amore e Godino (2006) definiscono la corrispondenza tra antecedente (espressione, significante, rappresentante) e conseguente (contenuto, significato, ciò che il segno rappresenta) come una relazione di dipendenza, stabilita da un soggetto (essere umano o istituzione) in accordo con un certo criterio o codice stabilito. In particolare, pongono la seguente definizione:

Funzione semiotica: si dice che si stabilisce tra due oggetti matematici (ostensivi o non ostensivi) una funzione semiotica quando tra i due si determina una dipendenza rappresentazionale o strumentale, cioè uno di essi si può porre al posto dell'altro o uno è usato invece dell'altro. (D'Amore & Godino, 2006, p. 30)

La nozione di funzione semiotica permette di generalizzare la nozione di rappresentazione: una relazione tra un antecedente (espressione, significante) e un conseguente (contenuto, significato) stabilita da un soggetto (essere umano o istituzione) in accordo con un certo criterio o codice di corrispondenza. L'espressione e il contenuto di una funzione semiotica possono essere oggetti di tipo qualsiasi e "il tipo di relazione tra espressione e contenuto può essere molto vario, non solo rappresentativo, per esempio: 'è associato con', 'è parte di', 'è causa di/ragione per' (Font, Godino, & D'Amore, 2007, p. 7). Secondo gli autori, il vantaggio di concepire le rappresentazioni come funzioni semiotiche sta nel non dover isolare gli oggetti dalle loro rappresentazioni e nel permettere una grande flessibilità, proprio per il fatto che non ci si limita a concepire una rappresentazione come qualcosa che è al posto di qualcos'altro.

Gli oggetti che emergono dalle, o che intervengono nelle, pratiche matematiche dipendono sempre dai giochi linguistici (Wittgenstein, 1953) ai quali partecipano, e possono essere considerati a partire da cinque aspetti o dimensioni duali:

personale/istituzionale, unitario/sistemico, espressione/contenuto, ostensivo/non-ostensivo, estensivo/intensivo, dove:

- “personale” sta per “specifico di una persona”
- “unitario” indica una entità elementare o unitaria
- “espressione” o “significante” è l’antecedente di una funzione semiotica
- “ostensivo” si riferisce a ciò che si può mostrare, indicare o percepire
- “estensivo” indica un particolare oggetto o caso (un esempio specifico)
- “istituzionale” sta per “condiviso entro una data istituzione”
- “sistemico” indica una entità composta da una molteplicità di entità elementari o unitarie
- “contenuto” o “significato” è il conseguente di una funzione semiotica
- “non-ostensivo” si riferisce a ciò che non si può mostrare, indicare o percepire
- “intensivo” indica una classe o famiglia di oggetti

A seconda delle attività matematiche, le entità matematiche possono essere considerate secondo queste differenti dimensioni duali. (Per approfondire si veda: D’Amore & Godino, 2006; Godino, 2002).

Per spiegare gli errori, le difficoltà, o gli ostacoli che gli studenti incontrano nell’apprendimento di specifici contenuti matematici, o che emergono dalla comunicazione in classe, Godino, Font, Wilhelmi e Lurduy (2009) introducono la seguente definizione di conflitto semiotico:

Un *conflitto semiotico* è una qualsiasi disparità o discordanza tra i significati attribuiti a un’espressione (antecedente di una funzione semiotica) da due soggetti (persone o istituzioni) in interazione comunicativa. Se la disparità si produce tra i significati istituzionali, si parla di conflitto semiotico di tipo epistemico. Se la disparità si produce tra le pratiche che formano il significato personale di uno stesso soggetto, si parla di conflitto semiotico di tipo cognitivo. Quando la disparità si produce tra le pratiche (discorsive e operative) di due soggetti differenti in interazione comunicativa (per esempio,

studente-studente, o studente-insegnante) si parla di conflitto (semiotico) interazionale. (Godino, Font, Wilhelmi, & Lurduy, 2009, p. 10)

Nell'approccio onto-semiotico alla conoscenza matematica il problema principale non è quello di stabilire se sia necessario introdurre una o più rappresentazioni di un dato oggetto, né quello di stabilire quali trasformazioni o relazioni tra le rappresentazioni debbano essere prese in considerazione. Il problema è invece stabilire se le rappresentazioni introdotte rendano possibile o no la realizzazione del sistema di pratiche che costituisce il significato (personale e istituzionale) dell'oggetto matematico in questione, sapere se la complessità semiotica aumenti o diminuisca, e sapere se si siano prodotti inutili conflitti semiotici. A tale scopo gli autori ritengono molto utile ed efficace la nozione di *idoneità didattica* (Godino, Bencomo, Font, & Wilhelmi, 2006; Godino, Contreras, & Font, 2006), nelle sue dimensioni *epistemica* (relativa ai significati istituzionali), *cognitiva* (relativa ai significati personali), *interazionale* (relativa alle interazioni docente-discente), *mediazionale* (relativa alla disponibilità di risorse tecnologiche e di tempo), *emozionale* (relativa agli atteggiamenti, ai fattori affetti ed emozionali), ed *ecologica* (relativa alle relazioni intra e inter-disciplinari e al contesto sociale). Si tratta di un criterio generale di pertinenza o adeguatezza di un processo di insegnamento-apprendimento della matematica al progetto educativo, avente come principale indicatore l'adattamento dei significati personali costruiti dallo studente ai significati istituzionali attesi (Godino, Bencomo, Font, & Wilhelmi, 2006).

2.3 Sistemi semiotici e registri di rappresentazione

Sulla base dell'approccio di de Saussure e di quello di Frege, Duval (2006a) definisce un *sistema semiotico* come un insieme di elementi (segni) che assumono valore di senso solo in opposizione di scelta ad altri elementi e di regole organizzatrici che permettono di effettuare operazioni intenzionali di designazione e di combinare o di raggruppare gli elementi in unità significanti (espressioni o unità figurali). La rete di opposizioni, differenze, valori e l'insieme di regole organizzatrici costituisce la *struttura* del sistema. In base a tale struttura: *“I segni presentano la possibilità di POTER ESSERE SOSTITUITI AD ALTRI SEGNI, indipendentemente dagli oggetti che possono evocare”* (Duval, 2011, p. 27, corsivo e maiuscoletto dell'autore).

La possibilità di sostituire segni con altri segni non dipende dalla conoscenza degli eventuali oggetti rappresentati, ma dal sistema produttore.

In ogni caso, i segni non si identificano con le rappresentazioni, in quanto il loro uso non è legato alla sola designazione di oggetti. La soppressione della loro dipendenza dagli oggetti apre la possibilità a trasformazioni semiotiche che permettono di esplorare diverse loro combinazioni possibili all'interno del sistema produttore, e dunque di generare o stabilire nuove conoscenze (Duval, 2011).

La difficoltà di riconoscere eventualmente uno stesso oggetto matematico in rappresentazioni ottenute mediante trattamenti (numerosi casi sono riportati in: D'Amore, 2006a, 2006b, 2006c, 2006d; Rojas Garzón, 2014; Santi, 2010) deriva proprio dalla possibilità di sostituire segni ad altri segni indipendentemente sia dagli oggetti che possono evocare (come in Leibniz), sia dalle somiglianze o differenze, non tutte matematicamente rilevanti seppur cognitivamente significative, tra i contenuti (*sensi* in senso fregeano, *representamen* in senso peirceano) delle rappresentazioni di un medesimo oggetto. E questo perché, come si è detto, da un punto di vista cognitivo abbiamo accesso agli oggetti matematici soltanto *attraverso* la produzione (mentale, orale, grafico/visuale, o digitale dei dispositivi elettronici) di rappresentazioni semiotiche entro determinati registri di rappresentazione. E viceversa, la produzione di rappresentazioni semiotiche mediante differenti modalità fenomenologiche permette di evidenziare aspetti differenti, a volte inesplorati, rilevanti e cruciali per la costruzione cognitiva degli oggetti matematici.

In particolare, le applicazioni utilizzate dai moderni dispositivi elettronici permettono di manipolare (spostare, ingrandire, ruotare, ...) le rappresentazioni semiotiche come oggetti concreti, rendendole dinamiche, grazie alle enormi potenzialità di trattamento e di conversione che esse offrono. Anche se le rappresentazioni esibite dagli schermi dei dispositivi elettronici appartengono agli stessi registri semiotici delle rappresentazioni prodotte in altre modalità fenomenologiche (mentale, orale, grafico/visuale), la modalità digitale, grazie alla potenza di trattamento e di conversione che offre (inseparabile dalla intenzionalità di chi la usa) permette di svolgere una funzione di simulazione estremamente importante per l'esplorazione euristica delle rappresentazioni prodotte nella risoluzione di problemi. Tale funzione, che le altre modalità non permettono, deriva soprattutto dalla straordinaria efficienza, soprattutto in termini di tempo, della produzione e della trasformazione (trattamento e conversione) delle rappresentazioni semiotiche che le varie applicazioni permettono (per approfondire tale aspetto si veda: Duval, 2011).

2.3.1 *Sistemi semiotici e altri sistemi*

Un sistema semiotico non ha nulla a che vedere con un sistema assiomatico, e dunque con i sistemi di rappresentazione considerati da Peirce in relazione ai diagrammi (par. 2.2.4.3). Un sistema semiotico, come la lingua naturale, non ha quella coerenza interna sempre auspicata nella matematica. In generale, un sistema è “un insieme di elementi e l’insieme delle relazioni esistenti tra tali elementi” (Klaus, 1969, p. 634, come citato da Nöth, 1995, p. 198). Si tratta dunque di un insieme munito di una struttura. La sua coerenza interna non è la coerenza che si richiede in logica ai sistemi.

In particolare, ogni sistema semiotico ha sue specifiche possibilità di rappresentazione, che spesso occorre completare o integrare con quelle di altri sistemi semiotici. Per esempio, nel caso dei sistemi numerici non vi è la possibilità di designare tutti i numeri reali. Occorre in tal caso ricorrere a designazioni pure (per esempio: π , e , $\sqrt{2}$), oppure a descrizioni mediante ipotesi (come nella costruzione di figure geometriche) o mediante particolari successioni, serie, frazioni continue, puntini “...” etc. In ogni caso, quel “tutti” resta escluso.

La mancanza di specifiche rappresentazioni che permettano di indagare più in profondità, attraverso opportune trasformazioni, alcune nozioni matematiche (in questo caso quella di irrazionalità) ostacola fortemente la costruzione cognitiva di quelle nozioni. In relazione alla nozione di irrazionalità, Dörfler (2005) evidenzia in particolare la mancanza di diagrammi. Questi ultimi sono caratterizzati (in senso peirceano) mediante iscrizioni e insiemi di operazioni che si possono effettuare su di esse. Per esempio, le frazioni e l’insieme delle operazioni su di esse costituiscono diagrammi. I numeri irrazionali designati mediante simboli del tipo: $\sqrt{2}$, e o π , non sono diagrammi perché non è possibile trasformare tali simboli in modo da poter indagare più in profondità la nozione di irrazionalità (Dörfler, 2005).

La definizione di sistema semiotico fornita da Duval (par. 2.3), di derivazione saussuriana e fregeana, si differenzia da quella di Ernest (2006), di derivazione costruttivista e sociale. In Ernest (2006) un *sistema semiotico* è caratterizzato da tre componenti:

- un insieme di segni, che possono essere espressi oralmente, scritti, disegnati, o codificati elettronicamente;

- un insieme di regole di produzione e di trasformazione dei segni, per produrre o emettere segni sia atomici (singoli) sia molecolari (composti);
- un insieme di relazioni tra i segni e i loro significati incorporati in una struttura di significati sottostanti.

Un sistema semiotico è quindi costituito da un insieme di segni, da un insieme di regole di produzione e di trasformazione, e da una struttura di significati sottostanti.

Per Radford (2006a, 2006d, 2010) la principale caratteristica di un sistema semiotico, ciò che lo rende unico, è il suo “modo di significare”; per questo Radford utilizza, in varie occasioni, l’espressione *sistema semiotico di significazione*.

L’approccio semiotico-culturale integrato con la teoria dell’*Embodied Cognition* (*cognizione incorporata nel corpo*), che emerge dalla psicolinguistica e dalle neuroscienze, forma il cosiddetto spazio-APC (Arzarello, 2006): *spazio di Azione, Produzione e Comunicazione*, il cui strumento di analisi fondamentale è il *semiotic bundle*.²⁴ Il *semiotic bundle* è definito da Arzarello (2006) come una struttura dinamica costituita da una collezione di *insiemi semiotici* e da un insieme di relazioni tra questi insiemi semiotici. Per *insieme semiotico* si intende una collezione caratterizzata da:

- un insieme di segni (prodotti attraverso azioni differenti come il parlare, lo scrivere, il disegnare, il gesticolare, il gestire un artefatto);
- un insieme di modi di produzione e di trasformazione di questi segni (non solo regole o algoritmi, ma anche semplici azioni o modi di produzione utilizzati dal soggetto in questione);
- un insieme di relazioni tra questi segni e la loro struttura di significati sottostanti.

In particolare, i gesti sono segni che fanno parte di un insieme semiotico (nel senso di Arzarello), ma non sono inclusi in un sistema semiotico (nel senso di Ernest). I gesti possono essere considerati come segni in senso peirceano (perché per qualcuno possono stare “per qualcosa sotto qualche aspetto o capacità”); sono dotati di una struttura di significati sottostanti strettamente legata al contesto; ma la loro produzione non segue particolari regole o algoritmi.

²⁴ In base alla teoria dell’*Embodied Cognition* i processi mentali sono modellati dal corpo e dalle esperienze percettive e motorie prodotte dalle interazioni del corpo con l’ambiente circostante. In altri termini, la cognizione è modellata dall’interazione sensorio-motoria del corpo con l’ambiente, senza alcuna separazione netta tra cognizione, esperienza corporea, e contesti di vita reale. In particolare, il corpo è visto come un vincolo alla cognizione, un distributore di processi cognitivi, e un regolatore dell’attività cognitiva. (Per approfondire si veda per esempio: Anderson, 2003; Lakoff & Johnson 1999).

Il *semiotic bundle* è comunque da intendere non come una giustapposizione di insiemi semiotici, ma come un sistema unitario, le cui componenti permettono di rendere più articolata e profonda l'analisi di un fenomeno. Per esempio il linguaggio esterno accompagnato da gesti può essere considerato come un *bundle* formato da due insiemi semiotici, uno dei quali (il linguaggio esterno) costituisce anche un sistema semiotico. Il linguaggio interno che si origina dal linguaggio esterno (Vygotskij, 1934/1990) può essere visto come un insieme semiotico che deriva da un sistema semiotico (il linguaggio esterno). Il *semiotic bundle*, dunque, amplia la definizione di Ernest (2006) di sistema semiotico, permettendo l'analisi di fenomeni che includono segni privi di regole organizzatrici che determinino i loro usi.

Godino, Font, Wilhelmi, e Lurduy (2009) affermano che una definizione troppo vaga di “sistema semiotico” – come quella di insieme di segni, di regole di produzione di tali segni e di una struttura di significati sottostanti – non può essere di alcun aiuto nella descrizione e spiegazione dei fenomeni di insegnamento-apprendimento; occorre una definizione operativa. Gli autori cercano di rendere operativa la definizione mediante le nozioni di “sistema di pratiche operative e discorsive” e di “configurazione onto-semiotica”, insieme alla nozione di “funzione semiotica” (par. 2.2.9). In particolare, definiscono un “sistema semiotico” come:

il sistema formato dalla configurazione degli oggetti che intervengono e che emergono in un sistema di pratiche, insieme ai processi di significazione che si stabiliscono tra loro (cioè, includendo la rete di funzioni semiotiche che mettono in relazione gli oggetti che costituiscono la configurazione). Poiché i sistemi di pratiche sono relativi alle persone che li realizzano e alle istituzioni (comunità, culture...) che li condividono, i sistemi semiotici associati dipenderanno sia dalle persone sia dalle istituzioni. Analogamente, poiché le pratiche sono legate alla soluzione di tipi di situazioni-problemi, che possono avere un carattere particolare, locale o globale, i sistemi semiotici presenteranno anch'essi questi livelli di generalità. (Godino, Font, Wilhelmi, & Lurduy, 2009, p. 10)

Gli autori evidenziano che le componenti del sistema semiotico di Ernest (2006) sono solo alcuni degli elementi da loro considerati nella configurazione di oggetti e processi attivati ed emergenti nelle pratiche matematiche. In particolare, l'insieme di segni è la

componente “linguaggio” considerato nella sua natura ostensiva. L’insieme di regole di produzione di segni sono gli altri oggetti primari (situazioni, concetti, proposizioni, procedure e argomenti). Le relazioni tra i segni e i loro significati, incorporati in una struttura di significati sottostanti, sono incluse nel sistema di oggetti e di processi della configurazione, considerati come dualità espressione-contenuto.

2.3.2 *Analisi funzionale e analisi strutturale*

Nell’approccio semio-cognitivo di Duval la diversità delle rappresentazioni possibili di un medesimo oggetto in diversi sistemi deriva dalla varietà dei sistemi, semiotici o non-semiotici, che permettono di produrre le rappresentazioni. I modi fenomenologici (interno/esterno; mentale/orale/visuale, includendo nel visuale il digitale) di produzione delle rappresentazioni interessano in particolare l’*analisi funzionale*; l’*analisi strutturale* della produzione di rappresentazioni si focalizza invece sui sistemi o registri mobilitati nella produzione e sui contenuti delle rappresentazioni prodotte (Duval, 2011).

La tabella seguente (Tabella 2.1) riporta le variazioni strutturali e funzionali dei sistemi produttori di rappresentazioni (semiotiche e non-semiotiche), a seconda della modalità fenomenologica (interna/esterna, mentale/orale/visuale) con la quale le rappresentazioni si presentano; tali variazioni sono evidenziate in Duval (2006a, 2011).

Tabella 2.1

Natura dei sistemi produttori di rappresentazioni e modi fenomenologici di produzione

SISTEMI DI PRODUZIONE DI RAPPRESENTAZIONI					
SISTEMI SEMIOTICI (registri)			SISTEMI NON SEMIOTICI (reti neurali, recettori sensoriali, fenomeni fisici)		
Produzione intenzionale: <i>relazione di riferimento</i>			Produzione automatica: <i>relazione di causalità</i>		
Interna	Esterna/materiale		Interna	Esterna/materiale	
Mentale	Orale	Visuale	Mentale	Visuale	
Verbalizzazione non vocalizzata	Verbalizzazione vocalizzata spontanea	Scrittura, disegno, anche su computer	Immagine mentale (ricordo)	Immagine virtuale (foto)	
<i>Funzioni di oggettivazione (per sé) e di trattamento ristretto</i>	<i>Funzione di comunicazione o di oggettivazione</i>		<i>Funzione di oggettivazione</i>	<i>Funzioni di materiali o di dati registrati</i>	
		<i>Funzioni di trattamento, di oggettivazione, di comunicazione, o di simulazione</i>			

Si noti che tra le rappresentazioni semiotiche interne e quelle esterne/materiali del medesimo registro vi sono solo differenze funzionali, non strutturali. Per esempio, la risoluzione mentale di un'equazione non è di natura differente dalla risoluzione scritta, non vi sono differenze strutturali tra le due modalità di risoluzione: entrambi i processi sono di natura semiotica e possono aver luogo nei medesimi registri, seppur con strategie differenti. Tuttavia, la risoluzione scritta risulta spesso più efficace, cioè meno dispendiosa (in termini di memoria e di tempo) rispetto alla risoluzione mentale, soprattutto se si ricorre a qualche dispositivo elettronico (calcolatrice, computer etc.). Se poi l'equazione è complessa, ci sono appositi software che fanno cose che fare a mano costituirebbe un processo lungo, dispendioso e che potrebbe comportare errori.

Tra la produzione mentale e quella scritta c'è però, in generale, una differenza funzionale fondamentale, che riguarda non solo la funzione di comunicazione (che nella prima manca del tutto), ma anche la funzione di trattamento. In molti casi, come si è detto, la modalità mentale non offre le stesse possibilità di trattamento della modalità scritta; si pensi alla risoluzione di sistemi di equazioni, allo studio di funzioni, al calcolo di integrali, alla dimostrazione di teoremi etc.

La mobilitazione di un registro dipende non solo dalle possibilità di contenuto e di trattamento che il registro offre, ma anche dalla rapidità o dal maggiore potere di trattamento che la modalità fenomenologica di produzione in quel registro permette. “Il potere di trattamento di una modalità fenomenologica è la quantità di unità di rappresentazioni che possono essere mantenute contemporaneamente a disposizione tanto quanto si desidera” (Duval, 2011, p. 135).

La produzione scritta permette un ampliamento e un potenziamento delle attività di trattamento sulle rappresentazioni che le produzioni orali e mentali, da sole, spesso non permettono. In particolare, la produzione orale, intesa come verbalizzazione vocalizzata spontanea, ha principalmente una funzione di comunicazione. Tuttavia, in alcuni casi, può avere soltanto una funzione di oggettivazione: si produce qualcosa oralmente soltanto per prendere coscienza di ciò di cui prima non si era coscienti, senza alcuna intenzione comunicativa.

La funzione di oggettivazione, comune a tutte le rappresentazioni semiotiche, consiste appunto in una presa di coscienza di ciò, di un oggetto, di cui non si era coscienti prima di produrre (per sé stessi) una rappresentazione (Duval, 1995). La produzione di rappresentazioni semiotiche è infatti indipendente dagli oggetti che le rappresentazioni possono evocare; non vi è alcuna relazione di causalità tra le rappresentazioni semiotiche e gli oggetti a cui le rappresentazioni rinviano, dunque la presa di coscienza di ciò a cui esse rinviano non è automatica e tutt'altro che banale. L'oggettivazione è come un lampo di intuizione, è per sé stessi; è necessaria ma non sufficiente per la costruzione cognitiva degli oggetti matematici. Può riguardare non solo il modo di riconoscere gli oggetti, ma anche il modo di riconoscere il tipo di trattamento da effettuare nel registro più opportuno. Dunque, anche la conversione e il trattamento di rappresentazioni sono strettamente legati alla funzione di oggettivazione: essi permettono di prendere coscienza delle diverse relazioni tra le rappresentazioni semiotiche di un medesimo oggetto nel medesimo registro o in registri differenti.

Tuttavia, come afferma Duval (1995), l'oggettivazione si accompagna spesso a una produzione di rappresentazioni semiotiche che può apparire insufficiente, inaccettabile o incomprensibile dal punto di vista della funzione di comunicazione (cosa ben nota agli insegnanti). D'altra parte, la produzione di rappresentazioni semiotiche può essere soddisfacente dal punto di vista della comunicazione, ma non corrispondere ad alcuna oggettivazione da parte del soggetto che la produce (altra cosa ben nota agli insegnanti). In altre parole, la funzione di oggettivazione è indipendente da quella di comunicazione.

La parola “oggettivazione”, da “oggettivare”, deriva dal latino *obiectum* (“ciò che è posto davanti”) e *facere* (“fare”); dunque etimologicamente significa “porre qualcosa davanti a qualcuno per renderlo apparente, ovvero presente ai sensi”.

Il senso attribuito da Duval (1995) alla parola “oggettivazione” è tuttavia completamente differente da quello attribuito da Radford (2002a, 2006d, 2013a, 2014) (si veda anche il paragrafo 2.2.8). In Duval l’oggettivazione è una presa di coscienza, un diventare consapevoli di qualcosa per sé stessi, soltanto per sé stessi (non per la comunicazione). Non si identifica con la conoscenza, ma è una condizione necessaria (non sufficiente) per la conoscenza, in linea con il pensiero di Lev Semënovič Vygotskij (1896 – 1934), e in opposizione al pensiero di Piaget.²⁵

Nella teoria di Radford, invece, la parola “oggettivazione” è utilizzata per indicare un processo sociale, quello di progressiva presa di coscienza critica di forme codificate di pensiero e di azione, storicamente e culturalmente costituite, mediante artefatti, linguaggi, gesti, e più in generale segni, ovvero “mezzi semiotici di oggettivazione” (Radford, 2003a) che incorporano e permettono di comunicare, condividere, sviluppare, far evolvere sistemi di idee, significati culturali, forme di azione e di pensiero. In tale teoria, il “sapere” (*knowing*) è inscindibile dal “divenire” (*becoming*), ovvero dalla trasformazione continua del soggetto. È definito come una “presa di coscienza nel corso di un processo sociale, emozionale e sensibile; è un processo mediato dalla cultura materiale (segni, artefatti, linguaggio etc.), dai sensi e dal corpo (attraverso gesti, azioni cinestetiche etc.)” (Radford, 2014, p. 142). L’oggettivazione si identifica dunque con l’apprendimento, ovvero con “la trasformazione soggettiva e idiosincratica della conoscenza ‘in sé’ in una conoscenza ‘per sé’, cioè, la trasformazione di conoscenza oggettiva culturale in un oggetto di coscienza” (Radford, 2013a, p. 25). In altre parole: “l’oggettivazione è il momento dell’attività in cui il generale, mediato dal particolare, si mette in evidenza attraverso il singolare nella coscienza degli studenti” (Radford, 2013a, p. 33). In Duval, invece, come si è detto, l’oggettivazione non si identifica con l’apprendimento e non ha alcun legame con la funzione di comunicazione.

²⁵ In Piaget (1923, 1924) il “diventare consapevole” si identifica in qualche modo con la “conoscenza”, soprattutto in riferimento alla conoscenza consapevole che il soggetto ha del suo funzionamento cognitivo e dell’oggetto di conoscenza. In Vygotskij (1934/1990), che critica il contenuto dei lavori di Piaget (1923, 1924), il “diventare consapevole” non equivale a “conoscere”, ma è la condizione di sviluppo psicologico necessaria per l’acquisizione di qualche specifica conoscenza (R. Duval, comunicazione personale, 28 giugno, 2013).

2.3.3 *Classificazione dei registri di rappresentazione*

I *registri di rappresentazione*, così come li caratterizza Duval (1996), sono sistemi semiotici che soddisfano funzioni di:

- comunicazione
- *oggettivazione* (per sé stessi, non per la comunicazione) e
- *trattamento* (trasformazione di una rappresentazione in un'altra rappresentazione all'interno dello stesso sistema semiotico, in funzione delle possibilità specifiche di trasformazione che il sistema semiotico permette di effettuare, per ottenere nuove informazioni).

Duval (2006a, 2006b, 2011) distingue in particolare quattro tipi di registri di rappresentazione:

- *discorsivi*
 - *multifunzionali*
[lingua naturale (scritta o orale): per la designazione di oggetti, il ragionamento o l'enunciazione];
 - *monofunzionali*
(scritture simboliche: sistemi di numerazione, scrittura algebrica, linguaggi formali);
- *non discorsivi*
 - *multifunzionali*
[di tipo *iconico*: disegni che conservano le “relazioni di vicinanza” tra le parti dell'oggetto; di tipo *non-iconico*: configurazioni geometriche (costruzione, divisione e riconfigurazione, decostruzione dimensionale di forme)];
 - *monofunzionali*
(configurazioni 2D di forme 1D o 0D secondo regole, grafici cartesiani).

Nei registri monofunzionali i trattamenti possono assumere la forma di algoritmo, mentre nei registri multifunzionali i trattamenti non possono essere convertiti in algoritmi. La conversione di rappresentazioni semiotiche da un registro all'altro può richiedere il ricorso a *rappresentazioni ausiliarie di transizione*, ovvero a rappresentazioni che mescolano le caratteristiche proprie di due o più registri per facilitare il passaggio da un registro all'altro. Per esempio, nella risoluzione di alcuni problemi, i diagrammi bidimensionali (come quelli ad albero), o gli schemi di risoluzione, proposti a volte per

facilitare la conversione di rappresentazioni semiotiche da un registro discorsivo multifunzionale (registro della lingua naturale) a un registro discorsivo monofunzionale (registro delle scritture simboliche), sono rappresentazioni ausiliarie di transizione, in particolare diagrammi *non-matematici*.²⁶

Anche i trattamenti di rappresentazioni in un dato registro, soprattutto quando vengono introdotti per la prima volta, possono essere accompagnati da rappresentazioni ausiliarie di transizione (diagrammi non-matematici) per facilitare la trasformazione di rappresentazioni all'interno del medesimo registro (Iori, 2014a).

2.3.4 *Apprendimento e mobilitazione di registri di rappresentazione*

In modo analogo ai segni, una rappresentazione (semiotica o non-semiotica) è sempre prodotta secondo un sistema produttore (semiotico o fisico) e non è concepibile al di fuori di esso. Per esempio, l'immagine della persona che stiamo osservando è prodotta dal nostro apparato visivo; una foto di quella persona è prodotta da un dispositivo fotografico; un testo in inglese su quella persona è prodotto nella lingua inglese, per l'appunto, e così via.

Quando si parla di rappresentazione si specifica sempre (esplicitamente o implicitamente) il tipo di sistema che la produce:

$$\begin{aligned} \text{Rappresentazione} &= [\text{contenuto della rappresentazione, sistema produttore}] = \\ &= [\text{content}_R, S_p]. \end{aligned}$$

²⁶ La definizione di diagramma in Duval (2014a) è completamente differente da quella di Peirce (par. 2.2.4.3). Duval (2014a) distingue due tipi di diagrammi: diagrammi matematici e diagrammi non matematici. I *diagrammi matematici* sono rappresentazioni non iconiche (grafici, figure geometriche, scritture simboliche etc.) specificamente correlate a qualche concetto, algoritmo o proprietà matematica; dipendono interamente da conoscenze matematiche e sono costruiti per esigenze di trattamento matematico. I *diagrammi non-matematici* (rappresentazioni semiotiche di tipo iconico di oggetti concreti, movimenti, azioni, risultati di azioni etc., mediante disegni, frecce, schemi bidimensionali etc.) costituiscono invece rappresentazioni semiotiche libere, individuali e transitorie, di tipo iconico, non soggette a particolari vincoli di natura matematica. I diagrammi matematici e quelli non-matematici costituiscono due differenti *strumenti di visualizzazione* nell'insegnamento-apprendimento della matematica. Da un punto di vista cognitivo, non sono da confondere con la *visualizzazione*, ovvero con il riconoscimento di ciò che è matematicamente rilevante (unità figurali, configurazioni geometriche, proprietà, operazioni etc.) in una data rappresentazione semiotica prodotta a scopo di trattamento matematico, o di esplorazione euristica nella risoluzione di problemi, oppure per facilitare la costruzione cognitiva di oggetti o concetti matematici. La visualizzazione di una proprietà o di una procedura matematica richiede in ogni caso la produzione o l'uso di differenti diagrammi, ovvero la coordinazione di differenti rappresentazioni semiotiche, sia in registri discorsivi sia in registri non discorsivi.

In particolare, le rappresentazioni semiotiche sono sempre prodotte da un registro di rappresentazione. Ma per produrre una rappresentazione di un oggetto matematico possiamo mobilitare diversi registri.

Per esempio, per rappresentare un numero razionale possiamo utilizzare vari registri: il registro della scrittura frazionaria, il registro della scrittura decimale, il registro della scrittura algebrica, il registro delle configurazioni geometriche, il registro della lingua naturale etc.

In geometria possiamo utilizzare il registro della lingua naturale (per le definizioni, i teoremi etc.) oltre al registro delle configurazioni geometriche; in geometria analitica, il registro della scrittura algebrica e il registro grafico, oltre al registro della lingua naturale.

In analisi, quando parliamo di limiti o di integrali, mobilitiamo il registro grafico, il registro simbolico (linguaggio formale) e il registro della lingua naturale. E così via. In ogni caso, come si è detto sopra (par. 2.3.2): “La mobilitazione di un registro dipende dalle possibilità di contenuto e di trattamento che esso offre. Essa dipende anche dalla rapidità o dal maggiore potere di trattamento che ciascuna modalità fenomenologica permette” (Duval, 2011, p. 135).

Non abbiamo rappresentazioni (semiotiche) senza sistemi (registri), ma ciò che è interessante in matematica è effettuare delle variazioni di contenuto in un certo registro dato o scelto in modo da ottenere delle variazioni di contenuto, mantenendo lo stesso oggetto, in un altro registro. Di questo ci occuperemo nel prossimo paragrafo.

2.4 Dimensione semio-cognitiva dell'apprendimento della matematica

L'attività matematica è inseparabile dalla produzione o scelta di rappresentazioni semiotiche e dalla loro mobilitazione (implicita o esplicita) nelle trasformazioni di trattamento (trasformazione di una rappresentazione semiotica in un'altra dello stesso registro, del medesimo oggetto) e di conversione (trasformazione di una rappresentazione semiotica in un'altra di un altro registro, del medesimo oggetto). I trattamenti, come si è detto (par. 2.3.3), dipendono dalle possibilità interne di trasformazione offerte dal registro. Tuttavia, in ogni caso, sia nei trattamenti sia nelle conversioni, a giocare un ruolo decisivo, rilevante e strategico, è la *distanza cognitiva* tra i contenuti delle differenti

rappresentazioni semiotiche di un medesimo oggetto (per esempio tra l'equazione di una curva, una definizione della curva e una sua rappresentazione grafica). La cosa appare già così in Descartes.

In matematica la comprensione comincia con il riconoscimento della corrispondenza tra rappresentazioni differenti di un medesimo oggetto in registri differenti (Duval, 1995). Come evidenza Duval (2011): “*comprendere non è decodificare una sequenza di parole o di frasi, ma discriminare le unità di senso [unità di contenuto] in funzione dei differenti livelli di organizzazione dei discorsi ed eventualmente riformularli*” (p. 75, corsivo dell'autore).

In altre parole, siamo in grado di non confondere un oggetto matematico con una qualsiasi delle sue possibili rappresentazioni semiotiche (esigenza epistemologica fondamentale) quando siamo in grado di riconoscere lo stesso oggetto in almeno due registri, vale a dire quando siamo in grado di convertire una rappresentazione da un registro a un altro (Duval, 1995). Da non escludere comunque la capacità di riconoscere lo stesso oggetto in due rappresentazioni differenti di un medesimo registro, per nulla banale e tantomeno spontanea (D'Amore, 2006a, 2006b, 2006c, 2006d, 2007a, 2007b).

In realtà, però, i trattamenti, seppur locali in ciascun registro, sono effettuati mobilitando e coordinando diversi registri contemporaneamente, in modo sinergico. Non sarebbe altrimenti possibile né scegliere un registro per i trattamenti, né controllare i trattamenti effettuati nel registro scelto. In altre parole, “*in matematica, non pensiamo mai in un unico registro, ma in vari allo stesso tempo, anche se le produzioni privilegiano un unico registro*” (Duval, 2011, p. 116).

Utilizzando in parte le notazioni in D'Amore (2001b):

r^m = registro semiotico m-esimo ($m = 1, 2, 3, \dots$)

R^m_i = rappresentazione semiotica i-esima ($i = 1, 2, 3, \dots$) di un oggetto (matematico) O (non necessariamente unico) nel registro semiotico r^m

content^m_i = contenuto della rappresentazione R^m_i

il passaggio da $R^m_i = [\text{content}^m_i, r^m]$ a $R^n_h = [\text{content}^n_h, r^n]$ ($n, h = 1, 2, 3, \dots$; eventualmente con $m = n$, ma con $\text{content}^m_i \neq \text{content}^n_h$ sintatticamente o semanticamente) risulta cognitivamente rilevante se si è in grado di riconoscere lo stesso oggetto O in $[\text{content}^m_i, r^m]$ e in $[\text{content}^n_h, r^n]$, ovvero se si è in grado di coordinare i registri r^m e r^n , nelle trasformazioni di trattamento e di conversione. La difficoltà in tale riconoscimento nasce dal fatto che il contenuto della rappresentazione di partenza non ha

nulla (semanticamente o sintatticamente) in comune con il contenuto della rappresentazione di arrivo. Le due rappresentazioni possono dunque essere associate “ingenuamente” (cioè dal punto di vista del realismo ingenuo, descritto nel paragrafo 2.2.1) a due oggetti matematici completamente differenti.

Spesso, quando risulta chiaro dal contesto, il registro semiotico che produce una rappresentazione non viene esplicitato. Occorre però tener presente che una rappresentazione semiotica funziona come tale solo all’interno del registro che la produce, non ha senso al di fuori di esso. In altre parole, non si può identificare o confondere con il suo contenuto. Anche perché ci sono rappresentazioni differenti di un medesimo oggetto che hanno lo stesso contenuto (per esempio: “1” nel sistema decimale e “1” nel sistema binario).

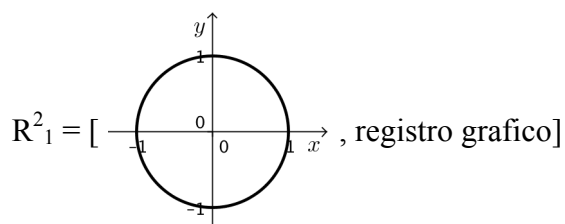
Il passaggio da una rappresentazione a un’altra risulta spontaneo quando le rappresentazioni sono tra loro *congruenti*, vale a dire quando sono soddisfatte le tre condizioni seguenti (Duval, 1995):

1. corrispondenza semantica tra le unità di contenuto (unità significanti) delle due rappresentazioni;
2. univocità semantica terminale: a ciascuna unità di contenuto elementare della rappresentazione di partenza corrisponde una sola unità di contenuto elementare della rappresentazione di arrivo;
3. stesso ordine nella disposizione delle unità in corrispondenza semantica delle due rappresentazioni, o stesso ordine possibile di comprensione di tali unità.

Tali condizioni costituiscono per Duval (1995) tre criteri per stabilire il grado di congruenza tra due rappresentazioni. Se nessuno dei tre criteri è soddisfatto, le rappresentazioni non sono tra loro congruenti. Altrimenti, il grado di congruenza può variare, cioè essere più o meno elevato, a seconda dei criteri soddisfatti.

Il grado di congruenza o di non congruenza tra due rappresentazioni di un medesimo oggetto dipende anche dal verso in cui si effettua la trasformazione dell’una nell’altra. Due rappresentazioni possono risultare congruenti quando la trasformazione dell’una nell’altra avviene in un verso, e non congruenti quando la trasformazione avviene nel verso opposto. Per esempio, consideriamo le seguenti rappresentazioni semiotiche:

$R^1_1 = [L'insieme dei punti del piano appartenenti alla circonferenza di centro l'origine e raggio 1, \text{registro della lingua naturale}]$.



$R^3_1 = [x^2 + y^2 = 1, \text{registro della scrittura algebrica}]$

I tre criteri sopra riportati sono soddisfatti sia dalla coppia di rappresentazioni (R^1_1, R^2_1), sia dalla coppia inversa (R^2_1, R^1_1).²⁷ In altre parole, R^1_1 e R^2_1 risultano tra loro congruenti in entrambi i versi della trasformazione dell'una nell'altra. I tre criteri non sono invece soddisfatti né dalla coppia (R^1_1, R^3_1), né dalla coppia inversa, in quanto non vi è una corrispondenza diretta e immediata tra le unità di contenuto di R^1_1 e di R^3_1 , o viceversa. Le rappresentazioni R^2_1 e R^3_1 soddisfano in parte il criterio 1 (per la presenza in entrambe delle unità di contenuto: $x, y, 1$) ma non i criteri 2 e 3. Pertanto, mentre vi è congruenza tra R^1_1 e R^2_1 , lo stesso non si può dire per R^2_1 e R^3_1 , né tantomeno per R^1_1 e R^3_1 .

Duval (2011) evidenzia che “la difficoltà di conversione riflette la distanza cognitiva che separa le rappresentazioni di uno stesso oggetto in due registri differenti” (p. 122). Ora, grazie alle ricerche citate in precedenza, alla difficoltà di conversione possiamo aggiungere la difficoltà di trattamento, e osservare che entrambe dipendono dal grado di congruenza o di non congruenza tra la rappresentazione di partenza e quella di arrivo.

Tali difficoltà si presentano non solo nelle situazioni di monorappresentazione, ma anche nelle situazioni di *multirappresentazione* ovvero di rappresentazione in parallelo di enunciati, schemi, tabelle, disegni, grafici, figure etc. (Duval, 2011). Perché, in matematica, se le rappresentazioni non sono tra loro congruenti, la loro giustapposizione non permette il riconoscimento immediato o spontaneo di corrispondenze tra le unità di contenuto matematicamente pertinenti delle rappresentazioni giustapposte, e dunque un loro possibile legame con altre rappresentazioni (dello stesso tipo o di tipo differente) del medesimo oggetto. In altre parole, è ingenuo pensare che la semplice giustapposizione di

²⁷ Il primo componente di ogni coppia di rappresentazioni costituisce la rappresentazione di partenza, mentre il secondo componente la rappresentazione di arrivo nella trasformazione di rappresentazioni.

rappresentazioni differenti di un medesimo oggetto sia sufficiente perché un soggetto riconosca in esse un medesimo oggetto. Da qui la complessità semiotica e cognitiva implicata nelle attività matematiche, e più in particolare nella risoluzione di problemi (Iori, 2014b).

2.5 Attività matematiche e processi di comprensione sottostanti

Le rappresentazioni semiotiche che l'insegnante utilizza sono davvero tante, e il loro numero aumenta vertiginosamente di anno in anno, da una classe a quella successiva, creando non poche difficoltà, problemi ed enorme confusione nello studente interessato o impegnato a:

- dare un senso ai segni o alle rappresentazioni che sono per lui, in un primo momento, tracce di gesso sulla lavagna o macchie d'inchiostro sul foglio di carta..., cioè *cose* nel senso aristotelico della parola (par. 2.2.1);
- scrivere in modo corretto, adeguato, o quello atteso dall'insegnante, i contenuti (*representamen*) delle rappresentazioni utilizzate dall'insegnante per riferirsi a certi oggetti (o concetti) matematici;
- riconoscere, e stabilire corrispondenze tra le unità di contenuto matematicamente pertinenti delle rappresentazioni coinvolte nelle attività matematiche;
- scegliere o riconoscere le rappresentazioni più adeguate per risolvere un dato problema o esercizio;
- trasformare quelle rappresentazioni in altre rappresentazioni dello stesso oggetto all'interno dello stesso registro (cioè effettuare trattamenti);
- trasformare le rappresentazioni di un oggetto in altre rappresentazioni dello stesso oggetto in un altro registro (cioè effettuare conversioni).

A tale scopo lo studente deve essere in grado di:

- riconoscere lo stesso oggetto matematico in rappresentazioni referenzialmente equivalenti di uno stesso registro;
- riconoscere lo stesso oggetto matematico in rappresentazioni referenzialmente equivalenti di almeno due registri differenti;

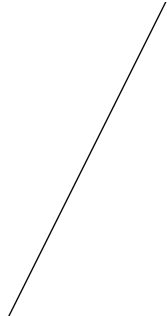
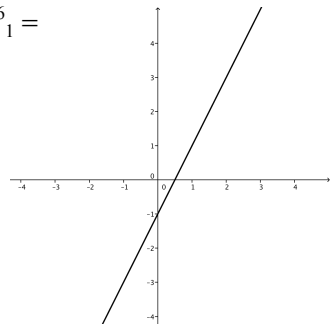
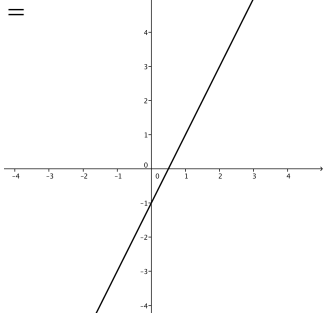
- riconoscere oggetti matematici differenti in rappresentazioni con contenuti (*representamen*) simili (per qualche aspetto) dello stesso registro;
- riconoscere oggetti matematici differenti in rappresentazioni simili (per qualche aspetto) di due registri differenti.

Queste sono le condizioni semio-cognitive richieste per lo svolgimento di una qualsiasi attività matematica, in particolare la risoluzione di un problema e la sua comprensione. Si tratta, in altre parole, della coordinazione cognitiva dei registri semiotici implicati nell'attività matematica. Il riconoscimento di oggetti matematici differenti in due rappresentazioni con contenuti simili o il riconoscimento del medesimo oggetto matematico in due rappresentazioni differenti richiede una coordinazione sinergica di differenti registri semiotici, ovvero il riconoscimento di una corrispondenza o non corrispondenza semantica tra le unità di contenuto matematicamente pertinenti delle due rappresentazioni, indipendentemente dalla loro eventuale congruenza o non congruenza. La distanza cognitiva che separa le rappresentazioni di un medesimo oggetto nello stesso registro oppure in due registri differenti, ovvero il loro grado di congruenza o di non congruenza, riflette le difficoltà di trattamento e di conversione delle rappresentazioni.

In Tabella 2.2 sono riportati alcuni esempi di rappresentazioni semiotiche con contenuti differenti o simili per qualche aspetto, dunque con diversi gradi di congruenza o di non congruenza, nello stesso registro o in registri differenti, di uno stesso oggetto matematico o di oggetti matematici differenti.

Tabella 2.2

Rappresentazioni semiotiche con contenuti differenti o simili (per qualche aspetto) di oggetti matematici

	... dello stesso oggetto	... di oggetti differenti
nello stesso registro...	$R^1_1 = \frac{3}{4}$ e $R^1_2 = \frac{6}{8}$ nel registro r^1 della scrittura frazionaria	$R^2_1 = 0,6$ e $R^2_1 = 0,\overline{6}$ nel registro r^2 della scrittura decimale
	$R^3_1 = 2^0$ e $R^3_2 = 1^0$ nel registro r^3 della scrittura aritmetica	$R^4_1 = a^n$ ($n > 0$) e $R^4_2 = a^0$ ($a \neq 0$) nel registro r^4 della scrittura algebrica
	$R^4_3 = (x-1)^2 + (y+1)^2 = 4$ e $R^4_4 = x^2 + y^2 - 2x + 2y - 2 = 0$ nel registro r^4 della scrittura algebrica	$R^4_4 = x^2 + y^2 - 2x + 2y - 2 = 0$ e $R^4_5 = x^2 - y^2 - 2x + 2y - 2 = 0$ nel registro r^4 della scrittura algebrica
in due registri differenti...	$R^5_1 =$  nel registro r^5 delle configurazioni geometriche $R^6_1 =$  nel registro r^6 grafico	$R^6_1 =$  nel registro r^6 grafico $R^7_1 =$ "Equazione della retta passante per A(0; -1) e B(0,5; 0)" nel registro r^7 della lingua naturale misto con quello della scrittura simbolica

In particolare, le rappresentazioni $R^4_1 = a^n$ ($n > 0$) e $R^4_2 = a^0$ ($a \neq 0$) hanno contenuti simili a, quindi un elevato grado di congruenza con, un'altra rappresentazione al centro

dell'episodio descritto nel paragrafo 1.1. Per comodità lo richiamiamo brevemente qui di seguito.

Contesto: Esame di Stato di liceo scientifico. Sessione ordinaria 2009. Seconda prova scritta. Corso sperimentale, indirizzo PNI.²⁸

Quesito 5. Si considerino le seguenti espressioni:

$$\frac{0}{1}; \frac{0}{0}; \frac{1}{0}; 0^0$$

A quali di esse è possibile attribuire un valore numerico? Si motivi la risposta.

Risposta scritta (relativa alla quarta espressione): “ 0^0 è una forma indeterminata. Infatti può essere uguale a 0 oppure a 1”.

Spiegazione fornita in sede di colloquio: “Zero alla zero, nella maggior parte dei casi, è uguale a zero, ma qualche volta può essere uguale a uno... Ci hanno sempre detto che *un qualunque numero elevato alla zero dà uno!*”.

La risposta mette anzitutto in evidenza come l'espressione “forma indeterminata” sia in qualche modo confusa con, o considerata equivalente a, “qualcosa di cui non si conosce con precisione il valore”, nonostante il contesto (campo di studio “calcolo infinitesimale”) sia del tutto differente. Come mai?

Il contenuto della rappresentazione $R^8_1 = 0^0$ (nel registro r^8 della scrittura simbolica) ha componenti iconiche di tipo qualitativo (legate soprattutto alla sua forma) simili sia a quelle della rappresentazione $R^4_1 = a^n$ sia a quelle della rappresentazione $R^4_2 = a^0$, se si trascurano i contesti e i vincoli d'uso delle tre rappresentazioni dunque le loro componenti iconico-strutturali (legate a proprietà) e simboliche (legate a notazioni, definizioni, vincoli d'uso). Da qui il conflitto semiotico che emerge dalla risposta dello studente.

Dal punto di vista semio-cognitivo, si può parlare in questo caso o di una errata conversione di a^n dal registro della scrittura algebrica al registro della scrittura aritmetica (sostituzione di “ a ” con il numero “0” e di “ n ” con il numero “0”), o di un'errata conversione di 0^0 dal registro della scrittura simbolica al registro della scrittura aritmetica.

²⁸ L'indirizzo PNI (Piano Nazionale di Informatica) era una sezione sperimentale, attiva dall'anno scolastico 1991-92 all'anno scolastico 2010-2011 in alcune scuole secondarie di secondo grado italiane, che aveva lo scopo di migliorare la preparazione scientifica degli allievi, soprattutto in matematica, fisica e informatica.

Infatti, il segno 0^0 non esiste come rappresentazione semiotica nel registro della scrittura aritmetica. È stato aggiunto automaticamente dallo studente soltanto per pura somiglianza (iconico-qualitativa) con la forma del segno a^n , o del segno a^0 , utilizzato per rappresentare la potenza che ha per base il “numero” a e per esponente il “numero” n (con sensi differenti a seconda dei contesti d’uso), ovvero per pura somiglianza con il segno a^n , o con il segno a^0 , indipendentemente dal suo contesto d’uso. Dalla risposta dello studente emerge dunque una confusione o identificazione tra la componente iconico-qualitativa del contenuto di una rappresentazione (R^8_1) di un oggetto matematico e le componenti iconico-qualitative, strutturali e simboliche dei contenuti di rappresentazioni (R^4_1 e R^4_2) di altri oggetti matematici.

Dal punto di vista semiotico-interpretativo, 0^0 è un simbolo in senso peirceano, cioè un *representamen* il cui rapporto con l’oggetto matematico (del calcolo infinitesimale) al quale fa riferimento è definito da una convenzione. Infatti 0^0 rappresenta, convenzionalmente, la situazione che si ha nel calcolo del limite di una funzione di tipo $[f(x)]^{g(x)}$ – essendo $f, g: D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ punto di accumulazione per D , $f(x) > 0$ per $x \in I \cap D \setminus \{x_0\}$ con I intorno di x_0 – quando: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$. Il $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)]^{g(x)}$ può esistere o non esistere; ma se esiste, finito o infinito che sia, è in ogni caso unico. Si parla quindi di “forma indeterminata” non perché non si sa determinare il suo valore, o perché il valore del limite può non essere unico, ma perché questo valore, se esiste, può essere diverso da caso a caso, a seconda delle funzioni (infinitesime) $f(x)$ e $g(x)$; cioè, la sola conoscenza dei limiti di $f(x)$ e di $g(x)$, entrambi uguali a zero, “non determina” il limite della potenza $[f(x)]^{g(x)}$. La competenza matematica del soggetto gioca comunque un ruolo rilevante. Nella scuola primaria, per esempio, la scrittura 0^0 si considera illegittima perché, nel caso la si ammettesse in qualche modo, celerebbe una incongruenza intrinseca.

D’altra parte, come ha evidenziato Peirce stesso, puri simboli, pure icone e puri indici, non esistono (par. 2.2.4.3).

0^0 ha componenti iconiche. La scelta del *representamen* 0^0 per il contenuto matematico sopra descritto è motivata dal fatto che esso racchiude in sé sia la

componente iconico-strutturale del segno che rappresenta la potenza $[f(x)]^{g(x)}$, sia la componente iconico-qualitativa del risultato (uguale a zero) del limite delle due funzioni (alla base e all'esponente della potenza), dunque racchiude in sé le componenti iconiche, di tipo sia strutturale sia qualitativo, della rappresentazione di una forma indeterminata.

0^0 ha anche una componente indicale. I due zeri (uno alla base e l'altro all'esponente) del *representamen* sono indici, in senso peirceano, dei risultati dei limiti delle due funzioni (alla base e all'esponente della potenza). In altre parole, i due zeri del *representamen* 0^0 non indicano dei numeri ma degli infinitesimi, quindi il *representamen* 0^0 non ha alcuna relazione con l'oggetto matematico "potenza" della lingua aritmetica.

La complessità semiotica e cognitiva delle componenti iconica, indicale e simbolica del segno qui considerato è dunque elevata e non direttamente o immediatamente percepibile dal suo *representamen*.

Uno stesso segno può dunque suggerire interpretazioni differenti a seconda degli aspetti (iconici, indicali o simbolici) che l'interprete, sulla base della propria "conoscenza collaterale", percepisce immediatamente come più importanti o significativi, e questo anche *indipendentemente* dai contesti d'uso. In particolare, una "conoscenza collaterale" non sufficiente per riconoscere i ruoli giocati dalle componenti delle rappresentazioni semiotiche nei loro contesti d'uso, i vincoli di esistenza e d'uso di tali componenti e i loro legami con le componenti di altri segni (simili o del tutto differenti, a seconda dei contesti), può suggerire o determinare una confusione tra (o identificazione di):

- aspetti completamente differenti di uno stesso contenuto (*representamen*), come
 - l'aspetto iconico-qualitativo con quello iconico-strutturale o simbolico (per esempio il disegno di un triangolo scaleno che nelle intenzioni dell'autore dovrebbe rinviare a un triangolo generico potrebbe rinviare soltanto a un triangolo scaleno se si confonde la componente iconico-qualitativa del contenuto della rappresentazione, cioè del disegno, con quella iconico-strutturale),
 - l'aspetto indicale con quello simbolico [per esempio la lunghezza dell'archetto della rappresentazione di un angolo e l'ampiezza dell'angolo possono essere tra loro confusi o identificati, come emerge dalla ricerca di Sbaragli e Santi (2012)];

- una componente di un contenuto (*representamen*) di una rappresentazione con un'altra componente di un altro contenuto (*representamen*), simile al primo sotto qualche aspetto, come nel caso 0⁰ qui sopra preso in esame.

Gli aspetti iconico-qualitativi e indicali di una rappresentazione sono quelli più “visibili”, e relativamente più “semplici” da riprodurre e da utilizzare. Si pensi, per esempio, alle relazioni tra le lunghezze dei lati e le funzioni goniometriche degli angoli di un triangolo (il “teorema dei seni” in trigonometria); tali relazioni vengono memorizzate velocemente da numerosi studenti attraverso le componenti indicali (lettere opportunamente scelte o usate convenzionalmente per indicare i vertici, i lati opposti a questi vertici e gli angoli aventi per vertici tali vertici) utilizzati dall’insegnante o dal libro di testo.

Gli aspetti simbolici, strettamente legati ai registri e ai contesti d’uso, hanno invece una complessità semiotica e cognitiva, nonché interpretativa, molto elevata, che lo studente, ma non solo, riesce difficilmente a superare, almeno al primo impatto, come nel caso 0⁰ sopra evidenziato.

Sáenz-Ludlow (2006b) evidenzia come la semiotica di Peirce aiuti a comprendere le produzioni matematiche di insegnanti e studenti, le relazioni tra le molteplici rappresentazioni di un oggetto matematico (evitando la confusione tra o l’identificazione dell’oggetto con una qualsiasi sua rappresentazione), la dipendenza delle notazioni matematiche dall’interpretazione, dal contesto culturale, dalle convenzioni, dalle diverse funzioni che un segno matematico può assumere, il processo di costruzione di relazioni simboliche a partire da quelle iconiche e indicali e, più in generale, il ruolo degli aspetti iconici, indicali e simbolici delle rappresentazioni nel processo di interpretazione di una rappresentazione di un oggetto matematico (sul ruolo degli aspetti iconici, indicali e simbolici dei segni si veda anche: Presmeg, 2008).

La maggior parte delle persone (anche non insegnanti) che vede uno studente in difficoltà nella risoluzione di un problema di matematica, anche dopo una rilettura, per così dire, “più attenta” dell’enunciato del problema, attribuisce le difficoltà dello studente alla mancanza di comprensione dei concetti matematici coinvolti (Dufour-Janvier, Bednarz, & Belanger, 1987). Suggerisce quindi allo studente di studiare di più, di chiedere all’insegnante le cose che non ha capito, di stare più attento durante le lezioni, di

svolgere altri problemi simili etc. Non sempre o raramente pensa alla natura delle rappresentazioni utilizzate o a quelle richieste per la risoluzione del problema.

Ci aspettiamo che il discente percepisca queste rappresentazioni convenzionali come strumenti matematici. Ci aspettiamo anche che sia in grado, in una situazione di problema matematico, di scartare una rappresentazione per selezionarne un'altra sapendo sempre perché fa tale scelta. La rappresentazione scartata non è impropria in sé ma semplicemente meno efficace nel contesto dato. Il discente dovrebbe anche essere in grado di passare da una rappresentazione a un'altra. Tutte queste aspettative suppongono che il discente abbia "afferrato" le rappresentazioni; che lui conosca le possibilità, i limiti, e l'efficacia di ciascuna. (Dufour-Janvier, Bednarz, & Belanger, 1987, p. 111)

"Troppo poche persone", affermano Dufour-Janvier, Bednarz, e Belanger (1987), "sembrano preoccuparsi di questa dimensione" (p. 116). In effetti è studiata e analizzata in profondità solo a partire dagli anni '80, per entrare con forza nella didattica della matematica a metà degli anni '90. Tra i primi studi, quelli di Raymond Duval (1993) hanno aperto sentieri prima inesplorati, sentieri ai quali, come si è detto, se ne sono affiancati altri, guidati da quadri teorici differenti, come per esempio quello onto-semiotico di Godino (2002) e quello semiotico-culturale di Radford (2003a).

In tutti i suoi lavori, Duval evidenzia che la natura dei fenomeni di comprensione e di mancata comprensione che emergono dalle produzioni degli studenti nelle attività matematiche è strettamente legata alla mancanza di un doppio accesso, multisensoriale (diretto o strumentale) e semiotico, agli oggetti matematici. L'unico accesso possibile è quello semiotico, attraverso rappresentazioni semiotiche e loro trasformazioni. I fenomeni di comprensione e di mancata comprensione si possono dunque ricondurre ai processi semiotici attraverso i quali l'attività matematica si manifesta e si sviluppa, ovvero al modello di funzionamento del pensiero, specifico dell'attività matematica, in termini di registri semiotici e loro coordinazione, rappresentazioni semiotiche e loro trasformazioni. In altre parole, in matematica la costruzione della conoscenza (*dimensione cognitiva*) è strettamente legata alla capacità di produrre o scegliere opportune rappresentazioni semiotiche, di trattare tali rappresentazioni all'interno di un dato registro e di convertire le rappresentazioni da un registro a un altro (*dimensione semiotica*) (D'Amore, 2001b;

D'Amore, Fandiño Pinilla, & Iori, 2013). Proprio per questo parliamo di dimensione *semio-cognitiva* (semiotica e cognitiva) implicata nell'attività matematica.

Sorge allora spontanea la domanda: Come interpretare, da un punto di vista semio-cognitivo, le difficoltà che incontra un soggetto nelle attività matematiche?

Le ricerche sulle difficoltà che incontrano, in particolare, gli studenti in matematica sono state, e sono tuttora, in gran parte condotte da vari punti di vista, come quello matematico, psicologico, cognitivo (da distinguere da quello semio-cognitivo), pedagogico, sociale.... Da un punto di vista matematico, in particolare, le produzioni degli studenti sono analizzate tenendo conto, in primo luogo, della loro distanza dalle produzioni matematiche attese, ovvero delle conoscenze matematiche implicate in una determinata situazione, presupponendo che il funzionamento cognitivo richiesto in matematica sia lo stesso di quello richiesto negli altri domini di conoscenza (Duval, 2013). Da un punto di vista psicologico, cognitivo (non semio-cognitivo), pedagogico, sociale, si analizzano invece, in primo luogo, i ruoli giocati da fattori affettivi, emotivi o emozionali, dalla motivazione e volizione, dall'intuizione, dai modelli mentali, dal contratto didattico, dal contesto classe inteso come società. (Su questi temi si veda per esempio: Aiken, 1970; Aiken & Dreger, 1961; D'Amore, 2005a; D'Amore, 2014; D'Amore, Fandiño Pinilla, Marazzani, & Sarrazy, 2010; D'Amore, Fandiño Pinilla, Marazzani, & Sbaragli, 2008; Di Martino, 2004; Fennema, 1989; Hatano, 1988; Hershkowitz, Bruckheimer, & Vinner, 1987; Sfard, 2009; Webb, 1979; Zan, 1998, 2007; ma la letteratura è vastissima).

Da un punto di vista semio-cognitivo, come si è detto, l'attività cognitiva risulta inscindibile da quella semiotica, dunque le difficoltà in matematica sono ricondotte in gran parte, non alla mancanza di comprensione dei concetti matematici coinvolti, non a fattori psicologici, cognitivi (in senso classico), pedagogici o sociali, ma alla complessità della gestione semiotica, e più in particolare al mancato riconoscimento di una corrispondenza fra le unità di contenuto matematicamente pertinenti delle rappresentazioni coinvolte nell'attività, per esempio fra le unità di contenuto matematicamente pertinenti dell'enunciato di un problema e le unità di contenuto matematicamente pertinenti di un'altra rappresentazione necessaria per la risoluzione del problema (Duval, 2011, 2013). Il passaggio da una rappresentazione a un'altra risulta spontaneo quando le rappresentazioni sono tra loro congruenti, ovvero quando vi è una corrispondenza semantica diretta e immediata tra le unità di contenuto delle due rappresentazioni (par. 2.4). In ogni caso, per poter riconoscere un medesimo oggetto in

due rappresentazioni differenti occorre saper mettere in corrispondenza determinate unità di contenuto di una delle due rappresentazioni con quelle dell'altra.

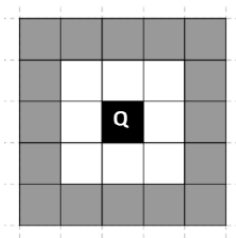
2.6 Complessità semio-cognitiva delle attività matematiche

Il modo di “vedere” o di studiare una situazione in matematica è completamente differente dal modo di “vedere” o di studiare un fenomeno nelle altre discipline scientifiche. In matematica ciò che si può “vedere” o studiare sono soltanto rappresentazioni semiotiche e loro trasformazioni (in funzione delle possibilità specifiche di trasformazione offerte dai registri considerati). In altre parole, l'attività matematica è inseparabile dalla produzione e dalla trasformazione di rappresentazioni semiotiche in altre rappresentazioni semiotiche del medesimo registro o di registri differenti.

La distanza cognitiva, ovvero il grado di congruenza o di non congruenza, fra i contenuti di rappresentazioni referenzialmente equivalenti spiega la complessità dei trattamenti e delle conversioni delle rappresentazioni, e dunque le difficoltà che un soggetto può incontrare nella loro gestione. Tale messa in corrispondenza, alla base di ogni attività matematica, non è una conseguenza dell'acquisizione di concetti matematici, ma una condizione preliminare, ovvero è proprio ciò che permette di costruirli (Duval, 2011, 2013). In altre parole, le difficoltà più profonde, quelle che la maggior parte dei soggetti incontra nelle attività matematiche, sono strettamente legate alla varietà delle rappresentazioni semiotiche utilizzate in matematica e alla complessità semio-cognitiva della loro produzione, scelta, trattamento e conversione (su questi aspetti si veda anche: Freitas & Rezende, 2013). Non derivano da una insufficiente acquisizione o costruzione di concetti, ma da una mancata appropriazione dei “gesti intellettuali” che costituiscono il presupposto di ogni attività matematica, ovvero la condizione necessaria per la costruzione di concetti (Duval, 2013). Derivano cioè da una mancata appropriazione delle operazioni semio-cognitive (conversioni e trattamenti) che sono proprie dell'attività matematica. L'apprendimento concettuale dipende dunque essenzialmente dalla gestione (produzione, scelta, trattamento e conversione) di rappresentazioni semiotiche. (Sulle diverse componenti dell'apprendimento della matematica e sulle loro relazioni si veda: Fandiño Pinilla, 2008).

Qui di seguito si fornisce un esempio di analisi semio-cognitiva dell'attività matematica implicata nella risoluzione di un problema. Si tratta del quesito D24 della prova INVALSI 2012-13, scuola secondaria di II grado, classe seconda.²⁹

D24. Al centro della figura c'è un quadrato nero Q. Il quadrato è circondato da una prima cornice bianca formata da 8 quadrati tutti uguali a Q e da una seconda cornice grigia. Immagina che la figura si estenda con successive cornici (terza, quarta etc.) sempre formate da quadrati tutti uguali a Q.



- a. Quanti sono i quadrati della quarta cornice?
 Risposta:
- b. Se si continua a estendere la figura nello stesso modo, è possibile ottenere una cornice formata da 70 quadrati tutti uguali a Q?
 Scegli una delle due risposte e completa la frase.
- È possibile ottenere una cornice di 70 quadrati perché

- Non è possibile ottenere una cornice di 70 quadrati perché

È data in questo caso una regola di produzione di rappresentazioni semiotiche nel registro della lingua naturale (registro discorsivo) e nel registro delle configurazioni geometriche (registro non discorsivo). Si tratta dunque di una situazione di multirappresentazione (par. 2.4). L'esplicitazione della regola di produzione delle rappresentazioni nel registro delle configurazioni geometriche (Figura 2.5) permette di

²⁹ L'INVALSI (Istituto Nazionale per la Valutazione del Sistema educativo di Istruzione e di formazione) è un ente di ricerca italiano, istituito nel 1999, con compiti incentrati in gran parte sulla valutazione del sistema scolastico italiano. In particolare, tale ente effettua verifiche periodiche sulle conoscenze e competenze degli studenti e sulla qualità complessiva dell'offerta formativa delle istituzioni scolastiche italiane.

confrontare il numero dei quadrati della cornice di ciascuna configurazione sia con il numero dei quadrati della cornice della configurazione successiva o precedente, sia con il numero delle cornici via via aggiunte fino alla configurazione presa in esame, cioè con la posizione della configurazione nella sequenza di configurazioni.

<p>REGOLA DI PRODUZIONE</p>	
<p>Riconoscimento di tutte le unità figurali pertinenti: unità figurali 2D (forme quadrate), 1D (file di quadrati che costituiscono una cornice) e 0D (quadrati di ogni cornice). Rappresentazione ausiliaria ad albero.</p>	
<p>Conversione: descrizione numerica di ogni rappresentazione ottenuta</p>	<p style="text-align: center;"> \downarrow \dots \downarrow \dots \downarrow \dots \downarrow 8 16 24 </p>
<p>Conversione: descrizione numerica della regola di produzione</p>	<p style="text-align: center;"> \downarrow \downarrow \downarrow $8 \cdot 1$ $8 \cdot 2$ $8 \cdot 3$ oppure: $3 \cdot 4 - 4$ $5 \cdot 4 - 4$ $7 \cdot 4 - 4$ oppure: $3^2 - 1^2$ $5^2 - 3^2$ $7^2 - 5^2$... </p>
<p>POSIZIONE DELLA CONFIGURAZIONE NELLA SEQUENZA</p>	<p style="text-align: center;"><i>1</i> <i>2</i> <i>3</i></p> <p>La sequenza dei numeri che individuano la posizione delle configurazioni (numero di cornici aggiunte) si condensa nella lettera <i>n</i></p>
<p>Conversione: descrizione letterale di ogni rappresentazione ottenuta</p>	<p style="text-align: center;"> $8n$ $(2n + 1)4 - 4$ $(2n + 1)^2 - (2n - 1)^2$ </p> <p>Le tre espressioni sopra riportate sono tra loro equivalenti. Non vi è congruenza tra il numero che indica la posizione di una configurazione nella sequenza (cioè il numero di cornici aggiunte) e il numero dei quadrati che costituiscono la cornice</p>

Figura 2.5 Analisi semio-cognitiva dell'attività di esplorazione nel problema in esame

Nota. Figura adattata da Duval (2013, p. 35).

Il trattamento nel registro delle configurazioni geometriche comincia proprio dall'analisi del numero dei quadrati delle cornici che si ottengono nel passaggio da una configurazione alla successiva. La descrizione numerica del numero dei quadrati di ogni cornice costituisce una conversione dal registro delle configurazioni geometriche al registro della scrittura aritmetica. Tale descrizione può a sua volta essere convertita nell'espressione letterale che fornisce il numero dei quadrati che costituiscono una cornice in funzione della posizione della configurazione nella sequenza. Si ottengono in tal modo tre tipi di rappresentazioni referenzialmente equivalenti: una sequenza di configurazioni geometriche, una successione numerica e una espressione letterale.

L'analisi semio-cognitiva del processo di risoluzione consiste nell'esplicitare le conversioni e i trattamenti richiesti (Figura 2.5), i registri mobilitati e la loro articolazione (Figura 2.6) per la risoluzione del problema.

Le trasformazioni evidenziate dalle frecce grigie corrispondono a una riorganizzazione della disposizione spaziale delle unità delle configurazioni, ovvero a un loro trattamento.

Si noti l'introduzione di rappresentazioni ausiliarie transitorie ad albero per evidenziare la corrispondenza tra i quadrati che costituiscono ciascuna cornice e i quadrati che costituiscono la cornice della configurazione che la precede. Non si tratta di una riconfigurazione geometrica. Non è infatti la forma delle sottoconfigurazioni (unità figurali triangolari) ad essere rilevante in questo caso ma la corrispondenza tra unità figurali, dunque i nodi delle rappresentazioni ad albero e il numero dei rami di ciascun nodo utilizzati per realizzare la corrispondenza. Tali rappresentazioni ausiliarie transitorie facilitano la conversione (evidenziata da frecce nere) dal registro delle configurazioni geometriche al registro della scrittura aritmetica o a quello della scrittura algebrica.

Vari sono tuttavia i modi in cui si può effettuare la conversione della regola di produzione delle rappresentazioni semiotiche dal registro delle configurazioni geometriche al registro della scrittura aritmetica o a quello della scrittura algebrica. In Figura 2.5 ne sono riportati solo alcuni. Ciascuno di essi riflette un particolare tipo di attività di esplorazione. In ogni caso, tutte le frecce denotano l'attività cognitiva che un soggetto deve svolgere sia per risolvere con successo il problema matematico sia per comprenderne la soluzione.

	RAPPRESENTAZIONI IN REGISTRI DISCORSIVI	RAPPRESENTAZIONI IN REGISTRI NON DISCORSIVI																												
RAPPRESENTAZIONI IN REGISTRI MULTIFUNZIONALI: rappresentazioni le cui trasformazioni non sono determinate da un algoritmo	Al centro della figura c'è un quadrato nero Q. Il quadrato è circondato da una prima cornice bianca formata da 8 quadrati tutti uguali a Q e da una seconda cornice grigia. Immagina che la figura si estenda con successive cornici (terza, quarta, ecc.) sempre formate da quadrati tutti uguali a Q.																													
RAPPRESENTAZIONI AUSILIARIE DI TRANSIZIONE	<table border="1"> <tr> <td>Fig.</td> <td>1</td> <td>2</td> <td>3</td> <td>...</td> </tr> <tr> <td>Tot.</td> <td>8</td> <td>16</td> <td>24</td> <td>...</td> </tr> </table>	Fig.	1	2	3	...	Tot.	8	16	24	...																			
Fig.	1	2	3	...																										
Tot.	8	16	24	...																										
RAPPRESENTAZIONI IN REGISTRI MONOFUNZIONALI: rappresentazioni le cui trasformazioni sono determinate da un algoritmo	<table> <tr> <td>1</td> <td>2</td> <td>3</td> <td>...</td> </tr> <tr> <td>8·1,</td> <td>8·2,</td> <td>8·3</td> <td>...</td> </tr> <tr> <td>3·4 - 4,</td> <td>5·4 - 4,</td> <td>7·4 - 4</td> <td>...</td> </tr> <tr> <td>3² - 1²,</td> <td>5² - 3²,</td> <td>7² - 5²,</td> <td>...</td> </tr> </table> <table> <tr> <td>↓</td> <td>n</td> <td>⋮</td> </tr> <tr> <td></td> <td>8n</td> <td></td> </tr> <tr> <td></td> <td>(2n + 1)4 - 4</td> <td></td> </tr> <tr> <td></td> <td>(2n + 1)² - (2n - 1)²</td> <td></td> </tr> </table>	1	2	3	...	8·1,	8·2,	8·3	...	3·4 - 4,	5·4 - 4,	7·4 - 4	...	3 ² - 1 ² ,	5 ² - 3 ² ,	7 ² - 5 ² ,	...	↓	n	⋮		8n			(2n + 1)4 - 4			(2n + 1) ² - (2n - 1) ²		
1	2	3	...																											
8·1,	8·2,	8·3	...																											
3·4 - 4,	5·4 - 4,	7·4 - 4	...																											
3 ² - 1 ² ,	5 ² - 3 ² ,	7 ² - 5 ² ,	...																											
↓	n	⋮																												
	8n																													
	(2n + 1)4 - 4																													
	(2n + 1) ² - (2n - 1) ²																													

Figura 2.6 Tipi di registri mobilitati e loro articolazione nella risoluzione del problema

Nota. Figura adattata da Duval (2011, p. 118).

Si può notare come la conversione diretta (indicata da frecce nere dritte a tratto continuo) e la sua inversa (indicata da frecce nere punteggiate) costituiscano due compiti cognitivi completamente differenti, come i trattamenti all'interno di un registro rispetto ai trattamenti corrispondenti in un altro registro. Tuttavia, la coordinazione sinergica dei vari registri richiede non soltanto la capacità di effettuare trattamenti all'interno di ogni registro mobilitato, ma anche la capacità di effettuare conversioni tra i registri in entrambi i versi, senza privilegiarne una soltanto (come capita spesso).

Segnaliamo che questo tipo di attività è studiata anche da Radford (2000b, 2003a, 2005, 2006c, 2008a) ma per altri scopi, in particolare per esaminare la capacità dei giovani studenti di generalizzare, facendoli passare da una configurazione all'altra, sempre di tipo geometrico. Sulle forme di pensiero algebrico, in studenti del quarto e

quinto anno di scuola primaria, che emergono dalle attività di generalizzazione di sequenze figurali e numeriche si focalizza tutta la tesi di dottorato di Vergel (2014).

In questo tipo di attività, tuttavia, il semplice uso di una lettera (per esempio: n) per designare un numero qualsiasi (in questo caso un numero naturale maggiore di zero) è interpretato in modo diverso. Nella interpretazione duvaliana, non costituisce una generalizzazione (matematica) ma una *condensazione*, più precisamente, una condensazione di una sequenza di numeri. In ogni caso, “la designazione ha poco a che fare con la matematica” (D’Amore & Fandiño Pinilla, 2012, p. 34). La generalizzazione è un’altra cosa, è un processo matematico, un ragionamento basato su una proprietà ricorrente. In questo caso: l’estensione di una relazione ai singoli elementi della sequenza. La condensazione è invece un processo semiotico, non costituisce un problema matematico. Analogamente, l’uso di una condensazione (una lettera) per designare una seconda condensazione (in questo caso la sequenza di configurazioni riportata sopra) non è una generalizzazione ma una *designazione funzionale*. La designazione funzionale non è una generalizzazione; si tratta di uno dei primi compiti che si affrontano in algebra. Ciò che ha interesse in algebra non è la condensazione, ma la designazione funzionale. D’altra parte, come afferma R. Duval (comunicazione personale, 27 giugno, 2013), non si può assegnare un compito di generalizzazione a studenti che non abbiano compreso il processo di condensazione. Un tale tentativo sarebbe destinato a fallire.

Radford (1999, 2003a, 2005, 2006c, 2008a), a differenza di Duval, concepisce la generalizzazione (matematica) come un problema semiotico. La generalizzazione è un “vedere” il particolare come qualcosa di generale in senso culturale, ovvero nei modi di simbolizzazione specifici e culturalmente accettati. In particolare, nelle generalizzazioni algebriche Radford distingue tre livelli di generalizzazione:

- *fattuale*: generalizzazione di azioni nella forma di uno schema operativo;
- *contestuale*: generalizzazione non solo di azioni ma anche degli oggetti delle azioni, mantenendo le loro caratteristiche contestuali e situate;
- *simbolica*: uso di segni per riferirsi agli oggetti escludendo termini deittici che situano gli oggetti in una concreta realtà spazio-temporale.

(Per approfondire si veda: Radford, 2003a, 2005, 2006c, 2008a).

Il processo di generalizzazione viene ulteriormente analizzato in Radford (2013b) evidenziando tre problemi fondamentali, mutuamente interconnessi, che lo costituiscono: il primo di natura fenomenologica (scelta di determinazioni sensibili), il secondo di natura

epistemologica (scelta delle caratteristiche da tralasciare o da conservare delle determinazioni sensibili nella estrapolazione o generalizzazione che produce un nuovo oggetto), il terzo di natura semiotica (scelta, produzione o uso di segni per “denotare” il nuovo oggetto) (Radford, 2013b).

I primi due problemi, quelli di natura fenomenologica ed epistemologica, possono rientrare, a nostro avviso, nel terzo, ovvero in un problema di natura semiotica. In altre parole, nella interpretazione radfordiana la generalizzazione risulta un problema essenzialmente semiotico.

2.7 Punto di vista matematico e punto di vista semio-cognitivo

Da un punto di vista matematico, le attività matematiche proposte in ambito scolastico sono per lo più costruite per far acquisire o applicare determinati concetti, proprietà, procedure, teoremi etc. Le principali difficoltà nel loro svolgimento consistono dunque nel riconoscimento e nell’uso di tali concetti, proprietà, procedure, teoremi etc. Il principale criterio di comprensione, da un punto di vista matematico, è la giustificazione o la dimostrazione del risultato ottenuto (Duval, 2011).

Da un punto di vista semio-cognitivo, il riconoscimento e l’uso di concetti, proprietà, procedure, teoremi, unità figurali pertinenti etc. si traduce nel riconoscimento di un medesimo oggetto matematico in rappresentazioni semiotiche differenti. Tale riconoscimento costituisce, da un punto di vista semio-cognitivo, il principale criterio di comprensione. Su di esso si basa la capacità di trasformare rappresentazioni semiotiche di un oggetto matematico in altre rappresentazioni del medesimo oggetto all’interno dello stesso registro o in registri differenti.

D’altra parte, per riconoscere un medesimo oggetto in due rappresentazioni (semioticamente) differenti, occorre saper mettere in corrispondenza le unità di contenuto delle due rappresentazioni, indipendentemente dalla loro eventuale congruenza o non congruenza, e quindi dagli eventuali oggetti immediatamente evocati. Tali fenomeni di congruenza o di non congruenza tra i contenuti delle rappresentazioni semiotiche coinvolte nelle attività matematiche determinano la distanza cognitiva tra le rappresentazioni semiotiche, dunque il riconoscimento o non riconoscimento di un medesimo oggetto in rappresentazioni differenti, le trasformazioni (trattamenti e

conversioni) di rappresentazioni più efficaci in una data situazione, vale a dire, la complessità semio-cognitiva dei processi di comprensione sottostanti l'attività matematica, complessità che il punto di vista matematico spesso nasconde.

Ciò che agli occhi di un esperto appare “semplice” da un punto di vista matematico (a livello di metodi, algoritmi, o contenuti matematici), in una data situazione problematica, può per il discente rivelarsi complesso da un punto di vista semio-cognitivo, cioè in relazione alla capacità di effettuare, spontaneamente o sotto la guida di un esperto, le operazioni semiotiche richieste in quella data situazione (Duval, 1998b).

Da qui la necessità di un'analisi dell'attività matematica non solo in termini di costruzione degli oggetti (o concetti) matematici emergenti da tale attività, ma anche e soprattutto in termini di modi di pensare e di lavorare propri dell'attività matematica, vale a dire, in termini dei “gesti intellettuali” che sono specifici dell'attività matematica e trasversali agli oggetti o concetti mobilitati.

In altre parole, diventa necessario prendere in esame non solo il “lato visibile” dell'attività matematica (quello centrato sugli oggetti, sulle proprietà, sugli algoritmi, sui metodi di risoluzione, ... “da insegnare”), ma anche e soprattutto il “lato nascosto”, irriducibile al primo, di tale attività (quello che riguarda il modo di vedere, di definire, di ragionare, di passare da una rappresentazione all'altra). Questo “lato nascosto” è costituito dalle operazioni semio-cognitive (trattamenti e conversioni) che caratterizzano l'attività matematica, ovvero dai “gesti intellettuali che costituiscono il carattere cognitivo ed epistemologico specifico della matematica” (Freitas & Rezende, 2013, p. 17).

La comprensione delle difficoltà che incontra lo studente in matematica richiede, da parte dell'insegnante, una forte articolazione del punto di vista matematico (focalizzato sugli oggetti o sui concetti matematici, sulle proprietà, sugli algoritmi, sulle dimostrazioni, ovvero sui contenuti da insegnare) con quello semio-cognitivo (focalizzato sul modo di vedere, di ragionare, di passare da una rappresentazione a un'altra, considerando gli oggetti matematici come accessibili unicamente attraverso le rappresentazioni semiotiche prodotte) (Duval, 2009b, 2012). Tale articolazione non è attività spontanea, né si acquisisce con l'esperienza: dovremo tornare su questo tema.

Tornando al problema (D24) preso in esame nel paragrafo precedente, il Servizio Nazionale di Valutazione,³⁰ nella guida alla lettura della prova di matematica (classe

³⁰ Il Servizio Nazionale di Valutazione (SNV) è stato istituito nel 2004 con il coinvolgimento, oltre che dell'INVALSI, delle istituzioni scolastiche e formative, delle regioni e dei comuni italiani, con l'obiettivo di valutare l'efficienza e l'efficacia della qualità del sistema educativo.

seconda – scuola secondaria di secondo grado) svolta nell’anno scolastico 2012-13, ha classificato gli *item* D24a e D24b nell’ambito “numeri” indicando come “processi prevalenti” attivati nella risposta i seguenti: “Conoscere e utilizzare algoritmi e procedure (in ambito aritmetico, geometrico, algebrico, statistico e probabilistico)” (p. 2) nel caso dell’*item* D24a, e “Utilizzare forme tipiche del ragionamento matematico (congetturare, argomentare, verificare, definire, generalizzare, dimostrare ...)” (p. 2) nel caso dell’*item* D24b. Tali processi sono quelli che caratterizzano l’analisi delle produzioni degli studenti da un punto di vista matematico.

La tabella seguente (Tabella 2.3) riassume le principali differenze tra il punto di vista matematico e il punto di vista semio-cognitivo riguardo al modo di concepire gli oggetti matematici e i processi di comprensione sottostanti le attività matematiche.

Tabella 2.3

Due modi completamente diversi di descrivere un “oggetto matematico” e i processi di comprensione sottostanti le attività matematiche

OGGETTO MATEMATICO <i>(rappresentazioni semiotiche in entrambi i punti di vista ma con requisiti molto diversi)</i>	
Punto di vista semio-cognitivo	Punto di vista matematico
<p>(a) Un oggetto matematico è un <i>invariante</i> di rappresentazioni semiotiche nei cambiamenti di registro.</p> <p>(b) Si ha accesso agli oggetti matematici solo <i>attraverso</i> (non prima né dopo) la produzione di rappresentazioni semiotiche.</p> <p>(c) La comprensione è nella coordinazione di registri differenti nelle attività matematiche. In altre parole, per essere in grado di <i>riconoscere</i> un oggetto matematico nelle sue possibili rappresentazioni semiotiche, si deve essere in grado di <i>convertire</i> una data rappresentazione semiotica in un'altra rappresentazione semiotica prodotta in un altro registro.</p> <p>(d) La difficoltà nel riconoscimento di un oggetto matematico o nella conversione di rappresentazioni nasce dal fatto che il contenuto della rappresentazione di partenza non ha nulla (semanticamente o sintatticamente) in comune con il contenuto della rappresentazione di arrivo.</p> <p>(e) Ciò che conta della varietà dei registri di rappresentazione utilizzati in matematica è che ogni registro ha implicito <i>un tipo specifico di trattamento</i> che non può essere effettuato entro altri registri.</p>	<p>(a') Un oggetto matematico è definito implicitamente o esplicitamente da un certo numero di assiomi o proprietà all'interno di una teoria.</p> <p>(b') Gli oggetti matematici hanno una loro realtà in un certo dominio di oggetti astratti, oppure emergono dalle attività matematiche, in ogni caso semioticamente mediate, in quanto simboli di unità culturali.</p> <p>(c') La comprensione è nella giustificazione o dimostrazione matematica di teoremi, o nella risoluzione di problemi.</p> <p>(d') Le principali difficoltà nello svolgimento delle attività matematiche sono ricondotte al mancato riconoscimento o a un uso non adeguato di specifici concetti, proprietà, procedure, teoremi, unità figurali etc.</p> <p>(e') La scelta di una rappresentazione semiotica dipende dal tipo di <i>trattamento</i> da effettuare (calcolo di qualsiasi tipo, ragionamento etc.) [e non si ha trattamento matematico (calcolo, ragionamento) senza l'uso di un registro di rappresentazione].</p>

Nota. Tabella adattata da R. Duval (comunicazione personale, 27 giugno, 2013) e da Duval (2009b, p. 141).

La Tabella 2.3 permette di confrontare i due punti di vista, quello semio-cognitivo e quello matematico, evidenziandone il loro diverso ruolo nell'analisi delle produzioni matematiche di studenti e insegnanti. La loro articolazione svela tutta la complessità dei processi di comprensione sottostanti le attività matematiche, complessità che il punto di vista matematico spesso nasconde.

L'insegnante è consapevole di questi due differenti modi di descrivere e analizzare le produzioni degli studenti? Questa ricerca si è focalizzata proprio sull'aspetto meno esplorato, ovvero sulla consapevolezza dell'insegnante della dimensione semio-cognitiva del processo di apprendimento della matematica.

L'approccio semio-cognitivo di Duval è stato *integrato localmente* con l'approccio semiotico-interpretativo di tradizione peirceana – tenendo conto anche della teoria antropologica della didattica – per un'analisi più ampia e profonda del punto di vista dell'insegnante sul ruolo delle differenti componenti delle rappresentazioni semiotiche degli oggetti matematici nei processi di comprensione sottostanti la loro gestione.

3 Processo di ricerca

3.1 Introduzione

In questo capitolo si introducono le domande e le ipotesi di ricerca. Si prendono poi in esame le principali caratteristiche di alcuni fondamentali paradigmi di ricerca e si sintetizzano gli approcci interpretativi alla ricerca qualitativa più rilevanti per la presente ricerca. Lo scopo è quello di chiarire e di motivare le scelte del paradigma, dell'approccio, della metodologia e del disegno di ricerca, sulla base delle domande di ricerca. Si presentano quindi le principali fasi del disegno di ricerca con metodi misti elaborato per rispondere alle domande di ricerca, la procedura di campionamento e le considerazioni etiche che hanno guidato l'intero processo di ricerca. Si prendono infine in esame i metodi scelti per la rilevazione dei dati, le modalità di raccolta dei dati, il questionario di ricerca, e le caratteristiche del campione di ricerca.

3.2 Domande di ricerca

D1. L'insegnante è consapevole della distinzione tra oggetto matematico (pre-definito, pre-costituito dalla istituzione) e una sua rappresentazione semiotica? In altre parole, per riferirsi a un oggetto matematico l'insegnante fornisce *intenzionalmente* diverse sue rappresentazioni possibili? Se sì, che tipo di registro utilizza più di frequente?

D2. L'insegnante riconosce i diversi aspetti di una rappresentazione semiotica sui quali lo studente in grado di gestirla può focalizzarsi? Se sì, a quali di essi l'insegnante attribuisce l'apprendimento dello studente?

D3. L'insegnante riconosce i diversi aspetti di una rappresentazione semiotica sui quali lo studente che la gestisce con difficoltà può focalizzarsi? Se sì, a quali di essi l'insegnante attribuisce le difficoltà di apprendimento dello studente?

D4. L'insegnante avverte i conflitti semiotici generati dai contenuti (*representamen*) di rappresentazioni semiotiche simili per qualche aspetto?³¹ Se sì, a che cosa li riconduce?

Le domande di ricerca sono state formulate entro un ampio quadro teorico (cap. 2), che include in particolare l'approccio semio-cognitivo di Duval, integrato localmente (Prediger, Bikner-Ahsbabs, & Arzarello, 2008; Radford, 2008b) con l'approccio semiotico-interpretativo di tradizione peirceana e con la teoria antropologica della didattica (Chevallard, 1992) di cui l'approccio onto-semiotico è una estensione (D'Amore & Godino, 2006).

3.3 Ipotesi di ricerca

I1. L'insegnante è consapevole della distinzione tra oggetto matematico (nel senso sopra specificato) e una sua rappresentazione semiotica R^m_i in un registro r^m differente da quello utilizzato per designarlo (il registro della lingua naturale, nella maggior parte dei casi). Per esempio, distingue l'oggetto matematico denominato "frazione" (per esempio "tre quarti" nel registro della lingua naturale) da una sua rappresentazione nel registro della scrittura frazionaria (per esempio $3/4$). L'insegnante per riferirsi a un oggetto matematico fornisce intenzionalmente diverse sue rappresentazioni, nel medesimo registro o in registri differenti. Il registro utilizzato più di frequente, oltre a quello discorsivo multifunzionale della lingua naturale, è di tipo discorsivo monofunzionale (come il registro della scrittura frazionaria, il registro della scrittura decimale, il registro algebrico), di tipo non discorsivo multifunzionale (come il registro delle configurazioni geometriche), o di tipo non discorsivo monofunzionale (come il registro grafico). Dipende in ogni caso dall'ordine di scuola e dalla classe presa in esame.

I2. L'insegnante riconosce alcuni aspetti di una rappresentazione semiotica $R = R^m_i$ sui quali lo studente in grado di gestirla può focalizzarsi, in particolare gli aspetti:

³¹ Ricordiamo che per *conflitto semiotico* (Godino, Batanero, & Font, 2007) intendiamo una discordanza tra le interpretazioni del contenuto (*representamen*) di una rappresentazione semiotica da parte di due soggetti (persone o istituzioni).

- concreti di R o quelli legati alla somiglianza di R con qualcos'altro di concreto (aspetti iconico-qualitativi);
- riguardanti la costruzione di R o le proprietà di R (aspetti iconico-strutturali);
- posti in rapporto (non necessariamente di somiglianza) con il linguaggio quotidiano o l'esperienza sensibile (aspetti di analogia);
- di rinvio a qualcos'altro (aspetti indicali);
- convenzionali, legati a notazioni, definizioni, regole e vincoli d'uso (aspetti simbolici).

Ma l'insegnante attribuisce l'apprendimento dello studente alla sua capacità di focalizzarsi soprattutto sugli aspetti legati alla costruzione di R o alle proprietà di R (iconico-strutturali) o sugli aspetti simbolici del contenuto della rappresentazione.

13. L'insegnante riconosce alcuni aspetti di una rappresentazione semiotica sui quali lo studente che la gestisce con difficoltà può focalizzarsi. In particolare, l'insegnante riconduce le difficoltà di gestione delle rappresentazioni semiotiche, e dunque di apprendimento da parte dello studente, agli aspetti più concreti o materiali delle rappresentazioni sui quali lo studente spesso si focalizza e al mancato riconoscimento, da parte dello studente, degli aspetti simbolici dei contenuti delle rappresentazioni utilizzate.

14. L'insegnante avverte i conflitti semiotici che possono generare i contenuti (*representamen*) delle rappresentazioni semiotiche simili per qualche aspetto, ma non è in grado di ricondurli alla confusione (o identificazione) da parte dello studente tra (di):

- aspetti completamente differenti di uno stesso contenuto (*representamen*) (per esempio, l'aspetto iconico-qualitativo o rappresentato attraverso analogie con quello iconico-strutturale o simbolico, oppure l'aspetto indicale con quello simbolico);³²
- una componente di un contenuto (*representamen*) di una rappresentazione con un'altra componente di un altro contenuto (*representamen*), simile al primo sotto

³² Per esempio, nel caso della rappresentazione di un angolo con l'archetto, la lunghezza dell'archetto (componente indicale) e l'ampiezza dell'angolo (componente simbolica) possono essere tra loro confusi o identificati, come emerge dalla ricerca di Sbaragli e Santi (2012).

qualche aspetto, in particolare (e soprattutto) sotto l'aspetto iconico-qualitativo (immediatamente riconoscibile o direttamente percepibile).³³

Secondo l'insegnante, i conflitti semiotici nella gestione delle rappresentazioni semiotiche sono causati soprattutto dalla complessità d'uso e d'interpretazione delle rappresentazioni semiotiche nei loro differenti contesti, in particolare da una scarsa consapevolezza da parte dello studente dei vincoli o dei limiti d'uso ai quali le rappresentazioni sono sottoposte nei loro differenti contesti. I conflitti sono in generale riconducibili a conoscenze parziali o a scelte semiotiche molto circoscritte, non sempre efficaci nella trasposizione didattica di alcuni contenuti, fatte anche da insegnanti di classi o di ordini di scuola precedenti.

3.4 Approccio alla ricerca

Per rispondere alle domande di ricerca sopra riportate si è cercato di indagare in profondità il punto di vista dell'insegnante sugli aspetti semiotici e cognitivi del processo di apprendimento della matematica. La ricerca aveva finalità prettamente esplorative, descrittive e interpretative, dunque i metodi di ricerca utilizzati sono stati di tipo prettamente qualitativo, in quanto essi sono quelli che in questo caso forniscono risposte più ricche, significative e utili (Teppo, 1998). Nei paragrafi che seguono sono evidenziate le principali caratteristiche della ricerca di tipo qualitativo, le sue principali differenze da quella di tipo quantitativo e i paradigmi di ricerca che possono includerla.

3.5 Ricerca qualitativa

La parola *qualitativo*, come evidenziano Denzin e Lincoln (2011), presuppone una particolare attenzione alle qualità degli enti, delle relazioni o dei fenomeni presi in

³³ Si ricordi il caso 0^0 (par. 2.5): il conflitto semiotico (evidenziato dalla risposta dello studente: “è uguale a 0 oppure a 1 a seconda dei casi”) è generato dall'identificazione della componente iconico-qualitativa (“un numero elevato a un altro numero”) del contenuto (*representamen*) della rappresentazione 0^0 , con le componenti iconico-qualitative, strutturali e simboliche dei contenuti di rappresentazioni [del tipo: a^n ($n > 0$); a^0 ($a \neq 0$)] di altri oggetti matematici.

esame, piuttosto che alle loro quantità, misure o frequenze; ai significati o ai sensi che le persone attribuiscono ai fenomeni, alle situazioni o alle loro esperienze, piuttosto che alle relazioni causali tra le variabili che vengono identificate e misurate.

Tali autori rilevano che, pur assumendo significati differenti in contesti storici e culturali differenti, la *ricerca qualitativa* può essere in generale definita come:

un'attività situata che posiziona il ricercatore nel mondo. Essa consiste di un insieme di pratiche materiali, interpretative che rendono il mondo visibile. Queste pratiche trasformano il mondo. Esse lo mutano in una serie di rappresentazioni, che includono note sul campo, interviste, conversazioni, fotografie, registrazioni, appunti. A questo livello, la ricerca qualitativa richiede un approccio interpretativo e naturalistico al mondo. Questo significa che i ricercatori qualitativi studiano le cose nei loro ambienti naturali, cercando di dare senso a, o di interpretare, i fenomeni in termini dei significati che le persone danno a loro. (Denzin & Lincoln, 2011, p. 3)

Ma gli autori rilevano anche che:

tutti gli ambienti sono naturali – cioè luoghi dove si svolge l'esperienza quotidiana. (...) Storicamente, gli analisti hanno distinto tra contesti di ricerca sperimentale (laboratorio) e sul campo (naturale), da qui la tesi che la ricerca qualitativa sia naturalistica. La teoria dell'attività elimina questa distinzione (Keller & Keller, 1996, p. 20; Vygotskij, 1978). (Denzin & Lincoln, 2011, p. 16)

La *teoria dell'attività*, che si basa sugli studi di psicologia storico-culturale condotti intorno agli anni '20 da Vygotskij e da Aleksei N. Leontiev (1903 – 1979), fornisce un ampio quadro teorico per l'analisi e la comprensione delle interazioni umane. La sua principale unità d'analisi è l'attività umana, che è concepita come cognitivamente mediata e modellata da strumenti, o artefatti, culturalmente e storicamente situati (Kuutti, 1991). La nozione di contesto è qui del tutto centrale:

l'attività stessa è il contesto. Ciò che ha luogo in un sistema di attività, costituito da un oggetto [*object* nel senso di “obiettivo”], da azioni e operazioni, è il contesto. (...) Il contesto non è un contenitore esterno o un guscio all'interno del quale le persone si comportano in certi modi. Le persone coscientemente e deliberatamente generano contesti (attività) anche

in parte attraverso i propri oggetti; quindi il contesto non è solo “là fuori”. Il contesto è sia interno alle persone – coinvolgendo oggetti e scopi specifici – sia, al tempo stesso, esterno alle persone, coinvolgendo artefatti, altre persone, ambienti specifici. Il punto cruciale è che, nella teoria dell’attività, l’interno e l’esterno sono fusi, unificati. (Nardi, 1996, p. 38)

Di conseguenza, la ricerca sperimentale di laboratorio e la ricerca sul campo non hanno più motivo di essere distinte.

La ricerca qualitativa evidenzia in particolare la natura socialmente costruita della realtà, la stretta relazione tra il ricercatore e l’oggetto di studio, e i vincoli situazionali che modellano l’indagine. Essa prevede la raccolta di una molteplicità di *materiali empirici* (Denzin & Lincoln, 2011): studi di caso, esperienze personali, interviste, artefatti, testi, produzioni culturali etc. “I ricercatori qualitativi mettono in campo un’ampia gamma di pratiche interpretative interconnesse, sempre nella speranza di ottenere una migliore comprensione dell’argomento in esame. Si assume, comunque, che ciascuna pratica renda il mondo visibile in modo differente” (Denzin & Lincoln, 2011, p. 4).

La scelta delle pratiche interpretative da impiegare non è necessariamente stabilita in anticipo; essa è strettamente legata non solo alle domande di ricerca, ma anche al contesto nel quale il ricercatore si trova ad operare, alle eventuali questioni che il contesto solleva e che il ricercatore si trova ad affrontare. “La ‘scelta delle pratiche di ricerca dipende dalle domande che vengono poste, e le domande dipendono dal loro contesto’ (Nelson *et al.*, 1992, p. 2), da ciò che è disponibile nel contesto, e da ciò che il ricercatore può fare in quell’ambiente” (Denzin & Lincoln, 2011, p. 4).

La ricerca qualitativa è per sua natura un approccio multi-metodo (Flick, 2002). Il termine *multi-metodo*, come Tashakkori e Teddlie (2003) evidenziano, è utilizzato in vari modi da autori differenti. Esso fa in generale riferimento alla combinazione di due o più metodi (tecniche) di raccolta del materiale empirico dello stesso tipo, ovvero alla combinazione di due o più metodi di tipo puramente qualitativo (esplorativo, induttivo, non strutturato, a risposta aperta, naturalistico etc.), oppure alla combinazione di due o più metodi di tipo puramente quantitativo (corroborativo, deduttivo, strutturato, a risposta chiusa, controllato etc.). I disegni di ricerca multi-metodo si distinguono da quelli *con metodi misti* (par. 3.8.1), che includono metodi di tipo sia qualitativo sia quantitativo per rispondere alle domande di ricerca.

I principali metodi di raccolta del materiale empirico sono: il questionario, l'intervista, il *focus group*,³⁴ il test, l'osservazione e i dati secondari³⁵ (Tashakkori & Teddlie, 2003). In particolare, il questionario (come l'intervista), a seconda delle domande di ricerca, può essere strutturato, semi-strutturato, o non strutturato. Un questionario strutturato prevede domande identiche per tutti i partecipanti e risposte per lo più precodificate o predefinite. Un questionario semi-strutturato si basa su un certo numero di domande identiche per tutti i partecipanti, e su altre domande specifiche o personalizzate; in ogni caso le domande sono formulate in modo da lasciare una certa libertà di risposta. Un questionario non strutturato prevede invece domande formulate in modo da permettere al partecipante di esprimersi liberamente su un determinato tema.

L'uso di più metodi ha lo scopo di fornire una conoscenza più approfondita o, meglio, rappresentazioni differenti, secondo prospettive differenti, del fenomeno in esame. Uno studio multi-metodo qualitativo può includere, per esempio, l'*osservazione partecipante* (una prolungata permanenza e partecipazione del ricercatore alle attività del gruppo preso in esame) e l'*intervista non strutturata* (un'intervista su un tema generale prefissato, con domande a risposta aperta non prestabilite). Attraverso l'osservazione è possibile rilevare ciò che le persone fanno o come si comportano in un determinato contesto, senza dover fare affidamento su ciò che esse dicono *di quel* contesto, mentre attraverso l'intervista è possibile ottenere informazioni più dettagliate su certe questioni relative *a quel* contesto. In generale, l'uso di più metodi qualitativi permette di migliorare la credibilità, la trasferibilità, l'affidabilità e la confermabilità dei risultati di ricerca.³⁶

³⁴ Il *focus group* è una tecnica di rilevazione basata sulla discussione tra un piccolo gruppo di persone (che in genere varia da 6 a 12), alla presenza di uno o più moderatori, focalizzata su un argomento che si vuole indagare in profondità (Corrao, 2000). Il moderatore, seguendo uno schema più o meno strutturato, propone ai partecipanti degli "stimoli", di tipo verbale (domande, frasi, definizioni etc.) o visivo (fotografie, disegni, filmati etc.), da cui far scaturire la discussione.

³⁵ I *dati secondari* (a volte detti "dati esistenti o disponibili") sono dati che sono stati raccolti da un altro ricercatore (o gruppo di ricerca), in generale da una persona differente dal loro attuale utilizzatore, per scopi o questioni di ricerca differenti. Si tratta di documenti (personali, ufficiali, storici, trascrizioni di interviste, registrazioni e altri artefatti) realizzati o raccolti in passato da una persona diversa da quella che sta conducendo la ricerca (Tashakkori & Teddlie, 2003). La distinzione tra dati secondari e dati primari dipende dalla relazione tra la persona (o il gruppo di ricerca) che ha raccolto i dati e la persona (o il gruppo di ricerca) che li analizza. Lo stesso insieme di dati può essere un insieme di dati primari per un ricercatore e un insieme di dati secondari per un altro ricercatore. Se i dati in questione sono stati raccolti dal ricercatore per uno scopo specifico sono *dati primari*. Se sono stati raccolti da qualcun altro per qualche altro scopo, sono *dati secondari*.

³⁶ I termini *credibilità*, *trasferibilità*, *affidabilità* e *confermabilità* nella ricerca qualitativa sostituiscono, rispettivamente, i termini *validità interna*, *validità esterna*, *attendibilità* e *oggettività* della ricerca quantitativa (Lincoln & Guba, 1985).

La ricerca qualitativa, intesa come insieme di attività interpretative (Denzin & Lincoln, 2011), non privilegia una pratica metodologica rispetto a un'altra. Non ha una teoria o un paradigma che la contraddistingua chiaramente e non ha neppure un insieme specifico di metodi o di pratiche che siano interamente pertinenti. I ricercatori qualitativi ricorrono all'analisi, anche semiotica, dei documenti, delle conversazioni, dei discorsi, delle narrazioni, senza eliminare del tutto le informazioni empiriche di tipo numerico, l'analisi statistica dei dati testuali etc. I dati qualitativi possono infatti essere convertiti in dati numerici (cioè quantizzati) e analizzati statisticamente (per approfondire questi aspetti si veda: Hesse-Biber, 2010; Tashakkori & Teddlie, 2003). La natura dell'analisi del materiale empirico dipende in ogni caso dalle domande di ricerca, dalle informazioni raccolte, dai contesti presi in esame.

Tutti i ricercatori qualitativi sono filosofi nel “senso universale che tutti gli esseri umani (...) sono guidati da principi altamente astratti” (Bateson, 1972, p. 320). Questi principi combinano convinzioni circa l'*ontologia* (Che tipo di essere è l'essere umano? Qual è la natura della realtà?), l'*epistemologia* (Qual è la relazione tra il ricercatore e la cosa conosciuta?), e la *metodologia* (In che modo conosciamo il mondo, o veniamo a conoscenza di esso?) (...) Queste convinzioni determinano il modo in cui il ricercatore qualitativo vede il mondo e agisce in esso. (Denzin & Lincoln, 2011, pp. 12-13)

Le assunzioni *ontologiche* sono relative alla natura della realtà e dunque alla natura di ciò su cui la ricerca si focalizza. Le assunzioni *epistemologiche* sono relative alla natura della conoscenza, ovvero alla natura della relazione tra il soggetto che conosce e ciò che può essere conosciuto. Le assunzioni *metodologiche* sono relative al modo in cui si può acquisire conoscenza del mondo, dunque riguardano la natura del disegno e dei metodi di ricerca (Come viene costruita e condotta la ricerca?).

La diversità tra i tipi di ricerca riflette la diversità delle assunzioni ontologiche, epistemologiche e metodologiche che guidano la ricerca; più in particolare, riflette la diversità delle ontologie e delle epistemologie che sottendono le metodologie, che a loro volta guidano la ricerca. In altre parole, le metodologie producono differenti disegni di ricerca a seconda delle assunzioni ontologiche ed epistemologiche sulle quali esse si fondano.

Come evidenzia Sarantakos (2005), le ontologie informano le metodologie sulla natura [oggettiva (là fuori), costruita o soggettiva] della realtà, o meglio su ciò su cui la

ricerca dovrebbe focalizzarsi. Le epistemologie informano le metodologie sulla natura della conoscenza, su ciò che conta come fatto, e su dove (in quali ambienti, naturali o artificiali) la conoscenza dovrebbe essere cercata. Le metodologie, infine, sulla base delle ontologie e delle epistemologie che le sottendono, costruiscono opportuni disegni di ricerca, che indicano al ricercatore dove focalizzare l'attività di ricerca e come, con quali metodi, riconoscere e ricavare informazioni ovvero conoscenza (Sarantakos, 2005).

Ovviamente, come si vedrà anche in seguito (par. 3.6.6), ci sono fattori contingenti e contestuali che giocano un ruolo rilevante nell'orientare l'attività di ricerca. Le assunzioni ontologiche, epistemologiche e metodologiche, insieme a quelle assiologiche, determinano, come vedremo (par. 3.6), diversi paradigmi di ricerca.

Occorre distinguere bene, però, la *metodologia* dai *metodi* di ricerca. I *metodi* sono particolari strumenti o tecniche di raccolta o di analisi dei dati (materiali empirici). La parola "metodo" deriva dal greco μέθοδος (*methodos*) "la via per ottenere uno scopo", composto della particella μετά (*meta*) "dopo", "oltre" e di ὁδός (*odos*) "via", "strada", "cammino". La *metodologia* è una prospettiva teorica generale sulla ricerca, una *teoria* sui metodi (Ernest, 1998). È l'insieme delle assunzioni teoriche che guidano il ricercatore nella formulazione delle domande di ricerca e nella scelta dei metodi (Giddings & Grant, 2006). È un ponte che unisce il punto di vista filosofico (ontologia ed epistemologia) del ricercatore ai metodi di ricerca (Hesse-Biber & Leavy, 2011) (Figura 3.1).

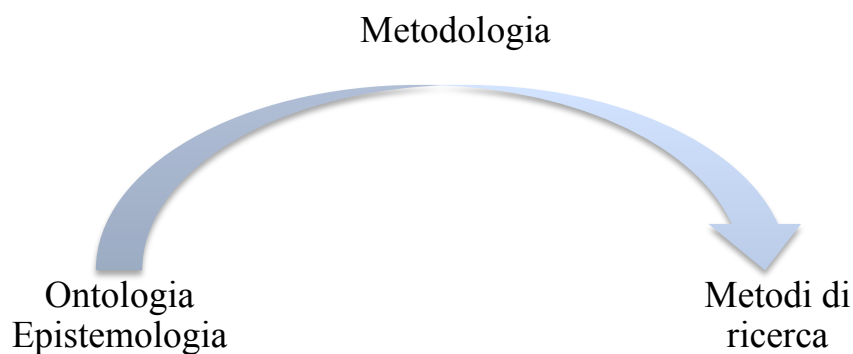


Figura 3.1 Metodologia come ponte tra prospettiva filosofica e metodi di ricerca

Nota. Figura adattata da Hesse-Biber e Leavy (2011, p. 7).

In diversi lavori, però, come vedremo nel paragrafo 3.6.6, la parola *metodi* è utilizzata in senso ampio con il significato di *metodologia*.

3.6 Paradigma di ricerca

Guba (1990) asserisce che Thomas S. Kuhn (1922 – 1996) (1962) utilizza il termine *paradigma* in almeno 21 modi differenti, se il conteggio di Masterman (1970) è corretto, senza fornirne una chiara definizione; il che dà la possibilità di rimodellare il termine per migliorare la comprensione delle sue molteplici implicazioni. Guba (1990) lo utilizza allora nel senso più comune o generico, per indicare un insieme di convinzioni di base che guidano l'azione.³⁷

Ci sono molti paradigmi che utilizziamo per guidare le nostre azioni: il paradigma accusatorio che guida il sistema giuridico, il paradigma di giudizio che guida la selezione dei vincitori dei giochi olimpici, il paradigma religioso che guida la vita spirituale e morale, e molti altri. Qui il nostro interesse va però a *quei paradigmi che guidano la ricerca disciplinata*.³⁸ (Guba, 1990, p. 18, corsivo dell'autore)

In particolare, un *paradigma di ricerca* è caratterizzato dal modo in cui il suo proponente risponde alle tre seguenti questioni fondamentali, descritte anche in precedenza:

- *Questione ontologica*: Qual è la natura della realtà? Che cosa può essere conosciuto di essa?
- *Questione epistemologica*: Qual è la natura della relazione tra il soggetto conoscente (il ricercatore) e ciò che può essere conosciuto?
- *Questione metodologica*: In che modo il ricercatore può scoprire ciò che crede che possa essere conosciuto?

³⁷ La parola *paradigma* deriva dal greco παράδειγμα (*paradeigma*), “modello”, “esempio”; dal verbo παραδείκνυμι (*paradeiknymi*) “rappresentare”, “esibire”, “mostrare chiaramente”, composto di παρά (*para*) “accanto”, “dietro” e δείκνυμι (*deiknymi*) “mostrare”, “indicare”, “dimostrare”, “far conoscere” (Liddell & Scott, 1940).

³⁸ La ricerca *disciplinata* per Guba (1990) è caratterizzata da assunzioni ontologiche, epistemologiche e metodologiche ben precise. Hiles (2006a, 2006b) amplia la nozione di *ricerca disciplinata* includendo in essa, in un suo modello, oltre ai *paradigmi* (assunzioni adottate sulla realtà, sulla conoscenza, e su come la conoscenza debba essere usata), anche le *strategie* (le scelte rispetto a come la ricerca disciplinata debba procedere), i *metodi* (le procedure per la raccolta dei dati), l'*analisi* (le tecniche di analisi dei dati) e la *valutazione critica* (l'interpretazione e le implicazioni dei risultati di ricerca, la riflessione critica sul disegno di ricerca, sul metodo di analisi dei dati, sulle assunzioni fatte, sui *bias* etc., sulla credibilità, trasferibilità, affidabilità e confermabilità dei risultati di ricerca, sulla loro pubblicazione e divulgazione, sul loro controllo, uso o applicazione). Si tratta di un “modello pluralistico” di un'ampia gamma di pratiche di ricerca, che rifiutano la distinzione (considerata troppo semplicistica) tra ricerca quantitativa e ricerca qualitativa (Hiles, 2008).

Come rileva Johnson (2011), Guba, a differenza di Kuhn, enfatizza gli aspetti filosofici e metodologici dei paradigmi, piuttosto che gli aspetti di problem solving. Un paradigma di ricerca costituisce dunque un sistema di convinzioni basato su assunzioni ontologiche, epistemologiche e metodologiche; si tratta di un quadro interpretativo, di una “una visione del mondo che guida il ricercatore, non solo nelle scelte dei metodi ma anche nelle vie ontologiche ed epistemologiche fondamentali” (Guba & Lincoln, 1994, p. 105).

Denzin e Lincoln (2011), oltre alle questioni ontologiche, epistemologiche e metodologiche, includono nel paradigma anche le questioni etiche, o meglio, l’assiologia: “Un paradigma comprende quattro termini: etica (assiologia), epistemologia, ontologia e metodologia. (...) Ogni epistemologia (...) implica una presa di posizione etica-morale verso il mondo e il sé del ricercatore” (Denzin & Lincoln, 2011, p. 91). L’assiologia è assunta come una delle dimensioni filosofiche di base di un paradigma. Un *paradigma di ricerca* è dunque concepito come un insieme di assunzioni ontologiche, epistemologiche, metodologiche e assiologiche condivise da una comunità di ricercatori, che riguardano la natura e la conduzione della ricerca. Le questioni assiologiche evidenziano in particolare il ruolo dei valori nel processo di ricerca, il modo in cui il ricercatore agisce sulla base dei valori che fondano la sua ricerca.

Tutta la ricerca è interpretativa; è guidata dall’insieme di convinzioni e opinioni del ricercatore sul mondo e su come esso debba essere compreso e studiato. Alcune convinzioni possono essere date per scontate, possono essere invisibili, soltanto ipotizzate, mentre altre sono altamente problematiche e controverse. Ogni paradigma interpretativo avanza richieste particolari al ricercatore, che includono le domande che il ricercatore pone e le interpretazioni che egli dà ad esse. (Denzin & Lincoln, 2011, p. 13)

A livello generale, Denzin e Lincoln (2011) evidenziano cinque principali paradigmi interpretativi che strutturano la ricerca qualitativa: positivista, post-positivista, critico, costruttivista, partecipativo. In ogni caso, come Guba e Lincoln affermano, il termine *qualitativo* è

un termine generico superiore al termine *paradigma* (...) è un termine che dovrebbe essere riservato alla descrizione dei tipi di metodi. Dal nostro punto di vista, i metodi sia qualitativi sia quantitativi possono essere utilizzati in modo appropriato con qualsiasi paradigma di ricerca. Le

questioni di metodo sono secondarie rispetto alle questioni di paradigma.

(Guba & Lincoln, 1994, p. 105)

Qui di seguito sono sinteticamente descritte le assunzioni ontologiche, epistemologiche e metodologiche che caratterizzano i paradigmi di ricerca sopra riportati, sulla base dei lavori di Guba (1990), Guba e Lincoln (1994), Denzin e Lincoln (2011).

3.6.1 Paradigma positivista

Ontologia: realismo ingenuo. Si assume che esista una realtà al di fuori dell'essere umano e della sua volontà, governata da leggi naturali immutabili che l'essere umano è in grado di comprendere (realismo ingenuo). Il compito dello scienziato è quello di scoprire la "vera" natura della realtà e come la realtà funzioni "veramente", allo scopo di prevedere e controllare i fenomeni naturali. La conoscenza delle leggi che la governano è convenzionalmente espressa attraverso delle generalizzazioni, di cui alcune assumono la forma di leggi di causa-effetto.

Epistemologia: dualista e oggettivista. Si assume che il ricercatore e l'oggetto di studio siano entità indipendenti, ovvero che il ricercatore sia in grado di studiare l'oggetto senza influenzarlo e senza esserne influenzato, adottando varie strategie per eliminare, o almeno ridurre, le eventuali interazioni con l'oggetto.

Metodologia: sperimentale e manipolativa. Se esiste una realtà guidata da leggi naturali, il ricercatore deve comportarsi in modo tale da porre le domande direttamente alla natura e deve permettere alla natura di rispondergli direttamente. Il ricercatore, per così dire, deve stare dietro un muro di vetro unidirezionale e osservare la natura. In particolare, il ricercatore positivista si focalizza sulla verifica di ipotesi. Le ipotesi sono espresse in forma proposizionale e sono sottoposte a verifiche empiriche (metodologia sperimentale) in condizioni altamente controllate (metodologia manipolativa) per evitare eventuali distorsioni o fattori di disturbo.

3.6.2 Paradigma post-positivista

Ontologia: realismo critico. Si assume l'esistenza di una realtà governata da leggi naturali che possono essere comprese soltanto in modo imperfetto e probabilistico, a

causa di errori umani, inevitabili, di variabili nascoste e della mancanza di assoluti in natura (realismo critico). La realtà rimane tuttavia “là fuori”.

Epistemologia: dualista/oggettivista modificata. Il dualismo tra ricercatore e oggetto di studio è in gran parte abbandonato; l’oggettività è soltanto un ideale regolativo. È possibile approssimare (mai conoscere completamente) la realtà. L’interazione tra il ricercatore e l’oggetto di studio è mantenuta al minimo. La validità della ricerca è stabilita dalla comunità di ricerca, non dai soggetti studiati.

Metodologia: sperimentale/manipolativa modificata. Enfatizza il multiplismo critico (una forma elaborata di triangolazione) come modo per falsificare (anziché verificare) le ipotesi. Poiché l’oggettività non può mai essere raggiunta, il ricorso a differenti fonti (dati, ricercatori, teorie, metodi etc.) riduce la probabilità di interpretazioni distorte. La metodologia mira a correggere alcuni squilibri interni al paradigma (come tra rigore e rilevanza, tra precisione e ricchezza, tra eleganza e applicabilità, tra scoperta e verifica), conducendo indagini in ambienti più naturali, raccogliendo più informazioni situazionali e reintroducendo la scoperta come elemento d’indagine. Il tutto è realizzato in gran parte attraverso un maggior uso di tecniche qualitative.

3.6.3 Paradigma critico

Ontologia: realismo storico. Si assume l’esistenza di una realtà che può essere compresa, ma soltanto come realtà storica o virtuale; una realtà che in passato era plastica, ma che con il tempo si è modellata su un insieme di fattori sociali, politici, economici, culturali, etnici e di genere; si è infine cristallizzata (reificata) in una serie di strutture che sono (impropriamente) considerate “reali”, ovvero naturali e immutabili. Si assume dunque che la realtà sia costituita da strutture storicamente situate che, in assenza di una loro profonda comprensione, sono considerate limitative e restrittive come se fossero entità reali. Alla base del paradigma critico vi è la lotta per l’uguaglianza e la giustizia sociale. La conoscenza è considerata come un mezzo per liberare gli oppressi e migliorare la condizione umana.

Epistemologia: transazionale e soggettivista. Si assume che la conoscenza sia mediata da valori e quindi dipendente da valori. In particolare, la ricerca che caratterizza il paradigma critico è ideologicamente orientata. Il ricercatore e l’oggetto di studio sono

collegati in modo interattivo ai risultati di ricerca, anzi, questi ultimi sono una creazione del processo stesso di interazione tra il ricercatore e l'oggetto di studio (epistemologia transazionale). I risultati di ricerca sono dunque mediati sia dai valori del ricercatore, sia dai valori delle altre persone coinvolte nella ricerca (epistemologia soggettivista). Ciò che può essere conosciuto è strettamente intrecciato all'interazione tra il ricercatore e l'oggetto di studio. L'ontologia si fonde qui con l'epistemologia, mettendo in seria discussione la tradizionale distinzione tra ontologia ed epistemologia.

Metodologia: dialogica e dialettica. La natura transazionale della ricerca, ideologicamente orientata, del paradigma critico si focalizza sul dialogo tra il ricercatore e i soggetti della ricerca; il dialogo deve essere di natura dialettica allo scopo di eliminare false consapevolezze e facilitare la trasformazione delle strutture storicamente costituite.

3.6.4 Paradigma costruttivista

Ontologia: relativista. Si assume che esistano realtà sociali multiple prodotte dall'intelletto umano; più precisamente, si assume che le realtà esistano sotto forma di costruzioni mentali multiple, socialmente ed esperienzialmente basate, locali e specifiche (sebbene diversi elementi siano condivisi da molti individui e attraversino le culture), dipendenti per forma e contenuto dalle singole persone o dai gruppi di persone che le possiedono. In altre parole, si assume che la realtà, così come la conosciamo, sia costruita intersoggettivamente attraverso i significati e gli accordi sviluppati socialmente ed esperienzialmente. La conoscenza è dunque una costruzione umana che non può mai essere assunta come vera; essa è problematica e in continua evoluzione. Si costruisce conoscenza attraverso le esperienze vissute e attraverso le interazioni con gli altri membri della società. Il ricercatore deve dunque partecipare al processo di ricerca insieme ai soggetti della ricerca, perché la conoscenza prodotta possa riflettere le loro realtà. Diverse teorie possono, in linea di principio, spiegare uno stesso insieme di fatti. Nessuna spiegazione può essere univoca.

Epistemologia: transazionale e soggettivista. Si assume che la conoscenza sia prodotta dall'interazione tra il ricercatore e l'oggetto di studio. I risultati di ricerca sono dunque una creazione di tale processo di interazione. Scompare anche qui, come nel paradigma critico, la distinzione convenzionale tra ontologia ed epistemologia.

Metodologia: ermeneutica e dialettica. Le costruzioni individuali sono stimulate e migliorate attraverso l'interazione tra il ricercatore e le persone coinvolte nella ricerca. Tali costruzioni sono interpretate utilizzando tecniche ermeneutiche convenzionali e sono tra loro confrontate e contrastate attraverso uno scambio dialettico. In particolare, il ricercatore costruttivista cerca di individuare i tipi di costruzioni che esistono e cerca di generare una o più costruzioni sulle quali il consenso sia il più elevato possibile. Questo processo ha dunque due aspetti: uno ermeneutico e l'altro dialettico. L'aspetto ermeneutico, che Bagni (2009a, 2009b, 2009c) descrive e analizza in profondità, anche come nuova prospettiva per la didattica della matematica (in particolare come chiave di lettura dei ruoli del discente e del docente), consiste nel descrivere le costruzioni individuali nel modo più accurato possibile, con tecniche specifiche; a tale scopo, il processo interpretativo si fonda sulla nozione di *circolo ermeneutico*: per comprendere la parte (una frase specifica, una parola pronunciata o un atto), il ricercatore deve cogliere il tutto (il complesso delle intenzioni, convinzioni e desideri, o l'intero testo scritto, il contesto istituzionale, la pratica, la forma di vita, il gioco di linguaggio etc.), e viceversa (Schwandt, 2000).³⁹ L'aspetto dialettico consiste nel confrontare e contrastare le costruzioni individuali (incluse quelle del ricercatore) in modo da raggiungere un ampio accordo. Lo scopo finale è quello di produrre una o più costruzioni condivise che siano più solidamente fondate e articolate delle precedenti (inclusa quella del ricercatore).

3.6.5 Paradigma partecipativo⁴⁰

Ontologia: soggettiva-oggettiva. Si assume che esista un cosmo già dato, ovvero una realtà primordiale, nel quale la mente partecipa attivamente. Ciò che emerge come

³⁹ Il concetto di "circolo ermeneutico" è stato sviluppato soprattutto da Martin Heidegger (1889 – 1976) e da Hans-Georg Gadamer (1900 – 2002). È però già Friedrich Schleiermacher (1768 – 1834) ad evidenziare la natura circolare del comprendere (Bagni, 2009c) e a gettare le basi di una teoria dell'interpretazione (ermeneutica). L'ermeneutica tradizionale è un approccio all'interpretazione dei testi scritti (soprattutto di religione, di diritto e di letteratura) che mette in rilievo come i pregiudizi e le conoscenze precedenti modellino il processo interpretativo. L'ermeneutica moderna estende il concetto di "testo" per includere nel processo interpretativo sia le forme verbali che le forme non verbali della comunicazione, sia i discorsi che le azioni, oltre agli aspetti precedenti che influenzano la comunicazione (presupposizioni, pregiudizi e conoscenze precedenti). È in particolare Ricoeur (1971) a estendere i principi ermeneutici dell'interpretazione dei testi delle scienze umane all'interpretazione dell'oggetto delle scienze umane: l'azione significativa (Kvale & Brinkmann, 2009).

⁴⁰ Denzin e Lincoln (2011) asseriscono che il paradigma partecipativo è stato loro suggerito da Heron e Reason (1997).

realtà è il frutto di una interazione tra il cosmo e il modo in cui la mente si impegna in esso. La nozione di realtà è dunque soggettiva-oggettiva, co-creata dalla mente e dal cosmo circostante. In modo analogo al costruttivismo, si considera la realtà come socialmente costruita.

Epistemologia: soggettività critica e quattro modi di conoscere. La soggettività critica è uno stato di consapevolezza sulle modalità di conoscenza, che include l'esperienza condivisa, il dialogo, il feedback e lo scambio con gli altri. Si assumono in particolare quattro modalità di conoscenza: esperienziale, presentazionale, proposizionale e pratica. La conoscenza esperienziale è soggettiva-oggettiva, è relativa a colui che conosce e al cosmo dato; significa incontro diretto, faccia a faccia; è tacita, intuitiva; è un conoscere attraverso risonanza empatica, partecipativa con ciò che è presente. La conoscenza presentazionale emerge e si fonda sulla conoscenza esperienziale; è simbolizzata in forme d'arte grafiche, plastiche, musicali, vocali e verbali. La conoscenza proposizionale è il sapere in termini concettuali. La conoscenza pratica è il saper fare qualcosa, un'abilità o una competenza.

Metodologia: forme collaborative di ricerca-azione. La metodologia è basata sulla collaborazione di tutte le persone coinvolte nella ricerca, che sono assunte sia come co-ricercatori sia come co-soggetti della ricerca. I "co-ricercatori" sono anche i "co-soggetti". La ricerca è fatta non dai ricercatori su altre persone o su di loro, ma dalle persone tra loro (Heron & Reason, 1997).

La Tabella 3.1, ricavata da Denzin e Lincoln (2011, pp. 102-105) aggiungendo l'ultima riga (assiologia) che gli autori trattano separatamente in una tabella successiva (più ricca di dettagli), riassume le assunzioni ontologiche, epistemologiche, metodologiche e assiologiche dei cinque paradigmi sopra descritti.

Tabella 3.1

Paradigmi di ricerca

<i>Paradigma</i>	Positivista	Post-positivista	Critico	Costruttivista	Partecipativo
<i>Ontologia</i>	Realismo ingenuo – realtà “reale” ma comprensibile.	Realismo critico – realtà “reale” ma comprensibile soltanto in modo imperfetto e probabilistico.	Realismo storico – realtà virtuale modellata da valori sociali, politici, culturali, economici, etnici, e di genere; cristallizzata nel tempo.	Relativismo – realtà co-costruite locali e specifiche.	Realtà partecipativa – realtà soggettiva-oggettiva, cosmo dato e co-creato dalla mente.
<i>Epistemologia</i>	Dualista/ oggettivista; risultati veri.	Dualista/ oggettivista modificata; tradizione/ comunità critica; verità probabile dei risultati.	Transazionale/ soggettivista; risultati mediati da valori.	Transazionale/ soggettivista; risultati co-creati.	Soggettività critica in transazione partecipativa con il cosmo; epistemologia estesa alla conoscenza esperienziale, proposizionale, e pratica; risultati co-creati.
<i>Metodologia</i>	Sperimentale/ manipolativa; verifica di ipotesi; metodi principalmente quantitativi.	Sperimentale/ manipolativa modificata; multiplismo critico; falsificazione di ipotesi; può includere metodi qualitativi.	Dialogica/ dialettica.	Ermeneutica/ dialettica.	Partecipazione politica nella ricerca-azione collaborativa; primato della pratica; uso di un linguaggio fondato su un contesto esperienziale comune.
<i>Assiologia</i>	Il ricercatore rimane distante dall’oggetto o soggetto della ricerca in modo da non influenzarlo.	Il ricercatore deve cercare di ottenere una migliore comprensione della realtà, che sia la più vicina possibile alla verità, attraverso l’uso della statistica che spieghi e descriva ciò che è conosciuto come realtà.	Il ricercatore cerca di cambiare l’istruzione esistente così come le politiche e le pratiche delle altre istituzioni sociali. Cerca di condurre la ricerca in modo da migliorare la giustizia sociale e rimuovere le barriere e le altre influenze negative associate all’oppressione sociale.	La conoscenza proposizionale, transazionale è strumentalmente utile come mezzo per l’emancipazione sociale, che è un fine in sé, e di per sé di grande valore.	La conoscenza pratica su come operare con un equilibrio di autonomia, cooperazione e gerarchia in una cultura è un fine in sé, è di per sé di grande valore.

Nota. Tabella adattata da Denzin e Lincoln (2011, pp. 102-105).

In sintesi, i paradigmi positivista e post-positivista sono caratterizzati da un'ontologia realista (il primo) e realista critico (il secondo), da epistemologie oggettiviste, da metodologie sperimentali o quasi-sperimentali (quando i fattori di disturbo non sono totalmente controllabili) quantitative e da metodologie qualitative rigorosamente definite. Per entrambi i paradigmi lo scopo principale della ricerca è la spiegazione, la previsione e il controllo dei fenomeni, siano essi fisici o umani.

Il paradigma critico, che è alla base di ricerche ideologicamente orientate, privilegia un'ontologia materialista-realista, ovvero considera la realtà come modellata da valori sociali, politici, culturali, economici, etnici e di genere; è caratterizzato da epistemologie soggettivistiche (ricercatore e soggetti coinvolti co-creano le conoscenze) e da metodologie naturalistiche (di solito etnografiche) di tipo dialogico-dialettico. Lo scopo della ricerca è la critica e la trasformazione delle strutture sociali, politiche, culturali, economiche, etniche e di genere (cioè legate ai ruoli maschili e femminili) che vincolano l'umanità.

Il paradigma costruttivista assume un'ontologia relativista (che porta all'idea di realtà multiple), un'epistemologia soggettivista e metodologie di tipo ermeneutico-dialettico. Lo scopo della ricerca è la comprensione, la ricostruzione o l'ampliamento delle costruzioni che le persone (incluso il ricercatore) possiedono inizialmente, allo scopo di arrivare a costruzioni sulle quali il consenso sia il più ampio possibile, costruzioni sempre e comunque aperte a revisioni e a nuove interpretazioni.

Il paradigma partecipativo assume un'ontologia soggettivo-oggettiva, un'epistemologia soggettivistica critica che privilegia la conoscenza pratica e metodologie basate su forme partecipative di ricerca-azione che prevedono un rapporto di collaborazione e di confronto fra co-ricercatori.

3.6.6 *Paradigma pragmatista*

Un paradigma trasversale a quelli sopra elencati è quello pragmatista, che ha origine dai lavori di Charles Sanders Peirce (1839 – 1914), William James (1842 – 1910) e John Dewey (1859 – 1952) (Johnson & Onwuegbuzie, 2004). Il pragmatismo enfatizza il primato della pratica e il valore d'uso delle idee e delle teorie prodotte dalla comunità dei ricercatori. Le assunzioni ontologiche, epistemologiche e metodologiche di tale

paradigma sono qui di seguito sinteticamente descritte, sulla base dei lavori di Johnson e Onwuegbuzie (2004) e di Creswell (2009).

Ontologia: realismo-relativismo. Rifiuta il tradizionale dualismo tra realismo e relativismo, assumendo una posizione moderata riguardo a tutti i dualismi filosofici (razionalismo vs. empirismo, soggettivismo vs. oggettivismo, apparenza vs. realtà etc.), sulla base di come essi funzionano nella risoluzione di problemi. Riconosce comunque l'esistenza e l'importanza sia del mondo fisico o naturale sia del mondo sociale e psichico che include linguaggi, cultura, istituzioni umane e pensieri soggettivi (Johnson & Onwuegbuzie, 2004). Il ricercatore pragmatista non assume dunque una posizione netta circa l'esistenza di un mondo esterno indipendente o dipendente dalla mente. Si muove liberamente dal realismo o realismo critico (rispettivamente) del positivismo e post-positivismo, al relativismo del costruttivismo. Si focalizza non sulla "realtà" o "verità", ma su "ciò che funziona" come verità riguardo alle domande di ricerca prese in esame. In ogni caso considera l'essere umano come socialmente e storicamente situato, in grado di conoscere e di controllare il mondo soltanto parzialmente.

Epistemologia: soggettivista-oggettivista. La conoscenza è considerata sia come costruita sia come basata sulla realtà del mondo di cui abbiamo esperienza e in cui viviamo (Johnson & Onwuegbuzie, 2004). Nella ricerca si accetta sia il punto di vista oggettivistico (indipendenza dell'oggetto di studio dal ricercatore) sia quello soggettivistico (stretta relazione tra l'oggetto di studio e il ricercatore). Ci si sposta dal dualismo tra ricercatore e oggetto di studio (considerate come due entità indipendenti, non influenzabili l'un l'altra) del positivismo, all'inseparabilità del ricercatore dall'oggetto di studio (per la loro forte interazione) del costruttivismo. Si assume che gli eventi o gli oggetti possano essere soggetti a molteplici descrizioni o interpretazioni; le loro rappresentazioni o misure non possono dunque essere considerate come "vere". La ricerca non è né libera da valori (come nel positivismo e post-positivismo) né interamente vincolata a valori (come nel costruttivismo). In essa è comunque centrale la *riflessività*, ovvero il processo di riflessione critica sul tipo di conoscenza prodotta dalla ricerca e sul modo in cui tale conoscenza è stata prodotta.

Metodologia: fondata sulle domande di ricerca. Il ricercatore pragmatista si focalizza sulle domande di ricerca e utilizza differenti metodi, di tipo qualitativo e quantitativo, per ottenere risposte alle domande di ricerca; si parla in tal caso di *ricerca con metodi misti* (*mixed methods research*). I metodi sono mescolati in modo da ottenere le migliori

possibilità di risposta alle domande di ricerca. In altri termini, il ricercatore sceglie i metodi, le tecniche e le procedure di ricerca che più soddisfano le esigenze e gli scopi della sua ricerca (par. 3.8.1).

Il paradigma pragmatista si fonda evidentemente sulla *massima pragmatica* formulata da Peirce nei termini seguenti: “Considerate quali effetti che potrebbero *concepibilmente* avere conseguenze pratiche voi *concepite* che gli oggetti della vostra concezione abbiano. Allora, la vostra *concezione* di quegli effetti è la totalità della vostra *concezione* dell’oggetto” (CP 5.438, 1905).

Johnson e Onwuegbuzie (2004) evidenziano che, sulla base della *massima, metodo o regola pragmatica*, il significato o valore di verità di un’espressione è determinato dalle esperienze o conseguenze pratiche dell’uso di o della fiducia in quell’espressione. La massima pragmatica, utilizzata per determinare il significato di parole, concetti, affermazioni, idee o convinzioni, è formulata da Peirce anche nei termini seguenti: “Per accertare il significato di una concezione intellettuale si dovrebbe considerare quali conseguenze pratiche potrebbero concepibilmente derivare necessariamente dalla verità di quella concezione; e l’insieme di queste conseguenze costituirà l’intero significato della concezione” (CP 5.8-9, ca. 1905). Nelle parole di James (1907): “Il metodo pragmatico (...) è cercare di interpretare ogni nozione individuando le sue rispettive conseguenze pratiche”.

Sulla base dei lavori di Peirce e di James, Dewey (1920) introduce la *regola pragmatica* nei termini seguenti: “per scoprire il significato di un’idea [occorre] cercare le sue conseguenze” (p. 94). Dewey (1916) evidenzia però che il pragmatismo di Peirce si differenzia da quello di James soprattutto per la maggiore enfasi che Peirce attribuisce alla pratica (intesa come condotta) rispetto alle conseguenze particolari, ovvero alla dimensione della generalità rispetto a quella della singolarità: “il pragmatismo identifica il significato con la formazione di un’abitudine (*habit*), o modo di agire, avente la più grande generalità possibile o la più ampia applicazione ai particolari” (Dewey, 1916, p. 711). In altri termini, secondo Peirce, sono le conseguenze che si manifestano nel consolidamento di abitudini di elevata generalità, ovvero di modi di agire adeguati in un elevato numero di situazioni, a determinare il significato di un oggetto o di un concetto associato alla sua produzione, non l’efficacia strumentale dell’oggetto o del concetto nella gestione di situazioni particolari. Il significato di un oggetto o di un concetto è determinato non dalla sua efficacia nei risultati ottenuti ma

dalla generalità incorporata nelle abitudini d'azione (Frega, 2004).⁴¹ Da qui il pragmatismo di Dewey,

ovvero il progetto di rendere le pratiche umane più intelligenti [ovvero controllate (almeno parzialmente) dall'esercizio del pensiero], anziché, come vorrebbe la vulgata, di rendere più pratica l'intelligenza. Ed è per questa ragione che la nozione di pratica presuppone in Dewey in modo necessario il riferimento alla dimensione della generalità. (Frega, 2004, par. 2.3)

In questa prospettiva, il pratico non è opposto al teorico, all'astratto, ma è unità di pensiero e azione, di soggettivo e oggettivo; il pratico è ciò che ha luogo nell'esperienza, ovvero denota l'esperienza nel suo carattere di forma di attività riflessiva mediata da segni e artefatti che incorporano forme di pensiero culturalmente e storicamente situate. Miettinen (2000) afferma che nel pensiero di Dewey "l'esperienza comprende le forme oggettive di interazione tra gli esseri umani e l'ambiente, includendo tutti gli artefatti e le cose coinvolte nell'interazione. (...) la cultura comprende sia gli artefatti sia gli esseri umani nella loro reciproca interazione" (p. 70).

Per Dewey, non c'è esperienza senza la mediazione del pensiero, così come non c'è pensiero senza la mediazione dell'azione (Frega, 2004). Il pensiero, come la conoscenza, è una forma di attività, una pratica; esso è integrato nell'esperienza e mediato da strumenti (che includono teorie, ipotesi, abitudini...) che permettono di riorientarlo e svilupparlo (Hickman, 1990).

Miettinen (2001) rileva che Dewey, pur sottolineando la continuità tra il biologico e il culturale, riconosce la differenza qualitativa del comportamento intelligente, tipicamente umano, ottenuta con l'uso intenzionale di artefatti. Dewey asserisce però che:

Esiste sempre una discrepanza tra i mezzi che vengono utilizzati e le conseguenze che ne derivano. Alcune volte questa discrepanza è così seria che il suo risultato è ciò che si chiama sbaglio o errore. La discrepanza esiste perché i mezzi utilizzati (...) devono essere presenti e reali, mentre le

⁴¹ Ed è proprio la mancata comprensione di questa generalità, tutt'altro che semplice e spontanea, a rendere concettualmente inefficace, se non inopportuno o pericoloso, l'uso di alcuni strumenti (artefatti) nei processi di insegnamento-apprendimento della matematica (su questo tema si veda: D'Amore, Fandiño Pinilla, & Iori, 2013).

conseguenze da raggiungere sono future. I mezzi presenti reali sono il risultato di condizioni passate e di attività passate. Essi operano con successo, o “correttamente”, (1) nella misura in cui le condizioni ambientali esistenti sono molto simili a quelle che hanno contribuito in passato alla formazione di abitudini, e (2) nella misura in cui le abitudini mantengono la flessibilità sufficiente per riadattarsi facilmente a nuove condizioni.⁴²
(Dewey, 1938/1986, p. 39)

Dewey, come rileva Miettinen (2001), considera la discrepanza tra i mezzi e le conseguenze come una fonte importante di cambiamento e di sviluppo.

Nelle teorie socio-culturali che si basano sul pensiero di Vygotskij, la mediazione semiotica (attraverso segni, strumenti, artefatti ...) diventa l'aspetto su cui si focalizza tutto lo studio dei processi sociali e cognitivi di costruzione di significato degli oggetti culturali (si veda per esempio: Cole, 1996; Engeström, Miettinen, & Punamäki, 1999; Wertsch, 1998; Wertsch, del Rio, & Alvarez, 1995). In particolare, gli artefatti sono concepiti sia come aspetti del mondo materiale assunti nelle azioni umane come modalità di coordinamento con l'ambiente fisico e sociale, sia come parti integranti e inscindibili del funzionamento umano (Wertsch, del Rio, & Alvarez, 1995). Essi hanno sia una natura strutturale (legata alle loro proprietà fisiche) sia una natura funzionale (relativa agli usi intenzionali, agli scopi e ai loro contesti d'uso) tra loro strettamente intrecciate, anzi inscindibili (si veda anche: Pohjola, 2007).

La massima o regola pragmatica, trasferita alla ricerca con metodi misti, si può allora esprimere nella forma seguente: “Per rispondere alle tue domande di ricerca, scegli la combinazione o miscela di metodi o procedure che funziona meglio” (Johnson & Onwuegbuzie, 2004, p. 17). La ricerca con metodi misti richiede che il ricercatore mescoli o combini approcci, metodi, tecniche, concetti o linguaggi di ricerca qualitativa e quantitativa, contemporaneamente o sequenzialmente, in un singolo studio o in due o più studi correlati. Questa metodologia “legittima l'uso di molteplici approcci per

⁴² La discrepanza asserita da Dewey (1938/1986) tra i mezzi che vengono utilizzati e le conseguenze che ne derivano rinvia immediatamente a ciò che Federigo Enriques (1942), con lo pseudonimo di Adriano Giovannini, chiama “errore”, ovvero a ciò che “non appartiene né alla facoltà logica né all'intuizione, [ma] s'introduce nel momento delicato del loro raccordo”. L'errore, per Enriques, non è qualcosa che occorre semplicemente evitare, correggere o eliminare, ma un'importante occasione per apprendere, uno strumento di grande valore didattico, oltre che di grande efficacia per lo sviluppo del pensiero scientifico. Esso deriva da una discrepanza tra facoltà logica, o dimostrazione, e intuizione, tra una conoscenza che ha avuto successo in passato, in una data situazione, e una nuova situazione, un nuovo fatto o problema da affrontare.

rispondere alle domande di ricerca, piuttosto che restringere o vincolare le scelte del ricercatore (per esempio, rifiuta il dogmatismo)” (Johnson & Onwuegbuzie, 2004, p. 17).

In generale, un approccio qualitativo alla ricerca con metodi misti privilegia i metodi qualitativi; i metodi quantitativi giocano un ruolo ausiliario in un quadro generale qualitativo interpretativista (Howe, 2004).

Il ricercatore pragmatista, in ogni caso, lo ricordiamo, ritiene più fondamentali le domande di ricerca. I metodi di ricerca devono *seguire*, venir dopo, le domande di ricerca, in modo da ottenere le migliori opportunità di risposta.

Diversi lavori relativi alla ricerca con metodi misti (per esempio: Greene, 2006; Johnson & Onwuegbuzie, 2004; Johnson, Onwuegbuzie, & Turner, 2007) utilizzano la parola *metodi* (in metodi misti) in senso ampio, con il significato di *metodologia*.

Crediamo che l’uso e un’ampia interpretazione della parola *metodi* (in metodi misti) permetta l’inclusione delle questioni e delle strategie che circondano i metodi di raccolta dei dati (per esempio: questionari, interviste, osservazioni), i metodi di ricerca (per esempio: esperimenti, etnografia), e le relative questioni filosofiche (per esempio: ontologia, epistemologia, assiologia). (Johnson, Onwuegbuzie, & Turner, 2007, p. 118)

Altri lavori (per esempio: Giddings & Grant, 2006; Hesse-Biber, 2010; Hesse-Biber & Leavy, 2011), come è stato evidenziato in precedenza (par. 3.5), non condividono l’identificazione tra metodo e metodologia perché considerano la metodologia come un tipo di prospettiva teorica che orienta la ricerca, e i metodi di raccolta e di analisi dei dati (materiali empirici) come strumenti “a-teorici e a-metodologici” (Giddings & Grant, 2006, p. 5). Dunque: “i metodi misti costituiscono uno strumento di ricerca, piuttosto che una vera e propria metodologia” (Giddings & Grant, 2006, p. 4).

La decisione sul metodo o sull’insieme dei metodi da utilizzare in una ricerca è strettamente legata alle domande di ricerca, oltre che a fattori contingenti (vincoli economici e di tempo) e contestuali (vincoli situazionali); le domande di ricerca sono a loro volta legate alle assunzioni ontologiche, epistemologiche e metodologiche del ricercatore (che includono anche i valori etici, ovvero i principi morali che guidano o influenzano la ricerca), oltre che all’esame della letteratura collegata al problema di ricerca. Nel processo di ricerca vi è dunque un’interazione dinamica tra le domande di

ricerca, le assunzioni ontologiche, epistemologiche e metodologiche del ricercatore, e i metodi di ricerca, sulla base dell'esame della letteratura e dei fattori contingenti e contestuali alla ricerca (Figura 3.2).

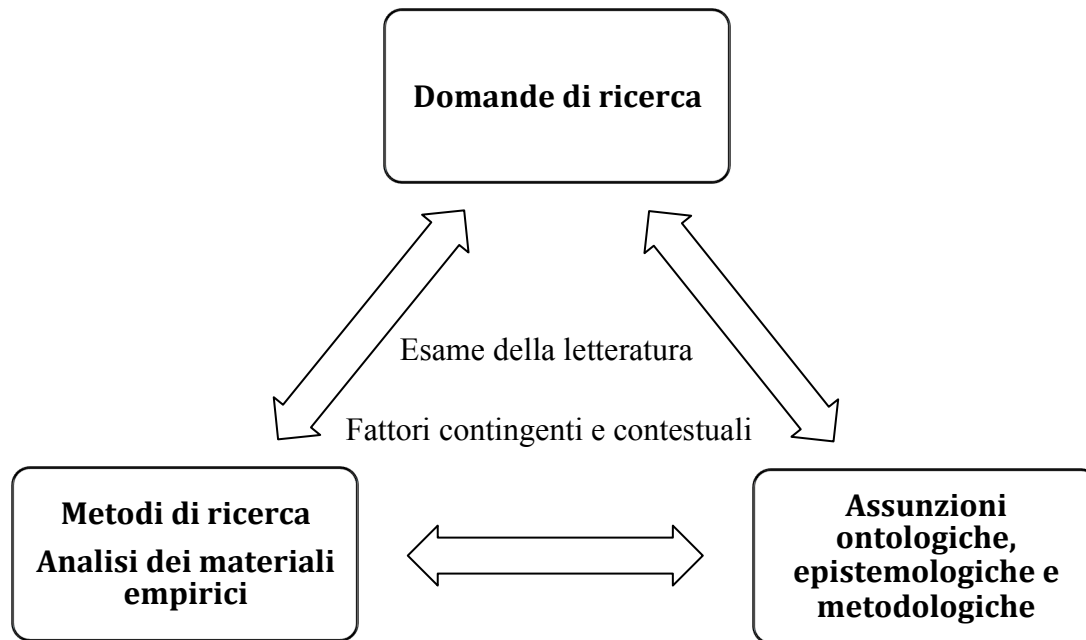


Figura 3.2 *Processo di ricerca qualitativa*

3.7 Approcci interpretativi alla ricerca qualitativa

Qui di seguito sono sintetizzati gli approcci interpretativi più rilevanti per questa ricerca: indagine ermeneutica, indagine naturalistica, interazionismo simbolico, fenomenologia, fenomenografia.

3.7.1 *Indagine ermeneutica*

L'ermeneutica è un approccio all'interpretazione dei testi (intesi modernamente in senso ampio, cioè includendo discorsi e azioni, forme scritte e orali, forme verbali e non verbali della comunicazione) che evidenzia come i preconcetti, i pregiudizi, le presupposizioni, le conoscenze precedenti e in generale i contesti storico-culturali modellino il processo interpretativo (Palmer, 1969). Lo scopo dell'interpretazione ermeneutica è quello di arrivare a una comprensione il più possibile condivisa del

significato di un testo. L'interpretazione ermeneutica prevede un continuo avanti e indietro tra le parti e il tutto di un testo, sulla base del *circolo ermeneutico*: per comprendere la parte (una frase specifica, una parola pronunciata, un'azione), il ricercatore deve cogliere il tutto (l'intero testo scritto, il complesso delle intenzioni, convinzioni e desideri, il contesto istituzionale, la pratica, il gioco di linguaggio etc.), e viceversa (par. 3.6.4). Nella tradizione ermeneutica questa circolarità non è vista come un "circolo vizioso", bensì come un "circolo virtuoso", o una spirale: il problema non è uscire dal circolo, ma nello starvi dentro nella maniera giusta (Heidegger, 1962). Tra i canoni di interpretazione dei testi sviluppati all'interno della tradizione ermeneutica, oltre a quello appena descritto che coinvolge il circolo ermeneutico, Kvale e Brinkmann (2009) segnalano anche i seguenti:

- L'interpretazione del significato termina quando si raggiunge una "buona Gestalt", una unità interna del testo, che sia libera da contraddizioni logiche.
- L'interpretazione di un testo non è priva di presupposizioni. L'interprete non può "uscire" dalla tradizione di comprensione in cui vive. L'interprete di un testo può, tuttavia, cercare di rendere le sue presupposizioni esplicite e acquisire consapevolezza di come alcune formulazioni di una domanda determinino particolari tipi di risposta.

Come evidenzia anche Schwandt (2000), nell'atto di interpretare, di "prendere qualcosa *come* qualcosa" (p. 194), il pregiudizio non è considerato come una caratteristica che un interprete deve sforzarsi di eliminare o di controllare in modo da ottenere una "chiara" comprensione delle cose.

Crede che questo sia possibile è come assumere che le tradizioni e i pregiudizi associati che modellano i nostri sforzi di comprendere possano essere facilmente controllati o messi da parte a nostro piacimento. Ma nella filosofia ermeneutica, la tradizione non è qualcosa di esterno, di oggettivo, e di passato, qualcosa di cui possiamo liberarci o da cui possiamo allontanarci (Gadamer, 1975). (Schwandt, 2000, p. 194)

La tradizione è fortemente presente in ogni processo di comprensione e condiziona pesantemente le nostre interpretazioni. Dunque il processo di comprensione non presuppone la messa da parte o il controllo del proprio punto di vista, dei propri pregiudizi. Al contrario, esso richiede l'assunzione dei propri pregiudizi. Non occorre liberarsi da tutti i pregiudizi ma occorre esaminare i pregiudizi acquisiti o ereditati per

modificare quelli che ostacolano la comprensione. “Il testo non è un ‘oggetto là fuori’ indipendente dalle sue interpretazioni e in grado di servire da arbitro della loro correttezza (...) il significato è negoziato reciprocamente nell’atto di interpretazione; non è semplicemente scoperto” (Connolly & Keutner, 1988, p. 17).

Per la filosofia ermeneutica il significato non è necessariamente costruito, ma negoziato e sempre in divenire. Il fatto che noi comprendiamo e interpretiamo ogni cosa alla luce dei nostri pregiudizi, che mutano anch’essi nel tempo, non significa che le nostre interpretazioni siano arbitrarie e distorsive.

Ciò che le “cose in sé” dicono è differente alla luce dei nostri orizzonti mutevoli e delle differenti domande che impariamo a fare. Questa analisi del carattere continuo e aperto di ogni comprensione e interpretazione può essere intesa come distorsiva soltanto se assumiamo che il testo posseda qualche significato in sé che possa essere isolato dai nostri pregiudizi. Ma questo è proprio ciò che Gadamer nega, e questo gioco tra le “cose in sé” e i nostri pregiudizi ci aiuta a comprendere perché “la comprensione deve essere concepita come parte del processo del divenire del significato”. Il significato è sempre *in divenire* attraverso l’“evento” della comprensione. (Bernstein, 1983, p. 139)

Nell’atto di comprensione, come rileva Schwandt (2000), non ci sono due fasi nettamente separate, cioè prima l’acquisizione di comprensione e poi l’applicazione di quella comprensione. La comprensione è essa stessa un tipo di esperienza pratica nel e del mondo che, in parte, costituisce i tipi di persone che noi siamo nel modo (Schwandt, 2000).

Lo scopo dell’ermeneutica, come evidenzia Gadamer (1975), non è quello di sviluppare un metodo o una procedura di comprensione, ma di chiarire le condizioni nelle quali la comprensione ha luogo, ovvero di comprendere ciò che è implicato nello stesso processo di interpretazione.

3.7.2 Indagine naturalistica

L’indagine naturalistica ha tra le sue principali caratteristiche, come spesso si afferma, quella di essere svolta in un ambiente naturale, non artificiale (da qui il termine *naturalistica*). Wilson (1977) rileva in particolare che molti ricercatori assumono che il

comportamento umano sia significativamente influenzato dal contesto in cui esso si manifesta e quindi considerano essenziale lo studio del comportamento nei contesti naturali in cui il comportamento si manifesta. Questa costituisce per Wilson (1977) la prospettiva o ipotesi *naturalistico-ecologica*, evidenziata anche da Nunan (1992), sulla base di quella di Wilson (1977), nei termini seguenti:

La prospettiva naturalistico-ecologica ha, come suo elemento centrale, la convinzione che il contesto in cui il comportamento si manifesta abbia un'influenza significativa sul comportamento stesso. Ne segue che se vogliamo conoscere il comportamento, dobbiamo indagarlo nei contesti naturali in cui si manifesta, piuttosto che nel laboratorio sperimentale (...) la ricerca deve allora essere condotta nei contesti che assomigliano a quelli che il ricercatore desidera generalizzare. (Nunan, 1992, p. 53)

Wilson (1977) rileva anche che la situazione sperimentale – per esempio: il questionario, l'intervista, il laboratorio – costituisce un contesto unico nel suo genere, con le sue dinamiche e le sue influenze sul comportamento. Tra queste influenze, il lavoro di Rosenthal e Rosnow (1969) evidenzia in particolare, relativamente al ruolo del soggetto di ricerca: la diffidenza circa l'intento della ricerca, la percezione di un comportamento opportuno o atteso, la particolare relazione interpersonale con il ricercatore e il desiderio di essere valutati positivamente. Più in generale, il *contratto sperimentale* ovvero l'insieme di attese, clausole, regole, valori impliciti ed espliciti, che modellano l'interazione tra il soggetto della ricerca e il ricercatore, ha un ruolo non trascurabile, anzi cruciale, in quanto può alterare significativamente il comportamento sul quale la ricerca intende focalizzare tutta la sua attenzione (si veda per esempio: Epstein, Suedfeld, & Silverstein, 1973).⁴³ Nel lavoro di Rosenthal e Rosnow (1969) si cerca di fornire dei modi per monitorare e controllare queste influenze. Wilson (1977) afferma che il metodo più comune utilizzato dai ricercatori per superare le difficoltà generate dalle situazioni sperimentali è quello di studiare il fenomeno naturalisticamente e in modo non intrusivo (Webb, Campbell, Schwartz, & Sechrest, 1966). In altre parole, “l'unica richiesta che l'ipotesi ecologica fa è che il comportamento sia studiato sul campo” (Wilson, 1977, p. 249). Tuttavia, come rilevano Guba e Lincoln (1982), questa caratteristica non permette da sola di cogliere in pieno il

⁴³Sul ruolo del contratto sperimentale e sulla sua interrelazione con il contratto didattico nelle situazioni di insegnamento-apprendimento della matematica si veda: Schubauer-Leoni (1988).

significato dell'indagine naturalistica. Qui di seguito sono sintetizzate anche altre caratteristiche dell'indagine naturalistica, descritte da Guba e Lincoln in termini di assiomi in diversi loro lavori (per esempio: Guba & Lincoln, 1982; Lincoln & Guba, 1985). Esse riguardano:

1. *La natura della realtà (ontologia)*: Si assume l'esistenza di realtà multiple che possono essere studiate soltanto olisticamente, nei loro contesti naturali.
2. *La relazione tra il soggetto conoscente e l'oggetto da conoscere (epistemologia)*: Il ricercatore e l'oggetto di studio interagiscono influenzandosi a vicenda, soprattutto quando l'oggetto di studio è un altro essere umano.
3. *La possibilità di generalizzare*: Lo scopo della ricerca è quello di sviluppare un insieme di conoscenze *ideografiche*, cioè di cogliere l'individualità dei fenomeni, la loro unicità e irripetibilità, non leggi generali. Le generalizzazioni sono impossibili in quanto i fenomeni non sono indipendenti dal tempo e dal contesto. È tuttavia possibile una qualche trasferibilità delle ipotesi di lavoro da una situazione a un'altra, a seconda del grado di somiglianza temporale e contestuale che queste presentano.
4. *La possibilità di legami causali*: Non c'è alcun modo certo di determinare relazioni di causa-effetto. Le cause e gli effetti sono tra loro fortemente intrecciati, anzi indistinguibili. Il ricercatore naturalista preferisce pensare in termini di molteplici fattori, eventi o processi interagenti che modellano l'azione e che sono parti di essa; egli può al più stabilire inferenze plausibili.
5. *Il ruolo dei valori nella ricerca (assiologia)*: I naturalisti presuppongono che la ricerca sia inevitabilmente fondata sui sistemi di valori che caratterizzano il ricercatore, l'oggetto di studio, il paradigma scelto, i metodi selezionati e i contesti sociali e culturali.

Tali assiomi, come evidenziano gli autori, hanno importanti implicazioni nella conduzione della ricerca. In particolare, l'indagine naturalistica si svolge in un ambiente naturale o nel contesto dell'oggetto sul quale la ricerca focalizza la sua attenzione. I fenomeni o i comportamenti non possono essere compresi al di fuori dei loro contesti. Il ricercatore naturalista considera sé stesso e gli altri esseri umani come i principali strumenti di raccolta dei dati perché nessun altro strumento (non umano) ha la capacità che ha l'essere umano di adattarsi alla varietà delle realtà che incontra, di utilizzare la

conoscenza tacita (difficilmente esprimibile attraverso il linguaggio)⁴⁴ oltre a quella proposizionale (cioè rappresentabile mediante proposizioni) e di comprendere il significato delle diverse interazioni con l'oggetto di studio e il ruolo degli strumenti che modellano tali interazioni.

Il ricercatore naturalista preferisce analizzare i dati nel corso del processo di ricerca, non appena questi si rendono disponibili, elaborare una prima interpretazione o costruzione teorica, e poi procedere, raccogliere altri dati, rivedere la prima costruzione teorica, poi tornare di nuovo ai dati e così via. La relazione tra la raccolta e l'analisi dei dati è di tipo a spirale e termina quando la costruzione teorica a cui si perviene è valutata sufficiente per o adeguata a descrivere o spiegare i dati disponibili. Si parla in tal caso di *grounded theory* (Glaser & Strauss, 1967), cioè di una teoria basata sui dati e intimamente legata ad essi, in quanto generata nel corso del processo di ricerca attraverso il continuo intreccio di raccolta e analisi dei dati.

3.7.3 *Interazionismo simbolico*

L'interazionismo simbolico si sviluppa negli Stati Uniti nei primi decenni del XX secolo, soprattutto ad opera di George Herbert Mead (1863 – 1931) e di Herbert Blumer (1900 – 1987), sulla base del pragmatismo di Charles Sanders Peirce e di William James. È una prospettiva teorica che pone al centro dell'attenzione l'interazione sociale concepita come interazione simbolica, ovvero come interazione tra individui mediata da simboli (parole, gesti, regole e ruoli), significati e interpretazioni. L'interazionismo simbolico si fonda su tre premesse fondamentali (Blumer, 1969):

- Gli esseri umani agiscono nei confronti delle cose (oggetti fisici, azioni, concetti, idee, situazioni, altri esseri umani ...) sulla base dei significati che attribuiscono a tali cose.
- I significati attribuiti a tali cose derivano o nascono dall'interazione sociale che il singolo ha con i suoi simili.

⁴⁴ L'espressione "conoscenza tacita" (*tacit knowledge*, TK) è stata introdotta da Michael Polanyi (1891 – 1976) (1958) per denotare il fatto che "possiamo conoscere più di quanto possiamo esprimere" ovvero che una componente della conoscenza è altamente personale, contestuale e difficile da comunicare; in altri termini, il linguaggio non è di per sé sufficiente per articolare, codificare o rendere esplicita tutta la conoscenza, che per Polanyi è tacita o radicata nella conoscenza tacita.

- Tali significati sono gestiti e modificati attraverso un processo interpretativo messo in atto dalla persona nell'affrontare le cose che incontra.

Secondo questa prospettiva, le persone interagiscono tra loro sulla base delle interpretazioni che danno alle azioni reciproche. In altri termini, le risposte delle persone non sono semplici reazioni alle azioni altrui ma si basano sui significati attribuiti alle azioni proprie e altrui ovvero su processi di interpretazione. In particolare, le azioni di un individuo nei confronti degli oggetti, delle situazioni, delle azioni, delle idee, degli altri individui con cui interagisce sono mediate dai significati che egli vi attribuisce e questi significati sono prodotti nei processi di interazione sociale ed elaborati e ridefiniti individualmente attraverso processi di interpretazione.

L'interazionismo simbolico assume dunque che le persone agiscano in modo diverso con persone differenti in situazioni differenti, e con i diversi oggetti coinvolti nell'interazione, a seconda dei significati attribuiti alle proprie e altrui azioni, agli oggetti e all'interazione stessa. Le azioni delle persone non sono concepite come risposte differenti a stimoli differenti (come nel caso del comportamentismo). Esse derivano invece dai significati e dalle interpretazioni che le persone attribuiscono alle azioni reciproche, agli oggetti e alle situazioni che incontrano. Tra lo stimolo e la risposta si colloca cioè il simbolo. Mead (1996) lo definisce come un “gesto vocale emesso da un individuo” che “conduce a una determinata risposta in un altro” (p. 125). Esso diventa un “simbolo significativo” quando suscita implicitamente nell'individuo che lo compie le medesime risposte che suscita esplicitamente, o si ritiene che susciti, nell'individuo al quale è indirizzato, anche attraverso la reciproca regolazione delle risposte o delle azioni (Mead, 1966). In altre parole, un gesto vocale diventa un simbolo significativo quando riesce a comunicare qualcosa. Ma per suscitare in un altro individuo le medesime risposte dell'individuo che lo compie, occorre che l'individuo sappia assumere il ruolo dell'altro o agire come l'altro e, allo stesso tempo, controllare le proprie azioni in funzione di quelle dell'altro. L'interazionismo simbolico assume quindi che i significati si costituiscano attraverso le interazioni con le altre persone e che tali interazioni siano mediate da simboli e governate da processi interpretativi.

Riguardo alla natura degli oggetti, Blumer (1969) evidenzia che secondo l'interazionismo simbolico i “mondi” che esistono per gli esseri umani e per i loro gruppi sono composti di “oggetti” prodotti dall'interazione simbolica.

Un oggetto è tutto ciò che può essere indicato, tutto ciò che si addita o a cui ci si riferisce – una nuvola, un libro, un corpo legislativo, un banchiere, una dottrina religiosa, un fantasma, e così via. Per comodità gli oggetti si possono suddividere in tre categorie: (a) oggetti fisici (come sedie, alberi o biciclette); (b) oggetti sociali (come uno studente, un sacerdote, un presidente, una madre o un amico); e (c) oggetti astratti (come principi morali, dottrine filosofiche o idee quali quelle di giustizia, sfruttamento o compassione). Ripeto che un oggetto è tutto ciò che può essere indicato o a cui ci si può riferire. La natura di un oggetto – di qualsiasi oggetto – consiste nel significato che ha per la persona ciò che è un oggetto. (Blumer, 1969, pp. 10-11)

L'attenzione posta sui significati e sui simboli che le persone utilizzano nei processi interpretativi non trascura in ogni caso i ruoli giocati dalle diverse persone coinvolte nelle interazioni sociali. Anzi, per Mead (1934) assumere il ruolo dell'altro è d'importanza decisiva per le interazioni sociali. Come afferma Blumer (1969), per Mead quando una persona è in grado di assumere il ruolo dell'altro (il ruolo di una persona specifica o il ruolo di un gruppo) diventa anche capace di guardare sé stesso dal punto di vista dell'altro, di guardarsi dall'esterno, di diventare oggetto a sé stesso, e di ritornare su sé stesso, quindi di indirizzare il suo processo di comunicazione e di controllare le sue stesse azioni o risposte. In altre parole, quando una persona interpreta un ruolo o si mette al posto di un altro ha la possibilità di comprendere il significato che una data azione può assumere per quella persona. “Questa reciproca assunzione di ruolo è la condizione *sine qua non* della comunicazione e dell'efficacia dell'interazione simbolica” (Blumer, 1969, p. 10).

Utilizzando le tre premesse dell'interazionismo simbolico, si può assumere in particolare che gli insegnanti agiscano nei confronti degli studenti sulla base dei significati che loro attribuiscono agli studenti, ai colleghi, alle amministrazioni scolastiche etc. La ricerca di Pehkonen (1995) conferma tutto ciò, evidenziando come tra i principali fattori che gli insegnanti considerano cruciali per il loro cambiamento vi siano non solo i cambiamenti della società (fattore al quale gli insegnanti fanno maggiormente riferimento), in particolare i cambiamenti nell'organizzazione della scuola (per esempio: classi numerose, risorse finanziarie limitate), ma anche le esperienze con gli studenti in aula (secondo fattore menzionato dagli insegnanti) e le

esperienze con gli amministratori scolastici (terzo fattore menzionato dagli insegnanti). In relazione alla formazione in servizio degli insegnanti, Pehkonen (1995) rileva che:

Per il cambiamento degli insegnanti, sembrano esistere almeno due strategie efficaci: il cambiamento di ruolo e il cambiamento di punto di vista. Il cambiamento di ruolo significa che l'insegnante è costretto a identificarsi con uno studente, per esempio in una simulazione di gruppo. Tale situazione permette all'insegnante di osservare sé stesso dall'esterno. Questo potrebbe di conseguenza causare una perturbazione nel suo pensiero che è un prerequisito per il cambiamento (Shaw *et al.*, 1991). Il cambiamento di punto di vista si può per esempio ottenere lasciando che l'insegnante intervisti in profondità un allievo, per cercare di capire il suo pensiero matematico (e più in generale il suo pensiero). (Pehkonen, 1995, pp. 184-185)

Il cambiamento di ruolo e di punto di vista costituiscono un prezioso punto di partenza per la messa in discussione delle convinzioni e delle pratiche degli insegnanti (da Ponte, Berger, Cannizzaro, Contreras, & Safuanov, 1999; Pehkonen, 1995). In questa ricerca queste due strategie sono state, come vedremo, rielaborate in funzione dei contesti presi in esame per rilevare il punto di vista dell'insegnante e per stimolare, sviluppare o potenziare, da parte dell'insegnante, le pratiche interpretative di tipo semiotico.

3.7.4 Fenomenologia

La fenomenologia si sviluppa contemporaneamente all'interazionismo simbolico, ma la sua matrice è tipicamente europea; si fonda sui lavori di Edmund Husserl (1859 – 1938), Martin Heidegger (1889 – 1976), Jean-Paul Sartre (1905 – 1980), Maurice Merleau-Ponty (1908 – 1961) e Alfred Schütz (1899 – 1959). La fenomenologia studia i fenomeni così come si manifestano alla coscienza, nella loro immediatezza, e le strutture intrinseche della coscienza. La parola *fenomeno* è utilizzata nel senso di “ciò che appare”, in opposizione al *noumeno* kantiano, a “ciò che è al di là dell'apparenza”, al “pensiero della cosa in sé”, ovvero all'essenza pensabile, ma inconoscibile, della cosa in sé. Non è un caso che la fenomenologia sia confluita in parte nell'*esistenzialismo*, il movimento culturale fiorito negli anni '40 e '50 che pone tutta la sua attenzione

sull'individuo considerato nella sua finitezza, sulle esperienze dell'individuo, dunque, sulla problematicità dell'esistenza del singolo individuo.

Al centro della riflessione di Husserl vi è in particolare il concetto di *intenzionalità*. La parola *intenzionalità*, già utilizzata dai filosofi scolastici in epoca medievale, deriva dal verbo latino *intendere*, con il significato di “tendere a”, “dirigere a”, “volgere a” o “mirare a”. Husserl concepisce l'intenzionalità come una proprietà fondamentale della coscienza, ovvero dell'essere “coscioso” o “consapevole” di qualcosa (di un oggetto concreto o astratto, di un evento, di sé stessi, di altre persone etc.). In altri termini, l'attenzione di Husserl è tutta rivolta a quei fenomeni mentali, atti psichici, stati o esperienze mentali, che sono *intenzionali* ovvero che sono diretti a qualche oggetto. Tali fenomeni mentali intenzionali sono detti *atti di coscienza*, o semplicemente *atti intenzionali*. Ogni atto di coscienza (come l'atto di pensare, di percepire, di giudicare, di credere, di sperare o di ricordare) è una rappresentazione di qualcosa che dà senso a quel qualcosa. Questo carattere di rappresentazione della coscienza, il suo essere “di” o “diretta a” qualcosa, è l'intenzionalità (McIntyre & Smith, 1989).

Il carattere intenzionale della coscienza consiste dunque nel suo essere diretta a qualcosa; non vi è coscienza che non sia coscienza di qualcosa. In altri termini, la coscienza può essere pensata soltanto come strettamente legata a, anzi inscindibile da, ciò che si manifesta nell'esperienza del soggetto. In particolare, secondo Husserl ogni atto di coscienza ha un contenuto reale (legato all'esperienza), designato con il termine *noesis* (al plurale: *noeses*), e un contenuto ideale (una struttura astratta comune a diversi atti dello stesso tipo), designato con il termine *noema* (al plurale: *noemata*). Tali termini derivano entrambi dalla parola greca *nous*, che significa “intelletto”. La *noesis* è la parte interpretativa dell'atto, ciò che dà senso o significato all'atto (il simbolizzare, il conoscere, il vedere etc.), mentre il *noema* è il significato, ovvero ciò che è significato nell'atto (ciò che è simbolizzato, conosciuto, visto etc.). *Noesis* e *noema* sono dunque strettamente correlati:

I contenuti concettuali (cioè i significati noetici o *noemata*) risultano sempre da, e sono correlati a, esperienze intenzionali (*noeses*). In altre parole, nessun contenuto concettuale può essere ottenuto senza un'esperienza correlata o che lo accompagni. È per questo che Husserl ha affermato che non vi può essere *noema* senza *noesis*. (Radford, 2006a, p. 49)

Nella ricerca qualitativa, il termine *fenomenologia* indica in generale un interesse alla comprensione dei fenomeni sociali dal punto di vista degli stessi attori e alla descrizione del mondo così come viene vissuto dai soggetti, con l'assunzione che ciò che conta come realtà sia ciò che la gente percepisce che essa sia (Kvale & Brinkmann, 2009). L'approccio fenomenologico si focalizza sul modo in cui le cose appaiono attraverso l'esperienza oppure nella coscienza. Il ricercatore fenomenologico tenta di fornire una descrizione dell'esperienza vissuta che sia la più precisa e completa possibile. Giorgi (1989) evidenzia quattro caratteristiche principali dell'approccio fenomenologico: (1) la descrizione piuttosto che la spiegazione, (2) la *riduzione* fenomenologica (ovvero la sospensione del giudizio circa l'esistenza o la non esistenza del contenuto di un'esperienza), (3) l'indagine sulle relazioni intenzionali tra persone e situazioni, (4) la ricerca dell'essenza, o della struttura, del fenomeno preso in esame, ovvero di ciò che rimane costante nelle variazioni delle forme possibili del fenomeno.

Mortari (2010) evidenzia alcuni principi epistemici fondamentali dell'approccio fenomenologico:

- *cercare l'essenza empirica*: andare alle "cose stesse", ossia risalire dai discorsi e dalle teorie alle cose così come accadono, evitando l'intrusione di pregiudizi e di teorie già date;
- *descrivere con fedeltà*: effettuare una descrizione fedele del fenomeno, o della cosa così come si manifesta, come obiettivo limite (in quanto mai completamente realizzabile), per coglierne l'essenza;
- *cercare conoscenze chiare ed evidenti*: cercare descrizioni il più possibile aderenti alle qualità mutevoli delle cose o dell'esperienza nel suo fluire, senza pretendere di cristallizzarle in concetti precisi e rigorosi;
- *dare attenzione*: dirigere lo sguardo su un fenomeno mantenendolo concentrato su di esso ma sempre aperto, cioè non pre-orientato a cercare qualcosa di preciso, in modo da pervenire a una descrizione fedele del fenomeno, per quanto possibile;
- *riflettere sugli atti cognitivi*: accompagnare l'azione di ricerca con una riflessione sul processo di ricerca, sulla qualità degli atti cognitivi compiuti, e dunque su come si è prestata attenzione ai fenomeni.

3.7.5 *Fenomenografia*

La fenomenografia è un approccio di ricerca che emerge negli anni '70 in Svezia nella ricerca in ambito educativo. Il suo scopo principale è quello di indagare i modi qualitativamente differenti nei quali le persone fanno esperienza, concettualizzano, percepiscono e comprendono i vari aspetti dei fenomeni del mondo circostante (Marton, 1986). La fenomenografia non è interessata soltanto ai fenomeni così come vengono vissuti e pensati oppure agli esseri umani che li vivono o li pensano. Entro l'approccio fenomenografico il pensiero è sempre descritto in termini di ciò che è percepito e pensato; la ricerca non è mai separata dall'oggetto della percezione o dal contenuto del pensiero; si cerca di descrivere un aspetto del mondo così come esso appare all'individuo. Per il fenomenografo non esistono due realtà indipendenti l'una dall'altra, una oggettiva e una soggettiva: l'oggetto e il soggetto non sono separati. C'è soltanto un unico mondo, reale, di cui gli esseri umani fanno esperienza in modi diversi e che comprendono diversamente.

La fenomenografia fornisce descrizioni che sono relazionali, esperienziali, orientate al contenuto e qualitative. La ricerca fenomenografica cerca di individuare le differenze strutturalmente significative tra i modi in cui le persone concepiscono i vari aspetti del loro mondo, ovvero gli aspetti strutturali più essenziali e distintivi della relazione tra l'individuo e il fenomeno. I risultati della ricerca fenomenografica sono le categorizzazioni di descrizioni; le categorie o i sistemi di categorie costituiscono la componente più importante della ricerca fenomenografica (Marton, 1986).

Un'assunzione centrale della fenomenografia è che vi sia un numero finito (limitato) di modi qualitativamente differenti nei quali un fenomeno può essere compreso, e dunque un numero finito di categorie di descrizione dei modi di concepire un fenomeno. Se c'è soltanto un numero finito di modi nei quali un fenomeno può essere compreso, risulta didatticamente importante cercare di rivelare tali modi. Marton (1986) evidenzia che tali modi possono costituire una potente fonte di spiegazione delle differenze qualitative tra i risultati d'apprendimento.

L'approccio fenomenografico è differente da quello fenomenologico. Entrambi condividono il termine "fenomeno" (ciò che appare, che è conoscibile attraverso i sensi), tuttavia mentre la fenomenografia, con il suffisso "grafia", denota un approccio di ricerca che mira a descrivere i modi differenti in cui le persone comprendono un dato fenomeno (Marton, 1981), la fenomenologia, con il suffisso "logia", mira a cogliere

l'essenza del fenomeno. Così, mentre la fenomenografia cerca di caratterizzare le variazioni dell'esperienza, ovvero le variazioni nei modi in cui un fenomeno può apparire, la fenomenologia si focalizza sull'essenza di tutti i modi in cui un fenomeno può essere vissuto, ovvero sull'essenza dell'esperienza, interpretata usualmente come ciò che è comune a differenti forme di esperienza, o come ciò che rimane costante nonostante le variazioni. Ma la differenza più fondamentale tra fenomenologia e fenomenografia è descritta nei termini seguenti:

Edmund Husserl, il padre della fenomenologia, si preoccupava di trovare un'esperienza non influenzata dal pensiero scientifico. Pertanto, egli enfatizzava la distinzione tra esperienza immediata e pensiero concettuale. In un'indagine fenomenologica, noi dovremmo "mettere tra parentesi" l'ultimo e cercare la prima. I fenomenografi non fanno uso di questa distinzione, almeno non come punto di partenza per la ricerca. Noi cerchiamo invece di descrivere le relazioni tra l'individuo e i vari aspetti del mondo circostante, indipendentemente dal fatto che tali relazioni si manifestino sotto forma di esperienza immediata, pensiero concettuale o comportamento fisico. (...) la nostra ipotesi è che ci sia un livello strutturale non influenzato da queste differenze psicologiche. (Marton, 1986, pp. 41-42)

Nella tradizione fenomenografica, dunque, la ricerca si focalizza sui vari modi in cui le persone fanno esperienza di qualcosa, di un problema, di una situazione, del mondo di cui si stanno occupando o in relazione al quale agiscono. Entro l'approccio fenomenografico, l'apprendere, il pensare e il comprendere sono trattati come relazioni tra l'individuo e ciò che è appreso, pensato e compreso.

Se comprendiamo la relazione che esiste tra l'individuo e ciò che egli sta cercando di imparare, le opportunità pedagogiche risultano notevolmente ampliate. Modificando ciò che deve essere imparato o capito, noi modifichiamo la relazione tra l'oggetto dell'apprendimento e l'individuo. (Marton, 1986, pp. 43-44)

Un aspetto centrale, questo, anche in questa ricerca. Riteniamo infatti che la comprensione da parte dell'insegnante del ruolo giocato da una dimensione specifica, relativamente nuova per l'insegnante, del processo di apprendimento della matematica,

quella semio-cognitiva, possa stimolare l'insegnante a studiare o a indagare più in profondità tale dimensione, a cercare di acquisire nuove chiavi di lettura per intervenire in modo più efficace e consapevole sul processo di apprendimento, modificando eventualmente il proprio punto di vista su di esso e, di conseguenza, il processo di apprendimento stesso.

3.8 Metodologia

Le assunzioni metodologiche, insieme alle assunzioni ontologiche ed epistemologiche, di questa ricerca sono state quelle che caratterizzano il paradigma di ricerca pragmatista (par. 3.6.6). La metodologia si è dunque focalizzata sulle domande di ricerca.

Le domande di ricerca (par. 3.2) avevano come scopo principale quello di evidenziare il punto di vista dell'insegnante sugli aspetti semiotici e cognitivi del processo di apprendimento della matematica. I metodi più efficaci per rispondere a tali domande, come si è detto nel paragrafo 3.4, sono di tipo qualitativo. Essi sono stati scelti in modo da ottenere le migliori possibilità di risposta alle domande di ricerca, tenendo conto dei fattori contingenti (vincoli economici e di tempo) e contestuali (vincoli situazionali) alla ricerca.

Nel processo di ricerca, l'approccio semio-cognitivo alla didattica della matematica è stato integrato localmente (Prediger, Bikner-Ahsbahr, & Arzarello, 2008; Radford, 2008b) sia con gli approcci semiotici e interpretativi descritti nel paragrafo 2.3, sia con gli approcci interpretativi alla ricerca qualitativa menzionati nel paragrafo 3.7, ovvero con l'indagine ermeneutica, l'indagine naturalistica, l'interazionismo simbolico, la fenomenologia e la fenomenografia.

L'indagine ermeneutica (par. 3.7.1) evidenzia il ruolo dei preconcetti, dei pregiudizi, delle presupposizioni, delle conoscenze precedenti, e in generale dei contesti storico-culturali, in ogni processo interpretativo; richiede un continuo avanti e indietro tra le parti e il tutto di un testo (inteso in senso ampio): per comprendere la parte (una frase scritta, una parola pronunciata, un'azione), il ricercatore deve cogliere il tutto (l'intero testo, l'insieme delle convinzioni e concezioni, il contesto istituzionale, la pratica, il gioco di linguaggio etc.), e viceversa, sulla base del circolo ermeneutico.

L'approccio naturalistico (par. 3.7.2) colloca la ricerca in un ambiente naturale, non artificiale. Il ricercatore e l'oggetto o il soggetto dello studio interagiscono continuamente influenzandosi a vicenda. Lo scopo della ricerca è quello di cogliere l'individualità dei fenomeni, di stabilire non leggi generali ma inferenze plausibili, in quanto frasi, parole e azioni possono avere molteplici chiavi di lettura. Le ipotesi di ricerca possono tuttavia essere trasferite da una situazione a un'altra sulla base del grado di somiglianza contestuale che le situazioni presentano.

L'interazionismo simbolico (par. 3.7.3) ha un ruolo fondamentale in qualsiasi ricerca che si interessi di questioni di tipo semiotico. In particolare, l'interazione tra ricercatore, insegnante e allievo è concepita come mediata da simboli (parole, gesti, regole e ruoli), significati e interpretazioni. Si assume che le persone agiscano in modo diverso con persone differenti in situazioni differenti, e con i diversi oggetti coinvolti nell'interazione, a seconda dei significati attribuiti alle proprie e altrui azioni, agli oggetti e all'interazione stessa. Come nell'interazionismo simbolico, inoltre, non si trascura l'importanza dell'interpretazione dei ruoli giocati dalle diverse persone coinvolte nelle interazioni sociali, in particolare l'importanza del mettersi al posto di un altro per comprendere i significati che una data azione o cosa può assumere per un'altra persona. Questo aspetto, come si vedrà meglio in seguito, ha interessato da vicino anche questa ricerca.

Il punto di vista dell'insegnante è inscindibile da una comprensione del modo in cui l'insegnante concepisce, o coglie nella loro essenza, i fenomeni semiotici che riguardano l'insegnamento-apprendimento della matematica. L'approccio fenomenologico (par. 3.7.4) ha avuto dunque un ruolo rilevante anche in questa ricerca, insieme all'approccio fenomenografico (par. 3.7.5), che fornisce strumenti molto utili ed efficaci per evidenziare le differenze strutturalmente significative tra i modi in cui gli insegnanti concepiscono l'apprendimento.

3.8.1 *Disegno di ricerca*

Denzin e Lincoln (2011) descrivono il disegno di ricerca come “un insieme flessibile di linee guida che connettono i paradigmi teorici, prima, alle strategie di ricerca e, poi, ai metodi di raccolta del materiale empirico” (p. 14). In particolare:

Una strategia di ricerca si riferisce a un insieme di abilità, assunzioni e pratiche che il ricercatore utilizza per passare dal suo paradigma al mondo empirico. (...) le strategie di ricerca connettono anche il ricercatore a specifici metodi di raccolta e di analisi dei materiali empirici. (Denzin & Lincoln, 2011, p. 14)

Una strategia di ricerca è un piano generale di ricerca che si deve complementare con i metodi che guidano la ricerca a un livello più dettagliato (per esempio, con interviste, osservazioni, questionari).

In questa ricerca il disegno di ricerca ha permesso di connettere il paradigma pragmatista (par. 3.6.6) alle strategie e ai metodi di ricerca ritenuti più efficaci per rispondere alle domande di ricerca. Si è trattato di un disegno di ricerca con metodi misti (par. 3.5).

Johnson e Onwuegbuzie (2004) evidenziano che la maggior parte dei disegni di ricerca con metodi misti può essere sviluppata a partire da due tipologie principali di ricerca di tipo misto:

- *ricerca a modello misto (mixed-model research)*, nella quale si mescolano approcci qualitativi e quantitativi all'interno di una o più fasi (*within-stage*) o tra almeno due fasi (*across-stage*) del processo di ricerca;
- *ricerca a metodo misto (mixed-method research)*, ovvero l'inclusione di una fase quantitativa e di una fase qualitativa, tra loro separate, nella ricerca nel suo complesso.

La Figura 3.3, ricavata da Johnson e Onwuegbuzie (2004) con alcune modifiche di editing, evidenzia sei disegni di ricerca a modello misto (i disegni dal 2 al 7), individuati anche da Tashakkori e Teddlie (1998), come gli stessi Johnson e Onwuegbuzie (2004) precisano in una nota.

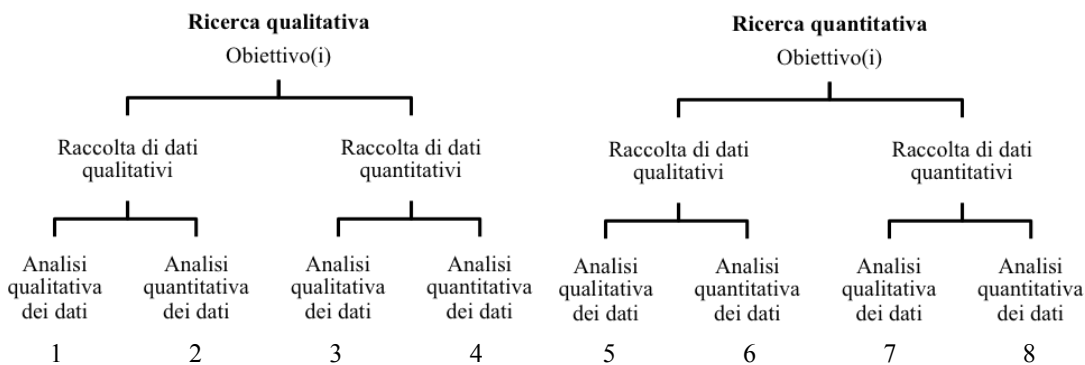


Figura 3.3 Disegni di ricerca monometodo (1 e 8) e a modello misto (2, 3, 4, 5, 6 e 7)

Nota. Figura adattata da Johnson e Onwuegbuzie (2004, p. 21).

Una ricerca nella quale si propone, per esempio, un questionario costituito da domande a risposta chiusa (per la raccolta di dati quantitativi) e da domande a risposta aperta (per la raccolta di dati qualitativi) è una ricerca a modello misto all'interno di una fase.

Un esempio di ricerca a modello misto tra le fasi è invece una ricerca di tipo esplorativo (con obiettivi di tipo qualitativo) nella quale il ricercatore, dopo aver effettuato alcune interviste non strutturate o un *focus group* (par. 3.5) (per la raccolta di dati qualitativi), calcola le percentuali dei differenti tipi di risposta (analisi quantitativa dei dati). In tal caso, il mescolamento ha luogo tra le fasi del processo di ricerca, in particolare, dalla raccolta dei dati (qualitativi) all'analisi (quantitativa) dei dati.

I disegni di ricerca a metodo misto si distinguono in base a due principali dimensioni:

1. importanza attribuita alle componenti qualitativa e quantitativa della ricerca (priorità dell'una rispetto all'altra oppure uguale status);
2. ordine temporale (simultaneità o sequenzialità) delle fasi qualitativa e quantitativa.

La Tabella 3.2, tratta da Johnson e Onwuegbuzie (2004), evidenzia i nove disegni a metodo misto che si ottengono in corrispondenza delle due dimensioni sopra riportate.

Tabella 3.2

Disegni di ricerca a metodo misto

		Ordine di tempo	
		Simultanei	Sequenziali
Importanza (status) delle componenti qualitativa e quantitativa	Uguale status	QUAL + QUAN	QUAL → QUAN QUAN → QUAL
	Priorità di una componente rispetto all'altra	QUAL + quan	QUAL → quan
		QUAN + qual	quan → QUAN
			QUAN → qual quan → QUAL

Nota. “Qual” sta per qualitativo, “quan” sta per quantitativo, “+” sta per simultaneo, “→” sta per sequenziale; le lettere maiuscole denotano una priorità elevata, le lettere minuscole denotano una priorità bassa delle componenti qualitativa e quantitativa di uno studio in un approccio alla ricerca di tipo misto.

Tabella adattata da Johnson e Onwuegbuzie (2004, p. 22).

Per costruire un disegno di ricerca a metodo misto, il ricercatore deve dunque prendere due decisioni di fondo: (a) sull'importanza da attribuire alle due fasi, cioè se assegnare o no priorità a una fase rispetto all'altra; (b) sull'ordine temporale delle due fasi, cioè se condurre le due fasi nello stesso tempo (simultaneamente) oppure una prima dell'altra (sequenzialmente).

Un disegno a metodo misto, a differenza di quello a modello misto, include un mini-studio quantitativo e un mini-studio qualitativo all'interno di una stessa ricerca. Tuttavia, per poter parlare di disegno “a metodo misto”, i risultati di ricerca devono essere mescolati o integrati in qualche punto; per esempio la fase qualitativa potrebbe essere condotta per informare la fase quantitativa, sequenzialmente; oppure, se le fasi quantitative e qualitative sono condotte simultaneamente, i risultati devono essere integrati almeno durante l'interpretazione dei risultati di ricerca (Johnson & Onwuegbuzie, 2004).

In particolare, quan → QUAL denota un disegno sequenziale in cui lo studio nel suo complesso è principalmente qualitativo ma è preceduto da una fase quantitativa. Una ricerca a metodo misto di questo tipo è, per esempio, una ricerca che prevede la somministrazione di un questionario costituito da domande a risposta chiusa (per la

raccolta di dati quantitativi) seguita da interviste individuali (per la raccolta di dati qualitativi), il tutto entro un approccio qualitativo alla ricerca di tipo misto.

QUAL → quan denota invece un disegno sequenziale in cui lo studio nel suo complesso è principalmente qualitativo ma è seguito da una fase quantitativa. Una ricerca a metodo misto di questo tipo è, per esempio, una ricerca che prevede la somministrazione di un questionario costituito da domande a risposta aperta (per la raccolta di dati qualitativi) che permetta anche l'individuazione di alcune variabili da quantificare con la somministrazione di un secondo questionario costituito da domande a risposta chiusa (per la raccolta di dati quantitativi), il tutto entro un approccio qualitativo alla ricerca di tipo misto.

Come affermano Johnson e Onwuegbuzie (2004), il ricercatore può creare disegni di ricerca più specifici e complessi di quelli mostrati in Figura 3.3 e in Tabella 3.2: disegni a metodo misto con più di due fasi (per esempio: QUAL → quan → QUAL), oppure disegni che includano entrambe le tipologie, sia quella a modello misto sia quella a metodo misto, per rispondere alle domande di ricerca nel migliore dei modi possibili e per rendere credibili, attendibili o legittimi le interpretazioni e i risultati di ricerca (sul problema della validità della ricerca mista si veda: Onwuegbuzie & Johnson, 2006).

L'approccio qualitativo, di natura pragmatista, a questa ricerca si è basato su un disegno con metodi misti (Figura 3.4), che ha incluso le due tipologie di ricerca di tipo misto sopra descritte:

- a modello misto, in quanto sono stati mescolati approcci qualitativi e quantitativi sia all'interno delle fasi di raccolta e di analisi dei dati, sia tra le fasi, cioè dalla raccolta all'analisi dei dati;
- a metodo misto, in quanto sono stati inclusi nella medesima ricerca uno studio qualitativo e uno studio quantitativo aventi lo stesso ordine temporale, cioè simultanei.

In ogni fase della ricerca lo studio quantitativo (quan) è stato al servizio di e secondario a quello qualitativo (QUAL) dominante.

Lo studio qualitativo e lo studio quantitativo condotti simultaneamente (QUAL + quan) hanno permesso di identificare il campione per lo studio qualitativo successivo e

di circoscrivere i problemi da esplorare ulteriormente, più in profondità, nel corso di tale studio (QUAL).

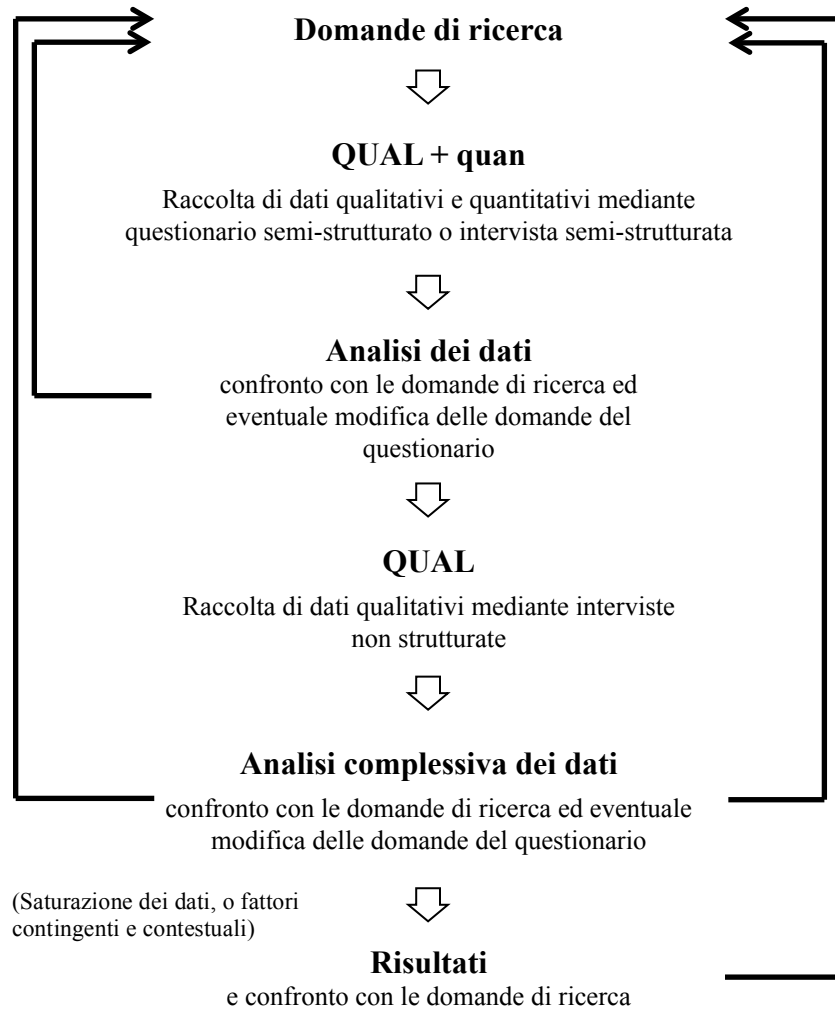


Figura 3.4 Disegno di ricerca con metodi misti di tipo: *QUAL+quan* ⇒ *QUAL*

3.8.2 Metodi

Come riportato in Figura 3.4, per la raccolta dei dati sono stati utilizzati tre metodi di rilevazione: un questionario semi-strutturato o un'intervista semi-strutturata (par. 3.5) nella prima fase (QUAL + quan), e interviste non strutturate nella seconda fase (QUAL).

Il questionario, costituito da domande a risposta aperta (cioè con risposte non precodificate) e da domande a risposta chiusa (cioè che prevedevano da parte del partecipante la scelta di una risposta tra quelle proposte dal ricercatore), è stato adattato al tipo di scuola (primaria, secondaria di primo e di secondo grado) di appartenenza dell'insegnante, ed è stato inviato per posta elettronica. Il suo scopo principale era

quello di stimolare nell'insegnante una riflessione su alcune importanti questioni strettamente legate alle domande di ricerca (par. 3.2); una riflessione sulla propria pratica che potesse in qualche modo evidenziare il suo punto di vista, o la sua consapevolezza, della dimensione semio-cognitiva (par. 2.2.7) implicata nel processo di apprendimento della matematica.

Una volta letto il questionario, il partecipante aveva la possibilità di rispondere autonomamente alle domande del questionario, oppure di rispondere alle domande a fianco del ricercatore, attraverso un'intervista semi-strutturata, nel corso della quale poteva avere dei chiarimenti sulle domande. In ogni caso, ad ogni partecipante è stata comunicata la piena disponibilità del ricercatore a intervenire in qualsiasi momento per chiarire le domande del questionario mediante posta elettronica.

Le risposte al questionario sono state utilizzate per organizzare due tipologie di interviste non strutturate: interviste dirette (cioè "a faccia a faccia") e interviste indirette (mediante posta elettronica), in modo da raccogliere ulteriori informazioni o chiarimenti sulle questioni prese in esame o eventualmente sollevate tramite il questionario.

Attraverso le interviste si è cercato di scavare in profondità le questioni sollevate dal questionario, di far emergere il punto di vista dell'insegnante su tali questioni e le eventuali debolezze, lacune, o incoerenze nelle risposte fornite. Le interviste faccia a faccia hanno avuto una durata media di 60 minuti (nel caso dell'intervista semi-strutturata) o di 15 minuti (nel caso dell'intervista non strutturata) e sono state registrate, con il consenso degli intervistati.

Tutti i partecipanti alla ricerca, tranne una, hanno risposto autonomamente in forma scritta alle domande del questionario. Successivamente, quasi tutti sono stati sottoposti a un'intervista dettagliata, personale, faccia a faccia o indiretta (mediante posta elettronica). Solo una partecipante ha preferito rispondere alle domande del questionario alla presenza del ricercatore, nel corso di un'intervista semi-strutturata che ha sostituito il questionario.

Per rilevare il punto di vista dell'insegnante sono state utilizzate le due strategie suggerite da Pehkonen (1995) e descritte in precedenza (par. 3.7.3): il cambiamento di ruolo e, in caso di necessità, il cambiamento di punto di vista. Nel *cambiamento di ruolo* si chiede all'insegnante di identificarsi con uno studente. Nel *cambiamento di punto di vista* si permette all'insegnante, se non di intervistare direttamente, almeno di assistere all'intervista di uno o due studenti, fatta dal ricercatore, in modo da

comprendere più in profondità il punto di vista dello studente, in particolare le interpretazioni che esso fornisce delle rappresentazioni semiotiche prese in esame.

3.8.3 *Questionario di ricerca*

Il questionario semi-strutturato somministrato agli insegnanti di scuola primaria (Appendice B.1), di scuola secondaria di primo grado (Appendice B.2) e di scuola secondaria di secondo grado (Appendice B.3) era costituito da dieci domande articolate in più quesiti, in gran parte a risposta aperta. Alcune delle domande erano formulate in modo da permettere al partecipante di aggiungere alternative o commenti.

Nella costruzione del questionario si è cercato di tradurre l'obiettivo della ricerca in domande specifiche in modo da ottenere i dati necessari per testare le ipotesi e rispondere alle domande di ricerca. Si è dunque cercato di esplorare in profondità il punto di vista dell'insegnante sugli aspetti semio-cognitivi del processo di apprendimento della matematica, la sua consapevolezza al riguardo o le sue convinzioni. Per evitare interpretazioni errate o fuorvianti delle domande del questionario è stato specificato in forma sintetica, nella parte introduttiva del questionario, il senso attribuito all'espressione "oggetto matematico", ben consapevoli del fatto che possa non essere condiviso da tutti gli insegnanti.

La lunghezza del questionario non era trascurabile. Costituiva uno dei suoi difetti, ma anche, per certi aspetti, uno dei suoi pregi. La compilazione di un questionario con domande molto articolate richiede da una parte una particolare attenzione e dunque un certo tempo per completarlo, cosa che può demotivare e allontanare il partecipante con poco tempo a disposizione. Dall'altra parte, un questionario con domande molto articolate permette di far emergere il punto di vista o l'esperienza personale del partecipante in modo più chiaro e preciso, stimolando una riflessione più ampia e profonda. In ogni caso, per la compilazione del questionario ai partecipanti è stato concesso tutto il tempo necessario, anche mesi.

Il questionario ha subito una sola modifica nel corso della prima fase. La modifica ha riguardato l'espressione "registro di rappresentazione semiotica" che è stata in alcuni punti opportunamente sostituita dall'espressione "campo di studio", per evitare la confusione tra il registro nel quale le rappresentazioni semiotiche sono prodotte e l'ambito matematico, in francese: *cadre* (Douady, 1986), nel quale le rappresentazioni

semiotiche sono utilizzate. Questa modifica non ha però avuto effetti significativi nelle risposte degli insegnanti. Un'insegnante partecipante a cui era stata comunicata la modifica ha affermato che la cosa non era per lei rilevante, quindi non ha modificato le proprie risposte.

Le domande a risposta aperta hanno costituito la componente principale, più ampia e importante, del questionario. Le domande erano tutte strettamente legate, da differenti punti di vista, alle domande di ricerca (par. 3.2). Per la delicatezza, complessità e novità dei problemi che toccavano, hanno richiesto da parte di tutti i partecipanti una preliminare riflessione personale, in alcuni casi molto lunga, come da loro stessi dichiarato.

La versione definitiva del questionario proposto agli insegnanti di scuola primaria (Appendice B.1) è riportato anche qui di seguito, per comodità.

Questionario per l'insegnante di scuola primaria

Considera uno dei seguenti campi di studio della matematica in cui si utilizzano diversi registri di rappresentazione: discorsivi (come la lingua naturale oppure la scrittura simbolica) e non discorsivi (figure geometriche, grafici, disegni etc.):

c^1 : geometria piana

c^2 : geometria solida

c^3 : aritmetica

c^4 : linguaggio degli insiemi

c^5 : trasformazioni geometriche nel piano

c^6 : calcolo combinatorio

c^7 : calcolo delle probabilità

c^8 : statistica

c^9 : algebra

c^{10} : geometria analitica

c^{11} : altro campo di studio della matematica:

Nel campo di studio considerato, individua una particolare rappresentazione R, in un dato registro (discorsivo o non discorsivo), di un oggetto matematico O che un determinato studente X riconosce o gestisce con molta difficoltà, pur impegnandosi costantemente nelle attività matematiche.⁴⁵

[Se non ti viene in mente alcuna rappresentazione nel campo di studio scelto, prova a cambiare campo. Se anche cambiando campo non ti viene in mente nulla, ti invitiamo a segnalare la cosa al ricercatore. Potrai, se vorrai, collaborare con il ricercatore a una breve indagine tra i tuoi studenti. Dovrai scegliere uno o due studenti, abbastanza motivati, curiosi e studiosi, che abbiano voglia di mettersi in gioco per la ricerca, lasciandosi intervistare dal ricercatore. Spiega

⁴⁵ Per “oggetto matematico” intendiamo, in linea generale, tutto ciò a cui si fa riferimento, in vario modo, nelle attività matematiche, quando si costruisce, si comunica o si apprende matematica (D'Amore & Godino, 2006). Non essendo possibile un accesso sensibile, cioè attraverso i sensi, agli oggetti matematici, ma solo a loro rappresentazioni semiotiche in diversi registri, il cuore di tutte le attività matematiche è costituito dalle rappresentazioni e dalle loro trasformazioni (all'interno di uno stesso registro, oppure da un registro a un altro, senza modificare gli oggetti denotati). Dal punto di vista cognitivo, un “oggetto matematico” è proprio l'invariante di rappresentazioni semiotiche prodotte in registri differenti (Duval, 2006a, 2006b) nelle attività matematiche. Le attività matematiche, come D'Amore e Godino (2006) evidenziano, possono focalizzarsi su:

- *elementi linguistici* (termini, espressioni, notazioni, grafici etc.) nei loro differenti registri
 - *problemi/situazioni* (che originano o motivano una data attività matematica)
 - *concetti* (introdotti mediante definizioni o descrizioni)
 - *proposizioni* (enunciati sui concetti etc.)
 - *procedure* (algoritmi, operazioni, tecniche di calcolo etc.)
 - *argomenti* (enunciati usati per validare o spiegare proposizioni e procedure, deduttivi o di altro tipo etc.)
- tra loro in relazione.

bene loro che l'intervista non ha alcuno scopo valutativo. Il ricercatore porrà loro alcune domande, preventivamente concordate con te, adatte al loro livello scolastico. Al termine dell'indagine, tu e il ricercatore discuterete i risultati ottenuti].

1.
 - a) A quale oggetto matematico O hai pensato?
 - b) Quale campo di studio c^i ($i = 1, 2, 3, \dots, 11$) hai scelto?
 - c) Lo studente X frequenta la classe:

2. Quale rappresentazione R dell'oggetto matematico O lo studente X riconosce o gestisce con molta difficoltà, pur impegnandosi molto nelle attività matematiche?

3. Su quali aspetti della rappresentazione R lo studente X focalizza maggiormente la sua attenzione? Scegli tra i seguenti (sono ammesse più scelte) completando dove richiesto:
 - a) aspetti concreti di R , legati alla sua forma, dimensione, colore, posizione etc., in particolare:
.....
 - b) somiglianza di R con qualcos'altro di concreto, in particolare con:
.....
 - c) aspetti strutturali, come quelli legati:
 - c1) alla costruzione di R
(per esempio: Come disegnare o costruire una figura? Come tracciare un grafico? Come scrivere o ricavare una formula, un'espressione, un'equazione, una funzione etc.?), in particolare:
.....
 - c2) a proprietà;
 - c3) a teoremi;
 - c4) ad altro:
.....
 - d) aspetti legati al linguaggio quotidiano o all'esperienza sensibile, in particolare:
.....
 - e) aspetti di rinvio a qualcos'altro (a un'operazione da svolgere, a un'altra rappresentazione, a un altro oggetto matematico, a proprietà etc.), in particolare:
.....

- f)** aspetti convenzionali, legati a
- f1)** notazioni;
 - f2)** definizioni;
 - f3)** regole o vincoli d'uso;
 - f4)** altro:.....

- g)** altri aspetti:
.....

4. A quali aspetti indicati al punto 3 (dei quali si riportano qui di seguito soltanto le corrispondenti lettere) ritieni che siano da ricondurre, in massima parte, le difficoltà che incontra lo studente X nell'uso della rappresentazione R? Ci sono altri aspetti non inclusi nell'elenco che tu ritieni importanti? Se sì, segnala tali aspetti alla fine del seguente elenco:

- a)
- b)
- c1)
- c2)
- c3)
- c4)
- d)
- e)
- f1)
- f2)
- f3)
- f4)
- g)
- Altri aspetti:

5. Un altro studente Y, della stessa classe di X, non incontra alcuna difficoltà, o almeno incontra soltanto alcune difficoltà che tu ritieni poco importanti, nell'uso della rappresentazione R. Su quali aspetti di R lo studente Y focalizza maggiormente la sua attenzione?

Scegli tra i seguenti (sono ammesse più scelte) completando dove richiesto:

- a)** aspetti concreti di R, legati alla sua forma, dimensione, colore, posizione etc., in particolare:
.....

b) somiglianza di R con qualcos'altro di concreto, in particolare con:
.....

c) aspetti strutturali, come quelli legati:

c1) alla costruzione di R
(per esempio: Come disegnare o costruire una figura? Come tracciare un grafico? Come scrivere o ricavare una formula, un'espressione, un'equazione, una funzione etc.), in particolare:
.....

c2) a proprietà;

c3) a teoremi;

c4) ad altro:
.....

d) aspetti legati al linguaggio quotidiano o all'esperienza sensibile, in particolare:
.....

e) aspetti di rinvio a qualcos'altro (a un'operazione da svolgere, a un'altra rappresentazione, a un altro oggetto matematico, a proprietà etc.), in particolare:
.....

f) aspetti convenzionali, legati a

f1) notazioni;

f2) definizioni;

f3) regole o vincoli d'uso;

f4) altro:.....

g) altri aspetti:
.....

6. A quali aspetti indicati al punto 5 (dei quali si riportano qui di seguito soltanto le corrispondenti lettere) ritieni si possa ricondurre, in massima parte, la capacità dello studente Y di utilizzare la rappresentazione R? Ci sono altri aspetti non inclusi nell'elenco che tu ritieni importanti? Se sì, segnala tali aspetti alla fine del seguente elenco:

a)

b)

c1)

c2)

c3)

- c4)
- d)
- e)
- f1)
- f2)
- f3)
- f4)
- g)
- Altri aspetti:

7. La forma della rappresentazione R può, secondo te, indurre lo studente X a confondere la rappresentazione R con un'altra rappresentazione S dello stesso oggetto O oppure di un altro oggetto O'?
- Se sì, con quale rappresentazione S di quale oggetto O oppure O' lo studente X tende a confondere la rappresentazione R?
- Se no, perché?

Pensa ora ad un'altra rappresentazione T (dello stesso oggetto O oppure di un altro oggetto O') in uno dei campi di studio c^i sopra indicati, che sia meno problematica, rispetto ad R, per lo studente X. [T può anche coincidere con S della domanda 7].

8. A quale rappresentazione T e a quale campo di studio c^i hai pensato? A quale oggetto matematico (O oppure O') la rappresentazione T fa riferimento?
9. Quali sono le caratteristiche della rappresentazione T che, secondo te, rendono T meno problematica della rappresentazione R?

Mettiti ancora nei panni del tuo studente X...

10. Tra le seguenti rappresentazioni semiotiche (R_1, R_2, \dots), scegli quella (RX) che ritieni più problematica per lo studente X (sono ammesse più scelte). In corrispondenza di RX individua, sempre dal punto di vista dello studente X:
- I. le eventuali rappresentazioni semiotiche che per lo studente X mostrano una certa somiglianza (sotto qualche aspetto) con RX;
 - II. le eventuali rappresentazioni con le quali RX può essere confusa;
 - III. le eventuali convenzioni (regole, vincoli, limiti d'uso, ...) per l'uso di RX, delle quali lo studente X è ben consapevole;

- IV.** i principali contesti nei quali lo studente X utilizza la rappresentazione RX;
- V.** la complessità d'interpretazione e d'uso (in relazione ai contesti considerati) di RX, per lo studente X, scegliendo tra: (1) per nulla complessa / (2) poco complessa / (3) abbastanza complessa / (4) molto complessa / (5) non so.

completando le righe della tabella corrispondente alla tua scelta:

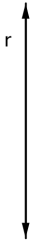
R₁	=
I.	Somiglianze con: R _{1_1} : R _{1_2} : R _{1_3} : ...
II.	Confusione con: R _{1_a} : R _{1_b} : R _{1_c} : ...
III.	Eventuali convenzioni per l'uso di R ₁ , che lo studente X conosce:
IV.	Contesto 1 di R ₁ : Contesto 2 di R ₁ : Contesto 3 di R ₁ : ...
V.	Complessità d'interpretazione e d'uso di R ₁ in relazione al: contesto 1 del punto IV: contesto 2 del punto IV: contesto 3 del punto IV: ... scegliendo tra: (1) per nulla complessa / (2) poco complessa / (3) abbastanza complessa / (4) molto complessa / (5) non so.

R₂	“Il doppio di $\frac{5}{6}$ ”
I.	R _{2_1} : R _{2_2} : R _{2_3} : ...
II.	Confusione con: R _{2_a} : R _{2_b} : R _{2_c} : ...
III.	Eventuali convenzioni per l'uso di R ₂ , che lo studente X conosce:
IV.	Contesto 1 di R ₂ : Contesto 2 di R ₂ : Contesto 3 di R ₂ : ...
V.	Complessità d'interpretazione e d'uso di R ₂ in relazione al: contesto 1 del punto IV: contesto 2 del punto IV: contesto 3 del punto IV: ... scegliendo tra: (1) per nulla complessa / (2) poco complessa / (3) abbastanza complessa / (4) molto complessa / (5) non so.

R₃	$\frac{1}{\frac{2}{4}}$
I.	R _{3_1} : R _{3_2} : R _{3_3} : ...
II.	Confusione con: R _{3_a} : R _{3_b} : R _{3_c} : ...
III.	Eventuali convenzioni per l'uso di R ₃ , che lo studente X conosce:
IV.	Contesto 1 di R ₃ : Contesto 2 di R ₃ : Contesto 3 di R ₃ : ...
V.	Complessità d'interpretazione e d'uso di R ₃ in relazione al: contesto 1 del punto IV: contesto 2 del punto IV: contesto 3 del punto IV: ... scegliendo tra: (1) per nulla complessa / (2) poco complessa / (3) abbastanza complessa / (4) molto complessa / (5) non so.

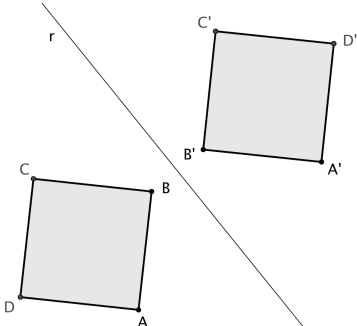
R₄	$\frac{0}{3}$
I.	R _{4_1} : R _{4_2} : R _{4_3} : ...
II.	Confusione con: R _{4_a} : R _{4_b} : R _{4_c} : ...
III.	Eventuali convenzioni per l'uso di R ₄ , che lo studente X conosce:
IV.	Contesto 1 di R ₄ : Contesto 2 di R ₄ : Contesto 3 di R ₄ : ...
V.	Complessità d'interpretazione e d'uso di R ₄ in relazione al: contesto 1 del punto IV: contesto 2 del punto IV: contesto 3 del punto IV: ... scegliendo tra: (1) per nulla complessa / (2) poco complessa / (3) abbastanza complessa / (4) molto complessa / (5) non so.

R₅	1 h, 2 da, 0 u
I.	R _{5_1} : R _{5_2} : R _{5_3} : ...
II.	Confusione con: R _{5_a} : R _{5_b} : R _{5_c} : ...
III.	Eventuali convenzioni per l'uso di R ₅ , che lo studente X conosce:
IV.	Contesto 1 di R ₅ : Contesto 2 di R ₅ : Contesto 3 di R ₅ : ...
V.	Complessità d'interpretazione e d'uso di R ₅ in relazione al: contesto 1 del punto IV: contesto 2 del punto IV: contesto 3 del punto IV: ... scegliendo tra: (1) per nulla complessa / (2) poco complessa / (3) abbastanza complessa / (4) molto complessa / (5) non so.

R₆	
I.	R _{6_1} : R _{6_2} : R _{6_3} : ...
II.	Confusione con: R _{6_a} : R _{6_b} : R _{6_c} : ...
III.	Eventuali convenzioni per l'uso di R ₆ , che lo studente X conosce:
IV.	Contesto 1 di R ₆ : Contesto 2 di R ₆ : Contesto 3 di R ₆ : ...
V.	Complessità d'interpretazione e d'uso di R ₆ in relazione al: contesto 1 del punto IV: contesto 2 del punto IV: contesto 3 del punto IV: ... scegliendo tra: (1) per nulla complessa / (2) poco complessa / (3) abbastanza complessa / (4) molto complessa / (5) non so.

R₇	“Ampiezza di un angolo”
I.	R _{7_1} : R _{7_2} : R _{7_3} : ...
II.	Confusione con: R _{7_a} : R _{7_b} : R _{7_c} : ...
III.	Eventuali convenzioni per l’uso di R ₇ , che lo studente X conosce:
IV.	Contesto 1 di R ₇ : Contesto 2 di R ₇ : Contesto 3 di R ₇ : ...
V.	Complessità d’interpretazione e d’uso di R ₇ in relazione al: contesto 1 del punto IV: contesto 2 del punto IV: contesto 3 del punto IV: ... scegliendo tra: (1) per nulla complessa / (2) poco complessa / (3) abbastanza complessa / (4) molto complessa / (5) non so.

R₈	“La terza parte di 24 diminuita di 3”
I.	R _{8_1} : R _{8_2} : R _{8_3} : ...
II.	Confusione con: R _{8_a} : R _{8_b} : R _{8_c} : ...
III.	Eventuali convenzioni per l’uso di R ₈ , che lo studente X conosce:
IV.	Contesto 1 di R ₈ : Contesto 2 di R ₈ : Contesto 3 di R ₈ : ...
V.	Complessità d’interpretazione e d’uso di R ₈ in relazione al: contesto 1 del punto IV: contesto 2 del punto IV: contesto 3 del punto IV: ... scegliendo tra: (1) per nulla complessa / (2) poco complessa / (3) abbastanza complessa / (4) molto complessa / (5) non so.

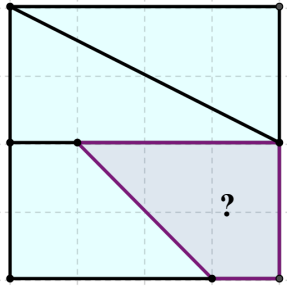
<p>R₉</p>	
<p>I.</p>	<p>R_{9_1} :</p> <p>R_{9_2} :</p> <p>R_{9_3} :</p> <p>...</p>
<p>II.</p>	<p>Confusione con:</p> <p>R_{9_a} :</p> <p>R_{9_b} :</p> <p>R_{9_c} :</p> <p>...</p>
<p>III.</p>	<p>Eventuali convenzioni per l'uso di R₉ , che lo studente X conosce:</p>
<p>IV.</p>	<p>Contesto 1 di R₉ :</p> <p>Contesto 2 di R₉ :</p> <p>Contesto 3 di R₉ :</p> <p>...</p>
<p>V.</p>	<p>Complessità d'interpretazione e d'uso di R₉ in relazione al:</p> <p>contesto 1 del punto IV:</p> <p>contesto 2 del punto IV:</p> <p>contesto 3 del punto IV:</p> <p>...</p> <p>scegliendo tra:</p> <p>(1) per nulla complessa / (2) poco complessa / (3) abbastanza complessa / (4) molto complessa / (5) non so.</p>

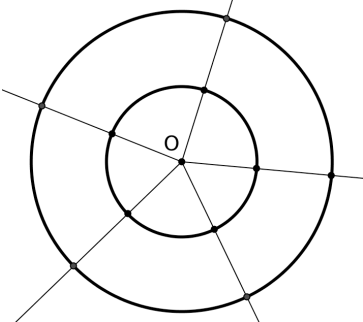
R₁₀	“La metà di...”
I.	R _{10_1} : R _{10_2} : R _{10_3} : ...
II.	Confusione con: R _{10_a} : R _{10_b} : R _{10_c} : ...
III.	Eventuali convenzioni per l’uso di R ₁₀ , che lo studente X conosce:
IV.	Contesto 1 di R ₁₀ : Contesto 2 di R ₁₀ : Contesto 3 di R ₁₀ : ...
V.	Complessità d’interpretazione e d’uso di R ₁₀ in relazione al: contesto 1 del punto IV: contesto 2 del punto IV: contesto 3 del punto IV: ... scegliendo tra: (1) per nulla complessa / (2) poco complessa / (3) abbastanza complessa / (4) molto complessa / (5) non so.

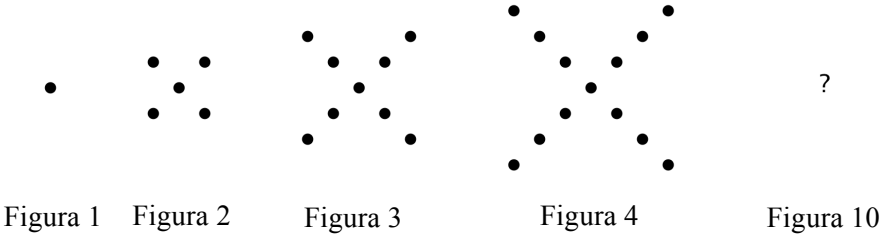
R₁₁	$(2 \times 1000) + (0 \times 100) + (3 \times 10) + (8 \times 1)$
I.	R _{11_1} : R _{11_2} : R _{11_3} : ...
II.	Confusione con: R _{11_a} : R _{11_b} : R _{11_c} : ...
III.	Eventuali convenzioni per l'uso di R ₁₁ , che lo studente X conosce:
IV.	Contesto 1 di R ₁₁ : Contesto 2 di R ₁₁ : Contesto 3 di R ₁₁ : ...
V.	Complessità d'interpretazione e d'uso di R ₁₁ in relazione al: contesto 1 del punto IV: contesto 2 del punto IV: contesto 3 del punto IV: ... scegliendo tra: (1) per nulla complessa / (2) poco complessa / (3) abbastanza complessa / (4) molto complessa / (5) non so.

<p>R_{12}</p>	
<p>I.</p>	<p>R_{12_1} :</p> <p>R_{12_2} :</p> <p>R_{12_3} :</p> <p>...</p>
<p>II.</p>	<p>Confusione con:</p> <p>R_{12_a} :</p> <p>R_{12_b} :</p> <p>R_{12_c} :</p> <p>...</p>
<p>III.</p>	<p>Eventuali convenzioni per l'uso di R_{12}, che lo studente X conosce:</p>
<p>IV.</p>	<p>Contesto 1 di R_{12} :</p> <p>Contesto 2 di R_{12} :</p> <p>Contesto 3 di R_{12} :</p> <p>...</p>
<p>V.</p>	<p>Complessità d'interpretazione e d'uso di R_{12} in relazione al:</p> <p>contesto 1 del punto IV:</p> <p>contesto 2 del punto IV:</p> <p>contesto 3 del punto IV:</p> <p>...</p> <p>scegliendo tra:</p> <p>(1) per nulla complessa / (2) poco complessa / (3) abbastanza complessa / (4) molto complessa / (5) non so.</p>

R₁₃	“La probabilità che esca un numero primo minore di 5 nel lancio di un dado (non truccato) a sei facce”
I.	R_{13_1} : R_{13_2} : R_{13_3} : ...
II.	Confusione con: R_{13_a} : R_{13_b} : R_{13_c} : ...
III.	Eventuali convenzioni per l'uso di R_{13} , che lo studente X conosce:
IV.	Contesto 1 di R_{13} : Contesto 2 di R_{13} : Contesto 3 di R_{13} : ...
V.	Complessità d'interpretazione e d'uso di R_{13} in relazione al: contesto 1 del punto IV: contesto 2 del punto IV: contesto 3 del punto IV: ... scegliendo tra: (1) per nulla complessa / (2) poco complessa / (3) abbastanza complessa / (4) molto complessa / (5) non so.

<p>R₁₄</p>	
<p>I.</p>	<p>R_{14_1} :</p> <p>R_{14_2} :</p> <p>R_{14_3} :</p> <p>...</p>
<p>II.</p>	<p>Confusione con:</p> <p>R_{14_a} :</p> <p>R_{14_b} :</p> <p>R_{14_c} :</p> <p>...</p>
<p>III.</p>	<p>Eventuali convenzioni per l'uso di R₁₄, che lo studente X conosce:</p>
<p>IV.</p>	<p>Contesto 1 di R₁₄ :</p> <p>Contesto 2 di R₁₄ :</p> <p>Contesto 3 di R₁₄ :</p> <p>...</p>
<p>V.</p>	<p>Complessità d'interpretazione e d'uso di R₁₄ in relazione al:</p> <p>contesto 1 del punto IV:</p> <p>contesto 2 del punto IV:</p> <p>contesto 3 del punto IV:</p> <p>...</p> <p>scegliendo tra:</p> <p>(1) per nulla complessa / (2) poco complessa / (3) abbastanza complessa / (4) molto complessa / (5) non so.</p>

<p>R₁₅</p>	
<p>I.</p>	<p>R_{15_1} :</p> <p>R_{15_2} :</p> <p>R_{15_3} :</p> <p>...</p>
<p>II.</p>	<p>Confusione con:</p> <p>R_{15_a} :</p> <p>R_{15_b} :</p> <p>R_{15_c} :</p> <p>...</p>
<p>III.</p>	<p>Eventuali convenzioni per l'uso di R₁₅, che lo studente X conosce:</p>
<p>IV.</p>	<p>Contesto 1 di R₁₅ :</p> <p>Contesto 2 di R₁₅ :</p> <p>Contesto 3 di R₁₅ :</p> <p>...</p>
<p>V.</p>	<p>Complessità d'interpretazione e d'uso di R₁₅ in relazione al:</p> <p>contesto 1 del punto IV:</p> <p>contesto 2 del punto IV:</p> <p>contesto 3 del punto IV:</p> <p>...</p> <p>scegliendo tra:</p> <p>(1) per nulla complessa / (2) poco complessa / (3) abbastanza complessa / (4) molto complessa / (5) non so.</p>

<p>R_{16}</p>	 <p>Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4 Figura 10</p> <p>Quanti pallini ci sono in Figura 10?</p>
<p>I.</p>	<p>R_{16_1} :</p> <p>R_{16_2} :</p> <p>R_{16_3} :</p> <p>...</p>
<p>II.</p>	<p>Confusione con:</p> <p>R_{16_a} :</p> <p>R_{16_b} :</p> <p>R_{16_c} :</p> <p>...</p>
<p>III.</p>	<p>Eventuali convenzioni per l'uso di R_{16}, che lo studente X conosce:</p>
<p>IV.</p>	<p>Contesto 1 di R_{16} :</p> <p>Contesto 2 di R_{16} :</p> <p>Contesto 3 di R_{16} :</p> <p>...</p>
<p>V.</p>	<p>Complessità d'interpretazione e d'uso di R_{16} in relazione al:</p> <p>contesto 1 del punto IV:</p> <p>contesto 2 del punto IV:</p> <p>contesto 3 del punto IV:</p> <p>...</p> <p>scegliendo tra:</p> <p>(1) per nulla complessa / (2) poco complessa / (3) abbastanza complessa / (4) molto complessa / (5) non so.</p>

Bibliografia

- D'Amore, B., & Godino, J. D. (2006). Punti di vista antropologico ed ontosemiotico in Didattica della Matematica. *La matematica e la sua didattica*, 1, 9-38.
- Duval, R. (2006a). Trasformazioni di rappresentazioni semiotiche e prassi di pensiero in matematica. *La matematica e la sua didattica*, 4, 585-619.
- Duval, R. (2006b). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61(1-2), 103-131.
-

3.8.4 *Procedura di campionamento*

Nella ricerca quantitativa si cerca, nella maggior parte dei casi, di ottenere campioni ampi e rappresentativi in modo da poter generalizzare i risultati a intere popolazioni. Anche se: “a volte nella ricerca quantitativa è appropriato l’uso di piccoli campioni, mentre nella ricerca qualitativa ci sono occasioni in cui è giustificato l’uso di grandi campioni” (Onwuegbuzie & Collins, 2007, p. 282). Tuttavia, nella ricerca qualitativa, più interessata ai significati o ai sensi che le persone attribuiscono ai fenomeni, alle situazioni o alle loro esperienze, si ricorre per lo più a piccoli campioni, e risulta più efficace o appropriato, nella maggior parte dei casi, il *campionamento ragionato* (*purposive sampling*) su un numero relativamente ridotto di casi (Onwuegbuzie & Daniel, 2003). Si tratta di una forma di campionamento non-probabilistico nella quale le decisioni relative agli individui da includere nel campione sono prese dal ricercatore, sulla base di una varietà di criteri che possono includere la conoscenza specialistica del problema di ricerca, o la capacità e la volontà di partecipare alla ricerca (Oliver, 2006). La scelta del tipo di campione ragionato dipende in ogni caso dallo scopo della ricerca, dalle domande di ricerca e dalle risorse disponibili al ricercatore.

Un altro tipo di campionamento non probabilistico è il *campionamento di convenienza* (*convenience sampling*), che consiste nella selezione di individui o di gruppi che in un dato momento si dichiarano disponibili a partecipare alla ricerca.

In questa ricerca, per testare il questionario da proporre agli insegnanti di scuola primaria e di scuola secondaria, è stata utilizzata la tecnica del campionamento ragionato, sulla base sia della competenza disciplinare e in didattica della matematica, sia della disponibilità a partecipare alla ricerca. Una volta testato il questionario, la tecnica del campionamento ragionato è stata mescolata a quella del campionamento di convenienza.

In generale, le scelte delle tecniche di campionamento e delle dimensioni dei campioni devono risultare compatibili con gli scopi della ricerca (Onwuegbuzie & Leech, 2007). In particolare, Onwuegbuzie e Leech (2007) evidenziano che la dimensione del campione deve permettere di raggiungere la saturazione dei dati (Flick, 1998; Morse, 1995), la saturazione teorica (Strauss & Corbin, 1990), o la ridondanza informativa (Lincoln & Guba, 1985). La saturazione (dei dati o teorica), o la ridondanza informativa, si raggiunge quando l’aggiunta di un ulteriore dato o caso, oppure

l'incremento del materiale empirico, non fornisce nuove informazioni o ulteriori contributi alla ricerca.

Nella ricerca qualitativa le dimensioni dei campioni non dovrebbero essere troppo piccole, perché altrimenti sarebbe difficile ottenere la saturazione, dunque una rappresentazione o descrizione credibile, trasferibile, affidabile e confermabile (par. 3.5) di un dato fenomeno. Allo stesso tempo, i campioni non dovrebbero essere troppo grandi, perché altrimenti sarebbe difficile effettuare un'analisi in profondità del fenomeno in esame (Sandelowski, 1995).

Onwuegbuzie e Collins (2007) forniscono le dimensioni minime dei campioni per alcuni disegni di ricerca. Per esempio, per un disegno di ricerca di tipo fenomenologico si raccomanda un numero relativamente basso di interviste, compreso tra 6 (Morse, 1994) e 10 (Creswell, 1998); per la *grounded theory* (par. 3.7.2) 20-30 partecipanti (Creswell, 2007); per la raccolta di dati mediante interviste almeno 12 partecipanti (Guest, Bunce, & Johnson, 2006). Nella ricerca qualitativa, in ogni caso, la dimensione del campione è strettamente legata non solo alla saturazione delle informazioni, ma anche a fattori contingenti e contestuali.

3.8.5 Considerazioni etiche

Le questioni etiche nascono dalla tensione, sempre presente, tra l'obiettivo di raccogliere nuove e migliori informazioni per rispondere alle domande di ricerca e i diritti degli individui coinvolti nella ricerca (Sumner, 2006). Il ricercatore deve cercare di bilanciare l'esigenza di ottenere dati validi, attendibili, con il diritto alla privacy e all'autonomia degli individui.

Spesso le questioni etiche sono trascurate o rivestono un ruolo marginale nei progetti di ricerca (Hesse-Biber, 2010; Hesse-Biber & Leavy, 2011). Come rileva Sumner (2006), un principio sul quale si fonda la relazione tra il ricercatore e il partecipante alla ricerca è quello di non creare danni di alcun tipo al partecipante. Un secondo principio fondamentale è quello del consenso informato, che rispetta il diritto delle persone di sapere che essi sono oggetto di ricerca, di conoscere gli scopi della ricerca e ciò che ci si aspetta da loro. Un principio correlato è quello del rispetto del diritto alla privacy: il ricercatore non deve intromettersi nella privacy in misura superiore a quanto richiesto dalla ricerca. Un altro principio chiave della pratica etica è

quello della riservatezza, che assicura che le informazioni raccolte saranno usate soltanto per gli scopi della ricerca. “In generale, questo va di pari passo con le garanzie di anonimato: l’individuo non sarà identificabile dal modo in cui i risultati vengono presentati” (Sumner, 2006, p. 97).

Come Hesse-Biber e Leavy (2011) rilevano, il consenso informato è una componente critica di ogni ricerca che includa soggetti umani. I soggetti umani della ricerca devono essere informati sulla natura della ricerca e devono dare il loro consenso prima di partecipare alla ricerca. Questa informazione è di solito contenuta in una lettera di consenso informato che ciascun soggetto deve leggere e accettare per partecipare alla ricerca.

Il consenso informato ha lo scopo di assicurare che la partecipazione del soggetto è totalmente volontaria e informata, basata sulla comprensione di ciò che lo studio tratta, dei suoi rischi e benefici, di come i risultati saranno utilizzati, del fatto che la partecipazione è volontaria, può essere interrotta in qualsiasi momento e che l’identità sarà protetta. (Hesse-Biber & Leavy, 2011, p. 85)

Ai soggetti coinvolti in questa ricerca è stata inviata (mediante posta elettronica) una lettera di invito contenente la richiesta di consenso informato (Appendice A) per la partecipazione alla ricerca.

3.8.6 Raccolta dei dati

Il disegno di ricerca con metodi misti elaborato per rispondere alle domande di ricerca (par. 3.2), e descritto nel paragrafo 3.8.1, è un disegno sequenziale nel quale lo studio nel suo complesso è principalmente qualitativo. È costituito da una prima fase di raccolta e di analisi di dati qualitativi e di dati quantitativi (QUAL + quan) ottenuti mediante un questionario semi-strutturato o un’intervista semi-strutturata, e da una seconda fase di raccolta e di analisi di dati qualitativi (QUAL) ottenuti mediante un’intervista non strutturata. I risultati delle due analisi sono stati successivamente integrati nella formulazione dei risultati di ricerca.

Il questionario è stato adattato, come si è detto nel paragrafo 3.8.2, al tipo di scuola (primaria, secondaria di primo e di secondo grado) di appartenenza dell’insegnante ed è stato prima testato su un piccolo campione di quattro insegnanti,

scelto attraverso la tecnica del campionamento ragionato (par. 3.8.4), sulla base della competenza professionale in matematica e in didattica della matematica, oltre che della disponibilità a partecipare alla ricerca. Successivamente, al campione più ampio di insegnanti, scelto attraverso la tecnica del campionamento ragionato mescolata a quella del campionamento di convenienza (par. 3.8.4), è stata inviata una lettera di invito contenente la richiesta di consenso informato (Appendice A) per la partecipazione alla ricerca.

3.8.7 Partecipanti alla ricerca

La lettera di invito a partecipare alla ricerca è stata inviata a 88 insegnanti, di cui 31 di scuola primaria, 30 di scuola secondaria di primo grado e 27 di scuola secondaria di secondo grado in Italia. Alcuni di questi (9 insegnanti di scuola primaria, 8 insegnanti di scuola secondaria di primo grado e 13 insegnanti di scuola secondaria di secondo grado) non hanno risposto alla lettera di invito. Due insegnanti di scuola secondaria di secondo grado hanno risposto dicendo di non essere disponibili a partecipare alla ricerca. Altri (11 insegnanti di scuola primaria, 11 insegnanti di scuola secondaria di primo grado e 7 insegnanti di scuola secondaria di secondo grado) hanno rinunciato alla partecipazione dopo l'invio del questionario. I partecipanti effettivi alla ricerca sono stati dunque i seguenti:

- 11 insegnanti di scuola primaria
- 11 insegnanti di scuola secondaria di primo grado
- 5 insegnanti di scuola secondaria di secondo grado.

In Tabella 3.3 sono riassunti i dati relativi agli insegnanti coinvolti nella ricerca.

Tabella 3.3*Insegnanti coinvolti nella ricerca*

	Partecipanti	Rinunce	Non disponibilità	TOTALE
Primaria	11	7	13	31
Secondaria di I grado	11	5	14	30
Secondaria di II grado	5	6	16	27
TOTALE	27 (31%)	18 (20%)	43 (49%)	88 (100%)

Si noti che le percentuali, calcolate su campioni così piccoli, sono poco rappresentative. Qui e nel seguito, sono fornite solo allo scopo di facilitare il confronto tra i diversi comportamenti osservati o tra le diverse risposte ottenute dai partecipanti alla ricerca, ovvero per aiutare il lettore nella comprensione del fenomeno, ben consapevoli del fatto che con numeri così piccoli le percentuali hanno poco significato.

4 Risultati di ricerca

4.1 Introduzione

In questo capitolo, dopo alcune considerazioni e riflessioni critiche sul questionario proposto agli insegnanti, si analizzano le risposte degli insegnanti alle domande del questionario, e dell'intervista che ha sostituito il questionario, nella prima fase della ricerca. Le risposte al questionario sono integrate con le risposte alle interviste che sono state effettuate nella seconda fase della ricerca allo scopo di raccogliere ulteriori informazioni o chiarimenti sulle questioni prese in esame o sollevate dal questionario.

4.2 Riflessioni sulle domande del questionario

Diversi partecipanti hanno evidenziato, esplicitamente o implicitamente, una certa difficoltà a rispondere alle domande del questionario, soprattutto per la presenza di espressioni o termini tecnici, relativamente nuovi per l'insegnante, o da lui utilizzati con scarsa consapevolezza, che rinviavano a concetti o situazioni che l'insegnante non dominava o non padroneggiava del tutto. In particolare le espressioni "registro di rappresentazione", "rappresentazione semiotica" e "oggetto matematico" non sono sempre state colte in tutta la loro complessità. Come evidenza, per esempio, la seguente reazione alla lettura del questionario:

Trovo che sia fatto con molta precisione e rispetto per la terminologia. Proprio per questo mi sembra un po' troppo da addetti ai lavori. Tu l'hai strutturato e ti saprai senz'altro muovere bene tra le domande, ma non so quanto questo sia fattibile per gli intervistati. (...). Per esempio, a mio avviso, la definizione di oggetto matematico chiede un po' di tempo per essere digerita e meditata, se letta per la prima volta. (Un'insegnante di scuola secondaria di secondo grado)

Ben consapevoli della loro natura tecnica, le espressioni sopra riportate sono state in ogni caso importanti, anzi cruciali, per la raccolta dei dati necessari. Non sarebbe stato possibile, o sarebbe stato troppo complesso, sostituirle o evitarle senza snaturare la ricerca.

Più in generale, le difficoltà incontrate dagli insegnanti (88 in tutto) contattati nel corso della ricerca sono da ricondurre al fatto che il questionario si focalizzava su un punto di vista insolito per l'insegnante, sul punto di vista semiotico e cognitivo dell'apprendimento. La prima reazione di R. Duval, dopo averlo letto, è stata di grande sorpresa: "È molto strano, inusuale, insolito, sorprendente. L'insegnante non è stato abituato, anche durante la sua formazione, a rispondere a domande di questo tipo. È insolito, per lui, sentirsi chiedere cose come queste" (comunicazione personale, 26 giugno, 2013). Da qui le numerose non-risposte. Questa impressione è stata evidenziata anche da una partecipante alla ricerca:

Prima che proseguo nella lettura del questionario, ti chiedo a chi è rivolto il questionario; anche ai docenti di scuola primaria? (...)

Ti ho chiesto questo perché l'impressione avuta è che sia un po' difficile. Io di docenti di primaria ne incontro tanti e so quel che fanno e quel che pensano. (Un'insegnante di scuola primaria)

Dopo averlo letto, la stessa insegnante scrive:

Ti confermo che, conoscendo le docenti della scuola primaria, mi sembra di non facile lettura e compilazione, trattandosi di quasi tutti item a risposta aperta. Come se questo questionario presupponesse già una certa preparazione sull'argomento. Ma si tratta di impressioni...

I questionari somministrati agli insegnanti si focalizzano in generale, o per lo più, su altri argomenti, in particolare sui seguenti, anche tra loro intrecciati:⁴⁶

1. i contenuti matematici da insegnare o la conoscenza matematica dell'insegnante (punto di vista matematico);
2. la gestione della classe (punto di vista pedagogico, psicologico, sociale);
3. la pratica dell'insegnante, il tipo di situazione, di problema o di attività da proporre in aula o in laboratorio per introdurre o trattare un dato contenuto matematico

⁴⁶ Per approfondire gli studi sulle conoscenze e sulle pratiche degli insegnanti si veda per esempio: Ponte & Chapman, 2006; Davis & Simmt, 2006.

(punto di vista della teoria delle situazioni didattiche, dell'ingegneria didattica, della teoria antropologica della didattica, degli studi socioculturali, degli studi basati sul curriculum etc.);

4. le convinzioni dell'insegnante sulla matematica e sul suo insegnamento-apprendimento (punto di vista filosofico, epistemologico, affettivo, cognitivo o metacognitivo).

Questi quattro punti rientrano tra gli obiettivi principali della formazione degli insegnanti.⁴⁷ Costituiscono inoltre le principali preoccupazioni dell'insegnante, per due ragioni fondamentali:

- a. molti insegnanti chiedono che cosa devono fare, in aula o in laboratorio, domani e nei prossimi giorni, per insegnare ciò che gli si chiede di insegnare, e gli strumenti più efficaci per farlo (D'Amore & Fandiño Pinilla, 2014);
- b. molti insegnanti si trovano in difficoltà nella trasposizione didattica (Chevallard, 1985) di diversi contenuti matematici, ovvero nell'adattamento del Sapere (riconosciuto e accettato come tale entro una data istituzione) al contesto della propria aula.

Se si fossero poste domande su, per esempio, come insegnare un dato contenuto matematico, oppure sulle difficoltà incontrate nell'insegnamento di quel dato contenuto, sarebbe stato tutto diverso, un'altra cosa. La ricerca è totalmente differente. Riguarda le ragioni semiotiche e cognitive delle difficoltà sistematiche e ricorrenti che, secondo l'insegnante, uno studente incontra nel processo di apprendimento della matematica. Secondo Duval, questa è la ragione per la quale il questionario "è molto interessante e allo stesso tempo molto difficile" (comunicazione personale, 26 giugno, 2013). È interessante per due ragioni:

- a. permette di evidenziare come l'insegnante tiene conto di tutta la dimensione non-matematica, soprattutto di quella cognitiva, implicata nell'insegnamento-apprendimento della matematica;
- b. permette di far emergere le difficoltà d'uso da parte dell'insegnante di espressioni o termini tecnici, come quelli sopra menzionati, e più in generale le difficoltà d'uso, da parte dell'insegnante, del linguaggio specifico della didattica della matematica,

⁴⁷ Per approfondire la problematica della formazione culturale degli insegnanti si veda per esempio: D'Amore & Fandiño Pinilla, 2009.

difficoltà che le attività di formazione degli insegnanti dovrebbero in qualche modo limitare, se non eliminare.

Ben consapevoli del fatto che è impossibile riferirsi a un oggetto matematico e non alle sue rappresentazioni semiotiche (par. 2.2), e che nel gioco d'aula l'oggetto matematico è predefinito, precostituito dalla istituzione (scuola, università, società etc.) che l'insegnante in qualche modo rappresenta, si è voluto indagare innanzitutto il grado di consapevolezza che l'insegnante ha del livello a cui si colloca l'oggetto matematico e del livello a cui si collocano le sue rappresentazioni semiotiche nelle attività matematiche, vale a dire del livello a cui si colloca ciò che l'istituzione propone come oggetto matematico e del livello a cui si colloca ciò che l'istituzione propone come mezzo semiotico per la trasposizione didattica dell'oggetto matematico. Questi due livelli, per l'insegnante, coincidono o sono distinti?

Non essendo possibile fornire un esempio di oggetto matematico senza usare una sua rappresentazione semiotica (almeno nel registro della lingua naturale), si sono considerate le espressioni linguistiche o i termini utilizzati per designare gli oggetti matematici come indicatori o “indici” di quegli oggetti matematici, presupponendo, forse un po' ingenuamente, che anche l'insegnante consideri una espressione linguistica o un termine che designa qualcosa di matematico come un indicatore di un dato sapere, di un dato oggetto matematico. Ma una espressione o un termine è solo una rappresentazione semiotica. Quest'ultima non rinvia, dal punto di vista del soggetto che la utilizza, a un oggetto matematico se il soggetto non è in grado di coordinarla con altre rappresentazioni semiotiche. In altre parole, un soggetto è in grado di distinguere un oggetto matematico da una sua rappresentazione se è in grado di fornire spontaneamente diverse rappresentazioni, in almeno due registri, dell'oggetto in questione.

In questa ricerca non ci si è preoccupati di evidenziare le concezioni dell'insegnante sulla natura degli oggetti matematici, sulla loro eventuale pre-esistenza o emergenza dalle attività matematiche, non era questo lo scopo. Quello su cui il questionario intendeva focalizzare l'attenzione dell'insegnante non era l'oggetto matematico in sé e per sé, ma ciò che Godino e Batanero (1994), e prima ancora Chevallard (1985), chiamano “oggetto istituzionale”, vale a dire ciò, il sapere o il *sistema di pratiche* (D'Amore & Godino, 2006), che è riconosciuto come legittimo, pertinente o corretto entro una data istituzione (D'Amore, 2001a). Si può ritenere che un oggetto matematico esista prima delle o

indipendentemente dalle attività matematiche, oppure che sia costruito nel corso di tali attività, nel momento in cui si ricorre a specifici sistemi semiotici per riferirsi ad esso. Tuttavia, in questa ricerca non si è cercato di indagare questa dimensione, di far emergere la posizione realista o pragmatista (D'Amore, 2001a) assunta dall'insegnante o le sue concezioni epistemologiche sugli oggetti matematici (par. 2.2.3). (Sul ruolo dell'epistemologia dell'insegnante nelle pratiche d'insegnamento si veda: D'Amore, Fandiño Pinilla, Marazzani, Santi, & Sbaragli, 2009).

Resta il fatto che l'istituzione (scuola, università o società), che l'insegnante rappresenta, ha fatto propri alcuni oggetti matematici, contenuti o Saperi, segnalandoli come oggetti che la società ha deciso che la scuola debba in qualche modo trattare (B. D'Amore, comunicazione personale, 25 luglio, 2013), ovvero oggetti istituzionali, oggetti da adattare al contesto "aula", nella sua unicità, specificità, e nella sua evoluzione.

L'insegnante ha tutto il diritto di ignorare la problematica sugli oggetti matematici che è stata qui messa in campo, in particolare la questione di come si possa formare un oggetto matematico, se l'oggetto sia il risultato di un'attività, di un sistema di pratiche, o se sia qualcosa che esiste già. In questa ricerca si è cercato di analizzare non le convinzioni dell'insegnante sulla formazione dell'oggetto, ma ciò che l'insegnante dice sull'oggetto. È stata usata l'espressione "oggetto matematico", accanto a quella di "rappresentazione semiotica" e a quella di "registro", pur sapendo che l'insegnante non ha una formazione specifica sulla teoria dei registri di rappresentazione di Duval. Anche se gran parte dell'attuale ricerca internazionale in didattica della matematica si focalizza su temi di natura semiotica, gran parte del mondo della scuola non li conosce, almeno in tutta la loro complessità e problematicità. Qualcuno ne ha sentito parlare. Altri, la maggior parte, non sanno neppure che esistano, anche perché spesso trascurati, ignorati, o evitati nella formazione dell'insegnante (come risulta da: D'Amore, Fandiño Pinilla, & Iori, 2013; Duval, 2009b, 2012). Più in generale, come evidenziano Adler, Ball, Krainer, Lin, e Novotna (2005), gli insegnanti tendono a non leggere gli articoli di ricerca se non vengono coinvolti direttamente in qualche progetto o attività di ricerca. Le risposte degli insegnanti hanno evidenziato questo punto debole.

4.3 Analisi e interpretazione dei dati

Le notazioni utilizzate nel seguito sono le seguenti:

T_n = insegnante n , essendo n l' n -esimo insegnante (in ordine di tempo) che ha completato il questionario;

SP = scuola primaria;

SS I = scuola secondaria di primo grado;

SS II = scuola secondaria di secondo grado;

Ric = ricercatore/intervistatore;

r^m = registro semiotico m -esimo ($m = 1, 2, 3, \dots$);

R^m_i = rappresentazione semiotica i -esima ($i = 1, 2, 3, \dots$) di un oggetto (matematico) O (non necessariamente unico) nel registro semiotico r^m ;

$O(T_n)$ = oggetto scelto dall'insegnante T_n ;

$R(T_n)$ = rappresentazione dell'oggetto O scelta dall'insegnante T_n ;

$\text{Trasf}(R^m_i, R^s_j)$ = conversione (se $m \neq s$) o trattamento (se $m = s$) di rappresentazioni.

Altri segni grafici utilizzati nella trascrizione delle interviste:

... = esitazioni, pause brevi;

italico = indica qualche forma di enfasi, attraverso il tono della voce;

[NC] = note comprendenti / piccole spiegazioni del ricercatore.

I dati raccolti nel corso della ricerca sono sintetizzati in Appendice C. Nei paragrafi che seguono si analizzano i dati più rilevanti, in relazione alle domande di ricerca (par. 3.2), raccolti dagli 11 insegnanti di scuola primaria (T1, T2, T6, T10, T11, T13, T20, T22, T23, T25, T26), 11 insegnanti di scuola secondaria di primo grado (T7, T8, T9, T12, T14, T15, T16, T17, T18, T19, T21) e 5 insegnanti di scuola secondaria di secondo grado (T3, T4, T5, T24, T27) partecipanti alla ricerca.

4.3.1 Oggetti e rappresentazioni

Qui di seguito si prendono in esame le risposte più significative e rappresentative degli insegnanti di scuola primaria, secondaria di primo e di secondo grado, alle prime due domande del questionario:

1. a) *A quale oggetto matematico O hai pensato?*

b) *Quale campo di studio c^i ($i = 1, 2, 3, \dots, 11$) hai scelto?*

Lo studente X frequenta la classe:

2. *Quale rappresentazione R dell'oggetto matematico O lo studente X riconosce o gestisce con molta difficoltà, pur impegnandosi molto nelle attività matematiche?*

Tali domande sono strettamente legate alla prima parte della domanda di ricerca: “L’insegnante è consapevole della distinzione tra oggetto matematico (pre-definito, pre-costituito dalla istituzione) e una sua rappresentazione semiotica?”

4.3.1.1 *Scuola primaria*

T1 ha fornito esattamente la stessa risposta (“frazioni”) alle domande n. 1a e 2, identificando l’oggetto O denominato “frazioni” con la rappresentazione, R^1_1 , “frazioni” nel registro della lingua naturale. Il campo di studio scelto è “aritmetica”; la classe è una quarta (primaria). Durante l’intervista, si è cercato di indagare più a fondo nella scelta dell’insegnante.

Ric: Non sono sicura di aver capito bene le tue risposte alle domande 1a e 2, rileggile tu. Mi potresti dire qualcosa di più?

T1: [Rilegge]... Tu ti riferisci alle risposte frazioni. Non so come spiegartelo in altro modo... Te lo spiego in altre parole, perché scriverlo poi diventa...

Pur sapendo dalla prima che ci sono i numeri naturali, che ci sono altri numeri che poi verranno scoperti con il passare del tempo, già facendo i giochi della divisione, perché capita, facendo mensa, tutto quello che riguarda il concreto, l’aspetto concreto della frazione, lo vedi, lo pratichi proprio. Nonostante i numeri negativi siano stati accettati senza nessun problema, tanto che abbiamo la fortuna di avere un ascensore con il “-1”, perché sai la scuola la fai anche in base a quello che ti offre la realtà...

T1 non ha colto immediatamente il senso della domanda. Dopo qualche minuto, la domanda è stata formulata in termini diversi.

Ric: Per te c’è una qualche differenza tra queste due risposte?

T1: Se ti devo dare la risposta istintiva... No. No perché, è come se il titolo stesso avesse procurato in questo studente un blocco. Non so spiegarmi... Ora, mi diventa molto difficile dirti... A quale oggetto matematico hai pensato, la frazione. Quale

rappresentazione R, non te la so poi dire. Cioè non riesco ad approfondire, capisci? Perché ti potrei, e sarebbe assurdo, dirti qualunque rappresentazione. Quindi quella numerica, quella del ragionamento astratto, quindi quella concettuale, quella semiotica addirittura molte volte, forse è l'unica...

Ric: Qui per rappresentazione si intende “rappresentazione semiotica”...

T1: Ecco allora possiamo mettere “rappresentazione semiotica”, ma non solo... Cioè, capisci cosa voglio dire?

Ric: Il mio dubbio era proprio questo... Qui c'è oggetto e qui rappresentazione...

T1: Che ti sembrano due cose distinte...

Ric: Due cose distinte, che vengono in sostanza...

T1: Assimilate... Eeh, che cosa possiamo mettere...

Ric: Cioè, sono tutte e due oggetti o tutte e due rappresentazioni?

T1: No, l'oggetto è la frazione... La rappresentazione è... Stavo pensando a che cosa posso mettere... Possiamo mettere... Però, vedi, che cosa metteresti... Aritmetica? ... Sai che non so proprio che cosa... non so proprio che cosa...

Ric: Mi era venuto questo dubbio... perché dai la stessa...

T1: Sì sì, era un po' voluto... Nel senso che l'oggetto e la rappresentazione per questo bambino, secondo me eeh, sono proprio la stessa cosa. Cioè, hai capito come? È infatti è per questo che adesso mi trovo un po' in difficoltà a dire la rappresentazione. Sì perché... era talmente vasto il problema che si è posto, che non saprei dirti... Forse potevo scegliere un caso un po' più semplice... Però in questo caso proprio non saprei dirti perché per lui le due cose si andavano a installare l'una nell'altra: l'oggetto e la sua rappresentazione... Ah, ecco! L'oggetto e la rappresentazione, per questo bambino, secondo me, coincidevano, oppure si fondevano l'una nell'altra. Infatti ti dico... quando sono arrivata alla fine, dico scelgo un altro bambino un altro... Poi dico ma no... perché, cioè, tanto vale...

In T1 è presente l'idea che ci siano diverse rappresentazioni di un medesimo oggetto, anche se l'idea di “rappresentazione” è un po' confusa. In ogni caso, secondo T1, “l'oggetto e la rappresentazione”, per lo studente in questione, coincidono o si fondono l'una nell'altra, ovvero: $O(T1) = R(T1)$, con $R(T1) = R^1_1 = \text{“frazioni”}$.

T2, in un primo momento, ha identificato l'oggetto matematico O della domanda n. 1a con una rappresentazione, R^2_1 , nel registro delle configurazioni geometriche, in particolare con il disegno in Figura 4.1.

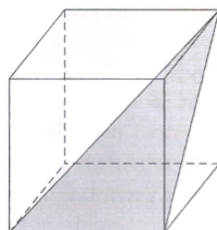


Figura 4.1 Risposta iniziale alla domanda n. 1a di un'insegnante

Il campo di studio scelto inizialmente, “geometria solida”, è stato poco dopo sostituito con “geometria piana”. Si tratta di una rappresentazione nel piano di un oggetto 3D, ovvero di una forma 3D/2D. La classe è una quarta (primaria). Successivamente, nel corso di un'intervista, l'insegnante è stata stimolata a dire qualcosa di più sulla risposta fornita alla domanda n. 1a.

Ric: Alla prima domanda, hai dato questa risposta [scorrendo il dito sulla risposta]; mi potresti dire qualcosa di più?

T2: Questo [riferendosi alla scelta iniziale del campo di studio] è stato un mio errore... L'oggetto è in 2D.

Ric: Alla domanda: A quale oggetto matematico O hai pensato?... tu [puntando il dito al disegno]...

T2: Sì, ho disegnato... cioè la rappresentazione in 2D di un triangolo in un cubo; l'oggetto è quello: un triangolo nel cubo.

Al suo disegno, T2 ha poi affiancato un'altra sua rappresentazione, R^1_1 , nel registro della lingua naturale: “Oggetto: rappresentazione 2D di un triangolo in un cubo”. Come rappresentazione semiotica R di O (domanda n. 2), T2 ha fornito una proprietà dell'oggetto: “La perpendicolarità tra uno spigolo e la diagonale, di una faccia, che ha un estremo in comune con esso”. Durante l'intervista, l'insegnante ha confermato la sua risposta:

T2: Sì, non vede la perpendicolarità tra uno spigolo e la diagonale... perché si affida

alla percezione.

Ric: Questa proprietà, in sostanza, tu la consideri come una rappresentazione dell'oggetto...

T2: Cioè, se uno non ha gli occhiali del matematico, non riconosce la perpendicolarità.

Ric: Il mio dubbio era proprio questo. Tu consideri come rappresentazione di questo oggetto [puntando il dito sul disegno] un aspetto, una proprietà che ha questo triangolo nel cubo...

T2: Certo.

Ric: Volevo appunto una conferma di questo, perché questo legame tra oggetto e rappresentazione è molto particolare...

T2: Ma io ci lavoro molto a scuola su questo, cioè leggere una rappresentazione in 2D. Se i bambini vedessero questo oggetto in 3D non avrebbero dubbi sulla relazione, non avrebbero assolutamente dubbi... Ma se io gli lascio solo questa rappresentazione [2D], e se non leggono mettendosi, quello che io dico, gli occhiali del matematico, loro considerano questo triangolo in modo scorretto, perché si affidano alla percezione. Allora dopo capiscono, quando fanno il passaggio in 3D, che la rappresentazione in 2D di un oggetto 3D subisce delle trasformazioni.

Ric: Sì, in questa rappresentazione 2D loro vedono il triangolo come un triangolo ottusangolo.

T2: Difatti, io glielo faccio ritagliare... Poi subentra un'altra importante idea, che ogni cosa deve essere contestualizzata. Quindi, se io lo tiro fuori dal contesto, la mia visione è perfetta. Se io dico che è un triangolo ottusangolo, è vero, lo tiro fuori dal contesto. Ma se lo penso nel contesto, io devo leggere in modo contestuale. Allora devo vedere *non* i lati del triangolo in sé, ma non so se io uso un linguaggio giusto, ma i lati del triangolo nel cubo. Cosa sono nel cubo? (...) Cioè io ho pensato alla rappresentazione e alla lettura della rappresentazione.

Dall'intervista è emerso che T2 ha identificato l'oggetto matematico O con una sua rappresentazione R^2_1 nel registro delle configurazioni geometriche, e la rappresentazione R (problematica per lo studente X) con la lettura di una particolare unità di contenuto della rappresentazione R^2_1 . Una unità di contenuto (il triangolo in Figura 4.1) nella quale si confondono aspetti iconico-qualitativi (aspetti concreti legati alla sua forma 2D), aspetti iconico-strutturali (legati soprattutto a proprietà), aspetti indicativi (di rinvio a

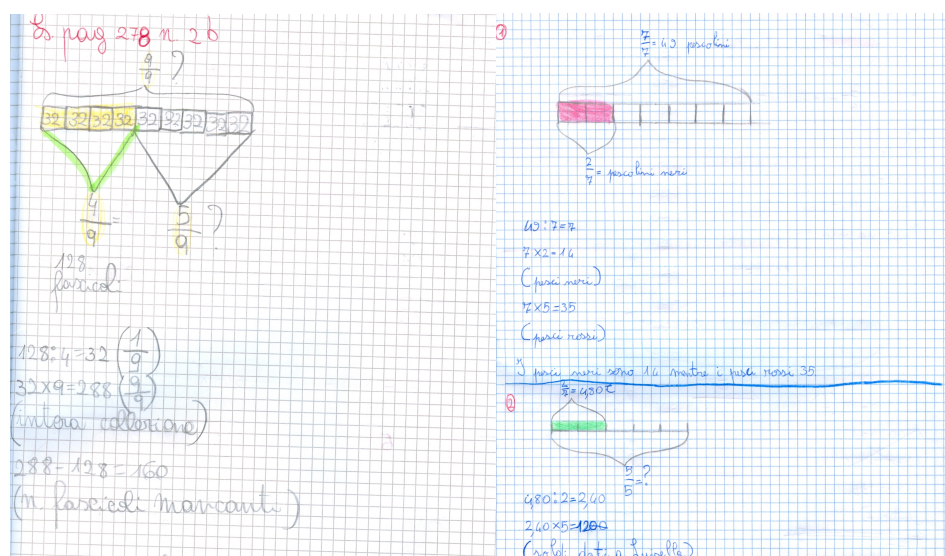
un'altra rappresentazione in 3D e alle sue proprietà). Da qui la complessità della sua interpretazione e descrizione.

T2 ha dunque deviato la domanda, passando da una rappresentazione alla “lettura” della rappresentazione, in particolare al trattamento e alla conversione (anche se solo mentali) della rappresentazione da parte del soggetto (lo studente) che cerca di metterla in corrispondenza con qualche altra rappresentazione a lui nota. Un caso, questo, che evidenzia una certa confusione tra oggetto (nel senso istituzionale precisato nel paragrafo 4.2) e rappresentazione.

T6 ha scelto come oggetto O (domanda n. 1a) “numeri razionali”. Il campo di studio scelto è “aritmetica”; la classe è una quinta (primaria). La rappresentazione R dell'oggetto O (domanda n. 2) è un'altra rappresentazione nel registro della lingua naturale: “frazioni”. Come le altre risposte hanno fatto emergere (Appendice C.1), l'insegnante intendeva riferirsi alla scrittura frazionaria di un numero razionale. La risposta di T6 alla domanda n. 2, rispetto a quella di T1, è più sottile, in quanto espressa con parole differenti: O(T6) = “numeri razionali”, R(T6) = “frazioni”.

T26 ha scelto come oggetto O (domanda n. 1a) “la rappresentazione di una frazione inserita in un contesto problematico” (Figura 4.2). Il campo di studio scelto è “aritmetica”; la classe è una quinta (primaria).

T26: Ho scelto la rappresentazione di una frazione inserita in un contesto problematico



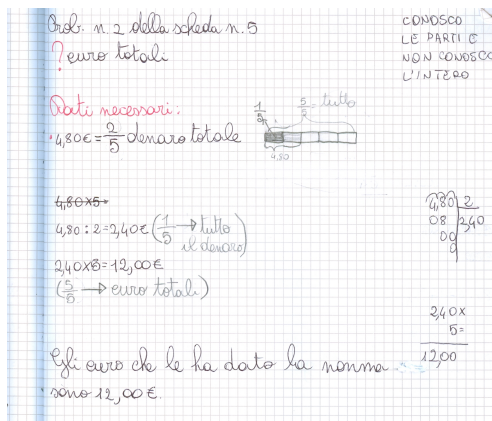


Figura 4.2 Risposta alla domanda n. 1a di un'insegnante

La rappresentazione R dell'oggetto O (domanda n. 2) è stata descritta nei termini seguenti:

T26: Lo studente X rappresenta senza difficoltà frazioni di figure, ma ha difficoltà ad associare la rappresentazione geometrica della frazione alla situazione problema alla quale la frazione è legata.

Per T26, dunque, oltre all'oggetto "frazione" esiste un altro oggetto che si chiama ancora "frazione" ma "in un contesto problematico". L'oggetto dipende dal contesto, dalla situazione, cioè esistono vari oggetti "frazioni" a seconda della situazione. Da un punto di vista semio-cognitivo, questa apparente dipendenza, per l'insegnante, dell'oggetto dalla situazione si spiega in termini di distanza cognitiva o di non congruenza semantica (par. 2.4) tra le unità di contenuto matematicamente pertinenti della rappresentazione dell'oggetto "frazione" nel registro delle rappresentazioni di tipo iconico (disegni) e le unità di contenuto matematicamente pertinenti dell'enunciato del problema. Questa distanza cognitiva, o non congruenza, rende difficile il riconoscimento di un medesimo oggetto, fino al punto da far apparire l'oggetto "frazione" nel "contesto problematico" come un oggetto differente dall'oggetto "frazione" in un contesto ("non problematico") nel quale la congruenza semantica tra le unità di contenuto delle rappresentazioni facilita il riconoscimento di un medesimo oggetto (come per esempio nel contesto di un esercizio in cui sono richieste soltanto delle operazioni sulle frazioni). In altre parole, per l'insegnante la difficoltà di riconoscimento di un medesimo oggetto nel "contesto problematico" diventa una caratteristica intrinseca dell'oggetto, incorporata nell'oggetto, che trasforma l'oggetto in un oggetto differente (con un nome differente).

La rappresentazione R, scelta da T26 nella risposta alla domanda n. 2, si riferisce a un'azione (par. 2.2.4.5), in particolare a una trasformazione di rappresentazioni dal registro R^3_1 delle rappresentazioni di tipo iconico (disegni) al registro R^1_1 della lingua naturale nel quale è formulato il problema, dunque una conversione. Anche in questo caso la domanda viene deviata, perché si passa da una rappresentazione a un'altra cosa, a una trasformazione di rappresentazioni: $R(T26) = \text{Trasf}(R^3_1, R^1_1)$.

4.3.1.2 Scuola secondaria di primo grado

T9 ha scelto come oggetto O (domanda n. 1a) “relazione di inversa proporzionalità” e come rappresentazione R dell'oggetto O (domanda n. 2) “grafico (arco di iperbole equilatera)” ovvero una rappresentazione R^4_1 nel registro grafico, espressa per semplicità nel registro della lingua naturale. Il campo di studio scelto è “geometria analitica”; la classe è una terza (scuola secondaria di primo grado). In questo caso, emerge una certa consapevolezza della distinzione tra i due livelli sopra menzionati (par. 4.2), quello dell'oggetto e quello della rappresentazione, confermata anche dalle risposte alle domande successive (Appendice C.2).

T15 ha scelto come oggetto O (domanda n. 1a) “numeri razionali” e come rappresentazione R dell'oggetto O (domanda n. 2), “rappresentazione nella retta orientata”. Il campo di studio scelto è “aritmetica”; la classe è una seconda (scuola secondaria di primo grado). Forse, avrebbe voluto dire “linea razionale” o “retta razionale”. Vi è comunque una certa consapevolezza della distinzione tra i due livelli.

T16 ha scelto come oggetto O (domanda n. 1a) “elevamento a potenza” e come rappresentazione R dell'oggetto O (domanda n. 2), “l'applicazione delle proprietà dell'elevamento a potenza come semplificazione dei calcoli”. Il campo di studio scelto è “aritmetica”; la classe è una prima (scuola secondaria di primo grado). In questo caso l'oggetto O è identificato con l'operazione di elevamento a potenza (definizione e proprietà), mentre la rappresentazione R corrisponde a una applicazione dell'operazione di elevamento a potenza, dunque a un trattamento di rappresentazioni R^2_i , nel registro della scrittura aritmetica: $R(T16) = \text{Trasf}(R^2_i, R^2_j)$.

4.3.1.3 Scuola secondaria di secondo grado

T3 ha scelto come oggetto O (domanda n. 1a) “segmento (contesto: geometria euclidea)” e come rappresentazione R dell’oggetto O (domanda n. 2):

T3: Definizione mediante proposizione: data una retta orientata (si fa riferimento all’assioma dell’ordine, senza il quale l’espressione punti compresi non avrebbe significato) e due punti appartenenti alla retta, si dice segmento l’insieme formato dai due punti e dai punti compresi tra essi. I due punti si dicono estremi...

Il campo di studio scelto è “geometria piana”; la classe è una seconda liceo linguistico. Durante l’intervista, si è cercato di indagare più a fondo nella risposta fornita.

Ric: Non sono sicura di aver capito bene le tue risposte alle domande 1a e 2, rileggile tu. Mi potresti dire qualcosa di più?

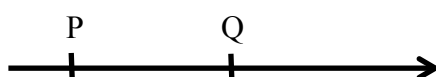
T3: Sì certamente. [Rilegge in silenzio] ... Che cos’è che non è chiaro?

Ric: Hai scelto come oggetto il segmento e come rappresentazione del segmento una definizione. Confermi questa tua scelta?

T3: Sì, ho scelto la definizione mediante proposizione, perché è quella che crea più problemi.

Ric: Utilizzi solo questa definizione per introdurre il segmento?

T3: No, l’accompagno anche con un disegno... di questo tipo [disegna sul questionario, dopo la risposta alla domanda n. 2]:



Ric: Ecco, nella definizione di segmento parli di retta orientata... Come mai?

T3: Insisto sulla retta orientata, perché quello che ti sostiene la definizione di segmento è l’assioma dell’ordine, che non c’è nella definizione di angolo. Ma gli studenti tendono a usare una sorta di ordine anche per definire l’angolo, parlando di punti compresi tra due semirette... come ho scritto nel questionario.

Ric: Sì, anche nelle altre risposte insisti molto sulla retta orientata...

T3: Sì, io insisto sulla retta orientata perché poi quando dai la definizione di angolo loro ricordano quello che hanno sentito nei livelli scolastici precedenti, cioè che è

l'insieme dei punti compresi tra due semirette. E quindi usano la stessa parola *compreso* [sia per il segmento sia per l'angolo]. Io voglio fargli capire che con il segmento ha senso perché hai un assioma dell'ordine. Con l'angolo e i punti del piano non ha più senso, perché non esiste un assioma dell'ordine per questo scopo. Difatti lì... si parla di due sottoinsiemi e quindi si tralascia di parlare di ordine.

Ric: Quindi, secondo te, l'assioma dell'ordine è indispensabile per parlare di punti compresi *tra* due punti della retta?

T3: Sì, sì certo perché io cerco, ogni volta che si incontra un termine, un vocabolo nuovo, prima di tutto di farli riflettere sul significato della parola, prendendo anche il vocabolario di italiano. In genere, faccio anche leggere la definizione del testo e gli chiedo: ma secondo voi che cosa vuol dire *compreso*? E vengono fuori un sacco di citazioni diverse, in cui parlano del significato della parola in contesti completamente diversi, anche al di fuori della matematica. E proprio quello che voglio è che nasca una discussione da cui poi si capisca che è importante, visto che la geometria euclidea è proprio un gioco in cui si costruisce un castello di carte, che ci siano delle carte sotto da cui partire, un tavolo.

Ric: I ragazzi, secondo te, non riescono a capire il senso del *tra* se non hanno in mente l'assioma dell'ordine?

T3: Quello che vorrei capissero della geometria... perché loro hanno in mente un'immagine della geometria: *vedo-intuisco*, che può andar bene sicuramente, quando fai geometria dinamica con un solido qualunque... sicuramente questo è un approccio buono. Però vorrei che capissero che la geometria alle superiori è razionale, d'altra parte la matematica dovrebbe essere così. Non dovrebbe essere la ripetizione di quello che sentono.

Ric: Dunque, tu ricorri all'assioma dell'ordine per definire il segmento, anche *non* orientato...

T3: Ma è perché, secondo me, enunci una serie di assiomi e questi non capiscono bene che cosa sono 'ste cose, a che cosa servono; per dargli subito il senso...

Ric: Quindi il segmento lo associ sempre a una retta orientata...

T3: Io vorrei che loro capissero che in un contesto, dentro una retta, ha più senso [l'ordine dei punti].

Ric: E nel contesto di una retta *non* orientata... il segmento...

T3: Ho capito anche qui... C'è il problema che sì, difatti quando passi in geometria

analitica parli della distanza tra due punti... Io vorrei avessero sempre in mente che è comunque un sottoinsieme della retta *orientata*.

Ric: E in geometria sintetica, non analitica?

T3: Sì, questo ha senso...

Ric: Ci sono anche rette *non* orientate...

T3: Sì, è vero, però quando parli di qualsiasi figura in cui si faccia uso della parola *segmento*, l'associ all'ordine; perché anche quando costruisci un triangolo, in verità disegni tre angoli, quindi delle semirette e quindi non segmenti... Purtroppo invece quando chiedi che cos'è un triangolo loro ti disegnano tre segmenti consecutivi, una poligonale chiusa, e non pensano agli angoli.

Mi hai fatto venire... che probabilmente qualche volta mi contraddico... perché lo disegnano da solo [il segmento].

Ric: [Sbilanciandosi un po'] Ho sempre pensato che non fosse necessario l'ordine per definire il segmento...

T3: No no, io solo per la necessità di far capire che cosa sia la geometria euclidea e che cosa sia in genere la matematica, costruzione insomma. Io vengo da una scuola dove purtroppo c'è la convinzione che basta ripetere quello che io dico e tutto va bene.

In questo caso, come in altri casi, emergono convinzioni molto personali sulla matematica e sulla sua didattica, sulle quali non possiamo soffermarci perché non è questo il nostro obiettivo. In ogni caso, non spetta a noi, non è nostro compito, valutare ciò che l'insegnante scrive o dice. Possiamo solo analizzare e interpretare ciò che emerge dalle sue risposte.

Resta il fatto che una definizione non costituisce, di per sé, un oggetto matematico, né una rappresentazione semiotica di un oggetto matematico. Una definizione è una espressione di una relazione tra due o più entità in uno o più registri discorsivi (lingua naturale, linguaggio della scrittura simbolica, o linguaggio formale), nella quale si utilizzano anche rappresentazioni semiotiche di oggetti matematici (R. Duval, comunicazione personale, 26 giugno, 2013).

T4 ha scelto come oggetto O (domanda n. 1a) "equazione della circonferenza nelle due forme che si studiano a scuola". Il campo di studio scelto è "geometria analitica"; la

classe è una terza professionale grafico. La rappresentazione R dell'oggetto O (domanda n. 2) è stata descritta nei termini seguenti:

T4: La rappresentazione sul piano cartesiano della circonferenza a partire dalle equazioni che la identificano.

Ric: Perché “equazioni” al plurale e “circonferenza” al singolare? A che tipo di equazioni (diverse) fai riferimento?

T4: Equazione della circonferenza di centro e raggio assegnati, ed equazione della circonferenza in forma estesa. Per alcuni ragazzi, come ben sai, sono proprio due oggetti diversi.

Da quest'ultima frase, molto sottile, emerge in realtà che T4 tratta le due equazioni come oggetti diversi, in quanto associate a due situazioni diverse. Gli studenti non potrebbero altrimenti evidenziarne la diversità, esplicitamente o implicitamente nelle loro produzioni. Ricorda il caso di T26 (par. 4.3.1.1): l'oggetto dipende dalla situazione, per cui, in due situazioni differenti, l'oggetto “equazione della circonferenza” (inteso come “oggetto circonferenza individualizzato algebricamente nel piano cartesiano”) assume “due forme” diverse. Da un punto di vista semio-cognitivo, queste “due forme” si spiegano in termini di distanza cognitiva o di non congruenza semantica tra le unità di contenuto delle due rappresentazioni (“forme”) nel registro della scrittura algebrica. Tale distanza cognitiva, o non congruenza, ostacola il riconoscimento immediato di un medesimo oggetto, fino al punto da trasformare l'oggetto in questione in due oggetti differenti in relazione alle situazioni sopra descritte. In altre parole, la difficoltà di riconoscimento di un medesimo oggetto in due rappresentazioni semiotiche del registro della scrittura algebrica, prima di un loro opportuno trattamento, diventa una caratteristica intrinseca dell'oggetto, che trasforma l'oggetto in due oggetti differenti. Dal punto di vista della teoria antropologica della didattica (par. 3.2), il Sapere da cui si parte, in questo caso, per la trasposizione didattica è già un sapere ottenuto con la trasposizione didattica, nella pratica d'insegnamento, un sapere da insegnare o insegnato, un sapere che integra ciò che l'insegnante ritiene indispensabile, necessario e adatto per quegli studenti in quella data situazione, e ciò che le reazioni o le risposte di altri studenti in situazioni analoghe hanno fatto emergere nella pratica d'insegnamento, ovvero un sapere che parte dalla conoscenza pratica dell'insegnante.

T5 ha scelto come oggetto O (domanda n. 1a) “poligoni”. Il campo di studio scelto è “geometria piana”; la classe è una prima di un istituto tecnico industriale. La rappresentazione R dell’oggetto O (domanda n. 2) è stata descritta nei termini seguenti:

T5: R: descrizione della figura (testo che descrive la costruzione). Dalla descrizione della figura alla sua costruzione: testo → disegno.

Ric: Puoi fornirmi un esempio specifico di testo?

T5: Esempio di testo: “Dato un triangolo ABC rettangolo in C, con \hat{A} doppio di \hat{B} , sia D il punto in cui la bisettrice dell’angolo A interseca l’altezza relativa all’ipotenusa. Preso su BC il segmento BP uguale a CD, sia Q il punto in cui la parallela ad AD condotta da P interseca AB. Dimostrare che i triangoli ACD e BPQ sono uguali e dedurre che ADPQ è un parallelogramma”.

La rappresentazione R dell’oggetto “poligono” fornita come esempio è un teorema, non una descrizione della costruzione di una figura (prima risposta). Un teorema sui poligoni non è una rappresentazione semiotica dell’oggetto “poligono”. In modo analogo una definizione di “poligono” non è una rappresentazione semiotica dell’oggetto “poligono”. Ricorda il caso T3, sopra descritto. L’insegnante intendeva comunque riferirsi a un “testo descrittivo di una costruzione geometrica” (risposta alla domanda n. 7).

4.3.1.4 Dalla scuola primaria alla scuola secondaria

Da quanto evidenziato nei paragrafi precedenti e in Appendice C, nel passaggio dalla scuola primaria alla scuola secondaria, la consapevolezza della distinzione tra il livello a cui si colloca l’oggetto e il livello a cui si colloca la rappresentazione non aumenta significativamente. L’idea di oggetto rimane vincolata alla situazione in esame o a rappresentazioni specifiche, dunque distante dall’idea di invariante di rappresentazioni. In altre parole, rappresentazioni differenti sono spesso associate a oggetti differenti (si veda per esempio: T26, T4).

La parola “rappresentazione” è utilizzata dall’insegnante sia in senso attivo, per designare un’azione: il “rendere presente una cosa per mezzo di...” (*rem praesentem facere*), in particolare un trattamento o una conversione (si veda per esempio: T16, T26), sia in senso passivo, per designare lo strumento di mediazione (il veicolo o mezzo di rappresentazione) (par. 2.2.4.5) (si veda per esempio: T9, T20). Nel primo caso la

rappresentazione semiotica di un oggetto matematico è confusa con una trasformazione di rappresentazioni semiotiche dell'oggetto in questione.

In Tabella 4.1 sono classificate le risposte degli insegnanti alle domande del questionario che riguardano la prima parte della prima domanda di ricerca. Tenendo conto delle riflessioni emerse nel corso della ricerca (par. 4.2), la consapevolezza della distinzione tra oggetto matematico (pre-definito, pre-costituito dalla istituzione) e una sua rappresentazione semiotica è stata rilevata sulla base della capacità dell'insegnante di rispondere alle domande n. 1a e 2, e alle domande ad esse strettamente legate (ovvero alle domande n. 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9), fornendo almeno due rappresentazioni semiotiche differenti di un medesimo oggetto matematico.

Tabella 4.1

L'insegnante è consapevole della distinzione tra oggetto matematico (pre-definito, pre-costituito dalla istituzione) e una sua rappresentazione semiotica?

SP	SÌ (5; 45%):	T6, T10, T20, T23, T25
	NO (6; 55%):	T1, T2, T11, T13, T22, T26
SS I	SÌ (7; 64%):	T7, T9, T12, T14, T15, T17, T21
	NO (4; 36%):	T8, T16, T18, T19
SS II	SÌ (3; 60%):	T4, T5, T24
	NO (2; 40%):	T3, T27
TOT	SÌ: 15 (56%)	
	NO: 12 (44%)	

Dalla Tabella 4.1 emerge in particolare che 15 insegnanti su 27 (56%), soprattutto di scuola secondaria, evidenziano una certa consapevolezza della distinzione tra il livello a cui si colloca l'oggetto matematico O e il livello a cui si colloca una sua rappresentazione $R(O)$. Riteniamo che tale consapevolezza, nella maggior parte dei casi, sia stata indotta dall'uso delle parole "oggetto" e "rappresentazione" in domande che suggeriscono risposte differenti. Ulteriori ricerche potranno confermare o escludere questa ipotesi.

L'insegnante non è in ogni caso abituato alla terminologia utilizzata nelle domande, in particolare alle espressioni: "registro di rappresentazione", "rappresentazione semiotica" e "oggetto matematico" (si vedano, per esempio, le risposte di T1, T2, T16, T3).

In Tabella 4.2 sono riportati i campi di studio entro i quali sono state individuate le rappresentazioni R che un determinato studente X riconosce o gestisce con molta difficoltà. Le classi di scuola primaria e secondaria dello studente X sono elencate in Tabella 4.3.

Tabella 4.2

Numero di campi di studio scelti dall'insegnante

	geometria piana	aritmetica	algebra	geometria analitica	statistica
SP	4	7			
SS I	7	2		1	1
SS II	2		1	2	
TOT	13	9	1	3	1

Il campo di studio “aritmetica” è stato il più scelto dall'insegnante di scuola primaria. La maggior parte degli insegnanti di scuola secondaria di primo grado ha scelto il campo di studio “geometria piana”. L'insegnante di scuola secondaria di secondo grado ha preso in esame anche il campo di studio “geometria analitica”. Si tratta dei campi di studio nei quali gli insegnanti partecipanti hanno evidenziato la particolare problematicità di alcune rappresentazioni semiotiche ivi utilizzate.

Tabella 4.3

Numero di classi scelte dall'insegnante

	I	II	III	IV	V
SP		1	3	4	3
SS I	3	5	3		
SS II	1	2	2		

Le classi di scuola primaria sono in gran parte terze, quarte e quinte. Sono assenti le classi quarte e quinte di scuola secondaria di secondo grado.

4.3.2 Rappresentazioni e registri di rappresentazione

Qui di seguito sono classificate le risposte degli insegnanti alle domande del questionario che riguardano la seconda parte della prima domanda di ricerca: “Per riferirsi a un oggetto matematico l’insegnante fornisce *intenzionalmente* diverse sue rappresentazioni possibili? Se sì, che tipo di registro utilizza più di frequente?”

In Tabella 4.4 sono elencati i registri di appartenenza delle rappresentazioni semiotiche che gli insegnanti di scuola primaria e secondaria hanno scelto per riferirsi a un oggetto matematico (righe non ombreggiate) (domande n. 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9), e i registri di appartenenza delle rappresentazioni semiotiche che gli stessi insegnanti ritengono più problematiche per lo studente (righe ombreggiate) (domande n. 2, 3, 4, 10). Sono raggruppati in registri discorsivi multifunzionali (lingua naturale) o monofunzionali (scritture aritmetica, decimale, frazionaria, algebrica) e in registri non discorsivi multifunzionali (disegni, configurazioni geometriche) o monofunzionali (grafici, particolari configurazioni geometriche, aerogrammi). Tali registri si distinguono dagli pseudo-oggetti, che non costituiscono un registro di rappresentazione semiotica (par. 2.2.5).

Tabella 4.4

Registri di rappresentazione e pseudo-oggetti: uso da parte dell’insegnante e difficoltà di gestione (DIFF) da parte dello studente (secondo l’insegnante)

	Registri discorsivi multifunzionali	Registri discorsivi monofunzionali (SCRITTURE SIMBOLICHE)				Registri non discorsivi multifunzionali (FIGURE)		Registri non discorsivi monofunzionali (GRAFICI)			Pseudo-oggetti
	1a Lingua naturale	2a Scr. aritm.	2b Scr. decim.	2c Scr. fraz.	2d Scr. algeb.	3a Dis.	3b Config.	4a Grafici	4b Config.	4c Aerog.	
						iconico	non iconico	non iconico			
SP (USO)	11 (100%)	2 (18%)	2 (18%)	5 (45%)		3 (27%)	4 (36%)			1 (9%)	9 (82%)
SP (DIFF)	5 (45%)	5 (45%)		7 (64%)			5 (45%)		3 (27%)		2 (18%)
SS I (USO)	11 (100%)	1 (9%)		1 (9%)	4 (36%)	1 (9%)	7 (64%)	4 (36%)			1 (9%)
SS I (DIFF)	8 (73%)	6 (55%)		5 (45%)	4 (36%)		8 (73%)	3 (27%)	2 (18%)		
SS II (USO)	5 (100%)	1 (20%)	1 (20%)	1 (20%)	4 (80%)		5 (100%)	3 (60%)			
SS II (DIFF)	4 (80%)	1 (20%)		3 (60%)	3 (60%)		3 (60%)	2 (40%)	1 (20%)		

Tutti gli insegnanti di scuola primaria e di scuola secondaria hanno utilizzato sia una parola o una combinazione di due o più parole, sia frasi (definizioni, proprietà, teoremi etc.), eventualmente accompagnate da figure, per riferirsi a un oggetto o contenuto matematico (Appendice C). In alcuni casi, soprattutto nella scuola primaria e secondaria di primo grado, le stesse parole, locuzioni o frasi sono state utilizzate per riferirsi anche a oggetti concreti. Per esempio:

T2 (SP): Una rappresentazione in 3D: un modello scheletrato costruito con le cannuce o gli stecchini, all'interno del quale, con filo colorato, si rappresenta il triangolo in questione.

T10 (SP): Angolo della stanza (lingua naturale in contrasto con la lingua matematica).

T22 (SP): Rappresentazione [dei numeri naturali] sull'abaco.

T18 (SS I): Confondono lo spigolo di un oggetto reale con l'angolo.

Nei tre paragrafi seguenti sono presi in esame i dati raccolti sui registri di rappresentazione utilizzati dagli insegnanti di scuola primaria e di scuola secondaria di primo e di secondo grado.

4.3.2.1 Scuola primaria

I registri di rappresentazione più utilizzati dall'insegnante di scuola primaria (soprattutto delle ultime classi) per riferirsi a oggetti o contenuti matematici (Tabella 4.4) sono, nell'ordine:

1. il registro della lingua naturale;
2. il registro della scrittura frazionaria;
3. il registro multifunzionale delle configurazioni geometriche;
4. il registro delle rappresentazioni di tipo iconico (disegni);
5. il registro della scrittura aritmetica e quello della scrittura decimale;
6. il registro grafico (aerogrammi).

In termini delle quattro classi di registri di rappresentazione semiotica, l'insegnante di scuola primaria, nella situazione sopra descritta, utilizza principalmente (nell'ordine):

1. registri discorsivi multifunzionali;
2. registri discorsivi monofunzionali;

3. registri non discorsivi multifunzionali;
4. registri non discorsivi monofunzionali.

Dunque, per l'insegnante di scuola primaria, oltre ai registri discorsivi multifunzionali, i registri discorsivi monofunzionali sono di primaria importanza per la comprensione dei contenuti matematici.

La maggior parte degli insegnanti di scuola primaria (82%) utilizza o menziona pseudo-oggetti (abaci, *reglettes*, modellini, perline etc.) nelle attività matematiche. Due di questi ne hanno evidenziato anche i limiti o gli ostacoli che possono frapporre alla costruzione di conoscenze. Per esempio, alla domanda n. 3 del questionario (Su quali aspetti della rappresentazione R lo studente X focalizza maggiormente la sua attenzione?) l'insegnante T22 di scuola primaria ha risposto:

T22: A raggruppamenti fatti con materiale strutturato: abaco, regoli.

In seguito, durante un'intervista, ha affermato:

T22: Nella scuola dove lavoro sono usati frequentemente i materiali strutturati. Ricordo un articolo di qualche anno fa del prof. D'Amore che affrontava in modo provocatorio l'argomento. Penso che ogni materiale strutturato o no sia utile, quello che conta è che in quel momento sia funzionale all'obiettivo che ci siamo prefissi. In classe prima si usano in genere i regoli in colore, servono per fare giochi ed esercizi strutturati, ma i bambini li usano liberamente per fare costruzioni, per realizzare ritmi, per metterli in ordine secondo un criterio che ognuno si sceglie... perché, e qui sono d'accordo con il prof. D'Amore "apprendere un concetto vuol dire vederlo in azione in tutte le sue sfaccettature". A questo punto il discorso si farebbe molto ampio, penso ad esempio all'uso della LIM, sono solo strumenti, non la soluzione ai problemi.

I problemi didattici inerenti all'uso acritico dei materiali strutturati, in particolare il problema del *transfer cognitivo* non spontaneo, sono ampiamente descritti, documentati e chiariti in numerosi lavori di ricerca e di divulgazione in didattica della matematica (si veda per esempio: D'Amore, 2002a, 2002b; Locatello, Meloni, & Sbaragli, 2008). Tali materiali non costituiscono dei registri semiotici, ma degli *pseudo-oggetti* manipolabili concretamente. Le rappresentazioni ottenute mediante tali materiali, di tipo "concreto" e iconico, svolgono principalmente una funzione di supporto visivo o materiale per alcune

particolari operazioni. Esse richiedono in ogni caso l'articolazione con un registro semiotico (come la lingua naturale o una scrittura simbolica) per esplicitare o effettuare le operazioni (Duval, 2006c).

I registri di rappresentazione più problematici secondo l'insegnante di scuola primaria (Tabella 4.4) sono (nell'ordine):

1. il registro della scrittura frazionaria;
2. il registro della lingua naturale (in particolare l'uso di termini specifici), il registro della scrittura aritmetica e il registro multifunzionale delle configurazioni geometriche;
3. il registro monofunzionale delle configurazioni geometriche.

Non sono menzionati il registro della scrittura decimale e il registro delle rappresentazioni di tipo iconico (disegni) tra quelli più difficoltosi.

In termini delle quattro classi di registri, secondo l'insegnante di scuola primaria i registri più problematici sono i seguenti:

- registri discorsivi monofunzionali;
- registri discorsivi multifunzionali e registri non discorsivi multifunzionali;
- registri non discorsivi monofunzionali.

I registri discorsivi monofunzionali, per l'insegnante di scuola primaria, risultano dunque più complessi da gestire semioticamente, rispetto alle altre classi di registri. Occorre tener conto che i registri non discorsivi monofunzionali non hanno nella scuola primaria la stessa diffusione che hanno nella scuola secondaria di primo e di secondo grado.

Riguardo al numero di registri utilizzati da ciascun insegnante di scuola primaria, 6 insegnanti su 11 (54% circa) hanno utilizzato due registri di rappresentazione per riferirsi a un oggetto o contenuto matematico; 4 insegnanti (36% circa) hanno utilizzato tre registri, mentre un'insegnante (9% circa) 4 registri (Tabella 4.5).

Tabella 4.5

Registri di rappresentazione utilizzati dall'insegnante di scuola primaria per riferirsi a un oggetto o contenuto matematico

SP (registri utilizzati)	1a Lingua naturale	2a Scr. aritm.	2b Scr. decim.	2c Scr. fraz.	2d Scr. algeb.	3a Dis.	3b Config. multif.	4a Grafici	4b Config. monof.	4c Aerog.	N. registri
T1	x		x	x							3
T2	x						x				2
T6	x			x		x					3
T10	x						x				2
T11	x						x				2
T13	x			x		x					3
T20	x	x									2
T22	x	x									2
T23	x						x				2
T25	x			x						x	3
T26	x		x	x		x					4
TOT	11	2	2	5		3	4			1	

4.3.2.2 Scuola secondaria di primo grado

I registri di rappresentazione più utilizzati dall'insegnante di scuola secondaria di primo grado per riferirsi a oggetti o contenuti matematici (Tabella 4.4) sono, nell'ordine:

1. il registro della lingua naturale;
2. il registro multifunzionale delle configurazioni geometriche;
3. il registro della scrittura algebrica e il registro grafico;
4. il registro della scrittura aritmetica, il registro della scrittura frazionaria e il registro delle rappresentazioni di tipo iconico (disegni).

In termini delle quattro classi di registri di rappresentazione semiotica, l'insegnante di scuola secondaria di primo grado, nella situazione sopra descritta, utilizza principalmente (nell'ordine):

1. registri discorsivi multifunzionali;
2. registri non discorsivi multifunzionali;
3. registri discorsivi monofunzionali;
4. registri non discorsivi monofunzionali.

Dunque, per l'insegnante di scuola secondaria di primo grado, oltre al registro discorsivo multifunzionale della lingua naturale, il registro non discorsivo multifunzionale delle configurazioni geometriche è di primaria importanza per la

comprensione dei contenuti matematici. I registri discorsivi multifunzionali costituiscono comunque la classe di registri a cui l'insegnante di scuola secondaria di primo grado ricorre più di frequente, rispetto alle altre classi di registri.

Solo un'insegnante di scuola secondaria di primo grado (9%) riferisce l'uso di pseudo-oggetti (un modellino di cubo) nelle attività matematiche.

I registri di rappresentazione più problematici secondo l'insegnante di scuola secondaria di primo grado sono (nell'ordine):

1. il registro della lingua naturale e il registro multifunzionale delle configurazioni geometriche;
2. il registro della scrittura aritmetica;
3. il registro della scrittura frazionaria;
4. il registro della scrittura algebrica;
5. il registro grafico;
6. il registro monofunzionale delle configurazioni geometriche.

In termini delle quattro classi di registri, secondo l'insegnante di scuola secondaria di primo grado i registri più problematici sono i seguenti:

1. registri discorsivi monofunzionali;
2. registri discorsivi multifunzionali e registri non discorsivi multifunzionali;
3. registri non discorsivi monofunzionali.

Sebbene il registro discorsivo multifunzionale della lingua naturale e il registro non discorsivo multifunzionale delle configurazioni geometriche siano ritenuti più problematici da parte dell'insegnante di scuola secondaria di primo grado, il numero elevato di registri discorsivi monofunzionali in uso in tale ordine di scuola rende la classe dei registri discorsivi monofunzionali più problematica di quella dei registri discorsivi e non discorsivi di tipo multifunzionale.

Per quanto riguarda, in particolare, l'uso di termini matematici, sia l'insegnante di scuola primaria sia l'insegnante di scuola secondaria di primo grado evidenziano la complessità del processo di comprensione di tali termini da parte dello studente. L'insegnante di scuola secondaria di secondo grado evidenzia invece una maggiore difficoltà di comprensione o di uso specializzato, da parte dello studente, di definizioni, assiomi, teoremi, proprietà etc., ovvero di frasi particolarmente dense di contenuto matematico.

Riguardo al numero di registri utilizzati da ciascun insegnante di scuola secondaria di primo grado, 5 insegnanti su 11 (45% circa) hanno utilizzato due registri di rappresentazione per riferirsi a un oggetto o contenuto matematico; 5 insegnanti (45% circa) hanno utilizzato tre registri, mentre un'insegnante (9% circa) 4 registri (Tabella 4.6).

Tabella 4.6

Registri di rappresentazione utilizzati dall'insegnante di scuola secondaria di primo grado per riferirsi a un oggetto o contenuto matematico

SS I (registri utilizzati)	1a Lingua naturale	2a Scr. aritm.	2b Scr. decim.	2c Scr. fraz.	2d Scr. algeb.	3a Dis.	3b Config. multif.	4a Grafici	4b Config. monof.	4c Aerog.	N. registri
T7	x					x	x				3
T8	x						x				2
T9	x				x			x			3
T12	x				x			x			3
T14	x						x				2
T15	x			x				x			3
T16	x	x			x						3
T17	x						x				2
T18	x						x				2
T19	x						x				2
T21	x				x		x	x			4
TOT	11	1		1	4	1	7	4			

4.3.2.3 Scuola secondaria di secondo grado

I registri di rappresentazione più utilizzati dall'insegnante di scuola secondaria di secondo grado (delle prime tre classi) per riferirsi a oggetti o contenuti matematici (Tabella 4.4) sono, nell'ordine:

1. il registro della lingua naturale e il registro multifunzionale delle configurazioni geometriche;
2. il registro della scrittura algebrica;
3. il registro grafico;
4. il registro della scrittura aritmetica, il registro della scrittura decimale e il registro della scrittura frazionaria.

In termini delle quattro classi di registri di rappresentazione semiotica, l'insegnante di scuola secondaria di secondo grado, nella situazione sopra descritta, utilizza principalmente (nell'ordine):

1. registri discorsivi monofunzionali;
2. registri discorsivi multifunzionali e registri non discorsivi multifunzionali;
3. registri non discorsivi monofunzionali.

Per l'insegnante di scuola secondaria di secondo grado, come per l'insegnante di scuola secondaria di primo grado, oltre al registro discorsivo multifunzionale della lingua naturale, il registro non discorsivo multifunzionale delle configurazioni geometriche è considerato di primaria importanza per la comprensione dei contenuti matematici. Tuttavia, la classe dei registri discorsivi monofunzionali si colloca al primo posto per l'elevato numero di registri discorsivi monofunzionali in uso in tale ordine di scuola.

Nessun insegnante di scuola secondaria di secondo grado menziona l'uso di rappresentazioni di tipo iconico o di pseudo-oggetti nelle attività matematiche.

I registri di rappresentazione più problematici secondo l'insegnante di scuola secondaria di secondo grado sono (nell'ordine):

1. il registro della lingua naturale;
2. il registro della scrittura frazionaria, il registro della scrittura algebrica e il registro multifunzionale delle configurazioni geometriche;
3. il registro grafico;
4. il registro della scrittura aritmetica e il registro monofunzionale delle configurazioni geometriche.

In termini delle quattro classi di registri, secondo l'insegnante di scuola secondaria di secondo grado i registri più problematici sono i seguenti:

1. registri discorsivi monofunzionali;
2. registri discorsivi multifunzionali;
3. registri non discorsivi multifunzionali e monofunzionali.

Sebbene il registro discorsivo multifunzionale della lingua naturale sia ritenuto più problematico rispetto agli altri registri da parte dell'insegnante di scuola secondaria di secondo grado, l'elevato numero di registri discorsivi monofunzionali in uso in tale ordine di scuola rende la classe dei registri discorsivi monofunzionali più problematica rispetto alla classe dei registri discorsivi multifunzionali.

Riguardo al numero di registri utilizzati da ciascun insegnante di scuola secondaria di secondo grado, un'insegnante su 5 (20%) ha utilizzato due registri di rappresentazione per riferirsi a un oggetto o contenuto matematico; 3 insegnanti (60%) hanno utilizzato quattro registri, mentre un'insegnante (20% circa) 6 registri (Tabella 4.7).

Tabella 4.7

Registri di rappresentazione utilizzati dall'insegnante di scuola secondaria di secondo grado per riferirsi a un oggetto o contenuto matematico

SS II (registri utilizzati)	1a Lingua naturale	2a Scr. aritm.	2b Scr. decim.	2c Scr. fraz.	2d Scr. algeb.	3a Dis.	3b Config. multif.	4a Grafici	4b Config. monof.	4c Aerog.	N. registri
T3	x						x				2
T4	x				x		x	x			4
T5	x				x		x	x			4
T24	x				x		x	x			4
T27	x	x	x	x	x		x				6
TOT	5	1	1	1	4		5	3			

4.3.2.4 Dalla scuola primaria alla scuola secondaria

Nel passaggio dalla scuola primaria alla scuola secondaria di primo grado, e da questa alla scuola secondaria di secondo grado (Tabella 4.4, Figure 4.3, 4.4, 4.5), emerge quanto segue:

1. Il numero dei registri, e dunque delle rappresentazioni, utilizzati dall'insegnante aumenta considerevolmente, in relazione ai contenuti sviluppati nei diversi ordini di scuola. Tuttavia rappresentazioni differenti sono spesso associate a oggetti differenti (par. 4.3.1).
2. L'insegnante di scuola primaria (soprattutto delle ultime classi) ricorre in primo luogo alla coppia di registri (lingua naturale, scrittura frazionaria) spesso accompagnata da un terzo registro, quello delle rappresentazioni di tipo iconico (disegni), e poi alla coppia di registri (lingua naturale, registro multifunzionale delle configurazioni geometriche) (Tabella 4.5).
3. L'insegnante di scuola secondaria di primo grado e l'insegnante di scuola secondaria di secondo grado (delle prime tre classi) ricorrono invece entrambi, in primo luogo, alla coppia di registri (lingua naturale, registro multifunzionale delle

configurazioni geometriche) e poi alla coppia di registri (lingua naturale, scrittura algebrica) spesso accompagnata dal registro grafico (Tabelle 4.6 e 4.7).

4. L'uso di coppie, terne etc. di registri che includano registri non discorsivi evidenzia la tendenza da parte dell'insegnante ad associare alle descrizioni verbali o formali di proprietà o relazioni una loro rappresentazione visuale.
5. Nel passaggio dalla scuola primaria alla scuola secondaria di primo grado, e da questa alla scuola secondaria di secondo grado, aumentano le difficoltà d'uso specializzato, da parte dello studente, del registro della lingua naturale (Tabella 4.4).
6. La complessità d'uso del registro della scrittura frazionaria non diminuisce in modo significativo nel passaggio dalla scuola primaria alla scuola secondaria di secondo grado (Tabella 4.4).
7. Il registro della scrittura algebrica, che emerge nella scuola secondaria di primo grado, aumenta di complessità nel passaggio alla scuola secondaria di secondo grado (Tabella 4.4).
8. La complessità del registro multifunzionale delle configurazioni geometriche aumenta nel passaggio dalla scuola primaria alla scuola secondaria di primo grado per poi diminuire, seppur leggermente, nella scuola secondaria di secondo grado (Tabella 4.4).
9. La complessità d'uso dei grafici aumenta significativamente nel passaggio dalla scuola secondaria di primo grado alla scuola secondaria di secondo grado, come peraltro ci si aspetta, mentre la complessità d'uso del registro monofunzionale delle configurazioni geometriche rimane pressoché invariata nei tre ordini di scuola (Tabella 4.4).

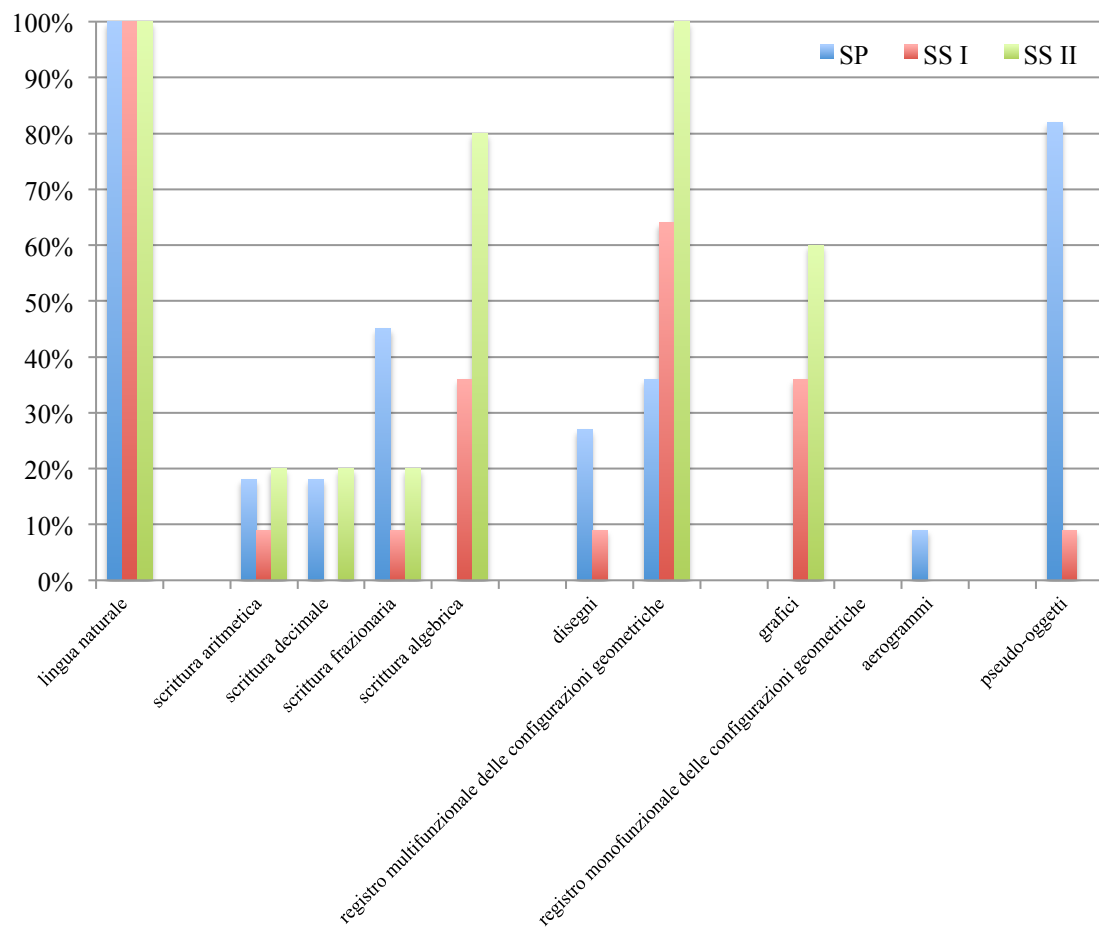


Figura 4.3 Registri di rappresentazione e pseudo-oggetti: uso da parte dell'insegnante

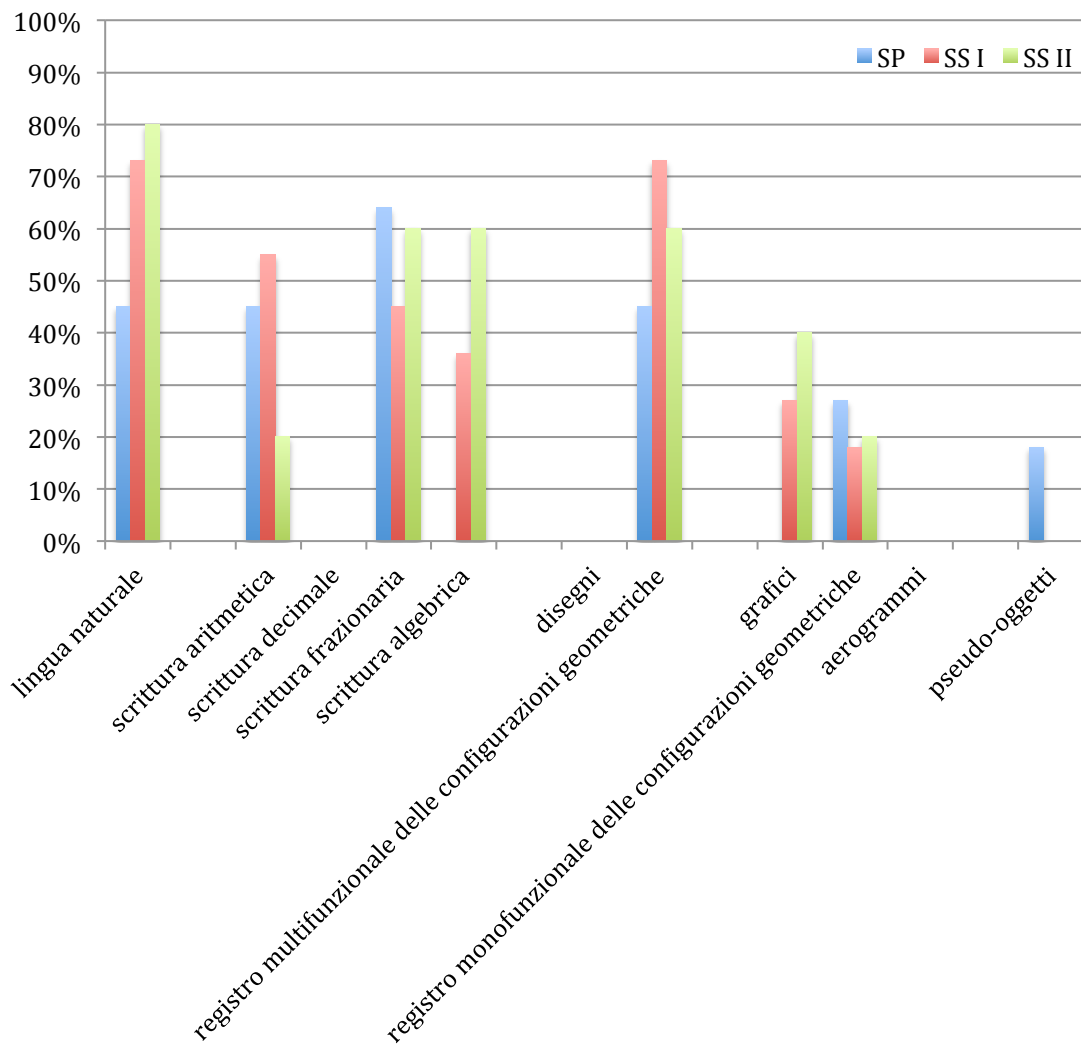


Figura 4.4 Registri di rappresentazione e pseudo-oggetti: difficoltà di gestione da parte dello studente, secondo l'insegnante

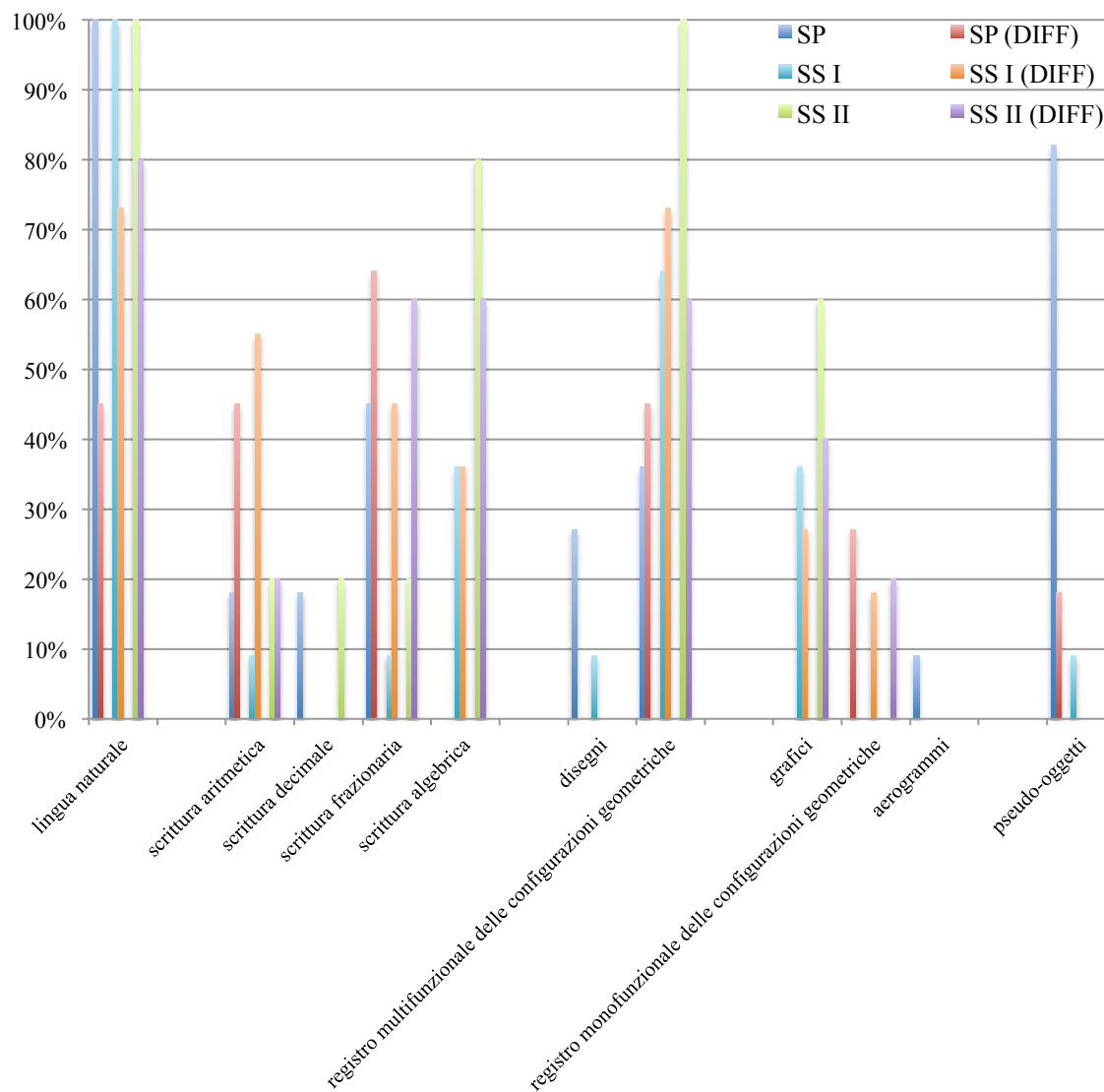


Figura 4.5 Registri di rappresentazione menzionati dall'insegnante e difficoltà di gestione da parte dello studente, secondo l'insegnante

4.3.3 *Aspetti di una rappresentazione che ne favoriscono la comprensione*

Qui di seguito sono classificate le risposte degli insegnanti alle domande (n. 5, 6) del questionario strettamente legate alla seconda domanda di ricerca: “L’insegnante riconosce i diversi aspetti di una rappresentazione semiotica sui quali lo studente in grado di gestirla può focalizzarsi? Se sì, a quali di essi l’insegnante attribuisce l’apprendimento dello studente?”.

Nelle domande n. 5 e 6 gli aspetti iconico-qualitativi corrispondono alle alternative “a” (aspetti concreti di R, come quelli legati alla sua forma, dimensione, colore o posizione) e “b” (somiglianza di R con qualcos’altro di concreto); gli aspetti iconico-strutturali corrispondono all’alternativa “c” (aspetti strutturali come quelli legati alla costruzione di R, a proprietà o a teoremi); gli aspetti di analogia corrispondono alle alternative “b” (somiglianza di R con qualcos’altro di concreto) e “d” (aspetti legati al linguaggio quotidiano o all’esperienza sensibile); gli aspetti indicali corrispondono all’alternativa “e” (aspetti di rinvio a qualcos’altro, come a un’operazione da svolgere, a un’altra rappresentazione, a un altro oggetto matematico, o a proprietà); gli aspetti simbolici corrispondono all’alternativa “f” (aspetti convenzionali, come quelli legati a notazioni, definizioni, regole o vincoli d’uso).

Il riconoscimento dei diversi aspetti (iconico-qualitativi, iconico-strutturali, di analogia, indicali, simbolici) di una rappresentazione semiotica sui quali lo studente può focalizzarsi è stato rilevato sulla base della capacità dell’insegnante di riconoscere l’alternativa di risposta fornita dal questionario che meglio descrive la sua risposta personale, ovvero sulla base della capacità dell’insegnante di classificare la sua risposta. In appendice C, le alternative di risposta, non riconosciute dall’insegnante, che rappresentano meglio la risposta personale dell’insegnante sono racchiuse entro parentesi quadrate.

Nelle Tabelle 4.8 e 4.9 sono classificate le risposte degli insegnanti in relazione alla domanda: “L’insegnante riconosce i diversi aspetti di una rappresentazione semiotica sui quali lo studente in grado di gestirla può focalizzarsi?”.

Ricordiamo che, nel questionario, Y designa lo studente in grado di gestire la rappresentazione che lo studente X gestisce invece con molta difficoltà (Appendice B).

Tabella 4.8

L'insegnante riconosce i diversi aspetti di una rappresentazione semiotica sui quali lo studente in grado di gestirla può focalizzarsi?

	Domanda n. 5		Domanda n. 6	
SP	Sì (9): T1, T2, T6, T10, T11, T20(-1 caso/3), T22(-1 caso/6), T23, T25	NO (2): T13(-1 caso/1), T26(-1 caso/1)	Sì (10): T1, T2, T6, T10, T11, T20(-1 caso/3), T22(-1 caso/5), T23, T25, T26	NO (1): T13 (-1 caso/1)
SS I	Sì (11): T7, T8, T9, T12, T14, T15(-1 caso/2), T16, T17, T18, T19, T21	NO (0):	Sì (10): T7, T8, T9, T14, T15, T16, T17, T18, T19, T21	NO (1): T12(-1 caso/1)
SS II	Sì (4): T4(-1 caso/2), T5(-1 caso/8), T24, T27(- 2 casi/5)	NO (1): T3(-4 casi/7)	Sì (4): T3(-1 caso/3), T5(-1 caso/8), T24, T27(-4 casi/13)	NO (1): T4(-1 caso/1)
TOT	Sì (24; 89%) L'insegnante sa classificare alcuni aspetti di una rappresentazione sui quali lo studente in grado di gestirla può focalizzarsi	NO (3; 11%)	Sì (24; 89%) L'insegnante sa classificare alcuni aspetti di una rappresentazione ai quali attribuisce l'apprendimento dello studente che è in grado di gestirla	NO (3; 11%)

Nota. (-n casi/m) significa che l'insegnante non è riuscito a riconoscere n volte su m (essendo m il numero delle risposte fornite alla domanda in questione) l'alternativa di risposta, tra quelle fornite dal questionario, che rappresenta o in cui si colloca meglio la sua risposta alla domanda.

Tabella 4.9

Aspetti della rappresentazione R sui quali lo studente Y, in grado di gestirla, si focalizza (domanda n. 5)

	(a, b) Aspetti iconici di tipo qualitativo	(c) Aspetti iconici di tipo strutturale	(b, d) Aspetti di analogia	(e) Aspetti indicali	(f) Aspetti simbolici
SP	T6, T10, T11, T22	T1, T2, T6, T13, T20, T22, T23, T26	T2, T6, T10, T11, T22	T10, T22, T25	T1, T20, T22
SS I	T14, T15, T17	T7, T8, T9, T12, T14, T16, T19, T21	T15		T7, T9, T14, T15, T18, T19, T21
SS II	T3, T27	T3, T4, T5, T27		T3, T5, T24, T27	T3, T5, T27
Tot (su 55)	9 (16%)	20 (36%)	6 (11%)	7 (13%)	13 (24%)

Nota. Le percentuali fanno riferimento al numero complessivo (55) degli aspetti evidenziati dagli insegnanti.

Dalla Tabella 4.8 emerge che la maggior parte degli insegnanti (24 su 27; 89%) riconosce e sa classificare alcuni aspetti di una rappresentazione semiotica R sui quali lo studente, in grado di gestire la rappresentazione R, si focalizza. Si tratta soprattutto di aspetti iconici di tipo strutturale (Tabella 4.9).

Lo stesso numero di insegnanti (24 su 27; 89%) riconosce e sa classificare gli aspetti di una rappresentazione semiotica R ai quali attribuisce la capacità dello studente di gestirla (Tabella 4.8). Tali aspetti (Tabella 4.10) coincidono in gran parte con quelli sui quali lo studente si focalizza (Tabella 4.9).

In Tabella 4.10 sono classificate le risposte degli insegnanti in relazione alla domanda: “A quali di essi [aspetti iconico-qualitativi, iconico-strutturali, di analogia, indicali, simbolici della rappresentazione scelta] l’insegnante attribuisce l’apprendimento dello studente?”.

Tabella 4.10

Aspetti della rappresentazione R ai quali l’insegnante attribuisce la capacità di Y di gestire R (domanda n. 6)

	(a, b) Aspetti iconici di tipo qualitativo	(c) Aspetti iconici di tipo strutturale	(b, d) Aspetti di analogia	(e) Aspetti indicali	(f) Aspetti simbolici
SP	T10, T11, T22	T1, T2, T6, T13, T20, T22, T23, T25	T2, T6, T10, T11, T22	T10, T22, T25, T26	T1, T20, T22
SS I	T14	T7, T8, T9, T12, T15, T16, T17, T21			T7, T15, T18, T19
SS II		T3, T4, T5, T27		T5, T24, T27	T3, T5, T27
Tot (su 46)	4 (9%)	20 (43%)	5 (11%)	7 (15%)	10 (22%)

Nota. Le percentuali fanno riferimento al numero complessivo (46) degli aspetti evidenziati dagli insegnanti.

L’insegnante di scuola primaria attribuisce la capacità di Y di gestire R al fatto di focalizzarsi soprattutto sugli aspetti legati alla costruzione e alle proprietà della rappresentazione R, ovvero sugli aspetti iconico-strutturali di R, e sugli aspetti di analogia (aspetti posti in rapporto, non necessariamente di somiglianza, con il linguaggio quotidiano o l’esperienza sensibile). L’insegnante di scuola secondaria di primo e di secondo grado attribuisce la capacità di Y di gestire R al fatto di focalizzarsi in primo luogo sugli aspetti iconico-strutturali di R (come quelli legati alla costruzione di R, a proprietà o a teoremi), e in secondo luogo sugli aspetti simbolici (aspetti convenzionali, come quelli legati a notazioni, definizioni, regole o vincoli d’uso) (Tabella 4.10).

Alcuni esempi.

T6 (SP), in relazione all'oggetto "numeri razionali" e alla rappresentazione nella scrittura frazionaria, ha risposto alla domanda n. 6 evidenziando in particolare i punti "c1", "c2" e "d", descritti nella risposta alla domanda n. 5 nei termini seguenti: "costruzione di R" (c1), "proprietà" (c2) e "aspetti legati al linguaggio quotidiano, in particolare: la propria esperienza nella quotidianità in punteggi, probabilità, percentuali, statistica". Si tratta dunque di aspetti legati alla costruzione di R, ovvero iconico-strutturali, e di aspetti di analogia.

Una risposta di T4 (SS II) alle domande n. 5 e 6, in relazione all'oggetto "equazione della circonferenza nelle due forme che si studiano a scuola" e alla rappresentazione nel piano cartesiano della circonferenza, è stata la seguente:

T4: Individua come prima cosa il centro della circonferenza, quindi disegna il resto. Applica correttamente i principi di equivalenza delle equazioni, ed è in grado di passare da una forma all'altra senza difficoltà.

In altre parole, lo studente si focalizza su aspetti legati alla costruzione e alle proprietà della rappresentazione R.

T18 (SS I), evidenziando nella domanda n. 6 le risposte "definizioni" e "regole o vincoli d'uso", ha aggiunto:

T18: Le definizioni e le regole non sono state semplicemente memorizzate meccanicamente ma comprese e interiorizzate.

In questo caso si fa riferimento ad aspetti simbolici della rappresentazione R.

4.3.4 Aspetti di una rappresentazione che ne ostacolano la comprensione

Qui di seguito sono classificate le risposte degli insegnanti alle domande (n. 3, 4) del questionario strettamente legate alla terza domanda di ricerca: "L'insegnante riconosce i diversi aspetti di una rappresentazione semiotica sui quali lo studente che la gestisce con difficoltà può focalizzarsi? Se sì, a quali di essi l'insegnante attribuisce le difficoltà di apprendimento dello studente?".

Nelle domande n. 3 e 4, come nelle domande n. 5 e 6, gli aspetti iconico-qualitativi corrispondono alle alternative "a" (aspetti concreti di R, come quelli legati alla sua forma, dimensione, colore o posizione) e "b" (somiglianza di R con qualcos'altro di concreto);

gli aspetti iconico-strutturali corrispondono all'alternativa "c" (aspetti strutturali come quelli legati alla costruzione di R, a proprietà o a teoremi); gli aspetti di analogia corrispondono alle alternative "b" (somiglianza di R con qualcos'altro di concreto) e "d" (aspetti legati al linguaggio quotidiano o all'esperienza sensibile); gli aspetti indicali corrispondono all'alternativa "e" (aspetti di rinvio a qualcos'altro, come a un'operazione da svolgere, a un'altra rappresentazione, a un altro oggetto matematico, o a proprietà); gli aspetti simbolici corrispondono all'alternativa "f" (aspetti convenzionali, come quelli legati a notazioni, definizioni, regole o vincoli d'uso).

Il riconoscimento dei diversi aspetti (iconico-qualitativi, iconico-strutturali, di analogia, indicali, simbolici) di una rappresentazione semiotica sui quali lo studente può focalizzarsi è stato rilevato, anche in questo caso, sulla base della capacità dell'insegnante di riconoscere l'alternativa di risposta fornita dal questionario che meglio descrive la sua risposta personale. In appendice C, le alternative di risposta, non riconosciute dall'insegnante, che rappresentano meglio la risposta personale dell'insegnante sono racchiuse entro parentesi quadrate.

Nelle Tabelle 4.11 e 4.12 sono classificate le risposte degli insegnanti in relazione alla domanda: "L'insegnante riconosce i diversi aspetti di una rappresentazione semiotica sui quali lo studente che la gestisce con difficoltà può focalizzarsi?".

Ricordiamo che, nel questionario, X designa lo studente che gestisce la rappresentazione R con molta difficoltà (Appendice B).

Tabella 4.11

L'insegnante riconosce i diversi aspetti di una rappresentazione semiotica sui quali lo studente che la gestisce con difficoltà può focalizzarsi?

	Domanda n. 3		Domanda n. 4	
SP	Sì (8): NO (3):	T2(-1 caso/3), T6(-1 caso/3), T10, T11, T13(-1 caso/2), T22(-2 casi/6), T23(-1 caso/5), T26 T1(-2 casi/3), T20(-1 caso/1), T25(-1 caso/1)	Sì (10): NO (1):	T1(-1 caso/3), T2(-1 caso/5), T6, T10, T11, T13(-1 caso/2), T20, T22, T23(-1 caso/2), T25 T26(-1 caso/1)
SS I	Sì (10): NO (1):	T7(-1 caso/4), T8, T9, T12(-1 caso/2), T14, T16, T17, T18, T19, T21 T15(-1 caso/1)	Sì (10): NO (1):	T8, T9, T12, T14, T15(-1 caso/4), T16(-1 caso/2), T17, T18, T19, T21 T7(-1 caso/1)
SS II	Sì (3): NO (2):	T5(-1 caso/7), T24, T27(-2 casi/6) T3(-4 casi/7), T4(-3 casi/4)	Sì (4): NO (1):	T3 (-1 caso/5), T5(-1 caso/6), T24, T27(-4 casi/11) T4(-2 casi/3)
TOT	Sì (21; 78%) NO (6; 22%)	L'insegnante sa classificare alcuni aspetti di una rappresentazione sui quali lo studente in difficoltà si focalizza	Sì (24; 89%) NO (3; 11%)	L'insegnante sa classificare alcuni aspetti di una rappresentazione ai quali riconduce le difficoltà che incontra lo studente nella sua gestione

Nota. (-n casi/m) significa che l'insegnante non è riuscito a riconoscere n volte su m (essendo m il numero delle risposte fornite alla domanda in questione) l'alternativa di risposta, tra quelle fornite dal questionario, che rappresenta o in cui si colloca meglio la sua risposta alla domanda.

Tabella 4.12

Aspetti della rappresentazione R sui quali lo studente X, che la gestisce con difficoltà, si focalizza (domanda n. 3)

	(a, b) Aspetti iconici di tipo qualitativo	(c) Aspetti iconici di tipo strutturale	(b, d) Aspetti di analogia	(e) Aspetti indicali	(f) Aspetti simbolici
SP	T1, T2, T6, T10, T11, T22, T23, T26	T22, T23	T2, T10, T11, T22, T23	T1, T6, T13, T20, T22, T23, T25	T22
SS I	T7, T8, T15, T16, T17, T21	T7, T9, T12, T14, T17, T18, T19, T21	T7, T16, T17, T18, T19	T8, T12, T16, T21	T7, T14, T16, T17, T21
SS II	T3, T4, T27	T3, T4, T5, T24, T27		T3, T5, T27	T5
Tot (su 63)	17 (27%)	15 (24%)	10 (16%)	14 (22%)	7 (11%)

Nota. Le percentuali fanno riferimento al numero complessivo (63) degli aspetti evidenziati dagli insegnanti.

Dalla Tabella 4.11 emerge che la maggior parte degli insegnanti (21 su 27; 78%) riconosce e sa classificare alcuni aspetti di una rappresentazione semiotica R sui quali lo studente che la gestisce con difficoltà si focalizza. Si tratta soprattutto di aspetti iconici di tipo qualitativo o di aspetti indicali nel caso dell'insegnante di scuola primaria, di aspetti

iconici di tipo strutturale nel caso dell'insegnante di scuola secondaria di primo e di secondo grado (Tabella 4.12).

Un maggior numero di insegnanti (24 su 27; 89%) riconosce e sa classificare gli aspetti della rappresentazione semiotica R ai quali riconduce le difficoltà che incontra lo studente nella sua gestione (Tabella 4.11). Questi ultimi (Tabella 4.13) non sempre coincidono con quelli sui quali si focalizza lo studente (Tabella 4.12).

In Tabella 4.13 sono classificate le risposte degli insegnanti in relazione alla domanda: “A quali di essi [aspetti iconico-qualitativi, iconico-strutturali, di analogia, indicali, simbolici della rappresentazione scelta] l'insegnante attribuisce l'apprendimento dello studente?”.

Tabella 4.13

Aspetti della rappresentazione R ai quali l'insegnante riconduce la difficoltà di X di gestire R (domanda n. 4)

	(a, b) Aspetti iconici di tipo qualitativo	(c) Aspetti iconici di tipo strutturale	(b, d) Aspetti di analogia	(e) Aspetti indicali	(f) Aspetti simbolici
SP	T1, T2, T6, T10, T11, T22, T23, T25, T26	T2, T20, T22, T23	T10, T11, T22	T1, T2, T13, T22, T25	T1, T20, T22
SS I	T12, T15	T9, T12, T14, T15, T16, T18, T19	T17, T18, T19	T15, T21	T7, T8, T12, T14, T16, T17
SS II	T3, T4	T3, T4, T5, T27		T3, T27	T3, T5, T27
Tot (su 55)	13 (24%)	15 (27%)	6 (11%)	9 (16%)	12 (22%)

Nota. Le percentuali fanno riferimento al numero complessivo (55) degli aspetti evidenziati dagli insegnanti.

L'insegnante di scuola primaria riconduce la difficoltà di X nella gestione di R al fatto di focalizzarsi soprattutto sugli aspetti iconici di tipo qualitativo (aspetti concreti di R, come quelli legati alla sua forma, dimensione, colore o posizione o alla somiglianza di R con qualcos'altro di concreto), e sugli aspetti indicali (aspetti di rinvio a qualcos'altro, come a un'operazione da svolgere, a un'altra rappresentazione, a un altro oggetto matematico, o a proprietà).

L'insegnante di scuola secondaria di primo e di secondo grado, a differenza dell'insegnante di scuola primaria, riconduce la difficoltà di X nella gestione di R al fatto di focalizzarsi in primo luogo sugli aspetti iconico-strutturali di R (come quelli legati alla costruzione di R, a proprietà o a teoremi), e in secondo luogo sugli aspetti simbolici

(aspetti convenzionali, come quelli legati a notazioni, definizioni, regole o vincoli d'uso) (Tabella 4.13).

In particolare, l'insegnante di scuola secondaria di primo e di secondo grado riconduce la difficoltà di gestione di R da parte di X agli stessi aspetti (iconico-strutturali e simbolici) ai quali attribuisce la capacità di Y di gestire R (par. 4.3.3).

Alcuni esempi.

T6 (SP), in relazione all'oggetto "numeri razionali" e alla rappresentazione "frazioni", ha risposto alla domanda n. 4 evidenziando il punto "a" descritto nella risposta alla domanda n. 3 nei termini seguenti: "Rappresentazioni e riconoscimenti concreti di parti frazionarie (tagliare, disegnare, colorare...)". Si tratta dunque di aspetti iconici di tipo qualitativo.

T13 (SP), in relazione all'oggetto "frazioni" e al confronto tra frazioni, ha risposto alla domanda n. 4 evidenziando il punto "e" descritto nella risposta alla domanda n. 3 nei termini seguenti: "[Aspetti di rinvio a qualcos'altro (...) in particolare:] ai numeri naturali, per cui un quarto è maggiore di un terzo così come $4 > 3$ ". Entrano in questo caso in gioco aspetti indicali.

T14 (SS I), in relazione all'oggetto "cerchio" e alla rappresentazione grafica di sue proprietà, ha risposto alla domanda n. 4 evidenziando i punti "c2" (aspetti strutturali legati a proprietà), "f2" (aspetti convenzionali legati a definizioni) e "f3" (aspetti convenzionali legati a regole o vincoli d'uso). Si tratta di aspetti iconico-strutturali e di aspetti simbolici.

Alcuni insegnanti di scuola secondaria di primo grado hanno riconosciuto che lo studente X, che gestisce con difficoltà la rappresentazione R, si focalizza anche su aspetti di analogia (Tabella 4.12). Per esempio, T7 (SS I), in relazione all'oggetto "angolo" e alla sua rappresentazione grafica (Figura 4.6), ha risposto alla domanda n. 3 evidenziando anche il punto "d" nei termini seguenti:

T7: Anche sugli aspetti legati al linguaggio quotidiano e all'esperienza sensibile. Ho infatti fatto fare ai ragazzi un'esperienza sul cubo. Prima gli ho fatto descrivere il cubo mettendoglielo davanti senza farlo toccare, poi quando ho chiesto quanti spigoli ha..., lei [l'alunna X] mi ha detto... i vertici, cioè ha scambiato gli spigoli con i vertici. Dopo lei dice: Accidenti alla mia nonna... perché mi dice: "Stai attenta a non battere negli spigoli del tavolo!"...

La studente in questione confondeva, come ha affermato l'insegnante nell'intervista, l'angolo con il vertice dell'angolo, e un vertice di un cubo con uno spigolo. L'analogia sulla quale la studente si è focalizzata non ha comunque influenzato, per l'insegnante, la gestione di R da parte di X (Tabella 4.13).

4.3.5 *Conflitti semiotici generati da contenuti di rappresentazioni*

Qui di seguito sono classificate le risposte degli insegnanti alle domande (n. 7, 8, 9, 10) del questionario strettamente legate alla quarta domanda di ricerca: "L'insegnante avverte i conflitti semiotici generati dai contenuti (*representamen*) di rappresentazioni semiotiche simili per qualche aspetto? Se sì, a che cosa li riconduce?".

In Tabella 4.14 sono classificate le risposte degli insegnanti in relazione alla prima parte della domanda di ricerca. La classificazione si basa sul riconoscimento da parte dell'insegnante di un numero significativo di casi di rappresentazioni semiotiche il cui contenuto presenta aspetti differenti che possono essere tra loro confusi, oppure di rappresentazioni semiotiche con contenuti simili per certi aspetti che rinviano a oggetti differenti, oppure di rappresentazioni semiotiche con contenuti differenti che rinviano al medesimo oggetto, ostacolandone la gestione da parte dello studente (Tabella 4.15).

Tabella 4.14

L'insegnante avverte i conflitti semiotici generati dai contenuti (representamen) di rappresentazioni semiotiche simili per qualche aspetto?

Domande n. 7, 8, 9, 10		
SP	Sì (3):	T1, T13, T20
	NO (8):	T2, T6, T10, T11, T22, T23, T25, T26
SS I	Sì (9):	T7, T8, T9, T12, T15, T16, T17, T18, T19
	NO (2):	T14, T21
SS II	Sì (5):	T3, T4, T5, T24, T27
	NO (0):	
TOT	Sì (17; 63%)	
	NO (10; 37%)	

Tabella 4.15

L'insegnante è in grado di ricondurre i conflitti semiotici alla confusione (o identificazione) da parte dello studente di aspetti completamente differenti di uno stesso contenuto (representamen) (per esempio, l'aspetto iconico-qualitativo o legato ad analogie con quello iconico-strutturale o simbolico, oppure l'aspetto indicale con quello simbolico)?

Domande n. 7, 8, 9, 10		
SP	Sì (0):	
	NO (11):	T1, T2, T6, T10, T11, T13, T20, T22, T23, T25, T26
SS I	Sì (2):	T7, T12
	NO (9):	T8, T9, T14, T15, T16, T17, T18, T19, T21
SS II	Sì (1):	T4
	NO (4):	T3, T5, T24, T27
TOT	Sì (3; 11%)	
	NO (24; 89%)	

Il 63% degli insegnanti (17 su 27), soprattutto di scuola secondaria, avverte i conflitti semiotici generati dai contenuti di rappresentazioni semiotiche simili per qualche aspetto (Tabella 4.14). In particolare, è in grado di ricondurre i conflitti semiotici alla confusione (o identificazione) da parte dello studente di una componente di un contenuto (*representamen*) di una rappresentazione con un'altra componente di un altro contenuto (*representamen*), simile al primo sotto qualche aspetto, in particolare (e soprattutto) per l'aspetto iconico-qualitativo (immediatamente riconoscibile o direttamente percepibile), indipendentemente dai registri di rappresentazione.

La maggior parte degli insegnanti (24 su 27; 89%) non è in grado di ricondurre i conflitti semiotici alla confusione (o identificazione) da parte dello studente di aspetti completamente differenti di uno stesso contenuto (*representamen*) (per esempio, l'aspetto iconico-qualitativo o legato ad analogie con quello iconico-strutturale o simbolico, oppure l'aspetto indicale con quello simbolico) (Tabella 4.15).

Alcuni esempi.

T1 (SP), in relazione all'oggetto e alla rappresentazione "frazioni", alla domanda n. 7 ("La forma della rappresentazione R può, secondo te, indurre lo studente X a confondere la rappresentazione R con un'altra rappresentazione S dello stesso oggetto O oppure di un altro oggetto O'?"), ha risposto:

T1: Con i numeri naturali.

Ric: Ti stai riferendo ad S, O oppure O' ?

T1: L'allievo X confonde la rappresentazione R ["frazioni"] con S (numeri naturali) con O (frazioni).

Ric: Puoi dirmi qualcosa di più?

T1: Qui [indicando la risposta scritta sul questionario] non sapevo bene come spiegarmi... Cioè, per lui, probabilmente a un certo punto esistevano solo i numeri naturali, ma [questo fatto] era legato alla spiegazione di prima... [alla risposta alla domanda n. 6, punto "c1":] l'allievo X considera $\frac{3}{4}$ come due numeri separati fra loro [3 e 4] e non riesce a stabilire una relazione che lo porti a considerare $\frac{3}{4}$ come numero.

Emerge qui una confusione tra rappresentazioni simili di oggetti differenti (frazioni e numeri naturali). La complessità della rappresentazione di una frazione è attribuita alla forma del suo contenuto, ovvero alla sua componente iconico-qualitativa, non immediatamente riconducibile alla forma del contenuto della rappresentazione di un numero nel registro della scrittura decimale. T1, dunque, avverte i conflitti semiotici generati dai contenuti di rappresentazioni semiotiche simili per qualche aspetto, in particolare per l'aspetto iconico-qualitativo.

In relazione alla rappresentazione T meno problematica rispetto ad R (domanda n. 8), T1 ha risposto:

T1: Numeri decimali.

Ric: Ti stai riferendo ad S, O oppure O' ?

T1: Per noi adulti, numeri decimali o frazioni sono la stessa scrittura di un numero ma per i bambini non è così immediato. Infatti io tendo a presentare i numeri decimali con un anno di anticipo rispetto a quando inizio il percorso di studio sulle frazioni. Per tale ragione ho specificato con O' i numeri decimali anche se non è corretto ma stiamo parlando dell'allievo X.

Si fa qui riferimento a contenuti di rappresentazioni semiotiche differenti (nel registro della scrittura frazionaria e nel registro della scrittura decimale) che rinviano al medesimo oggetto.

Alla domanda n. 9 (Quali sono le caratteristiche della rappresentazione T che, secondo te, rendono T meno problematica della rappresentazione R?) ha risposto:

T1: Il fatto che l'allievo può ottenere il numero decimale eseguendo una divisione quindi opera con i numeri naturali e questo lo rassicura.

Fatto che evidenzia ancora una volta i conflitti semiotici sopra menzionati.

T2 (SP), in relazione all'oggetto "rappresentazione 2D di un triangolo in un cubo" e alla rappresentazione R "La perpendicolarità tra uno spigolo e la diagonale, di una faccia, che ha un estremo in comune con esso", alla domanda n. 7 ("La forma della rappresentazione R può, secondo te, indurre lo studente X a confondere la rappresentazione R con un'altra rappresentazione S dello stesso oggetto O oppure di un altro oggetto O'?") ha risposto:

T2: Sì, con una rappresentazione del triangolo nel piano che assomiglia a quello rappresentato nel cubo, dimenticando il contesto.

Ric: Puoi fornirmi un esempio?

T2: Immaginiamo che lo studente abbia manipolato modelli di triangoli in cartoncino. Tra essi sicuramente ne trova uno che assomiglia a quello rappresentato nel cubo.

In relazione alla rappresentazione T meno problematica rispetto ad R (domanda n. 8), T2 ha risposto:

T2: Ho pensato a una rappresentazione in 3D.

Ric: A quale particolare rappresentazione T hai pensato? Puoi descrivermela o fornirmi un esempio?

T2: Un modello scheletrato costruito con le cannucce o gli stecchini, all'interno del quale, con filo colorato, si rappresenta il triangolo in questione.

Alla domanda n. 9 (Quali sono le caratteristiche della rappresentazione T che, secondo te, rendono T meno problematica della rappresentazione R?) ha risposto:

T2: Il modello 3D può essere guardato da punti di vista diversi; il riconoscimento del tipo di triangolo è più facile. Inoltre assumendo punti di vista diversi lo studente può osservare che la percezione dell'oggetto varia e può ritornare alla rappresentazione 2D con maggiore attenzione al suo sguardo.

Come evidenzia Duval (2005), l'esplorazione euristica delle forme geometriche tende a privilegiare le unità figurali di dimensione superiore (in questo caso di dimensione 3) su

quelle di dimensione inferiore. Il discorso geometrico (definizioni, teoremi, dimostrazioni, spiegazioni etc.) procede invece nel verso opposto a quello della visualizzazione, cioè va contro la priorità visuale delle unità figurali di dimensione superiore sulle unità figurali di dimensione inferiore. Mentre la visualizzazione tende a fondere le unità figurali di dimensione inferiore in una sola unità figurale di dimensione superiore, il discorso geometrico procede dalle unità figurali di dimensione inferiore a quelle di dimensione superiore, opponendosi al funzionamento normale della visualizzazione. L'articolazione tra visualizzazione e discorso geometrico presuppone dunque la capacità di effettuare una decostruzione dimensionale delle forme riconosciute percettivamente, cioè di decomporre una forma geometrica n -dimensionale (con $n > 0$, in questo caso $n = 3$) in unità figurali di dimensione inferiore. Questa decostruzione dimensionale delle forme geometriche è essenziale per la comprensione degli enunciati e delle proprietà geometriche (Duval, 2005). Ma è tutt'altro che spontanea, tutt'altro che naturale. Soprattutto nel caso di una forma 2D/3D nella quale la terza dimensione non è presente, ma soltanto immaginata o suggerita da aspetti indicali (come il colore). La percezione di un modello 3D (ovvero di una forma 3D/3D) è dunque completamente differente dalla percezione di una rappresentazione di tale modello nel piano (ovvero di una forma 3D/2D). Quest'ultima esclude ogni variazione del punto di vista, imponendo un punto di vista soltanto, che risulta in generale parte del compito (Duval, 1995). La risposta fornita da T2 ne è una evidenziazione.

T6 (SP), in relazione all'oggetto "numeri razionali" e alla rappresentazione R "frazioni", alla domanda n. 7 ("La forma della rappresentazione R può, secondo te, indurre lo studente X a confondere la rappresentazione R con un'altra rappresentazione S dello stesso oggetto O oppure di un altro oggetto O'?") ha risposto: "Non saprei". Non ha saputo dire se la forma della rappresentazione R possa indurre lo studente X a confondere la rappresentazione R con un'altra rappresentazione S dello stesso oggetto O oppure di un altro oggetto O'.

In relazione alla rappresentazione T meno problematica rispetto ad R (domanda n. 8), T6 ha risposto:

T6: Frazioni che abbiano un senso concreto.

E alla domanda n. 9 (Quali sono le caratteristiche della rappresentazione T che, secondo te, rendono T meno problematica della rappresentazione R?) ha risposto:

T6: Poter realizzare un'attività concreta di partizione di oggetti concreti. La possibilità di poter vedere concretamente o immaginare.

È una evidenziazione del fatto che per T6, come anche per T2 e altri insegnanti (Tabelle 4.9, 4.10), l'esperienza sensibile, in particolare gli aspetti legati alla percezione di materiali o di modelli concreti che non soltanto hanno un'apparenza sensibile e suscitano un'immagine ma rinviano a qualcos'altro (altra rappresentazione o altro oggetto), ha un ruolo fondamentale nella gestione delle rappresentazioni semiotiche.

T9 (SS I), in relazione all'oggetto O: "relazione di inversa proporzionalità", e alla rappresentazione R "grafico (arco di iperbole equilatera)", alla domanda n. 7 ("La forma della rappresentazione R può, secondo te, indurre lo studente X a confondere la rappresentazione R con un'altra rappresentazione S dello stesso oggetto O oppure di un altro oggetto O'?") ha risposto:

T9: Sì, con la diretta proporzionalità (oggetto O').

Ric: Con quale rappresentazione S di O' lo studente X tende a confondere la rappresentazione R?

T9: Con la rappresentazione S della legge (confonde le due scritture: $yx = k$ e $y = kx$).

Ric: Se non ho capito male, la rappresentazione R era il grafico (arco di iperbole equilatera). Mi pare però che qui consideri come R la legge $yx = k$. Mi puoi chiarire questa cosa?

T9: Sì, in effetti non è chiaro: riferisce all'arco di iperbole la legge della diretta proporzionalità (poi, in realtà fa confusione anche con le due scritture...).

L'insegnante avverte i conflitti semiotici generati dai contenuti di rappresentazioni semiotiche simili per qualche aspetto. La risposta evidenzia una confusione tra il contenuto di una rappresentazione e il contenuto di un'altra rappresentazione, simile al primo per l'aspetto iconico-qualitativo.

In relazione alla rappresentazione T meno problematica rispetto ad R (domanda n. 8), T9 ha risposto:

T9: Definizione di relazione di inversa proporzionalità (lingua naturale).

Come è stato evidenziato nel caso di T3, una definizione non costituisce di per sé una rappresentazione semiotica di un oggetto matematico. Si tratta di una espressione di una relazione tra due o più entità in uno o più registri discorsivi (lingua naturale, linguaggio della scrittura simbolica, o linguaggio formale), nella quale si utilizzano anche rappresentazioni semiotiche di oggetti matematici (R. Duval, comunicazione personale, 26 giugno, 2013).

Alla domanda n. 9 (Quali sono le caratteristiche della rappresentazione T che, secondo te, rendono T meno problematica della rappresentazione R?) ha risposto:

T9: La verbalizzazione di una definizione rispetto alla formulazione in legge e alla rappresentazione grafica: “prodotto costante” è sicuramente qualcosa di più “gestibile” .

Rimane aperto il problema del riconoscimento della corrispondenza tra le unità di contenuto matematicamente pertinenti della definizione di relazione di inversa proporzionalità e le unità di contenuto matematicamente pertinenti delle rappresentazioni di tale relazione nel registro della scrittura algebrica e nel registro grafico, riconoscimento non sempre immediato o spontaneo.

T7 (SS I), in relazione all’oggetto “angolo” e alla sua rappresentazione grafica R (Figura 4.6), alla domanda n. 7 (“La forma della rappresentazione R può, secondo te, indurre lo studente X a confondere la rappresentazione R con un’altra rappresentazione S dello stesso oggetto O oppure di un altro oggetto O?”) ha risposto:

T7: Sì, porta a confondere l’ampiezza della parte colorata [di R] con la misura dell’angolo.

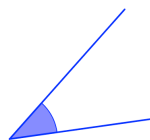


Figura 4.6 Rappresentazione R dell’oggetto “angolo” scelta da T7.

Ric: Pensa ora a un’altra rappresentazione T che sia meno problematica, rispetto ad R, per lo studente X... [domanda n. 8].

T7: Il registro è sempre lo stesso, la rappresentazione è questa qui [disegna (Figura 4.7) e aggiunge:] Semmai ci posso scrivere “senza gli archetti”...

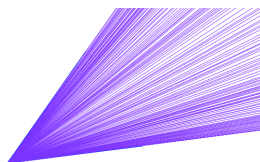


Figura 4.7 Rappresentazione R dell'oggetto "angolo" scelta da T7.

Ric: Quali sono le caratteristiche della rappresentazione T che, secondo te, rendono T meno problematica della rappresentazione R? [domanda n. 9].

T7: Perché evita di identificare l'ampiezza dell'angolo con l'archetto, con la parte colorata. [Ma poi scrive: Perché evita di identificare la parte dell'archetto con quella colorata].

Si manifesta in questo caso un conflitto semiotico tra la rappresentazione dell'angolo con l'archetto, la lunghezza dell'archetto, e l'ampiezza della parte colorata delimitata dall'archetto e dai lati dell'angolo. L'archetto costituisce un aspetto indicale della rappresentazione dell'angolo, la sua ampiezza costituisce un aspetto simbolico, mentre la lunghezza dell'archetto e l'ampiezza della parte colorata delimitata dall'archetto e dai lati dell'angolo costituiscono due aspetti iconico-qualitativi del contenuto della rappresentazione. Emerge dunque una confusione tra aspetti completamente differenti di uno stesso contenuto della rappresentazione in questione. Confusione che è stata evidenziata anche da altre ricerche, in particolare da Sbaragli e Santi (2012).

T4 (SS II), in relazione all'oggetto "equazione della circonferenza nelle due forme che si studiano a scuola" e alla rappresentazione nel piano cartesiano della circonferenza, alla domanda n. 7 ("La forma della rappresentazione R può, secondo te, indurre lo studente X a confondere la rappresentazione R con un'altra rappresentazione S dello stesso oggetto O oppure di un altro oggetto O'") ha risposto:

T4: Non ritengo confonda rappresentazioni diverse, ma credo cerchi di riportare contemporaneamente tutte le proprietà che sa essere relative all'oggetto senza saper scegliere quelle necessarie al caso specifico.

Ric: Quali proprietà non necessarie lo studente X "riporta contemporaneamente"? Puoi chiarire questo aspetto? Oppure, mi puoi fornire un esempio?

T4: Esempio: devo determinare la [lunghezza della] corda individuata da due circonferenze secanti: lo studente cerca di applicare teoremi relativi al confronto

tra la lunghezza delle corde, alla loro distanza dal centro, al fatto che la corda nel punto medio è perpendicolare al raggio, senza pensare, più semplicemente, a risolvere il sistema formato dalle due equazioni.

È una evidenziazione di un mancato riconoscimento, da parte dello studente, di una corrispondenza tra le unità di contenuto matematicamente pertinenti dell'enunciato del problema (o esercizio) da risolvere e le unità di contenuto delle rappresentazioni necessarie, richieste o attese, per la sua risoluzione. In altre parole, è una evidenziazione di una mancata coordinazione del registro geometrico e del registro della scrittura algebrica, insieme al registro della lingua naturale.

In relazione alla rappresentazione T meno problematica rispetto ad R (domanda n. 8), T4 ha risposto:

T4: Stesso registro, rappresentazione della retta.

Ric: Puoi fornirmi un esempio di rappresentazione T?

T4: Rappresentazione grafica sul piano cartesiano (c^4 [geometria analitica]), equazione esplicita o implicita (c^4 [geometria analitica]), rappresentazione in geometria piana (c^1 [geometria piana]). La prima e l'ultima sono spesso confuse tra loro, come le due intermedie [equazione esplicita ed equazione implicita].

Emerge qui una confusione tra rappresentazioni differenti di un medesimo oggetto (l'oggetto "retta"). T4, dunque, avverte i conflitti semiotici generati dai contenuti di rappresentazioni semiotiche differenti per qualche aspetto, in particolare per l'aspetto iconico-qualitativo, che rinviano al medesimo oggetto.

Alla domanda n. 9 (Quali sono le caratteristiche della rappresentazione T che, secondo te, rendono T meno problematica della rappresentazione R?) ha risposto:

T4: Un numero minore di termini specifici e una rappresentazione algebrica più semplice.

Ric: Che cosa intendi per "termini specifici"?

T4: Coefficiente angolare, intercetta, ...

La difficoltà di gestione della rappresentazione di una circonferenza nel registro della scrittura algebrica è attribuita alla forma del suo contenuto, ovvero alla sua componente iconico-qualitativa, in particolare al numero delle sue unità di contenuto geometricamente pertinenti.

T5 (SS II), in relazione all'oggetto "poligoni" e alla rappresentazione "testo che descrive la costruzione", alla domanda n. 7 ("La forma della rappresentazione R può, secondo te, indurre lo studente X a confondere la rappresentazione R con un'altra rappresentazione S dello stesso oggetto O oppure di un altro oggetto O'?") ha risposto:

T5: La forma della rappresentazione è un "testo descrittivo di una costruzione geometrica" e quindi credo non possa essere confusa da X con altri tipi di rappresentazione. (Perché il testo scritto è per lo studente X una forma di comunicazione "usuale"). Quello che lo studente confonde sono, eventualmente, parti dell'oggetto da costruire ... tipo disegna un segmento al posto di una retta, un angolo esterno errato (cioè disegna ciò che *per lui* è un angolo esterno) ... ma questo non rientra, direi, nella "forma della rappresentazione"...

Emerge, da una parte, una scarsa consapevolezza della maggiore complessità del registro della lingua naturale rispetto ad altri registri. Il registro della lingua naturale, per l'elevato numero di variazioni possibili delle sue produzioni, rende possibile una molteplicità di forme del "testo descrittivo", non tutte cognitivamente neutre. Dall'altra parte, emerge una certa consapevolezza della specificità del discorso geometrico, in particolare del fatto che la produzione di enunciati in geometria richiede funzionamenti cognitivi che sono differenti e più complessi di quelli che si applicano al di fuori della geometria (Duval, 2005). In altre parole, la conversione di rappresentazioni dal registro della lingua naturale al registro delle configurazioni geometriche richiede una gestione cognitiva degli enunciati del discorso geometrico (definizioni, teoremi, dimostrazioni, spiegazioni etc.) che è molto più complessa di quella richiesta al di fuori della geometria.

In relazione alla rappresentazione T meno problematica rispetto ad R (domanda n. 8), T5 ha risposto:

T5: Oggetto: retta. Rappresentazione algebrica, in forma di equazione.

Ric: Puoi fornirmi un esempio?

T5: Esempio: $y = 3x - 2$ è facilmente riconoscibile, meno difficoltoso di $3x - y - 2 = 0$. Campo c^4 : geometria analitica.

Alla domanda n. 9 (Quali sono le caratteristiche della rappresentazione T che, secondo te, rendono T meno problematica della rappresentazione R?) ha risposto:

T5: Scrittura codificata a cui lo studente X associa il corretto significato. La scrittura in forma di equazione per X evidenzia bene il legame fra le variabili. Nel caso precedente, per lo studente X è problematico trasformare in costruzione geometrica quanto descritto “a parole”.

La trasformazione riconosciuta come meno problematica per lo studente X dall’insegnante T5 è una conversione della rappresentazione dell’oggetto “retta” dal registro della scrittura algebrica al registro grafico. Non si tratta di una codifica ma di un conversione (Duval, 1993). In ogni caso, l’insegnante evidenzia una certa consapevolezza della specificità del discorso geometrico, rispetto al discorso algebrico.

T23 (SP), alla domanda n. 10, in corrispondenza della rappresentazione R2 (del questionario per insegnanti di scuola primaria): “Il doppio di $\frac{5}{6}$ ”, ha scritto:

- T23:** I. [Somiglianze con]: $5/6 + 5/6$
II. [Confusione con]: $5/6 \times 2$. Il doppio di cinque sestimi.

L’insegnante fornisce esempi di rappresentazioni differenti del medesimo oggetto, senza avvertire i conflitti semiotici generati dai contenuti di rappresentazioni simili di oggetti differenti.

T8 (SS I), alla domanda n. 10, in corrispondenza della rappresentazione R8 (del questionario per insegnanti di scuola secondaria di primo grado): “La terza parte di 24 diminuita di 3”, ha scritto:

- T8:** I. [Somiglianze con]: La terza parte di 24 diminuito di 3
II. [Confusione con]: $(24 - 3) : 3$, $24 : 3$.

L’insegnante avverte i conflitti semiotici generati dai contenuti di due rappresentazioni simili nel registro della lingua naturale, e dai contenuti di due rappresentazioni simili nel registro della scrittura aritmetica, in particolare per l’aspetto iconico-qualitativo.

T16 (SS I), alla domanda n. 10, in corrispondenza della rappresentazione R16 (del questionario per insegnanti di scuola secondaria di primo grado) in Figura 4.8, ha scritto:

- T16:** I. [Somiglianze con]: Ingrandimento in scala. Sequenza numerica.
 II. [Confusione con]: Figure geometriche da ricostruire. Rette incidenti.

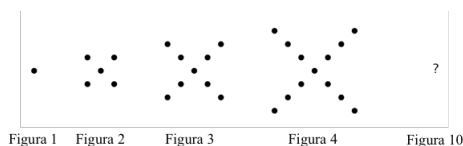


Figura 4.8 *Rappresentazione R16 del questionario per insegnanti di scuola secondaria di primo grado*

L'insegnante avverte i conflitti semiotici generati dai contenuti di rappresentazioni simili per l'aspetto iconico-qualitativo (legato alla forma), per l'aspetto indicale (di rinvio ad altre rappresentazioni), per l'aspetto di analogia (rapporto con una sequenza numerica) e per l'aspetto simbolico (legato alle regole di produzione della sequenza di configurazioni geometriche).

T5 (SS II), alla domanda n. 10, in corrispondenza della rappresentazione R2 (del questionario per insegnanti di scuola secondaria di secondo grado): “Il doppio di $\frac{5}{6}$ ”, ha scritto:

- T5:** I. [Somiglianze con]: $2 \cdot \frac{5}{2} \cdot 6$; $(\frac{5}{6})^2$
 II. [Confusione con]: Il quadrato di $\frac{5}{6}$.

L'insegnante avverte i conflitti semiotici generati dai contenuti di rappresentazioni simili (dal punto di vista iconico-qualitativo) di oggetti differenti.

In generale, le risposte degli insegnanti alle domande del questionario e delle interviste hanno evidenziato non tanto e non solo le loro concezioni sugli oggetti matematici e sulle loro rappresentazioni, ma anche complesse situazioni di interpretazione di quel che significa “apprendere” e “rappresentare”.

5 Conclusioni

5.1 Introduzione

La ricerca è stata condotta per esplorare in profondità il punto di vista dell'insegnante, la sua consapevolezza o le sue convinzioni, sulla dimensione semiotica e cognitiva del processo di apprendimento della matematica. In particolare, si è cercato di evidenziare il grado di consapevolezza che l'insegnante ha:

1. del livello a cui si colloca l'oggetto matematico e del livello a cui si collocano le sue rappresentazioni semiotiche nelle attività matematiche, più precisamente, del livello a cui si colloca ciò che l'istituzione propone come oggetto matematico e del livello a cui si colloca ciò che l'istituzione propone come mezzo semiotico per la trasposizione didattica dell'oggetto matematico;
2. dei diversi aspetti di una rappresentazione semiotica sui quali lo studente in grado di gestirla può focalizzarsi;
3. dei diversi aspetti di una rappresentazione semiotica sui quali lo studente che la gestisce con difficoltà può focalizzarsi;
4. dei conflitti semiotici generati dai contenuti (*representamen*) di rappresentazioni semiotiche simili per qualche aspetto.

Le ricerche sulla dimensione semio-cognitiva dell'apprendimento della matematica sono relativamente recenti e si sono focalizzate *in primis*, o per lo più, sugli studenti, assumendo implicitamente che le difficoltà di natura semiotica evidenziate dagli studenti nelle attività matematiche siano anche le difficoltà evidenziate dall'insegnante nell'analisi delle produzioni matematiche degli studenti oppure nella trasposizione didattica di determinati contenuti. Il problema della consapevolezza dell'insegnante degli aspetti semio-cognitivi dell'apprendimento della matematica costituisce dunque un aspetto assai poco esplorato dalla ricerca, almeno in maniera diretta, e difficile da indagare in tutta la sua complessità. Soprattutto perché l'insegnante, nella maggior parte dei casi, non ha una formazione specifica al riguardo. Non avendo una formazione specifica al riguardo, è poco disponibile a mettersi in gioco per fornire il proprio contributo oppure, se è

disponibile a fornire il proprio contributo, non sempre è in grado di cogliere pienamente il senso di ciò di cui si sta parlando. Per esempio, durante le risposte, ha interpretato in modo ingenuo o per semplice assonanza il significato di alcune espressioni, in particolare: “oggetto matematico”, “rappresentazione semiotica” e “registro di rappresentazione” (par. 4.2). Questo fatto ha impedito di esplorare in profondità alcune questioni, limitando dunque la portata della ricerca. D'altra parte, questa situazione ha permesso di cogliere, insieme alle difficoltà d'uso da parte dell'insegnante di alcune espressioni specifiche, come l'insegnante tenga conto di tutta la dimensione semiotica, e allo stesso tempo cognitiva, implicata nel processo di apprendimento della matematica. Una dimensione che si è rivelata cruciale per l'apprendimento, nel corso degli ultimi 25 anni di ricerca in didattica della matematica. A partire dagli anni '90, infatti, gli studi e le ricerche in didattica della matematica hanno evidenziato sempre più chiaramente che le difficoltà che gli studenti incontrano nelle attività matematiche derivano in gran parte (se non da fattori psicologici, affettivi, emozionali, sociali etc.) dal tipo di funzionamento cognitivo che l'attività matematica richiede in maniera specifica e dalla complessità della gestione semiotica da cui la costruzione cognitiva degli oggetti matematici dipende e risulta inscindibile (D'Amore, 2001b, 2006a; Duval, 1993, 2011). Da qui la necessità da parte dell'insegnante di una presa di coscienza della peculiarità e complessità della gestione delle rappresentazioni semiotiche nelle attività matematiche, della inscindibilità di tale gestione dalla costruzione cognitiva di oggetti o concetti matematici e dunque dai processi di apprendimento in matematica. Da qui, di conseguenza, la necessità di una formazione specifica sulla dimensione semio-cognitiva dei processi di comprensione sottostanti le attività matematiche e sulla loro complessità, complessità che il punto di vista matematico, da solo, spesso nasconde. Dunque, come abbiamo anticipato nel paragrafo 2.7, occorre da parte dell'insegnante una forte articolazione del punto di vista matematico con quello semio-cognitivo per poter comprendere le difficoltà che gli studenti incontrano nelle attività matematiche.

Qui di seguito si forniscono le risposte alle domande di ricerca, sulla base dell'analisi qualitativa e quantitativa dei dati descritta nel capitolo precedente. Si presentano poi le principali implicazioni didattiche insieme alle maggiori limitazioni dello studio. Si suggeriscono infine nuove possibili direzioni per la ricerca futura.

5.2 Risposte alle domande di ricerca

I principali risultati della ricerca sono stati presentati all'interno del capitolo 4. In questo paragrafo i risultati della ricerca sono sintetizzati per rispondere alle domande di ricerca introdotte nel paragrafo 3.2.

Qui di seguito, a ciascuna domanda di ricerca si fornisce la risposta ottenuta dall'analisi e interpretazione dei dati (par. 4.3), e si confronta tale risposta con la relativa ipotesi di ricerca (par. 3.3).

5.2.1 *Oggetti, rappresentazioni e registri di rappresentazione*

La prima domanda di ricerca è stata formulata nei termini seguenti:

D1. L'insegnante è consapevole della distinzione tra oggetto matematico (pre-definito, pre-costituito dalla istituzione) e una sua rappresentazione semiotica? In altre parole, per riferirsi a un oggetto matematico l'insegnante fornisce *intenzionalmente* diverse sue rappresentazioni possibili? Se sì, che tipo di registro utilizza più di frequente?

L'analisi dei dati di ricerca (parr. 4.3.1 e 4.3.2) conduce alla seguente risposta.

L'insegnante, soprattutto di scuola secondaria, evidenzia una certa consapevolezza della distinzione tra il livello a cui si colloca l'oggetto matematico O e il livello a cui si colloca una sua rappresentazione $R(O)$, ma riteniamo che tale consapevolezza sia stata indotta per lo più dall'uso delle parole "oggetto" e "rappresentazione" in domande che suggeriscono risposte differenti. Ulteriori ricerche potranno confermare o escludere questa ipotesi.

La parola "rappresentazione" è utilizzata dall'insegnante sia in senso attivo, per designare un'azione, in particolare un trattamento o una conversione, sia in senso passivo per designare lo strumento di mediazione, il veicolo o mezzo di rappresentazione. Nel primo caso la rappresentazione semiotica di un oggetto matematico è confusa con una trasformazione di rappresentazioni semiotiche dell'oggetto in questione. L'idea di oggetto rimane in ogni caso vincolata alla situazione in esame o a rappresentazioni specifiche, dunque distante dall'idea di invariante di rappresentazioni. In altre parole, rappresentazioni differenti sono spesso associate a oggetti differenti.

Il numero dei registri, e dunque delle rappresentazioni, utilizzati dall'insegnante aumenta considerevolmente, in relazione ai contenuti sviluppati nei diversi ordini di

scuola. Da un minimo di due a un massimo di quattro registri utilizzati dall'insegnante di scuola primaria e dall'insegnante di scuola secondaria di primo grado, si passa a un minimo ancora di due fino a un massimo di sei registri utilizzati dall'insegnante di scuola secondaria di secondo grado.

L'insegnante di scuola primaria (soprattutto delle ultime classi) ricorre in primo luogo alla coppia di registri (lingua naturale, scrittura frazionaria) spesso accompagnata da un terzo registro, quello delle rappresentazioni di tipo iconico (disegni), e poi alla coppia di registri (lingua naturale, registro multifunzionale delle configurazioni geometriche). L'insegnante di scuola secondaria di primo grado e l'insegnante di scuola secondaria di secondo grado (delle prime tre classi) ricorrono invece entrambi, in primo luogo, alla coppia di registri (lingua naturale, registro multifunzionale delle configurazioni geometriche) e poi alla coppia di registri (lingua naturale, scrittura algebrica) spesso accompagnata dal registro grafico.

La ricerca ha fatto emergere aspetti nuovi rispetto a quelli evidenziati nella prima ipotesi di ricerca, in particolare un uso non specialistico dei termini "rappresentazione semiotica" e "oggetto matematico". Di conseguenza, la consapevolezza della distinzione tra il livello a cui si colloca l'oggetto matematico e il livello a cui si colloca una sua rappresentazione semiotica, nel quadro teorico di questa ricerca, non è potuta emergere in tutta la sua specificità e profondità. In ogni caso non può dirsi pienamente raggiunta. Ma proprio ciò fornisce materiale di studio per future più specifiche ricerche.

5.2.2 Aspetti di una rappresentazione che ne favoriscono la comprensione

La seconda domanda di ricerca è stata formulata nei termini seguenti:

D2. L'insegnante riconosce i diversi aspetti di una rappresentazione semiotica sui quali lo studente in grado di gestirla può focalizzarsi? Se sì, a quali di essi l'insegnante attribuisce l'apprendimento dello studente?

L'analisi dei dati di ricerca (par. 4.3.3) conduce alla seguente risposta.

L'insegnante riconosce e sa classificare alcuni aspetti di una rappresentazione semiotica R sui quali lo studente, in grado di gestire la rappresentazione R , si focalizza. Si tratta soprattutto di aspetti iconici di tipo strutturale (legati alla costruzione di R , a proprietà o a teoremi). Inoltre, l'insegnante riconosce e sa classificare gli aspetti di una

rappresentazione semiotica R ai quali attribuisce la capacità dello studente di gestirla. Tali aspetti coincidono in gran parte con quelli sui quali lo studente si focalizza.

L'insegnante di scuola primaria attribuisce la capacità dello studente di gestire la rappresentazione R al fatto di focalizzarsi soprattutto sugli aspetti legati alla costruzione e alle proprietà di R, ovvero sugli aspetti iconico-strutturali di R, e sugli aspetti di analogia (aspetti posti in rapporto, non necessariamente di somiglianza, con il linguaggio quotidiano o l'esperienza sensibile).

L'insegnante di scuola secondaria di primo e di secondo grado attribuisce la capacità dello studente di gestire R al fatto di focalizzarsi in primo luogo sugli aspetti legati alla costruzione di R, a proprietà o a teoremi (aspetti iconico-strutturali di R), e in secondo luogo sugli aspetti convenzionali, come quelli legati a notazioni, definizioni, regole o vincoli d'uso (aspetti simbolici di R).

La ricerca ha fatto emergere, anche in questo caso, aspetti nuovi rispetto a quelli evidenziati nella seconda ipotesi di ricerca, in particolare alcune differenze tra le risposte dell'insegnante di scuola primaria e quelle dell'insegnante di scuola secondaria, in gran parte riconducibili ai differenti obiettivi specifici di apprendimento della scuola primaria e della scuola secondaria.

5.2.3 Aspetti di una rappresentazione che ne ostacolano la comprensione

La terza domanda di ricerca è stata formulata nei termini seguenti:

D3. L'insegnante riconosce i diversi aspetti di una rappresentazione semiotica sui quali lo studente che la gestisce con difficoltà può focalizzarsi? Se sì, a quali di essi l'insegnante attribuisce le difficoltà di apprendimento dello studente?

L'analisi dei dati di ricerca (par. 4.3.4) conduce alla seguente risposta.

L'insegnante riconosce e sa classificare alcuni aspetti di una rappresentazione semiotica R sui quali lo studente che la gestisce con difficoltà si focalizza. Si tratta soprattutto di aspetti iconici di tipo qualitativo (aspetti concreti di R, come quelli legati alla sua forma, dimensione, colore o posizione) o di aspetti indicali (aspetti di rinvio a qualcos'altro, come a un'operazione da svolgere, a un'altra rappresentazione, a un altro oggetto matematico, o a proprietà) nel caso dell'insegnante di scuola primaria; di aspetti iconici di tipo strutturale (legati alla costruzione di R, a proprietà o a teoremi) nel caso

dell'insegnante di scuola secondaria di primo e di secondo grado. Inoltre, l'insegnante riconosce e sa classificare gli aspetti della rappresentazione semiotica R ai quali riconduce le difficoltà che incontra lo studente nella sua gestione. Questi ultimi non sempre coincidono con quelli sui quali si focalizza lo studente. Secondo l'insegnante, infatti, lo studente in difficoltà si focalizza per lo più sugli aspetti concreti della rappresentazione R , mentre le difficoltà di gestione di R , secondo lo stesso insegnante, sono da ricondurre per lo più ad aspetti legati alla costruzione di R o a proprietà (aspetti iconico-strutturali).

L'insegnante di scuola primaria, in particolare, riconduce la difficoltà dello studente nella gestione di R al fatto di focalizzarsi in primo luogo sugli aspetti concreti di R , come quelli legati alla sua forma, dimensione, colore o posizione o alla somiglianza di R con qualcos'altro di concreto (aspetti iconici di tipo qualitativo), e in secondo luogo sugli aspetti di rinvio a qualcos'altro, come a un'operazione da svolgere, a un'altra rappresentazione, a un altro oggetto matematico, o a proprietà (aspetti indicali).

L'insegnante di scuola secondaria di primo e di secondo grado, a differenza dell'insegnante di scuola primaria, riconduce la difficoltà dello studente nella gestione di R al fatto di focalizzarsi in primo luogo sugli aspetti legati alla costruzione di R , a proprietà o a teoremi (aspetti iconico-strutturali di R), e in secondo luogo sugli aspetti convenzionali, come quelli legati a notazioni, definizioni, regole o vincoli d'uso (aspetti simbolici). Dunque, l'insegnante di scuola secondaria di primo e di secondo grado riconduce la difficoltà di gestione di R da parte dello studente agli stessi aspetti (iconico-strutturali e simbolici) ai quali attribuisce la capacità di un altro studente di gestire R .

Anche in questo caso emergono aspetti nuovi, più specifici, rispetto a quelli evidenziati nella terza ipotesi di ricerca.

5.2.4 *Conflitti semiotici generati da contenuti di rappresentazioni*

La quarta domanda di ricerca è stata formulata nei termini seguenti:

D4. L'insegnante avverte i conflitti semiotici generati dai contenuti (*representamen*) di rappresentazioni semiotiche simili per qualche aspetto? Se sì, a che cosa li riconduce?

L'analisi dei dati di ricerca (par. 4.3.5) conduce alla seguente risposta.

L'insegnante, soprattutto di scuola secondaria, avverte i conflitti semiotici generati dai contenuti di rappresentazioni semiotiche simili per qualche aspetto. In particolare, l'insegnante è in grado di ricondurre i conflitti semiotici alla confusione (o identificazione) da parte dello studente di una componente di un contenuto (*representamen*) di una rappresentazione con un'altra componente di un altro contenuto (*representamen*), simile al primo sotto qualche aspetto, in particolare (e soprattutto) per l'aspetto iconico-qualitativo (immediatamente riconoscibile o direttamente percepibile).

L'insegnante, tuttavia, nella maggior parte dei casi, non è in grado di ricondurre i conflitti semiotici alla confusione (o identificazione) da parte dello studente di aspetti completamente differenti di uno stesso contenuto (*representamen*) (per esempio, l'aspetto concreto di una rappresentazione o di rinvio a qualcos'altro con l'aspetto simbolico).

La quarta ipotesi di ricerca (par. 3.3) non può dunque essere accettata in tutte le sue parti, in quanto incompatibile con i dati. In particolare l'assunzione che l'insegnante non sia in grado di ricondurre i conflitti semiotici alla confusione (o identificazione) da parte dello studente di una componente di un contenuto di una rappresentazione con un'altra componente di un altro contenuto, simile al primo sotto qualche aspetto (soprattutto iconico-qualitativo), deve essere modificata sulla base delle evidenze raccolte, nel senso sopra specificato.

In ogni caso, questo quarto punto suggerisce la possibilità e la necessità di proseguire la ricerca, modificando alcune variabili.

5.3 Implicazioni e riflessioni didattiche

Riteniamo che questa ricerca possa fornire un contributo non solo a una riflessione professionale su una dimensione specifica dell'apprendimento della matematica, ma anche a una riflessione critica sulla formazione degli insegnanti. Ha dunque risvolti non solo teorici ma anche concreti. Le risposte degli insegnanti mostrano chiaramente che per interpretare quel che succede in aula, per organizzare e gestire in modo professionale le attività matematiche, l'insegnante ha bisogno di una preparazione specifica non solo in matematica, storia, epistemologia, pedagogia, sociologia e/o psicologia (D'Amore & Fandiño Pinilla, 2009), ma anche in semiotica. Dalle risposte degli insegnanti emerge questa lacuna importante, non trascurabile, nella preparazione dell'insegnante.

L'insegnante non conosce a fondo neppure le parole chiave (rappresentazione semiotica, registro semiotico, oggetto matematico etc.), o ne ha soltanto una vaga idea. In molti casi l'insegnante, durante l'intervista, non è riuscito a distaccarsi o a capire che ciò che gli si stava chiedendo, in particolare nella domanda n. 2 del questionario, non era il nome dell'oggetto matematico, cioè una rappresentazione dell'oggetto nella lingua naturale (per esempio "frazioni"), ma una particolare rappresentazione "che un determinato studente X riconosce o gestisce con molta difficoltà" nelle attività matematiche (per esempio "0/3"). Tutto questo nonostante la presenza nel questionario (in corrispondenza della domanda n. 10) di numerosi esempi di rappresentazioni semiotiche (anche di frazioni) potenzialmente problematiche per lo studente.

Nella formazione professionale degli insegnanti occorre dunque prendere in esame argomenti non solo di matematica, storia, epistemologia, pedagogia, sociologia e/o psicologia, ma anche di semiotica declinati in chiave didattica. Gli studi e le ricerche citate in questa tesi ne evidenziano tutta l'importanza, la necessità e l'urgenza, per una comprensione più profonda dei fenomeni di costruzione cognitiva e di gestione delle conoscenze sottese alle attività matematiche.

Questa tesi può aprire uno spiraglio interessante non solo nel mondo della ricerca in didattica della matematica ma anche nel mondo della formazione degli insegnanti di matematica.

5.4 Limitazioni dello studio e raccomandazioni per la ricerca futura

Questo studio ha evidenziato l'importanza di una dimensione dell'apprendimento della matematica relativamente nuova per l'insegnante. Anche se da diverse decine di anni gran parte della ricerca in didattica della matematica si focalizza su tale dimensione, gran parte del mondo della scuola, dunque degli insegnanti, non la conosce, o almeno non ne è pienamente consapevole. Prova ne è il fatto che, tuttora, il senso di alcune espressioni alla base di tale dimensione, quali "registro di rappresentazione", "rappresentazione semiotica" e "oggetto matematico", non è colto pienamente dall'insegnante. I risultati della ricerca lo hanno mostrato chiaramente.

Ben consapevoli dell'uso specialistico in didattica della matematica delle espressioni sopra riportate, la loro introduzione si è rivelata tuttavia importante e cruciale

per la raccolta dei dati necessari. Non sarebbe stato possibile, o sarebbe stato troppo complesso, sostituirle o evitarle senza snaturare la ricerca. In altre parole, l'espressione "oggetto matematico" è stata utilizzata accanto a quella di "rappresentazione semiotica" e a quella di "registro", pur sapendo che l'insegnante, nella maggior parte dei casi, non ha una formazione specifica sulla teoria dei registri di rappresentazione semiotica.

Questa ricerca non si è comunque focalizzata sulla natura degli oggetti matematici o delle rappresentazioni, non era questo lo scopo. Quello su cui la ricerca ha cercato di focalizzare l'attenzione dell'insegnante non è l'oggetto matematico in sé e per sé, ma l'oggetto istituzionale (Chevallard, 1985; Godino & Batanero, 1994), ovvero il sapere o il sistema di pratiche (D'Amore & Godino, 2006) riconosciuto come legittimo, pertinente o adeguato, entro una data istituzione, insieme ai mezzi semiotici condivisi per la sua trasposizione didattica.

L'argomento relativamente nuovo e le domande molto articolate, che hanno reso il questionario particolarmente lungo e impegnativo, hanno creato un certo imbarazzo e disorientato il più delle volte l'insegnante. In ogni caso, lo hanno costretto a riflettere da un punto di vista nuovo, per lui insolito e inusuale, su una dimensione specifica dell'apprendimento, una dimensione in grado di svelare tutta la complessità dei processi di comprensione sottostanti le attività matematiche che il punto di vista matematico, da solo, spesso nasconde.

Nonostante il tempo concesso a ciascun partecipante fosse tutto quello da lui richiesto, l'insegnante poco disponibile a mettersi in gioco o con poco tempo a disposizione ha presto rinunciato a collaborare alla ricerca. Questo è stato l'ostacolo maggiore incontrato nella ricerca, soprattutto la scarsa disponibilità degli insegnanti di scuola secondaria di secondo grado. Il numero di questi ultimi è risultato dunque decisamente inferiore a quello degli insegnanti di scuola primaria e di scuola secondaria di primo grado.

Le limitazioni dello studio, determinate dall'argomento relativamente nuovo, dalla complessità del questionario e dal numero relativamente basso di insegnanti di scuola secondaria di secondo grado partecipanti alla ricerca, indicano la necessità di ulteriori ricerche, da realizzare anche con gli stessi metodi e con un questionario meno articolato e impegnativo per l'insegnante.

D'altra parte, se l'indagine fosse svolta su un campione di insegnanti preparato sugli aspetti presi in esame nella ricerca, su un campione che abbia partecipato a un corso di formazione specifico prima di rispondere alle domande del questionario, quali risultati

si otterrebbero somministrando il medesimo questionario? Se, prima di rispondere alle domande del questionario, l'insegnante fosse guidato in un'indagine specifica da svolgere personalmente tra i propri studenti, i risultati sarebbero gli stessi? Ampliando il campione e mantenendo lo stesso questionario le risposte alle domande di ricerca muterebbero? Se sì, in che modo?

La ricerca può dunque essere approfondita e ampliata in diversi modi:

- somministrando il medesimo questionario a un campione di insegnanti che dichiarino preliminarmente di conoscere, grazie allo studio individuale o alla partecipazione a qualche corso di formazione specifico, la problematica della gestione delle rappresentazioni semiotiche nel processo di apprendimento;
- modificando il questionario in modo da evitare l'uso esplicito delle espressioni “oggetto matematico”, “rappresentazione semiotica” e “registro di rappresentazione”, per rilevare se l'insegnante le aggiunge spontaneamente e, nel caso, in che modo le utilizza;
- somministrando il medesimo questionario a un campione di insegnanti che prima di rispondere alle domande del questionario abbiano effettuato, sotto la guida del ricercatore, un'indagine specifica tra i loro studenti;
- estendendo la ricerca a studenti di scuola secondaria e di università, chiedendo loro di rispondere alle domande (prive di espressioni specifiche del linguaggio della didattica della matematica) assumendo il ruolo di un loro insegnante di matematica, in modo da poter confrontare le risposte degli studenti con quelle degli insegnanti;
- ampliando il campione in modo da ottenere altri dati qualitativi e quantitativi sul numero e sul tipo di registri di rappresentazione utilizzati in una data situazione, sugli aspetti di una rappresentazione semiotica sui quali lo studente in grado di gestirla può focalizzarsi, sugli aspetti di una rappresentazione semiotica sui quali lo studente che la gestisce con difficoltà può focalizzarsi, sui conflitti semiotici generati dai contenuti di rappresentazioni semiotiche simili per qualche aspetto;
- includendo anche gli insegnanti in formazione iniziale, in modo da confrontare le loro risposte con quelle degli insegnanti in servizio;

e tanti altri modi, per migliorarne i risultati, ovvero la credibilità, trasferibilità e affidabilità. È ciò che più auspichiamo.

5.5 Conclusione

Questa ricerca si è focalizzata sulla consapevolezza dell'insegnante sulle ragioni semiotiche e cognitive delle difficoltà sistematiche e ricorrenti che uno studente incontra nel processo di apprendimento della matematica. Si tratta di una questione cruciale dell'insegnamento-apprendimento della matematica, poco esplorata, nuova per molti insegnanti. La ricerca ne ha evidenziato tutta la rilevanza sia teorica sia pratica, per una riflessione professionale su una dimensione specifica dell'apprendimento della matematica e per una riflessione critica sulla formazione degli insegnanti.

I risultati di questa ricerca hanno mostrato come sia assolutamente necessario ripensare alla formazione iniziale e in servizio degli insegnanti di matematica. Le tematiche messe in evidenza dalla presente tesi mostrano che è necessario includere, nei corsi di formazione, riflessioni sulla semiotica e sulla importanza che essa riviste nella costruzione della conoscenza matematica. Non solo, ma anche la sua necessità nel processo di valutazione delle situazioni d'aula, in particolare nella valutazione dei processi di apprendimento degli studenti.

Appendice A Lettera di invito

Gentile Insegnante,

sono una dottoranda di ricerca in “Storia e Didattica delle Matematiche della Fisica e della Chimica” presso l’Università di Palermo (sotto la direzione del Prof. Bruno D’Amore) e sto conducendo una ricerca che ha come scopo quello di evidenziare il punto di vista dell’insegnante sulle modalità di insegnamento-apprendimento delle rappresentazioni semiotiche degli oggetti matematici. Ti sarei infinitamente grata se tu accettassi questo mio invito a partecipare alla ricerca.

Se accetti di partecipare, ti verrà inviato un questionario via email, costituito da domande a risposta aperta e da domande a risposta chiusa. Una volta letto il questionario, potrai scegliere tra:

1. rispondere autonomamente alle domande del questionario;
2. rispondere alle domande del questionario con me a fianco, attraverso un’intervista, nel corso della quale potrai avere dei chiarimenti sulle domande.

Nel caso 1, se necessario, potrai successivamente chiarire, discutere o approfondire le tue risposte nel corso di un’intervista di circa 45 minuti, in una data da concordare, che faccia comodo a entrambi, soprattutto a te.

Nel caso 2, dovremo concordare un appuntamento in base alla tua disponibilità. La durata dell’intervista, guidata dalla scaletta di domande del questionario, sarà di circa 60 minuti. Sempre con il tuo consenso, l’intervista sarà audio-registrata, per facilitare la trascrizione e l’analisi delle risposte.

Non sono previsti rischi o costi di alcun tipo, e neppure compensi, per la partecipazione a questa ricerca. Il tuo contributo sarà comunque estremamente utile e prezioso per la ricerca in didattica della matematica, più in particolare, per lo studio e l’analisi, con strumenti nuovi, più potenti ed efficaci, delle problematiche che accompagnano spesso, ad ogni livello scolastico, le attività di insegnamento-apprendimento delle rappresentazioni semiotiche degli oggetti matematici.

I partecipanti alla ricerca che ne faranno richiesta potranno in seguito ricevere i risultati della ricerca stessa, una volta completato l'iter del dottorato.

Sarà garantito l'anonimato di tutti i partecipati alla ricerca. Per la descrizione dei risultati di ricerca saranno utilizzati soltanto degli pseudonimi.

I dati raccolti tramite il questionario e le interviste saranno da me utilizzati esclusivamente nella tesi di dottorato, in eventuali articoli o presentazioni successive.

La tua partecipazione è completamente volontaria. Ti potrai ritirare dalla ricerca in qualsiasi momento, senza specificarne il motivo, semplicemente comunicandomelo via email.

Contatti: Per qualsiasi domanda inerente alla ricerca, e per tutte le questioni ad essa connesse, ti prego di contattarmi via email: maura@iori-maura.191.it. oppure al seguente numero: tel. 059 567324.

Consenso alla partecipazione: Ti prego di rispondere all'email che hai ricevuto evidenziando la tua preferenza:

- Desidero partecipare a questa ricerca.
- Mi dispiace, ma non posso (o non voglio) partecipare a questa ricerca.

Se accetti di partecipare, riceverai il questionario via email entro due/tre giorni dalla ricezione del tuo consenso.

Una volta ricevuto e letto il questionario, dovrai indicarmi l'opzione (1 o 2) che preferisci. Nel caso dell'opzione 2, per concordare l'appuntamento, oltre al luogo in cui incontrarci, mi fornirai alcuni giorni e orari che ti fanno più comodo.

Avrai in ogni caso la possibilità di ritirarti dalla ricerca, comunicandomelo via email.

Se conosci colleghe/i disponibili a partecipare a questa ricerca, ti prego di segnalarmi i loro indirizzi email.

In attesa di una tua gradita risposta, ti ringrazio per la cortese attenzione e ti porgo i miei più cordiali saluti.

Maura Iori

Appendice B Questionari

B.1 Scuola primaria

Considera uno dei seguenti campi di studio della matematica in cui si utilizzano diversi registri di rappresentazione: discorsivi (come la lingua naturale oppure la scrittura simbolica) e non discorsivi (figure geometriche, grafici, disegni etc.):

c^1 : geometria piana

c^2 : geometria solida

c^3 : aritmetica

c^4 : linguaggio degli insiemi

c^5 : trasformazioni geometriche nel piano

c^6 : calcolo combinatorio

c^7 : calcolo delle probabilità

c^8 : statistica

c^9 : algebra

c^{10} : geometria analitica

c^{11} : altro campo di studio della matematica:

Nel campo di studio considerato, individua una particolare rappresentazione R, in un dato registro (discorsivo o non discorsivo), di un oggetto matematico O che un determinato studente X riconosce o gestisce con molta difficoltà, pur impegnandosi costantemente nelle attività matematiche.⁴⁸

⁴⁸ Per “oggetto matematico” intendiamo, in linea generale, tutto ciò a cui si fa riferimento, in vario modo, nelle attività matematiche, quando si costruisce, si comunica o si apprende matematica (D’Amore & Godino, 2006). Non essendo possibile un accesso sensibile, cioè attraverso i sensi, agli oggetti matematici, ma solo a loro rappresentazioni semiotiche in diversi registri, il cuore di tutte le attività matematiche è costituito dalle rappresentazioni e dalle loro trasformazioni (all’interno di uno stesso registro, oppure da un registro a un altro, senza modificare gli oggetti denotati). Dal punto di vista cognitivo, un “oggetto matematico” è proprio l’invariante di rappresentazioni semiotiche prodotte in registri differenti (Duval, 2006a, 2006b) nelle attività matematiche. Le attività matematiche, come D’Amore e Godino (2006) evidenziano, possono focalizzarsi su:

- *elementi linguistici* (termini, espressioni, notazioni, grafici etc.) nei loro differenti registri
 - *problemi/situazioni* (che originano o motivano una data attività matematica)
 - *concetti* (introdotti mediante definizioni o descrizioni)
 - *proposizioni* (enunciati sui concetti etc.)
 - *procedure* (algoritmi, operazioni, tecniche di calcolo etc.)
 - *argomenti* (enunciati usati per validare o spiegare proposizioni e procedure, deduttivi o di altro tipo etc.)
- tra loro in relazione.

[Se non ti viene in mente alcuna rappresentazione nel campo di studio scelto, prova a cambiare campo. Se anche cambiando campo non ti viene in mente nulla, ti invitiamo a segnalare la cosa al ricercatore. Potrai, se vorrai, collaborare con il ricercatore a una breve indagine tra i tuoi studenti. Dovrai scegliere uno o due studenti, abbastanza motivati, curiosi e studiosi, che abbiano voglia di mettersi in gioco per la ricerca, lasciandosi intervistare dal ricercatore. Spiega bene loro che l'intervista non ha alcuno scopo valutativo. Il ricercatore porrà loro alcune domande, preventivamente concordate con te, adatte al loro livello scolastico. Al termine dell'indagine, tu e il ricercatore discuterete i risultati ottenuti].

1. **a)** A quale oggetto matematico O hai pensato?
 - b)** Quale campo di studio c^i ($i = 1, 2, 3, \dots, 11$) hai scelto?
 - c)** Lo studente X frequenta la classe:

2. Quale rappresentazione R dell'oggetto matematico O lo studente X riconosce o gestisce con molta difficoltà, pur impegnandosi molto nelle attività matematiche?

3. Su quali aspetti della rappresentazione R lo studente X focalizza maggiormente la sua attenzione? Scegli tra i seguenti (sono ammesse più scelte) completando dove richiesto:
 - a)** aspetti concreti di R , legati alla sua forma, dimensione, colore, posizione etc., in particolare:
.....
 - b)** somiglianza di R con qualcos'altro di concreto, in particolare con:
.....
 - c)** aspetti strutturali, come quelli legati:
 - c1)** alla costruzione di R
(per esempio: Come disegnare o costruire una figura? Come tracciare un grafico? Come scrivere o ricavare una formula, un'espressione, un'equazione, una funzione etc.?), in particolare:
.....
 - c2)** a proprietà;
 - c3)** a teoremi;
 - c4)** ad altro:
.....
 - d)** aspetti legati al linguaggio quotidiano o all'esperienza sensibile, in particolare:
.....

e) aspetti di rinvio a qualcos'altro (a un'operazione da svolgere, a un'altra rappresentazione, a un altro oggetto matematico, a proprietà etc.), in particolare:
.....

f) aspetti convenzionali, legati a

f1) notazioni;

f2) definizioni;

f3) regole o vincoli d'uso;

f4) altro:.....

g) altri aspetti:
.....

4. A quali aspetti indicati al punto 3 (dei quali si riportano qui di seguito soltanto le corrispondenti lettere) ritieni che siano da ricondurre, in massima parte, le difficoltà che incontra lo studente X nell'uso della rappresentazione R? Ci sono altri aspetti non inclusi nell'elenco che tu ritieni importanti? Se sì, segnala tali aspetti alla fine del seguente elenco:

a)

b)

c1)

c2)

c3)

c4)

d)

e)

f1)

f2)

f3)

f4)

g)

Altri aspetti:

5. Un altro studente Y, della stessa classe di X, non incontra alcuna difficoltà, o almeno incontra soltanto alcune difficoltà che tu ritieni poco importanti, nell'uso della rappresentazione R. Su quali aspetti di R lo studente Y focalizza maggiormente la sua attenzione?

Scegli tra i seguenti (sono ammesse più scelte) completando dove richiesto:

a) aspetti concreti di R, legati alla sua forma, dimensione, colore, posizione etc., in particolare:

.....

b) somiglianza di R con qualcos'altro di concreto, in particolare con:

.....

c) aspetti strutturali, come quelli legati:

c1) alla costruzione di R

(per esempio: Come disegnare o costruire una figura? Come tracciare un grafico? Come scrivere o ricavare una formula, un'espressione, un'equazione, una funzione etc.?), in particolare:

.....

c2) a proprietà;

c3) a teoremi;

c4) ad altro:

.....

d) aspetti legati al linguaggio quotidiano o all'esperienza sensibile, in particolare:

.....

e) aspetti di rinvio a qualcos'altro (a un'operazione da svolgere, a un'altra rappresentazione, a un altro oggetto matematico, a proprietà etc.), in particolare:

.....

f) aspetti convenzionali, legati a

f1) notazioni;

f2) definizioni;

f3) regole o vincoli d'uso;

f4) altro:.....

g) altri aspetti:

.....

6. A quali aspetti indicati al punto 5 (dei quali si riportano qui di seguito soltanto le corrispondenti lettere) ritieni si possa ricondurre, in massima parte, la capacità dello studente Y di utilizzare la rappresentazione R? Ci sono altri aspetti non inclusi nell'elenco che tu ritieni importanti? Se sì, segnala tali aspetti alla fine del seguente elenco:

a)

b)

- c1)
- c2)
- c3)
- c4)

- d)

- e)

- f1)
- f2)
- f3)
- f4)

- g)

- Altri aspetti:

7. La forma della rappresentazione R può, secondo te, indurre lo studente X a confondere la rappresentazione R con un'altra rappresentazione S dello stesso oggetto O oppure di un altro oggetto O'?
- Se sì, con quale rappresentazione S di quale oggetto O oppure O' lo studente X tende a confondere la rappresentazione R?
- Se no, perché?

Pensa ora ad un'altra rappresentazione T (dello stesso oggetto O oppure di un altro oggetto O') in uno dei campi di studio c^i sopra indicati, che sia meno problematica, rispetto ad R, per lo studente X. [T può anche coincidere con S della domanda 7].

8. A quale rappresentazione T e a quale campo di studio c^i hai pensato? A quale oggetto matematico (O oppure O') la rappresentazione T fa riferimento?
9. Quali sono le caratteristiche della rappresentazione T che, secondo te, rendono T meno problematica della rappresentazione R?

Mettiti ancora nei panni del tuo studente X...

10. Tra le seguenti rappresentazioni semiotiche (R_1, R_2, \dots), scegli quella (RX) che ritieni più problematica per lo studente X (sono ammesse più scelte). In corrispondenza di RX individua, sempre dal punto di vista dello studente X:
- I. le eventuali rappresentazioni semiotiche che per lo studente X mostrano una certa somiglianza (sotto qualche aspetto) con RX;
 - II. le eventuali rappresentazioni con le quali RX può essere confusa;

- III.** le eventuali convenzioni (regole, vincoli, limiti d'uso, ...) per l'uso di RX, delle quali lo studente X è ben consapevole;
- IV.** i principali contesti nei quali lo studente X utilizza la rappresentazione RX;
- V.** la complessità d'interpretazione e d'uso (in relazione ai contesti considerati) di RX, per lo studente X, scegliendo tra: (1) per nulla complessa / (2) poco complessa / (3) abbastanza complessa / (4) molto complessa / (5) non so.

completando le righe della tabella corrispondente alla tua scelta:

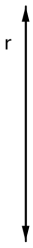
R₁	=
I.	Somiglianze con: R _{1_1} : R _{1_2} : R _{1_3} : ...
II.	Confusione con: R _{1_a} : R _{1_b} : R _{1_c} : ...
III.	Eventuali convenzioni per l'uso di R ₁ , che lo studente X conosce:
IV.	Contesto 1 di R ₁ : Contesto 2 di R ₁ : Contesto 3 di R ₁ : ...
V.	Complessità d'interpretazione e d'uso di R ₁ in relazione al: contesto 1 del punto IV: contesto 2 del punto IV: contesto 3 del punto IV: ... scegliendo tra: (1) per nulla complessa / (2) poco complessa / (3) abbastanza complessa / (4) molto complessa / (5) non so.

R₂	“Il doppio di $\frac{5}{6}$ ”
I.	R _{2_1} : R _{2_2} : R _{2_3} : ...
II.	Confusione con: R _{2_a} : R _{2_b} : R _{2_c} : ...
III.	Eventuali convenzioni per l'uso di R ₂ , che lo studente X conosce:
IV.	Contesto 1 di R ₂ : Contesto 2 di R ₂ : Contesto 3 di R ₂ : ...
V.	Complessità d'interpretazione e d'uso di R ₂ in relazione al: contesto 1 del punto IV: contesto 2 del punto IV: contesto 3 del punto IV: ... scegliendo tra: (1) per nulla complessa / (2) poco complessa / (3) abbastanza complessa / (4) molto complessa / (5) non so.

R₃	$\frac{1}{\frac{2}{4}}$
I.	R _{3_1} : R _{3_2} : R _{3_3} : ...
II.	Confusione con: R _{3_a} : R _{3_b} : R _{3_c} : ...
III.	Eventuali convenzioni per l'uso di R ₃ , che lo studente X conosce:
IV.	Contesto 1 di R ₃ : Contesto 2 di R ₃ : Contesto 3 di R ₃ : ...
V.	Complessità d'interpretazione e d'uso di R ₃ in relazione al: contesto 1 del punto IV: contesto 2 del punto IV: contesto 3 del punto IV: ... scegliendo tra: (1) per nulla complessa / (2) poco complessa / (3) abbastanza complessa / (4) molto complessa / (5) non so.

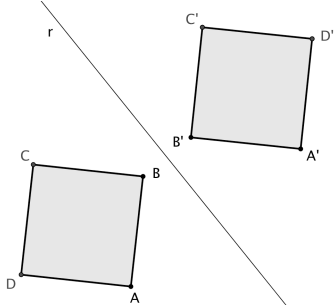
R₄	$\frac{0}{3}$
I.	R _{4_1} : R _{4_2} : R _{4_3} : ...
II.	Confusione con: R _{4_a} : R _{4_b} : R _{4_c} : ...
III.	Eventuali convenzioni per l'uso di R ₄ , che lo studente X conosce:
IV.	Contesto 1 di R ₄ : Contesto 2 di R ₄ : Contesto 3 di R ₄ : ...
V.	Complessità d'interpretazione e d'uso di R ₄ in relazione al: contesto 1 del punto IV: contesto 2 del punto IV: contesto 3 del punto IV: ... scegliendo tra: (1) per nulla complessa / (2) poco complessa / (3) abbastanza complessa / (4) molto complessa / (5) non so.

R₅	1 h, 2 da, 0 u
I.	R _{5_1} : R _{5_2} : R _{5_3} : ...
II.	Confusione con: R _{5_a} : R _{5_b} : R _{5_c} : ...
III.	Eventuali convenzioni per l'uso di R ₅ , che lo studente X conosce:
IV.	Contesto 1 di R ₅ : Contesto 2 di R ₅ : Contesto 3 di R ₅ : ...
V.	Complessità d'interpretazione e d'uso di R ₅ in relazione al: contesto 1 del punto IV: contesto 2 del punto IV: contesto 3 del punto IV: ... scegliendo tra: (1) per nulla complessa / (2) poco complessa / (3) abbastanza complessa / (4) molto complessa / (5) non so.

R₆	
I.	R _{6_1} : R _{6_2} : R _{6_3} : ...
II.	Confusione con: R _{6_a} : R _{6_b} : R _{6_c} : ...
III.	Eventuali convenzioni per l'uso di R ₆ , che lo studente X conosce:
IV.	Contesto 1 di R ₆ : Contesto 2 di R ₆ : Contesto 3 di R ₆ : ...
V.	Complessità d'interpretazione e d'uso di R ₆ in relazione al: contesto 1 del punto IV: contesto 2 del punto IV: contesto 3 del punto IV: ... scegliendo tra: (1) per nulla complessa / (2) poco complessa / (3) abbastanza complessa / (4) molto complessa / (5) non so.

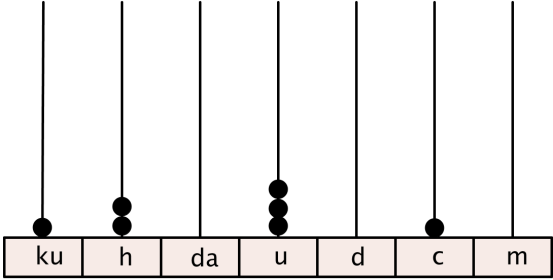
R₇	“Ampiezza di un angolo”
I.	R _{7_1} : R _{7_2} : R _{7_3} : ...
II.	Confusione con: R _{7_a} : R _{7_b} : R _{7_c} : ...
III.	Eventuali convenzioni per l’uso di R ₇ , che lo studente X conosce:
IV.	Contesto 1 di R ₇ : Contesto 2 di R ₇ : Contesto 3 di R ₇ : ...
V.	Complessità d’interpretazione e d’uso di R ₇ in relazione al: contesto 1 del punto IV: contesto 2 del punto IV: contesto 3 del punto IV: ... scegliendo tra: (1) per nulla complessa / (2) poco complessa / (3) abbastanza complessa / (4) molto complessa / (5) non so.

R₈	“La terza parte di 24 diminuita di 3”
I.	R _{8_1} : R _{8_2} : R _{8_3} : ...
II.	Confusione con: R _{8_a} : R _{8_b} : R _{8_c} : ...
III.	Eventuali convenzioni per l’uso di R ₈ , che lo studente X conosce:
IV.	Contesto 1 di R ₈ : Contesto 2 di R ₈ : Contesto 3 di R ₈ : ...
V.	Complessità d’interpretazione e d’uso di R ₈ in relazione al: contesto 1 del punto IV: contesto 2 del punto IV: contesto 3 del punto IV: ... scegliendo tra: (1) per nulla complessa / (2) poco complessa / (3) abbastanza complessa / (4) molto complessa / (5) non so.

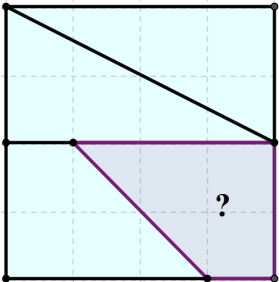
R₉	
I.	<p>R_{9_1} :</p> <p>R_{9_2} :</p> <p>R_{9_3} :</p> <p>...</p>
II.	<p>Confusione con:</p> <p>R_{9_a} :</p> <p>R_{9_b} :</p> <p>R_{9_c} :</p> <p>...</p>
III.	<p>Eventuali convenzioni per l'uso di R₉ , che lo studente X conosce:</p>
IV.	<p>Contesto 1 di R₉ :</p> <p>Contesto 2 di R₉ :</p> <p>Contesto 3 di R₉ :</p> <p>...</p>
V.	<p>Complessità d'interpretazione e d'uso di R₉ in relazione al:</p> <p>contesto 1 del punto IV:</p> <p>contesto 2 del punto IV:</p> <p>contesto 3 del punto IV:</p> <p>...</p> <p>scegliendo tra:</p> <p>(1) per nulla complessa / (2) poco complessa / (3) abbastanza complessa / (4) molto complessa / (5) non so.</p>

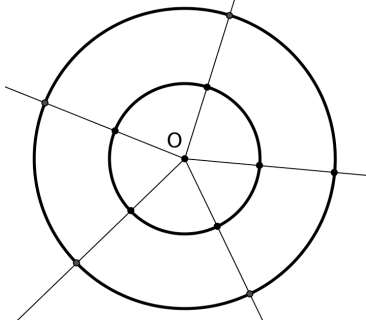
R₁₀	“La metà di...”
I.	R _{10_1} : R _{10_2} : R _{10_3} : ...
II.	Confusione con: R _{10_a} : R _{10_b} : R _{10_c} : ...
III.	Eventuali convenzioni per l’uso di R ₁₀ , che lo studente X conosce:
IV.	Contesto 1 di R ₁₀ : Contesto 2 di R ₁₀ : Contesto 3 di R ₁₀ : ...
V.	Complessità d’interpretazione e d’uso di R ₁₀ in relazione al: contesto 1 del punto IV: contesto 2 del punto IV: contesto 3 del punto IV: ... scegliendo tra: (1) per nulla complessa / (2) poco complessa / (3) abbastanza complessa / (4) molto complessa / (5) non so.

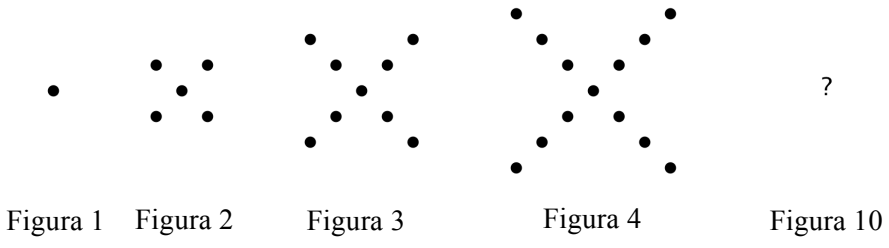
R₁₁	$(2 \times 1000) + (0 \times 100) + (3 \times 10) + (8 \times 1)$
I.	<p>R_{11_1} :</p> <p>R_{11_2} :</p> <p>R_{11_3} :</p> <p>...</p>
II.	<p>Confusione con:</p> <p>R_{11_a} :</p> <p>R_{11_b} :</p> <p>R_{11_c} :</p> <p>...</p>
III.	Eventuali convenzioni per l'uso di R ₁₁ , che lo studente X conosce:
IV.	<p>Contesto 1 di R₁₁ :</p> <p>Contesto 2 di R₁₁ :</p> <p>Contesto 3 di R₁₁ :</p> <p>...</p>
V.	<p>Complessità d'interpretazione e d'uso di R₁₁ in relazione al:</p> <p>contesto 1 del punto IV:</p> <p>contesto 2 del punto IV:</p> <p>contesto 3 del punto IV:</p> <p>...</p> <p>scegliendo tra:</p> <p>(1) per nulla complessa / (2) poco complessa / (3) abbastanza complessa / (4) molto complessa / (5) non so.</p>

<p>R₁₂</p>	
<p>I.</p>	<p>R_{12_1} :</p> <p>R_{12_2} :</p> <p>R_{12_3} :</p> <p>...</p>
<p>II.</p>	<p>Confusione con:</p> <p>R_{12_a} :</p> <p>R_{12_b} :</p> <p>R_{12_c} :</p> <p>...</p>
<p>III.</p>	<p>Eventuali convenzioni per l'uso di R₁₂, che lo studente X conosce:</p>
<p>IV.</p>	<p>Contesto 1 di R₁₂ :</p> <p>Contesto 2 di R₁₂ :</p> <p>Contesto 3 di R₁₂ :</p> <p>...</p>
<p>V.</p>	<p>Complessità d'interpretazione e d'uso di R₁₂ in relazione al:</p> <p>contesto 1 del punto IV:</p> <p>contesto 2 del punto IV:</p> <p>contesto 3 del punto IV:</p> <p>...</p> <p>scegliendo tra:</p> <p>(1) per nulla complessa / (2) poco complessa / (3) abbastanza complessa / (4) molto complessa / (5) non so.</p>

R₁₃	“La probabilità che esca un numero primo minore di 5 nel lancio di un dado (non truccato) a sei facce”
I.	R_{13_1} : R_{13_2} : R_{13_3} : ...
II.	Confusione con: R_{13_a} : R_{13_b} : R_{13_c} : ...
III.	Eventuali convenzioni per l’uso di R_{13} , che lo studente X conosce:
IV.	Contesto 1 di R_{13} : Contesto 2 di R_{13} : Contesto 3 di R_{13} : ...
V.	Complessità d’interpretazione e d’uso di R_{13} in relazione al: contesto 1 del punto IV: contesto 2 del punto IV: contesto 3 del punto IV: ... scegliendo tra: (1) per nulla complessa / (2) poco complessa / (3) abbastanza complessa / (4) molto complessa / (5) non so.

<p>R₁₄</p>	
<p>I.</p>	<p>R_{14_1} :</p> <p>R_{14_2} :</p> <p>R_{14_3} :</p> <p>...</p>
<p>II.</p>	<p>Confusione con:</p> <p>R_{14_a} :</p> <p>R_{14_b} :</p> <p>R_{14_c} :</p> <p>...</p>
<p>III.</p>	<p>Eventuali convenzioni per l'uso di R₁₄, che lo studente X conosce:</p>
<p>IV.</p>	<p>Contesto 1 di R₁₄ :</p> <p>Contesto 2 di R₁₄ :</p> <p>Contesto 3 di R₁₄ :</p> <p>...</p>
<p>V.</p>	<p>Complessità d'interpretazione e d'uso di R₁₄ in relazione al:</p> <p>contesto 1 del punto IV:</p> <p>contesto 2 del punto IV:</p> <p>contesto 3 del punto IV:</p> <p>...</p> <p>scegliendo tra:</p> <p>(1) per nulla complessa / (2) poco complessa / (3) abbastanza complessa / (4) molto complessa / (5) non so.</p>

R₁₅	
I.	<p>R_{15_1} :</p> <p>R_{15_2} :</p> <p>R_{15_3} :</p> <p>...</p>
II.	<p>Confusione con:</p> <p>R_{15_a} :</p> <p>R_{15_b} :</p> <p>R_{15_c} :</p> <p>...</p>
III.	<p>Eventuali convenzioni per l'uso di R₁₅, che lo studente X conosce:</p>
IV.	<p>Contesto 1 di R₁₅ :</p> <p>Contesto 2 di R₁₅ :</p> <p>Contesto 3 di R₁₅ :</p> <p>...</p>
V.	<p>Complessità d'interpretazione e d'uso di R₁₅ in relazione al:</p> <p>contesto 1 del punto IV:</p> <p>contesto 2 del punto IV:</p> <p>contesto 3 del punto IV:</p> <p>...</p> <p>scegliendo tra:</p> <p>(1) per nulla complessa / (2) poco complessa / (3) abbastanza complessa / (4) molto complessa / (5) non so.</p>

<p>R₁₆</p>	 <p>Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4 Figura 10</p> <p>Quanti pallini ci sono in Figura 10?</p>
<p>I.</p>	<p>R_{16_1} :</p> <p>R_{16_2} :</p> <p>R_{16_3} :</p> <p>...</p>
<p>II.</p>	<p>Confusione con:</p> <p>R_{16_a} :</p> <p>R_{16_b} :</p> <p>R_{16_c} :</p> <p>...</p>
<p>III.</p>	<p>Eventuali convenzioni per l'uso di R₁₆, che lo studente X conosce:</p>
<p>IV.</p>	<p>Contesto 1 di R₁₆ :</p> <p>Contesto 2 di R₁₆ :</p> <p>Contesto 3 di R₁₆ :</p> <p>...</p>
<p>V.</p>	<p>Complessità d'interpretazione e d'uso di R₁₆ in relazione al:</p> <p>contesto 1 del punto IV:</p> <p>contesto 2 del punto IV:</p> <p>contesto 3 del punto IV:</p> <p>...</p> <p>scegliendo tra:</p> <p>(1) per nulla complessa / (2) poco complessa / (3) abbastanza complessa / (4) molto complessa / (5) non so.</p>

Bibliografia

- D'Amore, B., & Godino, J. D. (2006). Punti di vista antropologico ed ontosemiotico in Didattica della Matematica. *La matematica e la sua didattica*, 1, 9-38.
- Duval, R. (2006a). Trasformazioni di rappresentazioni semiotiche e prassi di pensiero in matematica. *La matematica e la sua didattica*, 4, 585-619.
- Duval, R. (2006b). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61(1-2), 103-131.

B.2 Scuola secondaria di primo grado

Considera uno dei seguenti campi di studio della matematica in cui si utilizzano diversi registri di rappresentazione: discorsivi (come la lingua naturale oppure la scrittura simbolica) e non discorsivi (figure geometriche, grafici, disegni etc.):

- c^1 : geometria piana
- c^2 : geometria solida
- c^3 : aritmetica
- c^4 : linguaggio degli insiemi
- c^5 : trasformazioni geometriche nel piano
- c^6 : calcolo combinatorio
- c^7 : calcolo delle probabilità
- c^8 : statistica
- c^9 : algebra
- c^{10} : geometria analitica
- c^{11} : altro campo di studio della matematica:

Nel campo di studio considerato, individua una particolare rappresentazione R , in un dato registro (discorsivo o non discorsivo), di un oggetto matematico O che un determinato studente X riconosce o gestisce con molta difficoltà, pur impegnandosi costantemente nelle attività matematiche.⁵⁰

[Se non ti viene in mente alcuna rappresentazione nel campo di studio scelto, prova a cambiare campo. Se anche cambiando campo non ti viene in mente nulla, ti invitiamo a segnalare la cosa al ricercatore. Potrai, se vorrai, collaborare con il ricercatore a una breve indagine tra i tuoi studenti. Dovrai scegliere uno o due studenti, abbastanza motivati, curiosi e studiosi, che abbiano voglia di mettersi in gioco per la ricerca, lasciandosi intervistare dal ricercatore. Spiega bene loro che l'intervista non ha alcuno scopo valutativo. Il ricercatore porrà loro alcune

⁵⁰ Per “oggetto matematico” intendiamo, in linea generale, tutto ciò a cui si fa riferimento, in vario modo, nelle attività matematiche, quando si costruisce, si comunica o si apprende matematica (D'Amore & Godino, 2006). Non essendo possibile un accesso sensibile, cioè attraverso i sensi, agli oggetti matematici, ma solo a loro rappresentazioni semiotiche in diversi registri, il cuore di tutte le attività matematiche è costituito dalle rappresentazioni e dalle loro trasformazioni (all'interno di uno stesso registro, oppure da un registro a un altro, senza modificare gli oggetti denotati). Dal punto di vista cognitivo, un “oggetto matematico” è proprio l'invariante di rappresentazioni semiotiche prodotte in registri differenti (Duval, 2006a, 2006b) nelle attività matematiche. Le attività matematiche, come D'Amore e Godino (2006) evidenziano, possono focalizzarsi su:

- *elementi linguistici* (termini, espressioni, notazioni, grafici etc.) nei loro differenti registri
 - *problemi/situazioni* (che originano o motivano una data attività matematica)
 - *concetti* (introdotti mediante definizioni o descrizioni)
 - *proposizioni* (enunciati sui concetti etc.)
 - *procedure* (algoritmi, operazioni, tecniche di calcolo etc.)
 - *argomenti* (enunciati usati per validare o spiegare proposizioni e procedure, deduttivi o di altro tipo etc.)
- tra loro in relazione.

domande, preventivamente concordate con te, adatte al loro livello scolastico. Al termine dell'indagine, tu e il ricercatore discuterete i risultati ottenuti].

1.
 - a) A quale oggetto matematico O hai pensato?
 - b) Quale campo di studio c^i ($i = 1, 2, 3, \dots, 11$) hai scelto?
 - c) Lo studente X frequenta la classe:

2. Quale rappresentazione R dell'oggetto matematico O lo studente X riconosce o gestisce con molta difficoltà, pur impegnandosi molto nelle attività matematiche?

3. Su quali aspetti della rappresentazione R lo studente X focalizza maggiormente la sua attenzione? Scegli tra i seguenti (sono ammesse più scelte) completando dove richiesto:
 - a) aspetti concreti di R, legati alla sua forma, dimensione, colore, posizione etc., in particolare:
.....
 - b) somiglianza di R con qualcos'altro di concreto, in particolare con:
.....
 - c) aspetti strutturali, come quelli legati:
 - c1) alla costruzione di R
(per esempio: Come disegnare o costruire una figura? Come tracciare un grafico? Come scrivere o ricavare una formula, un'espressione, un'equazione, una funzione etc.?), in particolare:
.....
 - c2) a proprietà;
 - c3) a teoremi;
 - c4) ad altro:
.....
 - d) aspetti legati al linguaggio quotidiano o all'esperienza sensibile, in particolare:
.....
 - e) aspetti di rinvio a qualcos'altro (a un'operazione da svolgere, a un'altra rappresentazione, a un altro oggetto matematico, a proprietà etc.), in particolare:
.....
 - f) aspetti convenzionali, legati a

- f1) notazioni;
- f2) definizioni;
- f3) regole o vincoli d'uso;
- f4) altro:.....
 ...

g) altri aspetti:

4. A quali aspetti indicati al punto 3 (dei quali si riportano qui di seguito soltanto le corrispondenti lettere) ritieni che siano da ricondurre, in massima parte, le difficoltà che incontra lo studente X nell'uso della rappresentazione R? Ci sono altri aspetti non inclusi nell'elenco che tu ritieni importanti? Se sì, segnala tali aspetti alla fine del seguente elenco:

- a)
- b)
- c1)
- c2)
- c3)
- c4)
- d)
- e)
- f1)
- f2)
- f3)
- f4)
- g)
- Altri aspetti:

5. Un altro studente Y, della stessa classe di X, non incontra alcuna difficoltà, o almeno incontra soltanto alcune difficoltà che tu ritieni poco importanti, nell'uso della rappresentazione R. Su quali aspetti di R lo studente Y focalizza maggiormente la sua attenzione?

Scegli tra i seguenti (sono ammesse più scelte) completando dove richiesto:

- a) aspetti concreti di R, legati alla sua forma, dimensione, colore, posizione etc., in particolare:

- b)** somiglianza di R con qualcos'altro di concreto, in particolare con:
.....
- c)** aspetti strutturali, come quelli legati:
 - c1)** alla costruzione di R
(per esempio: Come disegnare o costruire una figura? Come tracciare un grafico? Come scrivere o ricavare una formula, un'espressione, un'equazione, una funzione etc.?), in particolare:
.....
 - c2)** a proprietà;
 - c3)** a teoremi;
 - c4)** ad altro:
.....
- d)** aspetti legati al linguaggio quotidiano o all'esperienza sensibile, in particolare:
.....
- e)** aspetti di rinvio a qualcos'altro (a un'operazione da svolgere, a un'altra rappresentazione, a un altro oggetto matematico, a proprietà etc.), in particolare:
.....
- f)** aspetti convenzionali, legati a
 - f1)** notazioni;
 - f2)** definizioni;
 - f3)** regole o vincoli d'uso;
 - f4)** altro:.....
- g)** altri aspetti:
.....

6. A quali aspetti indicati al punto 5 (dei quali si riportano qui di seguito soltanto le corrispondenti lettere) ritieni si possa ricondurre, in massima parte, la capacità dello studente Y di utilizzare la rappresentazione R? Ci sono altri aspetti non inclusi nell'elenco che tu ritieni importanti? Se sì, segnala tali aspetti alla fine del seguente elenco:

- a)
- b)
- c1)
- c2)
- c3)

- c4)
- d)
- e)
- f1)
- f2)
- f3)
- f4)
- g)
- Altri aspetti:

7. La forma della rappresentazione R può, secondo te, indurre lo studente X a confondere la rappresentazione R con un'altra rappresentazione S dello stesso oggetto O oppure di un altro oggetto O'?
- Se sì, con quale rappresentazione S di quale oggetto O oppure O' lo studente X tende a confondere la rappresentazione R?
- Se no, perché?

Pensa ora ad un'altra rappresentazione T (dello stesso oggetto O oppure di un altro oggetto O') in uno dei campi di studio c^i sopra indicati, che sia meno problematica, rispetto ad R, per lo studente X. [T può anche coincidere con S della domanda 7].

8. A quale rappresentazione T e a quale campo di studio c^i hai pensato? A quale oggetto matematico (O oppure O') la rappresentazione T fa riferimento?
9. Quali sono le caratteristiche della rappresentazione T che, secondo te, rendono T meno problematica della rappresentazione R?

Mettiti ancora nei panni del tuo studente X...

10. Tra le seguenti rappresentazioni semiotiche (R_1, R_2, \dots), scegli quella (RX) che ritieni più problematica per lo studente X (sono ammesse più scelte). In corrispondenza di RX individua, sempre dal punto di vista dello studente X:
- I. le eventuali rappresentazioni semiotiche che per lo studente X mostrano una certa somiglianza (sotto qualche aspetto) con RX;
 - II. le eventuali rappresentazioni con le quali RX può essere confusa;
 - III. le eventuali convenzioni (regole, vincoli, limiti d'uso, ...) per l'uso di RX, delle quali lo studente X è ben consapevole;

IV. i principali contesti nei quali lo studente X utilizza la rappresentazione RX;

V. la complessità d'interpretazione e d'uso (in relazione ai contesti considerati) di RX, per lo studente X, scegliendo tra: (1) per nulla complessa / (2) poco complessa / (3) abbastanza complessa / (4) molto complessa / (5) non so.

completando le righe della tabella corrispondente alla tua scelta:

R₁	=
I.	Somiglianze con: R _{1_1} : R _{1_2} : R _{1_3} : ...
II.	Confusione con: R _{1_a} : R _{1_b} : R _{1_c} : ...
III.	Eventuali convenzioni per l'uso di R ₁ , che lo studente X conosce:
IV.	Contesto 1 di R ₁ : Contesto 2 di R ₁ : Contesto 3 di R ₁ : ...
V.	Complessità d'interpretazione e d'uso di R ₁ in relazione al: contesto 1 del punto IV: contesto 2 del punto IV: contesto 3 del punto IV: ... scegliendo tra: (1) per nulla complessa / (2) poco complessa / (3) abbastanza complessa / (4) molto complessa / (5) non so.

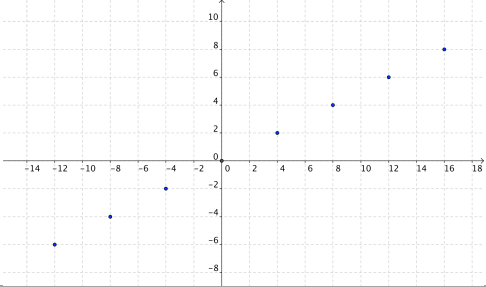
R₂	“il doppio di $\frac{5}{6}$ ”
I.	R _{2,1} : R _{2,2} : R _{2,3} : ...
II.	Confusione con: R _{2,a} : R _{2,b} : R _{2,c} : ...
III.	Eventuali convenzioni per l'uso di R ₂ , che lo studente X conosce:
IV.	Contesto 1 di R ₂ : Contesto 2 di R ₂ : Contesto 3 di R ₂ : ...
V.	Complessità d'interpretazione e d'uso di R ₂ in relazione al: contesto 1 del punto IV: contesto 2 del punto IV: contesto 3 del punto IV: ... scegliendo tra: (1) per nulla complessa / (2) poco complessa / (3) abbastanza complessa / (4) molto complessa / (5) non so.

R₃	$\frac{1}{\frac{2}{4}}$
I.	R _{3_1} : R _{3_2} : R _{3_3} : ...
II.	Confusione con: R _{3_a} : R _{3_b} : R _{3_c} : ...
III.	Eventuali convenzioni per l'uso di R ₃ , che lo studente X conosce:
IV.	Contesto 1 di R ₃ : Contesto 2 di R ₃ : Contesto 3 di R ₃ : ...
V.	Complessità d'interpretazione e d'uso di R ₃ in relazione al: contesto 1 del punto IV: contesto 2 del punto IV: contesto 3 del punto IV: ... scegliendo tra: (1) per nulla complessa / (2) poco complessa / (3) abbastanza complessa / (4) molto complessa / (5) non so.

R₄	$\frac{0}{3}$
I.	R _{4_1} : R _{4_2} : R _{4_3} : ...
II.	Confusione con: R _{4_a} : R _{4_b} : R _{4_c} : ...
III.	Eventuali convenzioni per l'uso di R ₄ , che lo studente X conosce:
IV.	Contesto 1 di R ₄ : Contesto 2 di R ₄ : Contesto 3 di R ₄ : ...
V.	Complessità d'interpretazione e d'uso di R ₄ in relazione al: contesto 1 del punto IV: contesto 2 del punto IV: contesto 3 del punto IV: ... scegliendo tra: (1) per nulla complessa / (2) poco complessa / (3) abbastanza complessa / (4) molto complessa / (5) non so.

R₅	-5^2
I.	<p>R_{5_1} :</p> <p>R_{5_2} :</p> <p>R_{5_3} :</p> <p>...</p>
II.	<p>Confusione con:</p> <p>R_{5_a} :</p> <p>R_{5_b} :</p> <p>R_{5_c} :</p> <p>...</p>
III.	Eventuali convenzioni per l'uso di R ₅ , che lo studente X conosce:
IV.	<p>Contesto 1 di R₅ :</p> <p>Contesto 2 di R₅ :</p> <p>Contesto 3 di R₅ :</p> <p>...</p>
V.	<p>Complessità d'interpretazione e d'uso di R₅ in relazione al:</p> <p>contesto 1 del punto IV:</p> <p>contesto 2 del punto IV:</p> <p>contesto 3 del punto IV:</p> <p>...</p> <p>scegliendo tra:</p> <p>(1) per nulla complessa / (2) poco complessa / (3) abbastanza complessa / (4) molto complessa / (5) non so.</p>

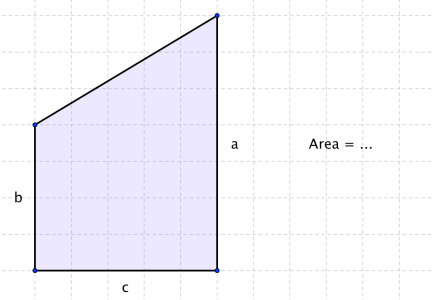
R₆	3 ⁰
I.	R _{6_1} : R _{6_2} : R _{6_3} : ...
II.	Confusione con: R _{6_a} : R _{6_b} : R _{6_c} : ...
III.	Eventuali convenzioni per l'uso di R ₆ , che lo studente X conosce:
IV.	Contesto 1 di R ₆ : Contesto 2 di R ₆ : Contesto 3 di R ₆ : ...
V.	Complessità d'interpretazione e d'uso di R ₆ in relazione al: contesto 1 del punto IV: contesto 2 del punto IV: contesto 3 del punto IV: ... scegliendo tra: (1) per nulla complessa / (2) poco complessa / (3) abbastanza complessa / (4) molto complessa / (5) non so.

R₇	
I.	<p>R_{7_1} :</p> <p>R_{7_2} :</p> <p>R_{7_3} :</p> <p>...</p>
II.	<p>Confusione con:</p> <p>R_{7_a} :</p> <p>R_{7_b} :</p> <p>R_{7_c} :</p> <p>...</p>
III.	<p>Eventuali convenzioni per l'uso di R_7 , che lo studente X conosce:</p>
IV.	<p>Contesto 1 di R_7 :</p> <p>Contesto 2 di R_7 :</p> <p>Contesto 3 di R_7 :</p> <p>...</p>
V.	<p>Complessità d'interpretazione e d'uso di R_7 in relazione al:</p> <p>contesto 1 del punto IV:</p> <p>contesto 2 del punto IV:</p> <p>contesto 3 del punto IV:</p> <p>...</p> <p>scegliendo tra:</p> <p>(1) per nulla complessa / (2) poco complessa / (3) abbastanza complessa / (4) molto complessa / (5) non so.</p>

R₈	“La terza parte di 24 diminuita di 3”
I.	R _{8_1} : R _{8_2} : R _{8_3} : ...
II.	Confusione con: R _{8_a} : R _{8_b} : R _{8_c} : ...
III.	Eventuali convenzioni per l’uso di R ₈ , che lo studente X conosce:
IV.	Contesto 1 di R ₈ : Contesto 2 di R ₈ : Contesto 3 di R ₈ : ...
V.	Complessità d’interpretazione e d’uso di R ₈ in relazione al: contesto 1 del punto IV: contesto 2 del punto IV: contesto 3 del punto IV: ... scegliendo tra: (1) per nulla complessa / (2) poco complessa / (3) abbastanza complessa / (4) molto complessa / (5) non so.

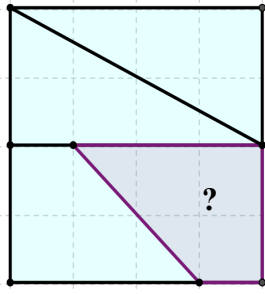
R₉	$1 = 3x$
I.	<p>R_{9_1} :</p> <p>R_{9_2} :</p> <p>R_{9_3} :</p> <p>...</p>
II.	<p>Confusione con:</p> <p>R_{9_a} :</p> <p>R_{9_b} :</p> <p>R_{9_c} :</p> <p>...</p>
III.	Eventuali convenzioni per l'uso di R ₉ , che lo studente X conosce:
IV.	<p>Contesto 1 di R₉ :</p> <p>Contesto 2 di R₉ :</p> <p>Contesto 3 di R₉ :</p> <p>...</p>
V.	<p>Complessità d'interpretazione e d'uso di R₉ in relazione al:</p> <p>contesto 1 del punto IV:</p> <p>contesto 2 del punto IV:</p> <p>contesto 3 del punto IV:</p> <p>...</p> <p>scegliendo tra:</p> <p>(1) per nulla complessa / (2) poco complessa / (3) abbastanza complessa / (4) molto complessa / (5) non so.</p>

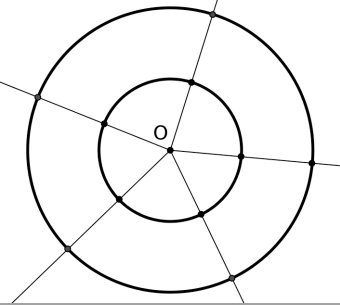
R₁₀	$0x = 5$
I.	R _{10_1} : R _{10_2} : R _{10_3} : ...
II.	Confusione con: R _{10_a} : R _{10_b} : R _{10_c} : ...
III.	Eventuali convenzioni per l'uso di R ₁₀ , che lo studente X conosce:
IV.	Contesto 1 di R ₁₀ : Contesto 2 di R ₁₀ : Contesto 3 di R ₁₀ : ...
V.	Complessità d'interpretazione e d'uso di R ₁₀ in relazione al: contesto 1 del punto IV: contesto 2 del punto IV: contesto 3 del punto IV: ... scegliendo tra: (1) per nulla complessa / (2) poco complessa / (3) abbastanza complessa / (4) molto complessa / (5) non so.

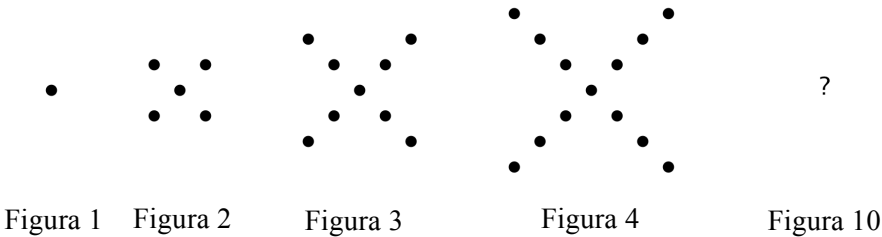
<p>R₁₁</p>	
<p>I.</p>	<p>R_{11_1} :</p> <p>R_{11_2} :</p> <p>R_{11_3} :</p> <p>...</p>
<p>II.</p>	<p>Confusione con:</p> <p>R_{11_a} :</p> <p>R_{11_b} :</p> <p>R_{11_c} :</p> <p>...</p>
<p>III.</p>	<p>Eventuali convenzioni per l'uso di R₁₁, che lo studente X conosce:</p>
<p>IV.</p>	<p>Contesto 1 di R₁₁ :</p> <p>Contesto 2 di R₁₁ :</p> <p>Contesto 3 di R₁₁ :</p> <p>...</p>
<p>V.</p>	<p>Complessità d'interpretazione e d'uso di R₁₁ in relazione al:</p> <p>contesto 1 del punto IV:</p> <p>contesto 2 del punto IV:</p> <p>contesto 3 del punto IV:</p> <p>...</p> <p>scegliendo tra:</p> <p>(1) per nulla complessa / (2) poco complessa / (3) abbastanza complessa / (4) molto complessa / (5) non so.</p>

R₁₂	$\sqrt{(-4)^2}$
I.	R _{12_1} : R _{12_2} : R _{12_3} : ...
II.	Confusione con: R _{12_a} : R _{12_b} : R _{12_c} : ...
III.	Eventuali convenzioni per l'uso di R ₁₂ , che lo studente X conosce:
IV.	Contesto 1 di R ₁₂ : Contesto 2 di R ₁₂ : Contesto 3 di R ₁₂ : ...
V.	Complessità d'interpretazione e d'uso di R ₁₂ in relazione al: contesto 1 del punto IV: contesto 2 del punto IV: contesto 3 del punto IV: ... scegliendo tra: (1) per nulla complessa / (2) poco complessa / (3) abbastanza complessa / (4) molto complessa / (5) non so.

R₁₃	“La probabilità che esca un numero primo minore di 5 nel lancio di un dado (non truccato) a sei facce”
I.	R _{13_1} : R _{13_2} : R _{13_3} : ...
II.	Confusione con: R _{13_a} : R _{13_b} : R _{13_c} : ...
III.	Eventuali convenzioni per l’uso di R ₁₃ , che lo studente X conosce:
IV.	Contesto 1 di R ₁₃ : Contesto 2 di R ₁₃ : Contesto 3 di R ₁₃ : ...
V.	Complessità d’interpretazione e d’uso di R ₁₃ in relazione al: contesto 1 del punto IV: contesto 2 del punto IV: contesto 3 del punto IV: ... scegliendo tra: (1) per nulla complessa / (2) poco complessa / (3) abbastanza complessa / (4) molto complessa / (5) non so.

<p>R₁₄</p>	
<p>I.</p>	<p>R_{14_1} :</p> <p>R_{14_2} :</p> <p>R_{14_3} :</p> <p>...</p>
<p>II.</p>	<p>Confusione con:</p> <p>R_{14_a} :</p> <p>R_{14_b} :</p> <p>R_{14_c} :</p> <p>...</p>
<p>III.</p>	<p>Eventuali convenzioni per l'uso di R₁₄, che lo studente X conosce:</p>
<p>IV.</p>	<p>Contesto 1 di R₁₄ :</p> <p>Contesto 2 di R₁₄ :</p> <p>Contesto 3 di R₁₄ :</p> <p>...</p>
<p>V.</p>	<p>Complessità d'interpretazione e d'uso di R₁₄ in relazione al:</p> <p>contesto 1 del punto IV:</p> <p>contesto 2 del punto IV:</p> <p>contesto 3 del punto IV:</p> <p>...</p> <p>scegliendo tra:</p> <p>(1) per nulla complessa / (2) poco complessa / (3) abbastanza complessa / (4) molto complessa / (5) non so.</p>

<p>R₁₅</p>	
<p>I.</p>	<p>R_{15_1} :</p> <p>R_{15_2} :</p> <p>R_{15_3} :</p> <p>...</p>
<p>II.</p>	<p>Confusione con:</p> <p>R_{15_a} :</p> <p>R_{15_b} :</p> <p>R_{15_c} :</p> <p>...</p>
<p>III.</p>	<p>Eventuali convenzioni per l'uso di R₁₅, che lo studente X conosce:</p>
<p>IV.</p>	<p>Contesto 1 di R₁₅ :</p> <p>Contesto 2 di R₁₅ :</p> <p>Contesto 3 di R₁₅ :</p> <p>...</p>
<p>V.</p>	<p>Complessità d'interpretazione e d'uso di R₁₅ in relazione al:</p> <p>contesto 1 del punto IV:</p> <p>contesto 2 del punto IV:</p> <p>contesto 3 del punto IV:</p> <p>...</p> <p>scegliendo tra:</p> <p>(1) per nulla complessa / (2) poco complessa / (3) abbastanza complessa / (4) molto complessa / (5) non so.</p>

<p>R₁₆</p>	 <p>Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4 Figura 10</p>
<p>I.</p>	<p>R_{16_1} :</p> <p>R_{16_2} :</p> <p>R_{16_3} :</p> <p>...</p>
<p>II.</p>	<p>Confusione con:</p> <p>R_{16_a} :</p> <p>R_{16_b} :</p> <p>R_{16_c} :</p> <p>...</p>
<p>III.</p>	<p>Eventuali convenzioni per l'uso di R₁₆, che lo studente X conosce:</p>
<p>IV.</p>	<p>Contesto 1 di R₁₆ :</p> <p>Contesto 2 di R₁₆ :</p> <p>Contesto 3 di R₁₆ :</p> <p>...</p>
<p>V.</p>	<p>Complessità d'interpretazione e d'uso di R₁₆ in relazione al:</p> <p>contesto 1 del punto IV:</p> <p>contesto 2 del punto IV:</p> <p>contesto 3 del punto IV:</p> <p>...</p> <p>scegliendo tra:</p> <p>(1) per nulla complessa / (2) poco complessa / (3) abbastanza complessa / (4) molto complessa / (5) non so.</p>

Bibliografia

- D'Amore, B., & Godino, J. D. (2006). Punti di vista antropologico ed ontosemiotico in Didattica della Matematica. *La matematica e la sua didattica*, 1, 9-38.
- Duval, R. (2006a). Trasformazioni di rappresentazioni semiotiche e prassi di pensiero in matematica. *La matematica e la sua didattica*, 4, 585-619.
- Duval, R. (2006b). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61(1-2), 103-131.

B.3 Scuola secondaria di secondo grado

Considera uno dei seguenti campi di studio della matematica in cui si utilizzano diversi registri di rappresentazione: discorsivi (come la lingua naturale oppure la scrittura simbolica) e non discorsivi (figure geometriche, grafici, disegni etc.):

c^1 : geometria piana

c^2 : geometria solida

c^3 : algebra

c^4 : geometria analitica

c^5 : trasformazioni geometriche nel piano

c^6 : calcolo combinatorio

c^7 : calcolo delle probabilità

c^8 : statistica

c^9 : trigonometria

c^{10} : calcolo infinitesimale

c^{11} : altro campo di studio della matematica:

Nel campo di studio considerato, individua una particolare rappresentazione R, in un dato registro (discorsivo o non discorsivo), di un oggetto matematico O che un determinato studente X riconosce o gestisce con molta difficoltà, pur impegnandosi costantemente nelle attività matematiche.⁵¹

[Se non ti viene in mente alcuna rappresentazione nel campo di studio scelto, prova a cambiare campo. Se anche cambiando campo non ti viene in mente nulla, ti invitiamo a segnalare la cosa al ricercatore. Potrai, se vorrai, collaborare con il ricercatore a una breve indagine tra i tuoi studenti. Dovrai scegliere uno o due studenti, abbastanza motivati, curiosi e studiosi, che abbiano voglia di mettersi in gioco per la ricerca, lasciandosi intervistare dal ricercatore. Spiega bene loro che l'intervista non ha alcuno scopo valutativo. Il ricercatore porrà loro alcune

⁵¹ Per “oggetto matematico” intendiamo, in linea generale, tutto ciò a cui si fa riferimento, in vario modo, nelle attività matematiche, quando si costruisce, si comunica o si apprende matematica (D'Amore & Godino, 2006). Non essendo possibile un accesso sensibile, cioè attraverso i sensi, agli oggetti matematici, ma solo a loro rappresentazioni semiotiche in diversi registri, il cuore di tutte le attività matematiche è costituito dalle rappresentazioni e dalle loro trasformazioni (all'interno di uno stesso registro, oppure da un registro a un altro, senza modificare gli oggetti denotati). Dal punto di vista cognitivo, un “oggetto matematico” è proprio l'invariante di rappresentazioni semiotiche prodotte in registri differenti (Duval, 2006a, 2006b) nelle attività matematiche. Le attività matematiche, come D'Amore e Godino (2006) evidenziano, possono focalizzarsi su:

- *elementi linguistici* (termini, espressioni, notazioni, grafici etc.) nei loro differenti registri
 - *problemi/situazioni* (che originano o motivano una data attività matematica)
 - *concetti* (introdotti mediante definizioni o descrizioni)
 - *proposizioni* (enunciati sui concetti etc.)
 - *procedure* (algoritmi, operazioni, tecniche di calcolo etc.)
 - *argomenti* (enunciati usati per validare o spiegare proposizioni e procedure, deduttivi o di altro tipo etc.)
- tra loro in relazione.

domande, preventivamente concordate con te, adatte al loro livello scolastico. Al termine dell'indagine, tu e il ricercatore discuterete i risultati ottenuti].

1.
 - a) A quale oggetto matematico O hai pensato?
 - b) Quale campo di studio c^i ($i = 1, 2, 3, \dots, 11$) hai scelto?
 - c) Lo studente X frequenta la classe:

2. Quale rappresentazione R dell'oggetto matematico O lo studente X riconosce o gestisce con molta difficoltà, pur impegnandosi molto nelle attività matematiche?

3. Su quali aspetti della rappresentazione R lo studente X focalizza maggiormente la sua attenzione? Scegli tra i seguenti (sono ammesse più scelte) completando dove richiesto:
 - a) aspetti concreti di R , legati alla sua forma, dimensione, colore, posizione etc., in particolare:
.....
 - b) somiglianza di R con qualcos'altro di concreto, in particolare con:
.....
 - c) aspetti strutturali, come quelli legati:
 - c1) alla costruzione di R
(per esempio: Come disegnare o costruire una figura? Come tracciare un grafico? Come scrivere o ricavare una formula, un'espressione, un'equazione, una funzione etc.?), in particolare:
.....
 - c2) a proprietà;
 - c3) a teoremi;
 - c4) ad altro:
.....
 - d) aspetti legati al linguaggio quotidiano o all'esperienza sensibile, in particolare:
.....
 - e) aspetti di rinvio a qualcos'altro (a un'operazione da svolgere, a un'altra rappresentazione, a un altro oggetto matematico, a proprietà etc.), in particolare:
.....
 - f) aspetti convenzionali, legati a

- f1) notazioni;
- f2) definizioni;
- f3) regole o vincoli d'uso;
- f4) altro:.....

g) altri aspetti:
.....

4. A quali aspetti indicati al punto 3 (dei quali si riportano qui di seguito soltanto le corrispondenti lettere) ritieni che siano da ricondurre, in massima parte, le difficoltà che incontra lo studente X nell'uso della rappresentazione R? Ci sono altri aspetti non inclusi nell'elenco che tu ritieni importanti? Se sì, segnala tali aspetti alla fine del seguente elenco:

- a)
- b)
- c1)
- c2)
- c3)
- c4)
- d)
- e)
- f1)
- f2)
- f3)
- f4)
- g)
- Altri aspetti:

5. Un altro studente Y, della stessa classe di X, non incontra alcuna difficoltà, o almeno incontra soltanto alcune difficoltà che tu ritieni poco importanti, nell'uso della rappresentazione R. Su quali aspetti di R lo studente Y focalizza maggiormente la sua attenzione?

Scegli tra i seguenti (sono ammesse più scelte) completando dove richiesto:

a) aspetti concreti di R, legati alla sua forma, dimensione, colore, posizione etc., in particolare:
.....

b) somiglianza di R con qualcos'altro di concreto, in particolare con:

-
- c)** aspetti strutturali, come quelli legati:
- c1)** alla costruzione di R
(per esempio: Come disegnare o costruire una figura? Come tracciare un grafico? Come scrivere o ricavare una formula, un'espressione, un'equazione, una funzione etc.), in particolare:
.....
 - c2)** a proprietà;
 - c3)** a teoremi;
 - c4)** ad altro:
.....
- d)** aspetti legati al linguaggio quotidiano o all'esperienza sensibile, in particolare:
.....
- e)** aspetti di rinvio a qualcos'altro (a un'operazione da svolgere, a un'altra rappresentazione, a un altro oggetto matematico, a proprietà etc.), in particolare:
.....
- f)** aspetti convenzionali, legati a
- f1)** notazioni;
 - f2)** definizioni;
 - f3)** regole o vincoli d'uso;
 - f4)** altro:.....
- g)** altri aspetti:
.....

6. A quali aspetti indicati al punto 5 (dei quali si riportano qui di seguito soltanto le corrispondenti lettere) ritieni si possa ricondurre, in massima parte, la capacità dello studente Y di utilizzare la rappresentazione R? Ci sono altri aspetti non inclusi nell'elenco che tu ritieni importanti? Se sì, segnala tali aspetti alla fine del seguente elenco:

- a)
- b)
- c1)
- c2)
- c3)
- c4)

- d)
- e)
- f1)
- f2)
- f3)
- f4)
- g)
- Altri aspetti:

7. La forma della rappresentazione R può, secondo te, indurre lo studente X a confondere la rappresentazione R con un'altra rappresentazione S dello stesso oggetto O oppure di un altro oggetto O'?
- Se sì, con quale rappresentazione S di quale oggetto O oppure O' lo studente X tende a confondere la rappresentazione R?
- Se no, perché?

Pensa ora ad un'altra rappresentazione T (dello stesso oggetto O oppure di un altro oggetto O') in uno dei campi di studio cⁱ sopra indicati, che sia meno problematica, rispetto ad R, per lo studente X. [T può anche coincidere con S della domanda 7].

8. A quale rappresentazione T e a quale campo di studio cⁱ hai pensato? A quale oggetto matematico (O oppure O') la rappresentazione T fa riferimento?
9. Quali sono le caratteristiche della rappresentazione T che, secondo te, rendono T meno problematica della rappresentazione R?

Mettiti ancora nei panni del tuo studente X...

10. Tra le seguenti rappresentazioni semiotiche (R_1, R_2, \dots), scegli quella (RX) che ritieni più problematica per lo studente X (sono ammesse più scelte). In corrispondenza di RX individua, sempre dal punto di vista dello studente X:
- I. le eventuali rappresentazioni semiotiche che per lo studente X mostrano una certa somiglianza (sotto qualche aspetto) con RX;
 - II. le eventuali rappresentazioni con le quali RX può essere confusa;
 - III. le eventuali convenzioni (regole, vincoli, limiti d'uso, ...) per l'uso di RX, delle quali lo studente X è ben consapevole;
 - IV. i principali contesti nei quali lo studente X utilizza la rappresentazione RX;

- V. la complessità d'interpretazione e d'uso (in relazione ai contesti considerati) di RX, per lo studente X, scegliendo tra: (1) per nulla complessa / (2) poco complessa / (3) abbastanza complessa / (4) molto complessa / (5) non so.

completando le righe della tabella corrispondente alla tua scelta:

R₁	=
I.	Somiglianze con: R _{1_1} : R _{1_2} : R _{1_3} : ...
II.	Confusione con: R _{1_a} : R _{1_b} : R _{1_c} : ...
III.	Eventuali convenzioni per l'uso di R ₁ , che lo studente X conosce:
IV.	Contesto 1 di R ₁ : Contesto 2 di R ₁ : Contesto 3 di R ₁ : ...
V.	Complessità d'interpretazione e d'uso di R ₁ in relazione al: contesto 1 del punto IV: contesto 2 del punto IV: contesto 3 del punto IV: ... scegliendo tra: (1) per nulla complessa / (2) poco complessa / (3) abbastanza complessa / (4) molto complessa / (5) non so.

R₂	“il doppio di $\frac{5}{6}$ ”
I.	R _{2_1} : R _{2_2} : R _{2_3} : ...
II.	Confusione con: R _{2_a} : R _{2_b} : R _{2_c} : ...
III.	Eventuali convenzioni per l'uso di R ₂ , che lo studente X conosce:
IV.	Contesto 1 di R ₂ : Contesto 2 di R ₂ : Contesto 3 di R ₂ : ...
V.	Complessità d'interpretazione e d'uso di R ₂ in relazione al: contesto 1 del punto IV: contesto 2 del punto IV: contesto 3 del punto IV: ... scegliendo tra: (1) per nulla complessa / (2) poco complessa / (3) abbastanza complessa / (4) molto complessa / (5) non so.

R₃	$\frac{1}{2}$ $\frac{2}{4}$
I.	R _{3_1} : R _{3_2} : R _{3_3} : ...
II.	Confusione con: R _{3_a} : R _{3_b} : R _{3_c} : ...
III.	Eventuali convenzioni per l'uso di R ₃ , che lo studente X conosce:
IV.	Contesto 1 di R ₃ : Contesto 2 di R ₃ : Contesto 3 di R ₃ : ...
V.	Complessità d'interpretazione e d'uso di R ₃ in relazione al: contesto 1 del punto IV: contesto 2 del punto IV: contesto 3 del punto IV: ... scegliendo tra: (1) per nulla complessa / (2) poco complessa / (3) abbastanza complessa / (4) molto complessa / (5) non so.

R₄	$\frac{0}{3}$
I.	R _{4_1} : R _{4_2} : R _{4_3} : ...
II.	Confusione con: R _{4_a} : R _{4_b} : R _{4_c} : ...
III.	Eventuali convenzioni per l'uso di R ₄ , che lo studente X conosce:
IV.	Contesto 1 di R ₄ : Contesto 2 di R ₄ : Contesto 3 di R ₄ : ...
V.	Complessità d'interpretazione e d'uso di R ₄ in relazione al: contesto 1 del punto IV: contesto 2 del punto IV: contesto 3 del punto IV: ... scegliendo tra: (1) per nulla complessa / (2) poco complessa / (3) abbastanza complessa / (4) molto complessa / (5) non so.

R₅	-5^2
I.	R _{5_1} : R _{5_2} : R _{5_3} : ...
II.	Confusione con: R _{5_a} : R _{5_b} : R _{5_c} : ...
III.	Eventuali convenzioni per l'uso di R ₅ , che lo studente X conosce:
IV.	Contesto 1 di R ₅ : Contesto 2 di R ₅ : Contesto 3 di R ₅ : ...
V.	Complessità d'interpretazione e d'uso di R ₅ in relazione al: contesto 1 del punto IV: contesto 2 del punto IV: contesto 3 del punto IV: ... scegliendo tra: (1) per nulla complessa / (2) poco complessa / (3) abbastanza complessa / (4) molto complessa / (5) non so.

R₆	3 ^o
I.	R _{6_1} : R _{6_2} : R _{6_3} : ...
II.	Confusione con: R _{6_a} : R _{6_b} : R _{6_c} : ...
III.	Eventuali convenzioni per l'uso di R ₆ , che lo studente X conosce:
IV.	Contesto 1 di R ₆ : Contesto 2 di R ₆ : Contesto 3 di R ₆ : ...
V.	Complessità d'interpretazione e d'uso di R ₆ in relazione al: contesto 1 del punto IV: contesto 2 del punto IV: contesto 3 del punto IV: ... scegliendo tra: (1) per nulla complessa / (2) poco complessa / (3) abbastanza complessa / (4) molto complessa / (5) non so.

R₇	$y = \sqrt{x^2}$
I.	R _{7_1} : R _{7_2} : R _{7_3} : ...
II.	Confusione con: R _{7_a} : R _{7_b} : R _{7_c} : ...
III.	Eventuali convenzioni per l'uso di R ₇ , che lo studente X conosce:
IV.	Contesto 1 di R ₇ : Contesto 2 di R ₇ : Contesto 3 di R ₇ : ...
V.	Complessità d'interpretazione e d'uso di R ₇ in relazione al: contesto 1 del punto IV: contesto 2 del punto IV: contesto 3 del punto IV: ... scegliendo tra: (1) per nulla complessa / (2) poco complessa / (3) abbastanza complessa / (4) molto complessa / (5) non so.

R_g	“coefficiente angolare”
I.	R _{g_1} : R _{g_2} : R _{g_3} : ...
II.	Confusione con: R _{g_a} : R _{g_b} : R _{g_c} : ...
III.	Eventuali convenzioni per l’uso di R _g , che lo studente X conosce:
IV.	Contesto 1 di R _g : Contesto 2 di R _g : Contesto 3 di R _g : ...
V.	Complessità d’interpretazione e d’uso di R _g in relazione al: contesto 1 del punto IV: contesto 2 del punto IV: contesto 3 del punto IV: ... scegliendo tra: (1) per nulla complessa / (2) poco complessa / (3) abbastanza complessa / (4) molto complessa / (5) non so.

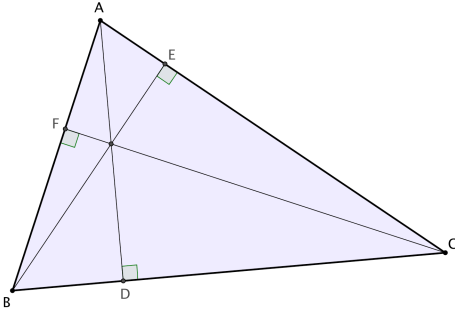
R₉	$1 = 3x$
I.	R _{9_1} : R _{9_2} : R _{9_3} : ...
II.	Confusione con: R _{9_a} : R _{9_b} : R _{9_c} : ...
III.	Eventuali convenzioni per l'uso di R ₉ , che lo studente X conosce:
IV.	Contesto 1 di R ₉ : Contesto 2 di R ₉ : Contesto 3 di R ₉ : ...
V.	Complessità d'interpretazione e d'uso di R ₉ in relazione al: contesto 1 del punto IV: contesto 2 del punto IV: contesto 3 del punto IV: ... scegliendo tra: (1) per nulla complessa / (2) poco complessa / (3) abbastanza complessa / (4) molto complessa / (5) non so.

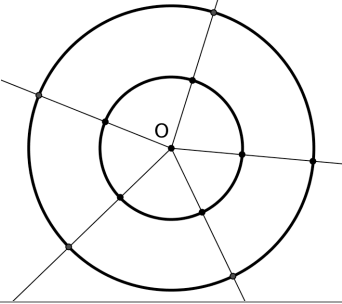
R₁₀	$0x = 5$
I.	R _{10_1} : R _{10_2} : R _{10_3} : ...
II.	Confusione con: R _{10_a} : R _{10_b} : R _{10_c} : ...
III.	Eventuali convenzioni per l'uso di R ₁₀ , che lo studente X conosce:
IV.	Contesto 1 di R ₁₀ : Contesto 2 di R ₁₀ : Contesto 3 di R ₁₀ : ...
V.	Complessità d'interpretazione e d'uso di R ₁₀ in relazione al: contesto 1 del punto IV: contesto 2 del punto IV: contesto 3 del punto IV: ... scegliendo tra: (1) per nulla complessa / (2) poco complessa / (3) abbastanza complessa / (4) molto complessa / (5) non so.

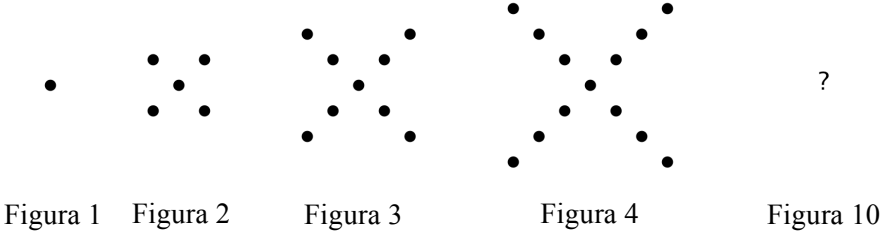
R₁₁	“forma indeterminata”
I.	R _{11_1} : R _{11_2} : R _{11_3} : ...
II.	Confusione con: R _{11_a} : R _{11_b} : R _{11_c} : ...
III.	Eventuali convenzioni per l’uso di R ₁₁ , che lo studente X conosce:
IV.	Contesto 1 di R ₁₁ : Contesto 2 di R ₁₁ : Contesto 3 di R ₁₁ : ...
V.	Complessità d’interpretazione e d’uso di R ₁₁ in relazione al: contesto 1 del punto IV: contesto 2 del punto IV: contesto 3 del punto IV: ... scegliendo tra: (1) per nulla complessa / (2) poco complessa / (3) abbastanza complessa / (4) molto complessa / (5) non so.

R₁₂	$\frac{x+2}{2} + x = x + 2$
I.	R _{12_1} : R _{12_2} : R _{12_3} : ...
II.	Confusione con: R _{12_a} : R _{12_b} : R _{12_c} : ...
III.	Eventuali convenzioni per l'uso di R ₁₂ , che lo studente X conosce:
IV.	Contesto 1 di R ₁₂ : Contesto 2 di R ₁₂ : Contesto 3 di R ₁₂ : ...
V.	Complessità d'interpretazione e d'uso di R ₁₂ in relazione al: contesto 1 del punto IV: contesto 2 del punto IV: contesto 3 del punto IV: ... scegliendo tra: (1) per nulla complessa / (2) poco complessa / (3) abbastanza complessa / (4) molto complessa / (5) non so.

R₁₃	$2x^2 - x$
I.	R _{13_1} : R _{13_2} : R _{13_3} : ...
II.	Confusione con: R _{13_a} : R _{13_b} : R _{13_c} : ...
III.	Eventuali convenzioni per l'uso di R ₁₃ , che lo studente X conosce:
IV.	Contesto 1 di R ₁₃ : Contesto 2 di R ₁₃ : Contesto 3 di R ₁₃ : ...
V.	Complessità d'interpretazione e d'uso di R ₁₃ in relazione al: contesto 1 del punto IV: contesto 2 del punto IV: contesto 3 del punto IV: ... scegliendo tra: (1) per nulla complessa / (2) poco complessa / (3) abbastanza complessa / (4) molto complessa / (5) non so.

<p>R₁₄</p>	
<p>I.</p>	<p>R_{14_1} :</p> <p>R_{14_2} :</p> <p>R_{14_3} :</p> <p>...</p>
<p>II.</p>	<p>Confusione con:</p> <p>R_{14_a} :</p> <p>R_{14_b} :</p> <p>R_{14_c} :</p> <p>...</p>
<p>III.</p>	<p>Eventuali convenzioni per l'uso di R₁₄, che lo studente X conosce:</p>
<p>IV.</p>	<p>Contesto 1 di R₁₄ :</p> <p>Contesto 2 di R₁₄ :</p> <p>Contesto 3 di R₁₄ :</p> <p>...</p>
<p>V.</p>	<p>Complessità d'interpretazione e d'uso di R₁₄ in relazione al:</p> <p>contesto 1 del punto IV:</p> <p>contesto 2 del punto IV:</p> <p>contesto 3 del punto IV:</p> <p>...</p> <p>scegliendo tra:</p> <p>(1) per nulla complessa / (2) poco complessa / (3) abbastanza complessa / (4) molto complessa / (5) non so.</p>

<p>R₁₅</p>	
<p>I.</p>	<p>R_{15_1} :</p> <p>R_{15_2} :</p> <p>R_{15_3} :</p> <p>...</p>
<p>II.</p>	<p>Confusione con:</p> <p>R_{15_a} :</p> <p>R_{15_b} :</p> <p>R_{15_c} :</p> <p>...</p>
<p>III.</p>	<p>Eventuali convenzioni per l'uso di R₁₅, che lo studente X conosce:</p>
<p>IV.</p>	<p>Contesto 1 di R₁₅ :</p> <p>Contesto 2 di R₁₅ :</p> <p>Contesto 3 di R₁₅ :</p> <p>...</p>
<p>V.</p>	<p>Complessità d'interpretazione e d'uso di R₁₅ in relazione al:</p> <p>contesto 1 del punto IV:</p> <p>contesto 2 del punto IV:</p> <p>contesto 3 del punto IV:</p> <p>...</p> <p>scegliendo tra:</p> <p>(1) per nulla complessa / (2) poco complessa / (3) abbastanza complessa / (4) molto complessa / (5) non so.</p>

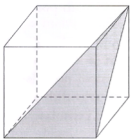
<p>R₁₆</p>	 <p>Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4 Figura 10</p>
<p>I.</p>	<p>R_{16_1} :</p> <p>R_{16_2} :</p> <p>R_{16_3} :</p> <p>...</p>
<p>II.</p>	<p>Confusione con:</p> <p>R_{16_a} :</p> <p>R_{16_b} :</p> <p>R_{16_c} :</p> <p>...</p>
<p>III.</p>	<p>Eventuali convenzioni per l'uso di R₁₆, che lo studente X conosce:</p>
<p>IV.</p>	<p>Contesto 1 di R₁₆ :</p> <p>Contesto 2 di R₁₆ :</p> <p>Contesto 3 di R₁₆ :</p> <p>...</p>
<p>V.</p>	<p>Complessità d'interpretazione e d'uso di R₁₆ in relazione al:</p> <p>contesto 1 del punto IV:</p> <p>contesto 2 del punto IV:</p> <p>contesto 3 del punto IV:</p> <p>...</p> <p>scegliendo tra:</p> <p>(1) per nulla complessa / (2) poco complessa / (3) abbastanza complessa / (4) molto complessa / (5) non so.</p>

Bibliografia

- D'Amore, B., & Godino, J. D. (2006). Punti di vista antropologico ed ontosemiotico in Didattica della Matematica. *La matematica e la sua didattica*, 1, 9-38.
- Duval, R. (2006a). Trasformazioni di rappresentazioni semiotiche e prassi di pensiero in matematica. *La matematica e la sua didattica*, 4, 585-619.
- Duval, R. (2006b). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61(1-2), 103-131.

Appendice C Sintesi dei dati

C.1 Scuola primaria

PR	1			2
	a Oggetto (O)	b Campo di studio ⁵²	c Classe	Rappresentazione R di O che lo studente X riconosce o gestisce con molta difficoltà
T1	Frazioni	c ³	IV	Frazioni
T2	 Oggetto: rappresentazione 2D di un triangolo in un cubo	c ¹	IV	La perpendicolarità tra uno spigolo e la diagonale, di una faccia, che ha un estremo in comune con esso.
T6	Numeri razionali	c ³	V	Frazioni
T10	Angolo	c ¹	III	[Prima risposta fornita (senza specificare l'oggetto)]: concetto di angolo. [Seconda risposta fornita (dopo aver chiesto: A quale oggetto matematico O hai pensato?)]: La rappresentazione è il disegno di due semirette che si incontrano in un punto con l'evidenziazione dell'ampiezza contrassegnata con un archetto.
T11	Angolo	c ¹	III	Quelle [rappresentazioni] che non rappresentano l'idea che lo studente ha già costruito a proposito di "angolo".
T13	Frazioni	c ³	IV	Il confronto tra frazioni unitarie (es. ricorrente di errore: $\frac{1}{3} < \frac{1}{4}$)
T20	I numeri naturali, in particolare quelli maggiori di 100.	c ³	III	La scrittura in cifre.
T22	I numeri naturali	c ³	II	Le operazioni di addizione e sottrazione con il cambio.
T23	Il rombo	c ¹	IV	Costruzione della figura con il disegno. [Utilizzando righello e matita]
T25	La percentuale di un numero	c ³	V	La rappresentazione che gestisce con difficoltà è il calcolo della percentuale se scritta con il simbolo %, es. calcola il 30% di 235.
T26	Ho scelto la rappresentazione di una frazione inserita in un contesto problematico. [Vedi esempi*]	c ³ Aritmetica - frazioni	V	<p>Lo studente X rappresenta senza difficoltà frazioni di figure, ma ha difficoltà ad associare la rappresentazione geometrica della frazione alla situazione problema alla quale la frazione è legata. Es. se deve rappresentare $\frac{4}{7}$ di una lunghezza di un segmento o di una superficie di una figura, lo fa correttamente, ma fa fatica a dare un significato "altro" a quella rappresentazione.</p> <p>Ric Mi è parso di capire, anche dai tuoi esempi, che la frazione inserita in un problema sia considerata distinta dall'oggetto frazione (in sé). Cioè che l'oggetto frazione sia diverso a seconda della situazione o problema in cui si presenta. Ho capito bene?</p> <p>Non so se ho detto bene, ma considero la situazione un po' diversa perché, sempre ragionando con la frazione nel suo significato "parte/tutto", mi sembra diverso dare un esercizio in cui i bambini devono calcolare il tutto o le parti, ma glielo "dice" già la consegna, esempio calcola l'intero $\frac{4}{9} = 36$</p>

52

- c¹: geometria piana
- c²: geometria solida
- c³: aritmetica
- c⁴: linguaggio degli insiemi
- c⁵: trasformazioni geometriche nel piano
- c⁶: calcolo combinatorio
- c⁷: calcolo delle probabilità
- c⁸: statistica
- c⁹: algebra
- c¹⁰: geometria analitica
- c¹¹: altro campo di studio della matematica

			calcola $\frac{4}{9}$ di 36 In questo caso gli alunni sono già in qualche modo indirizzati. In una situazione problema, invece, devono loro stabilire, in base alle informazioni che hanno, se devono trovare l'intero oppure le parti. Per questo ho scritto "frazioni in situazioni problematiche".
--	--	--	--

[Esempi*]

Es. pag 278 n. 2 b

$\frac{4}{9}$?

$\frac{4}{9}$ =

$\frac{5}{9}$?

128 fascicoli

$128 : 4 = 32 \left(\frac{1}{9} \right)$

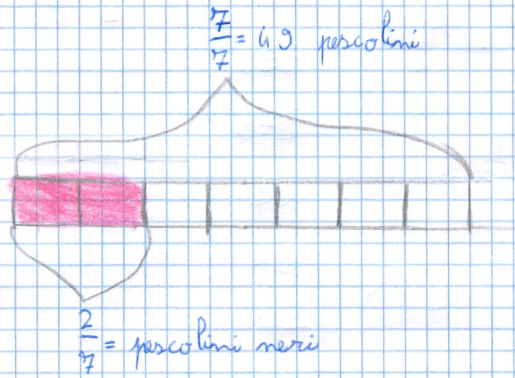
$32 \times 9 = 288 \left(\frac{9}{9} \right)$

(intera collezione)

$288 - 128 = 160$

(n. fascicoli mancanti)

①



$$69 : 7 = 7$$

$$7 \times 2 = 14$$

(pesci neri)

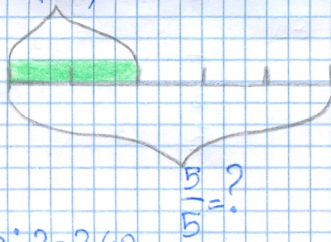
$$7 \times 5 = 35$$

(pesci rossi)

*) pesci neri sono 14 mentre i pesci rossi 35

$$\frac{2}{5} = 480$$

②



$$480 : 2 = 240$$

$$240 \times 5 = 1200$$

(soldi dati a Luisele)

La mamma di Luisele le ha dato 1200 Euro

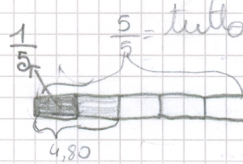
Ord. n. 2 della scheda n. 5

? euro totali

CONOSCO
LE PARTI E
NON CONOSCO
L'INTERO

Dati necessari:

• $4,80\text{€} = \frac{2}{5}$ denaro totale



$4,80 \times 5 \Rightarrow$

$4,80 : 2 = 2,40\text{€}$ ($\frac{1}{5} \rightarrow$ tutto il denaro)

$2,40 \times 5 = 12,00\text{€}$

($\frac{5}{5} \rightarrow$ euro totali)

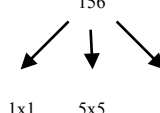
$$\begin{array}{r} 4,80 \overline{) 24,00} \\ \underline{08} \\ 00 \\ \underline{0} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2,40 \times \\ \underline{5 =} \\ 12,00 \end{array}$$

Gli euro che le ha dato la nonna sono 12,00

sono 12,00€.

PR	3 Lo studente X si focalizza su:					
	a aspetti concreti	b somiglianza con altro di concreto	c aspetti strutturali			
			c1	c2	c3	c4
T1	<p>Si</p> <p>Manipolazione di materiale. Usa la scrittura formale $\frac{1}{4}$ ma confonde 1 al numeratore con l'intero. $\frac{1}{4}$ per lui vuol dire 1 intero diviso in 4 parti e non colora o considera altro.</p>					<p>Separazione fra attività manipolativa e scrittura formale: $\frac{2}{4}$ e $\frac{6}{12}$ per lui non sono equivalenti mentre se opera a livello manipolativo lo vede e lo comprende.</p> <p>[a]</p>
T2	<p>Si</p> <p>Vede la forma così come gli appare</p>	<p>Si</p> <p>La collega ad altri modelli di triangolo studiati nel piano</p>				
T6	<p>Si</p> <p>Rappresentazioni e riconoscimenti concreti di parti frazionarie (tagliare, disegnare, colorare...)</p>					
T10	<p>Si</p> <p>Dimensione-forma-posizione (dentro o fuori della figura)</p>					
T11		<p>Le somiglianze con l'oggetto concreto che lui ha preso come riferimento: l'angolo della casa, l'angolo delle bambole, l'angolo del calcio d'angolo...</p>				
T13						
T20						
T22	<p>Si</p> <p>Raggruppare una certa quantità per dieci.</p>	<p>Si</p> <p>Mettere ogni raggruppamento in una scatola.</p> <p>Ric Che cosa viene messo nella scatola? A che cosa sta facendo riferimento?</p> <p>Voglio dire che, affinché sia chiaro il concetto di raggruppamento, è necessario presentare varie situazioni e materiali su cui operare. Ad esempio una serie di gettoni da raggruppare per dieci, una serie di perline... Il gruppo viene poi messo da una parte in una scatola o in un sacchetto, nel caso delle perline infilato a formare un braccialetto. A quel gruppo si può ora dare un nome: decina. Poi verrà cambiato con un gettone, una perline che da sola vale dieci. Lo stesso si può fare con le monete.</p>	<p>Si</p> <p>Come rappresentare con un segno un raggruppamento di dieci.</p>			
T23	<p>Si</p> <p>Forma e posizione, ad esempio un quadrato è scambiato per un rombo quando viene posizionato in modo diverso da quello più comune.</p> <p>Ric Tieni presente che hai scelto il rombo come oggetto matematico. Perché qui tu dici che lo studente scambia il quadrato con il rombo? Non aveva disegnato un rombo?</p> <p>Ok, avevo fatto riferimento alle situazioni in cui succede che lo studente non riconosce il quadrato come tale.</p>	<p>Si</p> <p>Somiglianza con un aquilone (con la forma del deltoide).</p>	<p>Si</p> <p>Come disegnare un rombo, utilizzando le diagonali, individuare la perpendicolarità nel punto medio, oppure usare il parallelismo dei lati opposti.</p>			
T25						
T26	<p>Si</p> <p>Si concentra sulla rappresentazione della frazione attraverso un rettangolo (che preferisce al segmento); fa correttamente la rappresentazione, poi non riesce ad attribuire un significato a quella rappresentazione.</p>					

PR	3 Lo studente X si focalizza su:						
	d ling quot esp sensibile	e rinvio	f aspetti convenzionali				g altri aspetti
			f1	f2	f3	f4	
T1			Si [e]				
T2	Esperienza sensibile: quello che vede è vero [a]						
T6	Esperienza sensibile, in partic: situazioni d'aula nelle quali realmente riesce a sperimentare e "vedere" come considerare la frazione parte-tutto se il tutto è considerato una unità continua o una unità discreta. [a]	Si A un'operazione da svolgere, a proprietà, in partic: memorizza i passaggi per calcolare la parte frazionaria di un numero.					
T10	Angolo della stanza (lingua naturale in contrasto con la lingua matematica)						
T11	L'angolo dei giochi – mi rifugio nel mio angolo – quell'angolo è il mio cantuccio preferito						
T13		Ai numeri naturali, per cui un quarto è maggiore di un terzo così come $4 > 3$					La difficoltà di cogliere l'aspetto semantico porta a non riflettere sul significato; prevale il denominatore e la frazione viene considerata come un numero naturale [e]
T20							<p>Focalizza la sua attenzione su ogni singola cifra, interpretandola in questo modo: esempio</p> <p style="text-align: center;">156</p>  <p>1x1 5x5 6x6</p> <p>Ric Non mi è chiara questa tua risposta, cioè l'interpretazione, da parte dello studente, delle cifre del numero 156. Puoi dirmi qualcosa in più? Provo a spiegarmi meglio. Sin dalla prima con i bambini riflettiamo sul valore delle cifre a seconda del posto che occupano, ogni dieci in un ordine (mostro dieci dita aperte, stringo fra loro le due mani con le dita intrecciate e le "metto" in testa, tiro giù le mani e ricomincio con un altro dito) diciamo uno nell'ordine successivo e viceversa. Abbiamo appena contato delle perline dell'Ikea, facendo delle collane e quindi raggruppamenti per dieci, cento, mille scoprendo che sono ben 16 918. Abbiamo così puntato l'attenzione anche sul quarto ordine e rivisto il valore delle unità di ogni ordine... Prima di contare tutte quelle perline ho dato da contare varie raccolte di oggetti di numerosità assai inferiore, puntualizzando con i bambini la necessità di darsi una regola e di seguirla (esempio contare per 5, per 10, per 20, per 18 [queste le proposte di alcuni gruppi]). Questa bambina ancora lunedì nel fare</p>

							<p>una sottrazione non sapeva dire il valore delle cifre del numero 156. Alla richiesta di leggere il numero scritto in cifre alla lavagna, ha detto il nome correttamente. Allora le ho chiesto: "Questo uno è (sopra l'uno ho scritto 1x...)..." lei ha detto uno, io ho continuato "... e questo 5 (sopra il 5 ho scritto 5x...)" ". Lei mi ha guardato e con titubanza ha detto cinque, così anche con il sei! Quando ho finito di scrivere l'ho invitata a controllare con la calcolatrice eseguendo le moltiplicazioni che avevo scritto come analisi del numero e così ha visto che avevamo costruito un altro numero. Ho scritto il nome del numero alla lavagna chiedendole di collegare il "pezzo" del numero alla cifra che lo rappresenta, ma ha avuto difficoltà. L'hanno aiutata i compagni.</p> <p>Camilla fin dalla prima non riesce da sola ad analizzare il valore delle cifre, ha bisogno del mio aiuto, anche se spesso legge i numeri scritti in cifre in modo corretto. Ha bisogno di aiuto anche con le operazioni. A volte però sembra abbia costruito qualcosa di corretto, ma se scavo trovo che non domina affatto questo oggetto matematico.</p> <p>(A proposito, faccio eseguire le operazioni in riga con le strategie di calcolo consigliate dal Prof. Arrigo. Non ho mai presentato i calcoli in colonna.)</p> <p>[e]</p>
T22	<p>Si Dieci, decina. [f]</p>	<p>Si A raggruppamenti fatti con materiale strutturato: abaco, regoli. Ric Nella sua scuola, questi materiali strutturati sono utilizzati di frequente? Se sì, come valuta la loro utilità? Nella scuola dove lavoro sono usati frequentemente i materiali strutturati. Ricordo un articolo di qualche anno fa del prof. D'Amore che affrontava in modo provocatorio l'argomento. Penso che ogni materiale strutturato o no sia utile, quello che conta è che in quel momento sia funzionale all'obiettivo che ci siamo prefissi. In classe prima si usano in genere i regoli in colore, servono per fare giochi ed esercizi strutturati, ma i bambini li usano liberamente per fare costruzioni, per realizzare ritmi, per metterli in ordine secondo un criterio che ognuno si sceglie... perché, e qui sono d'accordo con il prof. D'Amore "apprendere un concetto vuol dire vederlo in azione in tutte le sue sfaccettature". A questo punto il discorso si farebbe molto ampio, penso ad esempio all'uso della LIM, sono solo strumenti, non la soluzione ai problemi.</p>	<p>Si Ogni dieci si accende la luce di stop: si deve cambiare. Ric. Dov'è questa luce di stop? Che cosa si deve cambiare? Mi può dire qualcosa di più? Non ho capito bene a quale strumento fa riferimento. Non faccio riferimento a nessuno strumento. La luce di stop è un'immagine mentale, come può essere un cartello di stop. Capita in classe di giocare a "chiudi gli occhi e immagina... ", "chiudi gli occhi e prova a ripetere nella tua mente...". [d]</p>				
T23	<p>Si All'uso del foglio quadrettato che in parte vincola il disegno. [a]</p>	<p>Si Al quadrato.</p>					
T25	<p>Si Calcola il 30 <i>per cento</i> di 235. [e]</p>						
T26							

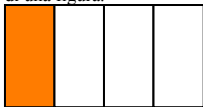

PR	4 Aspetti del punto 3 ai quali si riconducono le difficoltà di X nell'uso di R					
	a	b	c aspetti strutturali			c4
			c1	c2	c3	
T1	Si Attività manipolative su materiale strutturato e non, che creano misconcezioni					Alla difficoltà di interpretare la frazione come numero. In parte dipende dal tipo di scrittura totalmente diverso da quello che è abituato ad usare con i numeri naturali e in parte dall'identificazione del numeratore e del denominatore nel significato che viene loro attribuito. Questo problema dipende anche dalla confusione dell'intero con il numeratore quando questo è 1. [e]
T2	Si		Si Difficoltà di costruzione	Si Non riconosce le proprietà di una figura		
T6	Si					
T10	Si					
T11		Si				
T13						
T20			Si			
T22		Si	Si			
T23			Si			
T25	Si In particolare la forma del simbolo, che non collega a nessun simbolo che ha conosciuto in precedenza o che vede usualmente.					
T26						

PR	4 Aspetti del punto 3 ai quali si riconducono le difficoltà di X nell'uso di R						
	d	e	f aspetti convenzionali				g
			f1	f2	f3	f4	
T1			Si L'allievo non interpreta correttamente la notazione frazionaria. Es: frazione unitaria; lo 0 al numeratore non lo concepisce; difficoltà a stabilire che 2/4 è equivalente a 4/8 (lo comprende solo nell'attività manipolativa).				
T2	Si [a]	Si Non distingue i contesti, 2D e 3D					
T6							
T10	Si						
T11	Si						
T13		Si					Si [e]
T20			Si				
T22	Si	Si		Si			
T23	Si [a]						
T25		Si L'aspetto legato al linguaggio quotidiano (3d), che lo porta ad effettuare un rinvio alla moltiplicazione.					
T26							Nonostante varie attività durante le quali abbiamo diviso praticamente oggetti e messi in varie parti come dei "cassettini", poi andavamo a prendere alcuni "cassettini"... io credo che l'alunno X non sia riuscito a staccarsi dall'attività concreta. Es. Fa fatica ad attribuire alle due parti colorate nella sua figura il significato di 4,80 euro che possiede Luisella... (immagine sopra) La rappresentazione per lo studente ha un ruolo predominante e perde il senso del problema. (credo!) [a]

PR	5 Lo studente Y si focalizza su:					
	a	b	c aspetti strutturali			
			c1	c2	c3	c4
T1			Si Uso del passaggio dai naturali ai razionali (usa la frazione come divisione ottenendo come risultato un numero decimale).			
T2			Si	Si		
T6	Si Uso di materiale		Si Costruzione di R	Si		
T10		Si Lancette di orologio				
T11		Le somiglianze con l'oggetto concreto che lui ha preso come riferimento e che riconosce nella rappresentazione usata a scuola				
T13						
T20			Come rappresentare con le cifre un numero naturale, il valore posizionale ossia i vari ordini.			
T22	Si La posizione delle cifre.	Si Rappresentazione sull'abaco.	Si Come si scrive la rappresentazione fatta con l'abaco.			
T23			Si Organizzazione del disegno della figura. Ric Che cosa intendi dire? Lo studente Y focalizza la sua attenzione sulle caratteristiche del rombo e sceglie in modo sicuro il procedimento per rappresentarne la figura.	Si Uso delle proprietà del rombo.		
T25						
T26						Lo studente Y rappresenta la frazione soltanto quando richiesto e preferibilmente disegna un segmento; attribuisce ad ogni frazione (le frazioni complementari e la frazione che rappresenta l'intero) il significato legato al contesto. A mio parere è più concentrato (sta pensando, è più preso) sul testo del problema e sul contesto di lavoro, piuttosto che sulla rappresentazione, la rappresentazione ha un ruolo marginale. [c1]

PR	5 Lo studente Y si focalizza su:							
	d	e	f				g	
			f1	f2	f3	f4		
T1			Si					
T2	Si Esperienza sensibile: distingue i contesti							
T6	Linguaggio quotidiano, in partic: alla propria esperienza nella quotidianità in punteggi, probabilità, percentuali, statistica							
T10		Si Movimento geometrico della rotazione						
T11								
T13								Coglie l'aspetto semantico: non prescinde dal significato di un terzo e di un quarto per confrontarli [c1]
T20	Il nome del numero [f1]		Si					
T22	Si Ripetere a voce alta la procedura di calcolo mentre la si esegue. [f1]	Si A esperienze fatte con gli oggetti e rappresentate con i regoli e con l'abaco.	Si Segnare il cambio nell'operazione in colonna.					
T23								
T25		Si Collega la scrittura %, alla corrispondente frazione						
T26								

PR	6 Aspetti del punto 5 ai quali si riconduce la capacità di Y nell'uso di R												
	a	b	c				d	e	f				g
			c1	c2	c3	c4			f1	f2	f3	f4	
T1			Si L'allievo considera la frazione come suddivisione dell'intero in parti equivalenti ed è consapevole delle differenze esistenti tra frazione e numero naturale (non considera ad es $\frac{3}{4}$ come 3 e 4, cioè come due numeri separati, ma come un solo numero)					Si L'allievo interpreta correttamente la notazione relativa alla frazione					
T2			Si	Si			Si						
T6			Si				Si						
T10		Si					Si						
T11		Si											
T13													Si [c1]
T20			Si				Si [f1]	Si					
T22	Si	Si	Si				Si [f1]	Si					
T23			Si	Si									
T25			Si Fa riferimento agli aerogrammi che rappresentano la percentuale.					Si Fa riferimento alla corrispondente frazione.					
T26							Si Penso che sia il punto e), vale a dire: lo studente Y (che non ha difficoltà), a mio parere, lega la rappresentazione alle sue proprietà e alle operazioni che richiama.						

PR	7 Confusione con un'altra rappr. S	8 Rappresentazione T meno problematica	9 Caratteristiche di T meno problematiche
T1	Con i numeri naturali (S). "L'allievo X confonde la rappresentazione R con S (numeri naturali) con O (frazioni)". L'allievo X considera $\frac{3}{4}$ come due numeri separati fra loro e non riesce a stabilire una relazione che lo porti a considerare $\frac{3}{4}$ come numero.	Numeri decimali (O')	Il fatto che l'allievo può ottenere il numero decimale eseguendo una divisione quindi opera con i numeri naturali e questo lo rassicura
T2	Con una rappresentazione del triangolo nel piano (un modello di triangolo in cartoncino) che assomiglia a quello rappresentato nel cubo, dimenticando il contesto.	Una rappresentazione in 3D: un modello scheletrato costruito con le cannucce o gli stecchini, all'interno del quale, con filo colorato, si rappresenta il triangolo in questione.	Il modello 3D può essere guardato da punti di vista diversi; il riconoscimento del tipo di triangolo è più facile. Inoltre assumendo punti di vista diversi lo studente può osservare che la percezione dell'oggetto varia e può ritornare alla rappresentazione 2D con maggiore attenzione al suo sguardo.
T6	Non saprei	Frazioni che abbiano un senso concreto	Poter realizzare un'attività concreta di partizione di oggetti concreti. La possibilità di poter vedere concretamente o immaginare.
T10	Non so	Non so	Non so
T11	Se R è la rappresentazione che dà l'insegnante la confusione è data dalla non somiglianza a quella costruita dall'allievo prima di entrare in contatto con il sapere scolastico. Se S è una seconda rappresentazione data dalla scuola lo studente potrebbe vederla come "altra" riferita ad un altro oggetto.	Alla rappresentazione che coincide con quella che lo studente ha già costruito prima di entrare in contatto con la rappresentazione data dalla scuola. Occorrerebbe, però, uscire dall'unicità della rappresentazione.	Può essere meno problematica se coincide con quella che lui ha in mente. In questo modo può riconoscerla.
T13	Si perché confronta le frazioni basandosi solo sul denominatore e confronta quindi i numeri naturali che rappresentano il denominatore.	Campo di studio: c^3 Rappresentazione T: frazione come parte di una figura.  Un quarto  Un terzo	Nell'immagine è visivamente evidente che il tutto è diviso in 4 (oppure 3) parti. Colorando un quarto e un terzo nelle rispettive figure.
T20	Secondo me confonde la rappresentazione polinomiale che talvolta uso scrivere e far scrivere ai bambini con moltiplicazioni non legate alla struttura del numero.	Ho pensato alla lingua orale o scritta nel registro della lingua naturale. I numeri naturali soprattutto maggiori di cento.	Nel nome del numero è più esplicito il valore delle cifre.
T22	Addizione e sottrazione senza cambio. Ric In che senso lo studente X fa confusione con l'addizione e la sottrazione senza cambio? Mi può fornire un esempio? Lo studente a cui faccio riferimento non centra l'attenzione sul segno più o meno, ma solo sui numeri e nel caso di 52 -16 in colonna, la prima cosa che fa è sommare 2 a 6 perché è più veloce e più facile per lui. Questo è quello che penso io, ma devo approfondire la cosa.	Addizione e sottrazione senza cambio.	Si aggiungono o tolgono unità a unità e decine a decine e ognuno sta al proprio posto.
T23	Lo studente X tende a confonderla con la rappresentazione S (un quadrilatero con le diagonali perpendicolari).	Rappresentazione T: disegno di un rombo utilizzando righello e compasso (geometria piana). La rappresentazione T fa riferimento a O. Ric Scusa, ma non capisco quale sia la differenza tra R e T. Mi puoi dire qualcosa di più su R? Pensando a R considero la rappresentazione della figura del rombo che lo studente X disegna utilizzando righello e matita. Però anche se a me sembra differente, forse non lo è. Dimmi tu se no cambierò oggetto.	La facilità di trovare punto medio e perpendicolarità delle diagonali.
T25	Secondo me lo studente X non confonde R di O con altre rappresentazioni, perché il simbolo % non gli "dice niente" e non riesce a collegarlo ad aspetti che possano dargli indicazioni o suggerirgli il significato.	Sempre nel registro aritmetica, la rappresentazione T a cui ho pensato è la percentuale di un numero scritta come frazione, quindi seguendo l'esempio fatto al n.2: calcola i 30/100 di 235.	Sicuramente l'aspetto formale della scrittura della frazione, aiuta lo studente X a inquadrare subito l'argomento riuscendo ad individuare facilmente come operare. Questo aspetto è di fondamentale importanza per X, ottimo calcolatore, eccellente risolutore di problemi, che utilizza spesso strategie originali, ma che entra in ansia se non riconosce al

			primo colpo simboli, termini specifici o richieste che escono da quelle che lui ritiene essere la "normalità".
T26	<p>Credo che forse sia predominante per lo studente X l'aspetto geometrico, che comunque riesce a dominare.</p> <p>Ric Non ho capito bene la tua risposta alla domanda n. 7. Mi puoi dire qualcosa di più?</p> <p>Provo a dirti meglio: lo studente X rappresenta la frazione, es. $\frac{3}{4}$, disegnando una figura divisa in 4 parti "uguali" di cui ne colora 3. Questo lo fa correttamente (per questo ho detto che mi sembra predominante l'aspetto geometrico). Quello che non riesce a fare è "uscire" dalla figura per dare un altro significato a quella rappresentazione.</p> <p>Ric Se ho ben capito, allora, la tua risposta alla domanda 7 è: no, cioè lo studente X non confonde la rappresentazione R con un'altra. Dico bene?</p> <p>Sì, hai capito bene, non confonde una rappresentazione con un'altra.</p>	La rappresentazione che meglio riesce a dominare è la rappresentazione delle quantità (disegna, attraverso dei simboli, gli oggetti che deve frazionare, ma ovviamente questo non sempre è possibile).	Questa rappresentazione facilita lo studente perché "vede" gli oggetti da dividere e poi ...raggruppare.

PR	R1				
	I somiglianze con	II confusione con	III convenzioni per l'uso di R1	IV contesti d'uso	V complessità
T1	Nessuna difficoltà				
T2	L' = in lingua naturale X potrebbe pensare a certe pubblicità. So che nelle pubblicità ci sono situazioni in cui viene usato l' = ma sono distratta rispetto alla pubblicità e non ne ricordo una in particolare.	Aspetti legati al linguaggio quotidiano o all'esperienza sensibile di due oggetti uguali nel senso di identici. Es. Due fogli uguali, due tazzine uguali. X potrebbe essere uno di quei bambini che utilizza la parola uguale per dire "tanto è uguale" in situazioni in cui non riesce ad avere ciò che vuole o in situazioni in cui vuole convincere altri ad accettare qualcosa in cambio di qualcosa d'altro.	L' = è sempre inteso come procedurale	8x9= 8 x 3 = ... - 9 area di A = area di B	per nulla c mc pc
T6					
T10	La parola uguale	- (segno meno)	Segno che si trova tra due quantità (valori)	Operazioni aritmetiche	pc
T11					
T13					
T20					
T22	Oggetti diversi ma che hanno qualcosa in comune, cioè di uguale, nello specifico la stessa quantità. Ric Per esempio? Esempio: una coppia di macchinine e una coppia di libri sono oggetti diversi, ma hanno in comune la quantità. Si potrebbe usare in contrapposizione la non uguaglianza che tenga conto di un ordine fra i numeri usando in questo caso i simboli di maggiore e minore.	I quantificatori: non tutti = alcuni; nessuno = tutti	Il segno = ha una valenza unidirezionale da sinistra a destra.	Usare il segno = come segno di una relazione binaria di equivalenza: 4+3 = 7 ma anche 7 = 4+3.	abb c
T23					
T25					
T26					

PR	R2 "Il doppio di 5/6"				
	I somiglianze con	II confusione con	III convenzioni per l'uso di R2	IV contesti d'uso	V complessità
T1	Molt. nei numeri naturali, ad es lui scriverebbe 10/12	Moltiplicazione nei numeri naturali quindi tende a moltiplicare num e den per 2, senza considerare che non si tratta di due numeri separati.	Applicazione regola imparata in N senza riflettere sulla rappresentazione della frazione	Esercizi sulle frazioni. Soluzione di problemi/esercizi sulle frazioni.	mc mc
T2					
T6	Non so	Non so	Memorizza come si calcola la parte frazionaria di un numero	Rappresentazioni concrete. Problemi Esercizi	mc mc mc
T10	$2 \times 5/6$; due volte cinque sestì	$2 + 5/6$; $(2 \times 5) : 6$ (al numeratore 2×5 ; al denominatore 6)	Non so	Studio delle frazioni. Relazioni. Operazione di moltiplicazione	pc pc pc
T11					
T13			L'allievo sa che nei numeri naturali il doppio di 5 è 10 e il doppio di 6 è 12 per cui il doppio di $\frac{5}{6}$ diventa $\frac{10}{12}$.	Non so come rispondere a questa richiesta.	Non so come rispondere a questa richiesta.
T20					
T22					
T23	$5/6 + 5/6$	$5/6 \times 2$ Il doppio di cinque sestì	Lo studente considera il numeratore come il numero di parti possedute e il denominatore come numero di parti in cui è stata divisa l'unità. Sa che il doppio significa due volte la stessa quantità.	Frazionamento di grandezze continue (figure, misure...) come parte di un'unità. Nei punteggi. Come rapporto tra un insieme e una sua parte (cinque su sei).	abb c pc pc
T25					
T26					

PR	R3 $\frac{1}{2}$ $\frac{2}{4}$				
	I somiglianze con	II confusione con	III convenzioni per l'uso di R3	IV contesti d'uso	V complessità
T1					
T2					
T6					
T10	Non so	Incolonnamento di numeri	Non so	Frazioni	mc
T11					
T13					
T20					
T22					
T23					
T25					
T26					

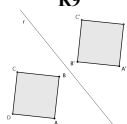
PR	R4 $\frac{0}{3}$				
	I somiglianze con	II confusione con	III convenzioni per l'uso di R4	IV contesti d'uso	V complessità
T1	Divisione tra numeri naturali (solo rapportandosi ai numeri naturali riesce a dare un significato a questo tipo di scrittura)		X procede secondo regole acquisite ma in realtà incontra difficoltà ad accettare questo tipo di scrittura	Esercizi sulle frazioni. Rappresentazioni grafiche	mc pc
T2					
T6	Non so	Frazioni che hanno valore diverso da zero	Regole memorizzate	Esercizi. Lavori di gruppo. Situazioni problematiche	mc abb c mc
T10	0 diviso 3	Non so	Non so	Frazioni Divisione	mc mc
T11					
T13					
T20					
T22					
T23					
T25					
T26					

PR	R5 1 h, 2 da, 0 u				
	I somiglianze con	II confusione con	III convenzioni per l'uso di R5	IV contesti d'uso	V complessità
T1	Nessuna difficoltà				
T2					
T6			Comprensione sicura solo se ordinata (es: $1h+2da+0u=120$ $2da+1h+0u=?$ il doppio di $1h,2da,0u?..$)	Composizioni di cifre. Scomposizioni di cifre. Equivalenze tra unità di misura	abb c pc abb c
T10	120; numeri dell'abaco	Non so	Ogni cifra rappresenta un valore rispetto alla posizione	Scomposizione di numeri e valore delle cifre. Addizione di valori	pc pc
T11					
T13					
T20					
T22	Ordinare una certa quantità per dieci perché è più facile tenere il conto. Rappresentare la quantità sull'abaco.	Ogni dieci unità si compone una decina, ogni dieci decine si compone un centinaio.	Per comporre il cento sull'abaco servono tre aste; si scrive con tre cifre.	Scomporre e ricomporre i numeri oltre il cento. Scrivere il numero in lettere. In una coppia di numeri individuare il maggiore.	pc pc pc
T23					
T25					
T26					

PR	R6				
	I somiglianze con	II confusione con	III convenzioni per l'uso di R6	IV contesti d'uso	V complessità
T1	Nessuna difficoltà				
T2					
T6	Segmenti	Segmento. Semiretta.	Riconosce alcune rappresentazioni per averle memorizzate, ma non le riconosce più in rappresentazioni diverse.	Problemi Esercizi Lavori di gruppo.	mc abb c abb c
T10	Freccia bidirezionale che può esserci tra due eventi	Frecce a doppia direzione nei grafi	La freccia con doppia direzione indica il rapporto reciproco che c'è tra due eventi	Studio degli enti geometrici	abb c
T11					
T13					
T20					
T22					
T23					
T25					
T26					

PR	R7 "Ampiezza di un angolo"				
	I somiglianze con	II confusione con	III convenzioni per l'uso di R7	IV contesti d'uso	V complessità
T1	Nessuna difficoltà				
T2					
T6		Superficie limitata	Memorizza rappresentazioni "classiche" di angoli e le loro ampiezze, poi mostra difficoltà a riconoscere rappresentazioni che non abbia già visto e memorizzato.	Problemi. Eguaglianze, confronti. Esercizi con uso goniometro.	abb c abb c abb c
T10	Disegno di un angolo così come appare disegnato sui libri	Non so	L'ampiezza di un angolo si misura con il goniometro	Studio degli angoli. Studio del movimento geometrico della rotazione	pc abb c
T11	Linguaggio comune: angolo come cantuccio. Linguaggio grafico: archetto. Linguaggio gestuale	Sono le stesse del punto I	Nel momento in cui entra in contatto con l'oggetto a scuola non ha particolari convenzioni per l'uso di R. Le impara a scuola e non le mette in relazione con l'oggetto.	La vita di tutti i giorni. A scuola solo la geometria.	per nulla c mc
T13					
T20					
T22					
T23					
T25					
T26					

PR	R8 "La terza parte di 24 diminuita di 3"				
	I somiglianze con	II confusione con	III convenzioni per l'uso di R8	IV contesti d'uso	V complessità
T1	Nessuna difficoltà				
T2					
T6		Situazione problematica	Deve poter leggere la consegna come l'esecuzione di un'espressione numerica: $(1/3 \text{ di } 24) - 3$	Esercizi. Problemi. Giochi di gruppo	mc mc mc
T10	$(24 : 3) - 3$ $24 / 3 - 3$	$3 \times 24 - 3$	In matematica si possono usare sia le parole che i simboli	Calcoli di frazioni. Espressione algebrica	abb c abb c
T11					
T13					
T20					
T22					
T23					
T25					
T26	$1/3 \text{ di } 24 - 3$ $(24:3) - 3$	$24 - 3$ $24 : 3$	$1/3 \text{ di } 24 \text{ poi } - 3$	Esecuzione pratica Esercizio staccato da un problema Problema	pc abb c mc

PR	R9 				
	I somiglianze con	II confusione con	III convenzioni per l'uso di R9	IV contesti d'uso	V complessità
T1	Nessuna difficoltà				
T2					
T6		Rombi. Segmento	Regole memorizzate	Esercizi. Lavori di gruppo. Soluzione di situazioni problematiche	mc abb c mc
T10	Figure simmetriche Quadrati simmetrici rispetto a una retta		I punti corrispondenti dei due quadrati hanno la stessa distanza dalla retta	Movimenti geometrici	abb c
T11					
T13					
T20					
T22					
T23					
T25					
T26					

PR	R10 "La metà di..."				
	I somiglianze con	II confusione con	III convenzioni per l'uso di R10	IV contesti d'uso	V complessità
T1	Nessuna difficoltà se si tratta di numeri naturali				
T2					
T6					
T10	$\dots : 2 = ;$ una barretta divisa a metà; una linea divisa a metà	Non so	Per trovare la metà bisogna dividere per due	Divisione	pc
T11					
T13					
T20					
T22					
T23					
T25					
T26					

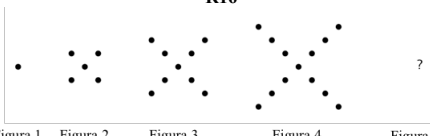
PR	R11 $(2 \times 1000) + (0 \times 100) + (3 \times 10) + (8 \times 1)$				
	I somiglianze con	II confusione con	III convenzioni per l'uso di R11	IV contesti d'uso	V complessità
T1	Nessuna difficoltà				
T2					
T6		Espressione numerica per risolvere un problema	Composizione e scomposizione delle cifre	Esercizi. Problemi. Giochi di calcolo	pc pc pc
T10	2000 + 0 + 30 + 8	Non so	Bisogna eseguire prima le operazioni tra parentesi	Espressioni. Studio dei polinomi	pc pc
T11					
T13					
T20	Moltiplicazioni tra numeri naturali.	Moltiplicazioni qualsiasi	Prima eseguo le operazioni nelle parentesi.	Analisi del valore posizionale delle cifre di un numero. Analisi del valore di un prezzo in euro. Operazioni in riga	mc abb c mc
T22					
T23					
T25					
T26					

PR	R12				
	I somiglianze con	II confusione con	III convenzioni per l'uso di R12	IV contesti d'uso	V complessità
T1	Nessuna difficoltà				
T2					
T6					
T10		1231 1 203 010 [quest'ultima è stata scritta in un primo momento in I]	Ogni pallina sull'asticciola ha un valore legato alla posizione; per le asticciolate vuote la cifra è 0 ma è importante per scrivere il numero	Rappresentazione dei numeri. Scomposizione dei numeri	pc pc
T11					
T13					
T20					
T22					
T23					
T25					
T26					

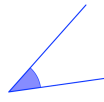
PR	R13 "La probabilità che esca un numero primo minore di 5 nel lancio di un dado (non truccato) a sei facce"				
	I somiglianze con	II confusione con	III convenzioni per l'uso di R13	IV contesti d'uso	V complessità
T1	Argomento non trattato				
T2					
T6	Non so	Non so	Limiti d'uso	Giochi. Situazioni problematiche. Esercizi	abb c mc mc
T10	Non so	2/6 3/6	Non so	Frazioni Probabilità	mc abb c
T11					
T13					
T20					
T22					
T23					
T25					
T26					

PR	R14				
	I somiglianze con	II confusione con	III convenzioni per l'uso di R14	IV contesti d'uso	V complessità
T1	Nessuna difficoltà				
T2					
T6	Triangoli e trapezi	Problema nel quale esprime formule memorizzate (ad esempio, calcolo dell'area).	Limiti d'uso	Problemi. Costruzioni geometriche. Confronti tra rappresentazioni geometriche.	abb c abb c abb c nel calcolo di frazioni
T10	Quanto misura l'area della metà del rettangolo?	Non so	Non so	Studio delle aree. Scomposizione di poligoni	abb c abb c
T11					
T13					
T20					
T22					
T23					
T25					
T26					

PR	R15				
	I somiglianze con	II confusione con	III convenzioni per l'uso di R15	IV contesti d'uso	V complessità
T1					
T2					
T6	Non si affronta.				
T10	Un cerchio diviso in cinque settori circolari	Tirassegno	L'angolo al centro è di 360°	Studio del cerchio e denominazione delle sue parti. Studio del movimento di rotazione	pc abb c
T11					
T13					
T20					
T22					
T23					
T25					
T26					

PR	<p style="text-align: center;">R16</p>  <p style="text-align: center;">Quanti pallini ci sono in Figura 10?</p>				
	I somiglianze con	II confusione con	III convenzioni per l'uso di R16	IV contesti d'uso	V complessità
T1	Nessuna difficoltà				
T2					
T6	Non so	Non so	Regole	Esecuzioni di esercizi. Giochi in aula. Soluzioni di situazioni problematiche	abb c pc abb c
T10	1+4=5 5+4=9 9+8=17 17+...=...	Ingrandimento di figure	C'è una regola che unisce una figura all'altra	Sequenze di numeri	abb c
T11					
T13					
T20					
T22					
T23					
T25	Con esercizi conosciuti.	(I e II) La rappresentazione R16 , viene confusa dall'alunno X con gli esercizi che richiedono di unire i pallini numerati secondo sequenze indicate per trovare un disegno nascosto e focalizza la sua attenzione sui pallini e non sulla domanda, rifacendosi ad esercizi conosciuti con cui trova una somiglianza.		Esercizi di logica. Esercizi di immaginazione e astrazione	abb c mc
T26					

C.2 Scuola secondaria di primo grado

SS I	1			2
	a Oggetto (O)	b Campo di studio ⁵³	c Classe	Rappresentazione R di O che lo studente X riconosce o gestisce con molta difficoltà
T7	Angolo	c ¹	II	Prima risposta fornita: ampiezza o punto. Seconda risposta (scelta tra le due precedenti dopo una breve riflessione): ampiezza. Terza risposta (dopo una breve discussione): il disegno o la rappresentazione grafica: 
T8	Concetti geometrici (figure piane)	c ¹	II	Definizione delle figure piane
T9	Relazione di inversa proporzionalità	c ¹⁰	III	Grafico (arco di iperbole equilatera)
T12	Media (indice statistico di sintesi dei dati)	c ⁸	III	[Prima risposta:] RICONOSCE/GESTISCE con facilità: - rappresentazione analitica (procedura di calcolo) - rappresentazione linguistica (argomentazione del significato e definizione) - rappresentazione “problematica” (situazioni in cui utilizzare la media) GESTISCE con difficoltà: - rappresentazione geometrica - rappresentazione comparativa (ovvero la scelta di una media aritmetica, piuttosto che una mediana o una moda) - proprietà. [Risposta dopo la richiesta di fornire un esempio specifico di rappresentazione R:] L'alunno non incontra difficoltà nella rappresentazione dei dati GREZZI in un opportuno sistema di riferimento per poi costruire un opportuno grafico che li visualizzi al meglio. Nel momento in cui questa visualizzazione deve rappresentare anche la media (quindi c'è il problema di visualizzare anche l'analisi dei dati, non solo i dati grezzi!) l'alunno considera la media un SOLO numero (mentre i dati erano tanti!) che non sa come rappresentare nel grafico, che non sa a chi associare e ha difficoltà a capire perché diventa una “linea” (e non un punto!).
T14	Cerchio	c ¹	III	Concetti. Ric Puoi fornirmi un esempio specifico di rappresentazione dell'oggetto “cerchio”? Solo una, questa sarà R. Tutto quello che segue dipende dalla rappresentazione R che considera qui. Lo studente gestisce con difficoltà la rappresentazione grafica e l'individuazione sul piano grafico di concetti introdotti mediante definizioni o descrizioni; deve essere guidato passo passo nell'attività di riconoscere la rappresentazione di proprietà generali e teoremi riguardanti le proprietà del cerchio in relazione anche con altre figure.
T15	Numeri razionali	c ³	II	Rappresentazione nella retta orientata
T16	Elevamento a potenza	c ³	I	L'applicazione delle proprietà dell'elevamento a potenza come semplificazione dei calcoli. Preferisce continuare a svolgere calcoli. Solo se si presentano indici molto grandi, allora cerca di applicare le regole a cui siamo arrivati insieme. Ric Puoi fornirmi un esempio specifico di rappresentazione R? Tieni conto che tutto quello che segue dipende dalla rappresentazione R che consideri qui. $3^3 \times 3^2 = 3^5$. L'alunno tende a risolvere: 27×9 . Se si scrivono indici molto alti è come obbligarlo ad applicare le proprietà: $3^{56} \times 3^{63} = \dots$
T17	Altezza	c ¹	II	Disegno
T18	L'angolo	c ¹	I	Il concetto di angolo come superficie infinita.
T19	L'angolo	c ¹	I	Per l'alunno X l'angolo è un punto e non una superficie infinita.
T21	Triangoli	c ¹	II	Proprietà del particolare triangolo considerato (come dire: un triangolo è un triangolo). Mi sembra che esista una visione globale ma non si riesca a entrare nello specifico. Ric Quale proprietà del triangolo? Tieni conto che tutto quello che segue dipende dalla rappresentazione R che consideri qui. Io ho fatto riferimento ai triangoli e tu mi hai chiesto: Quale rappresentazione R nel registro di geometria piana dei triangoli lo studente X riconosce o gestisce con molta difficoltà: allora, io dico allo studente di disegnare un triangolo e lui lo disegna. Se io gli dicessi di disegnare un

53

- c¹: geometria piana
- c²: geometria solida
- c³: aritmetica
- c⁴: linguaggio degli insiemi
- c⁵: trasformazioni geometriche nel piano
- c⁶: calcolo combinatorio
- c⁷: calcolo delle probabilità
- c⁸: statistica
- c⁹: algebra
- c¹⁰: geometria analitica
- c¹¹: altro campo di studio della matematica

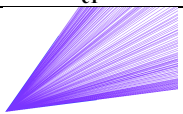
				<p>triangolo isoscele con 2 angoli di 30 gradi mi fa un triangolo uguale a quello di prima. Se gli dicessi di fare un triangolo rettangolo con particolari caratteristiche mi fa sempre lo stesso disegno. Quindi mi sembra di capire che se gli dico di disegnare un triangolo ISOSCELE lui non percepisce la proprietà (termine che forse utilizzo in maniera errata) di essere un triangolo isoscele, ma per lui un triangolo è un triangolo il fatto di sapere che è isoscele a lui non dà nessuna informazione. La cosa importante è che sia un triangolo cioè un poligono di tre lati, se è isoscele rettangolo equilatero queste cose non interessano allo studente nel senso che a lui non danno alcuna informazione.</p>
--	--	--	--	---

SS I	3 Lo studente X si focalizza su:					
	a aspetti concreti	b somiglianza con altro di concreto	c aspetti strutturali			
			c1	c2	c3	c4
T7	Si Colore		Come disegnare la figura (archetto per rappresentare l'ampiezza).			
T8	Si Forma					
T9				Si Proprietà		
T12			Si Calcolo della media			
T14				Si Proprietà		
T15						<p>Si Al valore assoluto delle cifre e non a quello relativo. Ric Perché considera questa sua risposta come "altro"? Non la riconosce in qualche punto che segue? Le spiego la situazione, non sono riuscita a sintetizzarla: X ha questo tipo di problema: ha compreso il concetto di frazione, sa, per esempio, che $\frac{3}{4}$ vuol dire dividere l'intero in 4 parti e considerarne 3, disegna correttamente "la torta" ma nella retta numerica considera un punto tra il 3 e il 4! Cerco di far capire che l'intero, ovvero la torta corrisponde all'unità 1, cioè che ad ogni numero intero corrisponde un punto sulla retta ecc..... ma nulla!! continua a sbagliare! in realtà questo è un problema che riscontro ogni anno in più ragazzi e nonostante utilizzi molto le attività laboratoriali (tipo matabel) questo continua ad essere un punto critico!!! [a]</p>
T16		La moltiplicazione. Riprendendo l'argomento dopo qualche tempo, c'è sempre qualcuno che moltiplica la base per l'esponente.				
T17	Posizione. Ric Di che cosa? Dell'altezza rispetto al lato e quindi dell'angolo retto che non viene visto se non è fra orizzontale e verticale		Come tracciare			
T18			Si Disegnare e ritagliare un angolo			
T19			Si Disegnare, colorare e ritagliare un angolo.			
T21	Si Forma e posizione sul piano e nello spazio. (Risulta chiaro quando	No (la coerenza della rappresentazione del triangolo con quelle	Si Disegno della figura. Deve essere perfetta anche se non coerente con le indicazioni date per esempio			

	<p>lo spieghi supponendo che il triangolo si trovi su un touch screen dove puoi spostarlo o metterlo di traverso o ruotarlo. Quando però si rientra in un aspetto formale ecco che misteriosamente sparisce tutto ciò che si era compreso).</p>	<p>che sono le sue convinzioni, impedisce di trovare qualsivoglia somiglianza col concreto).</p>	<p>nell'esercizio (rapporti fra lunghezze di segmenti). Ric Quale esercizio? Mi riferivo a un ipotetico esercizio che magari l'alunno si trova a svolgere: esempio se l'esercizio dice: c'è un triangolo e in questo triangolo un lato è $\frac{3}{7}$ dell'altro ecc ecc... lo studente non bada a quello che l'esercizio gli sta dicendo ma è ben più attento a disegnare un perfetto triangolo che sia triangolo (poligono con tre lati) che poi abbia un lato $\frac{3}{7}$ dell'altro, lo studente non la considera una cosa di suo interesse e ovviamente non la reputa interessante nella risoluzione del problema piuttosto cerca ossessivamente una formula fra quelle che ha studiato (risposta 3 e) che gli consenta la risoluzione del problema perché secondo lui una formula risolutiva deve esistere a prescindere da quelle che sono le informazioni che lui ha sul triangolo.</p>			
--	---	--	---	--	--	--

3							
Lo studente X si focalizza su:							
SS I	d linguaggio quotidiano esperienza sensibile	e rinvio	f aspetti convenzionali				g
			f1	f2	f3	f4	
T7	Esperienza sulla percezione del cubo. Durante la descrizione del cubo, senza toccarlo, l'alunna scambia gli spigoli con i vertici. Durante la discussione successiva esclama: Accidenti alla mia nonna, che mi diceva sempre "Attenta agli spigoli del tavolo!"					Fissità dell'immagine nel rappresentare sempre l'angolo con l'archetto (ampiezza). [f1]	
T8		Il rombo somiglia a un quadrato, il deltoide somiglia al rombo etc.					
T9							
T12	Contesti in cui si utilizza la media: voto medio, temperatura media, velocità media. [e]						
T14				Si	Si		
T15							
T16		All'operazione da svolgere a discapito del ragionamento. Ric A quale operazione da svolgere, in particolare, fai qui riferimento? La tendenza è quella di trovare un risultato possibilmente in N. È difficile, e ci vuole tempo, convincere gli alunni che è più corretto lasciare impostata una potenza con indice alto, una radice quadrata o il pi greco.			Si		
T17	Altezza come verticalità		Si				
T18	Confondono lo spigolo di un oggetto reale con angolo. Si						
T19	Confondere lo spigolo di un oggetto reale con angolo. Si						
T21		Si Ricerca ossessiva di formule per la risoluzione. (vedi c1)	Si	Si			

SS I	4 Aspetti del punto 3 ai quali si riconducono le difficoltà di X nell'uso di R												
	a	b	c aspetti strutturali				d	e	f aspetti convenzionali				g
			c1	c2	c3	c4			f1	f2	f3	f4	
T7												Si [f1]	
T8									Si	Si	Si		
T9			Si										
T12	Si			Si							Si		
T14				Si						Si	Si		
T15	Si		Si				Si [e]	Si					
T16			Si Come applicare le proprietà, dopo averle ricavate insieme in classe.			Si Collegato con l'elevamento a potenza, nel caso dell'estrazione di radice quadrata, la difficoltà a lasciare impostata la radice quadrata, ma doverla calcolarla a tutti i costi. (come il pi greco). [f1]							
T17							Si				Si		
T18			Si Nel disegno vengono rappresentate le due semirette, senza la consapevolezza che sono infinite e di conseguenza di come sia la superficie da esse limitata.				Si Manca la consapevolezza che se si parla di spigolo siamo nello spazio e l'angolo è nel piano.						
T19			Si Nel disegno vengono rappresentate le due semirette, senza la consapevolezza che sono infinite e di conseguenza di come sia la superficie da esse determinata.				Si Manca la consapevolezza che se si parla di spigolo siamo nello spazio a 3 dimensioni e invece l'angolo è sul piano.						
T21								Si					Non c'entra nulla col triangolo, ma è importante sottolineare, secondo me, che non è mai abbandonata la convinzione che il ragazzo ha di non valere nulla in geometria. Convinzione sottolineata da frasi del tipo: ecco non so fare neanche una linea dritta!

SS I	5 Lo studente Y si focalizza su:					
	a	b	c			
			c1	c2	c3	c4
T7						
T8			Si Costruzione di R	Si Proprietà		
T9			Si Ricavare la legge, tracciare il grafico	Si Proprietà		
T12			Calcolo della media.			
T14	Si Forma e posizione			Si Proprietà		
T15		Si Rappresentazione di frazioni utilizzando segmenti, "torte" o quant'altro				Si Significato di frazione o numero razionale in genere [f2, f3]
T16			È in grado di ricavare le formule	Comprende l'importanza dell'uso delle proprietà come semplificazione dei calcoli e le applica.		
T17	Si Posizione Ric Di che cosa? Dove cade l'altezza ovvero la perpendicolarità	Ric Domanda generale (NON b) [Se ho capito bene, lo studente Y si focalizza su meno aspetti, rispetto allo studente X. Mi può confermare questa cosa? Certo quando ha compreso la perpendicolarità non ha altri problemi.]				
T18						
T19				Si Proprietà		
T21			Si Costruzione della figura. Ric Scusa ma credo di non aver capito bene, qui come nelle risposte precedenti, che cosa intendi esattamente per R. La tua risposta alla domanda 2 è "proprietà". Qui parli di "figura".... L'altro studente invece riesce a capire bene che il fatto di dire che il triangolo sia isoscele mi stia indicando una ben precisa proprietà caratteristica del mio triangolo quindi nella mia risposta intendevo dire che lo studente presta molta attenzione a rappresentare graficamente la proprietà R (per es essere isoscele) mentre costruisce la figura e nel rappresentandola sembra che l'abbia meglio acquisita o compresa o comunque sia in grado di sfruttarla meglio quando per esempio si trova in presenza di un ipotetico esercizio da svolgere.	Si Si	Si	

SS I	5 Lo studente Y si focalizza su:					
	d	e	f			g
			f1	f2	f3	
T7				Si		
T8						
T9				Si Definizioni		
T12						
T14				Si	Si	
T15						
T16						
T17						
T18				Si	Si	
T19				Si	Si	
T21					Si	

6													
Aspetti del punto 5 ai quali si riconduce la capacità di Y nell'uso di R													
SS I	a	b	c				d	e	f				g
			aspetti strutturali						aspetti convenzionali				
			c1	c2	c3	c4			f1	f2	f3	f4	
T7			Si						Si				
T8			Si	Si									
T9			Si	Si									
T12												Si Semplicità della sequenza di operazioni coinvolte [c1]	
T14	Si												
T15			Si	Si				Si	Si				
T16		Si È in grado di ragionare, ricavando formule										Segue la lezione con partecipazione e dà fiducia all'insegnante, cercando di mettere in pratica quello che gli viene insegnato. Non tutti gli alunni abbandonano facilmente il proprio "pedistallo" e si lasciano guidare. È necessario prima catturare la loro stima.	
T17			Si Rie Come mai non l'ha evidenziato anche nella domanda precedente? Perché se lui comprende il significato di altezza e quindi di perpendicolarità non focalizza sulla proprietà ma per lui è una conoscenza acquisita per questo l'ho indicato qui perché mi pareva di capire che in questa risposta si dovesse indicare a cosa era riferita la sua capacità di saperlo fare (cioè alla proprietà dell'altezza)										
T18								Si Le definizioni e le regole non sono state semplicemente memorizzate meccanicamente ma comprese e interiorizzate.	Si				
T19								Si Le definizioni e le regole non sono state semplicemente memorizzate meccanicamente ma capite e interiorizzate.					
T21				Si									

SS I	7 Confusione con un'altra rappr. S	8 Rappresentazione T meno problematica	9 Caratteristiche di T meno problematiche
T7	Porta a confondere l'ampiezza della parte colorata [di R] con la misura dell'angolo	 (senza gli archetti)	La rappr. T evita di identificare l'ampiezza dell'angolo con l'archetto, con la parte colorata. [Ma scrive: evita di identificare la parte dell'archetto con quella colorata.]
T8	Vedi risposta 3e. Tendenza a semplificare/unificare le definizioni: i quadrilateri sono tutti quadrati oppure, se con lati non perpendicolari, sono tutti rombi.	Espressioni numeriche semplici	Applicazione quasi meccanica di regole acquisite nella scuola primaria, con l'eliminazione della variante geometrica, quindi della necessità di formare una rappresentazione reale (o verosimile).
T9	Lo studente X riferisce alla rappresentazione R (arco di iperbole equilatera) dell'oggetto O "relazione di inversa proporzionalità" la rappresentazione S $y = kx$ dell'oggetto O' "diretta proporzionalità" (poi in realtà fa confusione tra le due scritture: $yx = k$ e $y = kx$).	Definizione di relazione di inversa proporzionalità (lingua naturale).	La verbalizzazione di una definizione rispetto alla formulazione in legge e alla rappresentazione grafica: "prodotto costante" è sicuramente qualcosa di più "gestibile".
T12	La confusione nasce quando si introducono altri indici statistici, come quelli di dispersione. La rappresentazione dello <i>scostamento semplice medio</i> viene confusa con la rappresentazione della media per due difficoltà: - di tipo linguistico (per la scarsa attitudine da parte dei ragazzi a collegare il nome all'oggetto); - di tipo strutturale (per la presenza e "gestione" del valore assoluto, strettamente legata alla mancanza di controllo delle proprietà; per la ripetitività del calcolo dello scarto dalla media).	Penso ad una rappresentazione tabellare (non più algebrica) e faccio riferimento ad un registro r^{12} ; grafico-manipolativo. La rappresentazione T fa riferimento allo <i>scostamento semplice medio</i> .	Il ricorso alla tabella permette il controllo, in ciascuna colonna, dell'operazione da svolgere. La sequenzialità delle colonne guida lo studente nella consapevolezza dell'oggetto che sta manipolando passaggio dopo passaggio e aiuta la "ricostruzione" e verifica delle proprietà (sotto ciascuna colonna lo studente può fissare la peculiarità della stessa). L'intestazione di ciascuna colonna "costringe" lo studente alla riflessione linguistica e all'utilizzo dell'associazione corretta nome-oggetto.
T14	NO perché parte della difficoltà sta nel non aver ancora creato una rete di collegamenti sufficiente con riferimenti precedenti a situazioni simili, a non aver ancora costruito un modello mentale astratto sufficientemente efficace a cui fare riferimento.	Ad una rappresentazione T (che si riferisce alla realtà tangibile o che fa riferimento ad esperienza vissuta) riferita al registro lingua naturale sempre rimanendo sullo stesso oggetto. Ric Può chiarire di più, con un esempio specifico, questa sua risposta? Ad una rappresentazione T (che si riferisce alla realtà tangibile o che fa riferimento ad esperienza vissuta ad esempio uno spazio aperto di forma circolare oppure una banale forma di un oggetto circolare etc) riferita al registro lingua naturale sempre rimanendo sullo stesso oggetto cioè il Cerchio.	Il riferimento a qualcosa di già vissuto e facente parte dell'esperienza vissuta o quotidiana per la quale esiste già un qualche modello mentale consolidato d'approccio.
T15	Rappresentazione di numeri naturali (per esempio tratta numeratore e denominatore di una frazione come due diverse "entità naturali")	Rappresentazione di numeri naturali nella retta orientata.	Dover considerare solo una unità (intera e non suddivisa in unità frazionarie).
T16	Con una semplice moltiplicazione della base per l'esponente.	In algebra usando il calcolo letterale sono obbligati ad applicare le proprietà dell'elevamento a potenza. Ric Perdonami, ma non ho capito quale sia la rappresentazione T meno problematica per lo studente X. Mi puoi fornire un esempio specifico? $a^5 \times a^4 =$ in questo caso non hanno alternativa, devono applicare le regole.	Il fatto di usare le lettere al posto dei numeri.
T17	Mediana o bisettrice.	Mediana.	Facilità nell'individuare punto medio e tracciare la congiungente.
T18	Sì. Viene confuso l'angolo con il triangolo.	Triangolo in lingua naturale.	Il soffermarsi a descrivere in lingua naturale la forma.
T19	Sì. Viene confuso l'angolo con il triangolo.	Rappresentare un triangolo e facendo uso del linguaggio naturale dedurre che ha 3 angoli.	Essere una superficie limitata.
T21	Sì Ric Non vedo la tua risposta. Non vedi la risposta perché non so darti l'esempio che mi chiedi. Penso di aver capito cosa hai chiesto; la risposta alla domanda è sì ma in concreto non riesco a darti. Posso sempre fare riferimento alla proprietà R di un triangolo di essere	Registro aritmetica. Ric Quale rappresentazione T? Quale oggetto? Allora io ho sbagliato a scrivere perché ho frainteso la domanda. T deve essere una rappresentazione dello stesso oggetto ma in un altro registro. Io ho proprio cambiato registro e oggetto. Allora riferito sempre agli oggetti triangoli la rappresentazione di quelle che io chiamo proprietà risulta meno problematica nel	Lo studente trova le regole che cerca e le applica meccanicamente. Ciò non gli impedisce di capire ciò che sta facendo, ma questo suo agire lo spaventa di meno rispetto alla prima situazione. Ric A che cosa ti stai riferendo? A quale rappresentazione T?

	<p>isoscele. Come posso rappresentare la proprietà R di essere isoscele? Dico che il triangolo ha due lati uguali. Ma lo studente è convinto che il triangolo isoscele (R) sia stretto e lungo. Quando gli presento un triangolo rettangolo isoscele (S) questo lo manda in confusione (ma questa risposta non mi piace è un esempio forzato ma di meglio non ne trovo in questo momento. E poi c'è da verificare cosa intendiamo per confusione).</p>	<p>registro "piano cartesiano" dove la rappresentazione R delle proprietà caratteristiche del mio triangolo vengono comprese meglio. Esempio: triangolo rettangolo. R proprietà dice che O ha angolo retto. Sul piano cartesiano R diventa T -> disegna due segmenti perpendicolari -> individuo angolo retto -> T è più facilmente individuata.</p>	<p>Cosa rende meno problematica T rispetto a R non so, forse avere un riferimento costringe a essere più precisi e li costringe a guardare nel dettaglio. In generale la geometria fatta sul piano cartesiano è molto più gradevole e risulta sicuramente più facile.</p>
--	--	---	---

SS I	R1 =				
	I somiglianze con	II confusione con	III convenzioni per l'uso di R1	IV contesti d'uso	V complessità
T7					
T8	\equiv 	\Rightarrow 	Risultato di un'operazione / uguaglianza	Aritmetica Geometria piana	pc pc
T9					
T12	Segno punteggiatura (linguistica) ":"	Segno di sequenzialità "→"	Nessuna	Aritmetico (espressioni e calcolo). Algebrico (equazioni)	pc mc
T14					
T15					
T16					
T17	L'alunno non trova somiglianze nel simbolo	Non lo confonde con altri	Vede l'=" come unidirezionale Ric Cioè? Non lo comprende come una relazione ma solo nel senso della freccia così $5 + 7 \rightarrow 12$ ovvero 5 più 7 fa 12 e questo crea problemi immensi nella gestione delle formule e quindi nelle equazioni...	Relazione simmetrica	mc
T18		Lo studente conosce = con il significato di "fa". Quindi lo vede solo come il risultato di qualcosa.	Lo studente è "consapevole" della sola unidirezionalità del segno.	Nelle operazioni	abb. c
T19		Lo studente conosce = con il significato di "fa", "diventa". Quindi lo vede solo come il risultato, la conseguenza di qualcosa.	Lo studente è "consapevole" della sola unidirezionalità del segno.	Nelle operazioni	abb. c
T21	\equiv \cong	\equiv	Espressioni con numeri naturali e razionali.	Espressioni Geometria Linguaggio parlato	pc abb c abb c

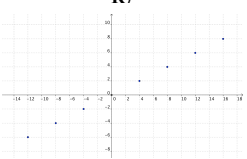
SS I	R2 "Il doppio di 5/6"				
	I somiglianze con	II confusione con	III convenzioni per l'uso di R2	IV contesti d'uso	V complessità
T7					
T8	$\frac{5+5}{6+6}$	$\frac{2 \times 5}{2 \times 6}$	Moltiplicare con il 2	Aritmetica Geometria piana	abb c pc
T9					
T12	L'espressione "i 5/6 di..."	$25/6$; $5/6 \cdot 5/6$	Traduzione in matematica, ovvero: "doppio" traduce con "2" e il "di" con "."	Problemi di tipo aritmetico. Problemi di tipo geometrico	abb c mc
T14					
T15	Il doppio di 5	10/12	Doppio come multiplo di un numero secondo il 2	Problema aritmetico Reale	mc pc
T16					
T17					
T18					
T19					
T21					

SS I	R3				
	$\frac{1}{\frac{2}{4}}$				
	I somiglianze con	II confusione con	III convenzioni per l'uso di R3	IV contesti d'uso	V complessità
T7	$\frac{1}{\frac{2}{4}}$	$\frac{1}{\frac{2}{4}}$	Lineetta della frazione come simbolo della divisione	Risoluzione di una espressione	abb c
T8	$\frac{1}{2} / \frac{1}{4}$	2:4	È una divisione	Aritmetica	abb c
T9					
T12	Nessuna somiglianza	2/4 ; $\frac{1}{2} : \frac{1}{4}$	Esplicitare, in presenza di frazioni, il denominatore, anche quando questo è 1.	Aritmetico Algebrico	abb c abb c
T14					
T15					
T16					
T17					
T18					
T19					
T21					

SS I	R4				
	$\frac{0}{3}$				
	I somiglianze con	II confusione con	III convenzioni per l'uso di R4	IV contesti d'uso	V complessità
T7	Operazione impossibile	Niente	Rappresentazione di frazioni con numeratori diversi da zero	Risoluzione di espressioni	mc
T8	0:3	$\frac{1}{3}$ 3^0	Rapporto, divisione	Aritmetica Probabilità	pc abb c
T9	0:3	3/0	0:3=0	Aritmetica Grafici	pc mc
T12	Una generica frazione	0,3 3	Nessuna	Aritmetico	abb c
T14					
T15					
T16	3/0	3/0	Il risultato può essere 0, impossibile o indeterminato	Espressioni	abb c
T17					
T18					
T19					
T21	0:3	$\frac{3}{0}$ 0/0	0 è un problematico e necessita di regole speciali. Ma quali saranno? Le conosco tutte? le saprò applicare? Si applica sempre?	Non risponde	Non risponde

SS I	R5 -5^2				
	I somiglianze con	II confusione con	III convenzioni per l'uso di R5	IV contesti d'uso	V complessità
T7					
T8	$(-5)^2$ $-5 \cdot 2$	-5×2 5^2	base \times base	Aritmetica	abb c
T9	$(-5) \times (-5)$	$(-5)^2$	Potenze pari, sempre positivo	Aritmetica/algebra	abb c
T12	5^2 ; $-(-5)^2$	-10 ; $-5/2$	Scrivere per esteso l'operazione da eseguire: $(-5) \cdot (-5)$	Algebrico	abb c
T14	$-(-5^2)$ $(-5)^2$	$-(-5^2)$	Uso delle parentesi	Espressioni algebriche Equazioni di secondo grado riconducibili al primo Problemi risolvibili con equazioni	pc pc mc
T15					
T16					
T17					
T18					
T19					
T21	Adesso no. Il significato è abbastanza chiaro ma siamo in seconda e i relativi ancora non sono stati affrontati				

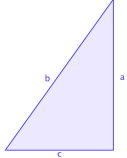
SS I	R6 3^0				
	I somiglianze con	II confusione con	III convenzioni per l'uso di R6	IV contesti d'uso	V complessità
T7					
T8	30	3×0 30		Aritmetica	abb c
T9					
T12	x^y	$3 \cdot 0$	La "regola" secondo cui ogni potenza con esponente 0 è uguale a 1 (poiché i ragazzi non sono in grado di ricorrere alla proprietà da cui scaturisce).	Aritmetico Algebrico	abb c abb c
T14					
T15					
T16	Non ce ne sono. Ric Dunque, per X, nessuna rappresentazione mostra una certa somiglianza con 3^0 . Confermi? No	Il risultato che nella maggior parte dei casi è 0. Ric Puoi chiarire un po' di più questa cosa? Quale rappresentazione viene confusa con 3^0 ? Il risultato di questa potenza spesso è zero per gli alunni, invece di 1.	La dimostrazione per comprendere perché il risultato è = 1 Ric Dunque, pur conoscendo la dimostrazione, lo studente fa confusione con il risultato = 0. Confermi? Confermo.	Risoluzione di espressioni, nel conteggio dei chicchi di riso (attività M@t. abel)	pc
T17					
T18	3×0	3×0	La moltiplicazione	Operazioni	abb c
T19	3×0	3×0	La moltiplicazione	Operazioni	abb c
T21	Accetta come una regola legate alle rogne dello zero				

R7					
SS I					
	I somiglianze con	II confusione con	III convenzioni per l'uso di R7	IV contesti d'uso	V complessità
T7	La rappresentazione di una retta passante per dati punti	La rappresentazione di una retta passante per dati punti	Rappresentazione di una retta	Rappresentazioni sul piano cartesiano	pc
T8					
T9					
T12	Gioco della battaglia navale. Righello. Diretta proporzionalità. Simmetria rispetto all'origine.	Scambio di x e y		Algebrico Relazione tra grandezze	pc abb c
T14					
T15					
T16					
T17					
T18					
T19					
T21					

R8					
"La terza parte di 24 diminuita di 3"					
SS I	I somiglianze con	II confusione con	III convenzioni per l'uso di R8	IV contesti d'uso	V complessità
	T7				
T8	La terza parte di 24 diminuito di 3	$(24 - 3) : 3$ $24 : 3$		Aritmetica Geometria piana	abb c mc
T9					
T12	"Un terzo di...meno..."	$(24 - 3) / 3$; $24 - (3/3)$	Traduzione in matematica	Aritmetico Geometrico	abb c abb c
T14					
T15					
T16					
T17					
T18					
T19					
T21					

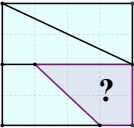
R9					
$1 = 3x$					
SS I	I somiglianze con	II confusione con	III convenzioni per l'uso di R9	IV contesti d'uso	V complessità
	T7	$3x = 1$	$x = 1 - 3$	Indicazioni di portare l'incognita sempre a sinistra	Risoluzione di equazioni
T8					
T9					
T12	$A = b \cdot h$ (formula dell'area del rettangolo)	$1 = 3 + x$	Ricondurre tutto alla forma $x = A$ dove A è posizionato a destra (e x a sinistra).	Algebrico Geometrico	abb c mc
T14					
T15					
T16					
T17					
T18					
T19					
T21	Argomento non trattato in seconda				

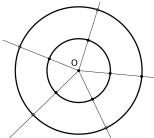
SS I	R10 $0x = 5$				
	I somiglianze con	II confusione con	III convenzioni per l'uso di R10	IV contesti d'uso	V complessità
T7	$1x = 5$	$x = 5$	Niente	Equazioni	mc
T8					
T9		$x = 0$	Moltiplicazione per 0	Algebra	abb c
T12	$a \cdot x = b$	"Impossibile" e "indeterminata"	Effettuare la verifica a posteriori rispetto al risultato ottenuto	Algebrico	abb c
T14					
T15					
T16					
T17					
T18					
T19					
T21	Non trattato in seconda				

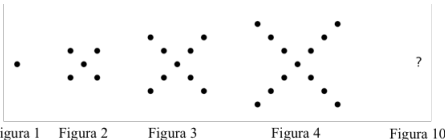
SS I	R11				
	I somiglianze con	II confusione con	III convenzioni per l'uso di R11	IV contesti d'uso	V complessità
T7					
T8		Area triangolo	Rappresentazione di una superficie piana	Geometria piana	mc
T9					
T12	Triangolo rettangolo sovrapposto su un rettangolo	Parallelogramma	Tracciare la proiezione della base minore sulla base maggiore.	Analitico (piano cartesiano). Geometrico	pc abb c
T14					
T15					
T16					
T17		Parallelogrammi. Non riconosce lati paralleli come caratteristica del trapezio.		Quadrilateri. Problemi di geometria piana aree. Equiscomponibilità	abb c abb c pc
T18					
T19					
T21					

SS I	R12				
	$\sqrt{(-4)^2}$				
	I somiglianze con	II confusione con	III convenzioni per l'uso di R12	IV contesti d'uso	V complessità
T7					
T8					
T9					
T12	\sqrt{a}	$\sqrt{-(a)^2}$	Partire dalle "operazioni" più interne fino ad arrivare a quelle esterne	Aritmetico	mc
T14					
T15					
T16	Il numero con la base positiva. Ric Quale numero e quale base? Non calcola la radice, perché confonde il radicando, in quanto è negativo.	Cercano di eseguire il calcolo, piuttosto che riconoscere il quadrato perfetto. Ric Tieni conto che lo studente è uno, X.	Sa che non esiste la radice quadrata di un numero negativo. Si potrebbe confondere e non guardare che è un quadrato perfetto.	Algebra	pc
T17					
T18					
T19					
T21					

SS I	R13				
	"La probabilità che esca un numero primo minore di 5 nel lancio di un dado (non truccato) a sei facce"				
	I somiglianze con	II confusione con	III convenzioni per l'uso di R13	IV contesti d'uso	V complessità
T7					
T8		Numeri primi minori di 5	Gli eventi possibili sono più di uno nel lancio di un dado	Calcolo probabilità. Lingua naturale	abb c abb c
T9					
T12	"Quanti numeri primi sono minori di 5?" "Qual è la probabilità che esca A, B e C?"	"La probabilità che esca 5". "La probabilità che esca un numero minore di 5" (si perdono "primo!")	Esplicitare lo spazio degli eventi e contare i casi favorevoli e quelli possibili.	Probabilità. Scienze (genetica).	mc mc
T14					
T15					
T16					
T17					
T18					
T19					
T21					

SS I	R14				
					
	I somiglianze con	II confusione con	III convenzioni per l'uso di R14	IV contesti d'uso	V complessità
T7					
T8	Quadrilatero	Ricerca dell'area dell'intero quadrilatero	? = qualcosa da calcolare nella figura piana	Geometria piana	mc
T9					
T12	Tangram. Due rettangoli scomposti	Metà rettangolo	Nessuna	Geometrico	pc
T14					
T15					
T16					
T17					
T18					
T19					
T21					

SS I	R15				
	I somiglianze con	II confusione con	III convenzioni per l'uso di R15	IV contesti d'uso	V complessità
T7					
T8					
T9					
T12					
T14					
T15					
T16					
T17					
T18					
T19					
T21					

SS I	R16									
	I somiglianze con	II confusione con	III convenzioni per l'uso di R16	IV contesti d'uso	V complessità					
T7										
T8						Ingrandimenti	Calcolo dei punti rappresentati	n rappresenta un numero	Logico Geometria piana	abb c abb c
T9										
T12						Ingrandimento in scala. Sequenza numerica	Figure geometriche da ricostruire. Rette incidenti	Nessuna	Logico-aritmetico	abb c
T14										
T15										
T16										
T17										
T18										
T19										
T21										

C.3 Scuola secondaria di secondo grado

SS II	1			2
	a Oggetto (O)	b Campo di studio ⁵⁴	c Classe	Rappresentazione R di O che lo studente X riconosce o gestisce con molta difficoltà
T3	Segmento (in Geom euclidea)	c ¹	II liceo ling.	Definizione mediante proposizione: data una retta orientata (si fa riferimento all'assioma dell'ordine, senza il quale l'espressione punti compresi non avrebbe significato) e due punti appartenenti alla retta, si dice segmento l'insieme formato dai due punti e dai punti compresi tra essi. I due punti si dicono estremi...
T4	Equazione della circonferenza nelle due forme che si studiano a scuola	c ⁴	III professionale grafico	La rappresentazione sul piano cartesiano della circonferenza a partire dalle equazioni che la identificano: eq di cfr di centro e raggio assegnati, ed eq. della cfr in forma estesa. Per alcuni ragazzi, come ben sai, sono proprio due oggetti diversi.
T5	Poligoni	c ¹	I ITI	R: descrizione della figura (testo che descrive la costruzione). Esempio di testo: "Dato un triangolo ABC rettangolo in C, con \hat{A} doppio di \hat{B} , sia D il punto in cui la bisettrice dell'angolo A interseca l'altezza relativa all'ipotenusa. Preso su BC il segmento BP uguale a CD, sia Q il punto in cui la parallela ad AD condotta da P interseca AB. Dimostrare che i triangoli ACD e BPQ sono uguali e dedurre che ADPQ è un parallelogramma."
T24	Funzione di primo grado	c ⁴	III anno liceo classico	Rappresentazione grafica funzione di primo grado
T27	Numero irrazionale	c ³	II ITIS corso di indirizzo grafico	L'espressione di radicale aritmetico in \mathbb{R}^+

54

c¹: geometria piana
c²: geometria solida
c³: algebra
c⁴: geometria analitica
c⁵: trasformazioni geometriche nel piano
c⁶: calcolo combinatorio
c⁷: calcolo delle probabilità
c⁸: statistica
c⁹: trigonometria
c¹⁰: calcolo infinitesimale
c¹¹: altro campo di studio della matematica

SS II	3 Lo studente X si focalizza su:												
	a	b	c aspetti strutturali				d	e	f aspetti convenzionali				g
			c1	c2	c3	c4			f1	f2	f3	f4	
T3	Si Figura in cui omette l'orientamento della retta	Con l'oggetto "angolo" nella rapp. in lingua nat. [e]	Si Disegnare una retta orientata			Gestisce con difficoltà alcuni vocaboli: punti compresi, estremi [e]	Vedi c4 [e]	Si Def. di angolo		Vedi e) [e]			
T4	Si Posizione, dimensione (quando si perde il rapporto con l'unità di misura): cfr di centro diverso e stesso raggio	Vedi a [???	NO [Si ???]			Passaggio da un tipo di equazione ad un altro (vedi 2) [c1]							
T5			Si Come costruire una figura geometrica, in particolare, tradurre il testo in azione per costruire la figura	Si		Lettura del testo per frasi "scollegate" [c1]		Si Richiama figure già viste, non si sofferma "sul dettaglio"	Si	Si	Si		
T24			Tracciare il grafico										
T27	Si Aspetti concreti di R legati alla sua forma: \sqrt{a} come espressione irrazionale di radicale aritmetico in \mathbb{R}^+	Si Radice quadrata e radice cubica di un quadrato e di un cubo perfetto. [e]	Si Come scrivere una formula o trasformare un'espressione.			Si Collegare precedenti conoscenze di <i>linguaggio</i> ad un nuovo oggetto. [e]		Si All'operazione di estrazione di radice <i>n</i> -esima di un numero.					Si Struttura debole e instabile delle conoscenze pregresse.

SS II	4 Aspetti del punto 3 ai quali si riconducono le difficoltà di X nell'uso di R					
	a aspetti concreti	b somiglianza con altro di concreto	c aspetti strutturali			
			c1	c2	c3	c4
T3	Si			Si		
T4	Si Confusione tra i due tipi di equazione, mancato riconoscimento del tipo di curva se manca qualche addendo, difficoltà a ricavare il raggio se non indicato come un quadrato...	Vedi a [??]				Difficoltà di gestione delle equazioni algebriche [c1]
T5			Si	Si		Si [c1]
T24			Si			
T27	Si La difficoltà legata all'aspetto formale consiste nell'essere $\sqrt[n]{a}$ simbolicamente raffigurante un numero irrazionale "irriducibile", cioè un numero non razionale. Comparando in svariate espressioni, dischiude il manifestarsi di un nuovo mondo numerico, i cui protagonisti – gli irrazionali – relazionano secondo le usuali operazioni rappresentate da: (+, -, ×, :), ma con una <i>prassi</i> diversa rispetto all'altra rappresentazione decimale che li accomuna ai numeri razionali. [c2]	Si Ostacolo all'apprendimento, più che la somiglianza, sarebbe addirittura l'identificazione del radicale con la scrittura morfologicamente uguale di <i>radice n-esima</i> , operazione già incontrata dall'alunno X in geometria – un altro registro semiotico – nella formula $d = \ell\sqrt{2}$ per calcolare la diagonale di un quadrato (noto il lato); nell'inevitabile estrazione di radice quadrata del teorema di Pitagora; nell'estrazione di radice cubica per calcolare lo spigolo di un cubo, noto il volume. In questi casi, però, abitualmente tale radice veniva lasciata come ultima risposta del procedimento risolutivo di un problema, oppure era sostituita da un numero decimale approssimato: $b = \sqrt[n]{a}$ letto sulla calcolatrice scientifica. In questo caso, l' <i>uguale</i> sarebbe usato in modo definitorio, cioè il risultato b è il corrispettivo del suo simbolo $\sqrt[n]{a}$. L'espressione irrazionale $\sqrt[n]{a}$ invece fa diventare <i>numero</i> ciò che, per l'alunno, è stato usato come funzione, attribuendo alla "nuova funzione di radice" un significato che non aveva in \mathbb{Q} (mi riferisco ai radicali irriducibili, ossia a numeri senza controimmagine in \mathbb{Q}). È il passaggio da una <i>prassi</i> all' <i>oggetto</i> . [c]	Si Gli ostacoli conflittuali riguardano inevitabilmente aspetti strutturali legati a nuovi "strumenti sintattici" da apprendere, per garantire all' <i>uguale</i> con valenza <i>procedurale</i> esattamente il significato di <i>identità</i> sul piano semantico, nell'ambito tipico di formule ed espressioni. In particolare: <i>eseguire operazioni, semplificare, trasportare sotto o fuori dal segno di radice, calcolare se possibile, rendere irriducibile, ordinare</i> , sono formulazioni di richieste che, associate ad un'espressione algebrica, possono creare ambiguità o fraintendimenti di interpretazioni per l'alunno X, che si è esercitato meccanicamente in ciascuno di questi casi, ma non riesce poi a collegare e controllare la fluttuazione dei simboli da analizzare, sia pure in contesti non complessi. [c2]	Si	Si [Per c2 e c3] Una volta letta l'espressione algebrica dell'esercizio, l'alunno X che per esperienza dovrebbe già gestire <i>regole logiche</i> dell'identità, <i>proprietà</i> delle operazioni, <i>prodotti notevoli, principi di equivalenza</i> , si trova spaesato di fronte alle <i>regole</i> che presiedono il calcolo dei radicali. Regole ben descritte dal libro, ma che già dovrebbero far parte del suo bagaglio cognitivo, indicando l'estrazione di radice <i>una</i> delle due operazioni inverse dell'elevamento a potenza: la ricerca della "base".	Si

4							
SS II	Aspetti del punto 3 ai quali si riconducono le difficoltà di X nell'uso di R						
	d	e	f				g
			aspetti convenzionali			f4	
T3	Si [f2]	Si		Si			
T4							
T5			Si	Si	Si		
T24							
T27			Si	Si	Si	<p>Si</p> <p>[Per c4, f1, f2, f3, f4] Esercizio: verificare l'uguaglianza fra i radicali $\sqrt[3]{2\sqrt{8}}$; $\sqrt[3]{4\sqrt{2}}$; $\sqrt{2\sqrt[3]{4}}$ e generalizzare l'uguaglianza dei tre risultati con un parametro letterale, dopo aver riscritto con lo stesso parametro i radicali assegnati.</p> <p>L'alunno scrive così: $\sqrt[3]{2\sqrt{8}} = \sqrt[3]{4\sqrt{2}} = \sqrt{2\sqrt[3]{4}}$</p> <p>La prof. replica: "Non è questo il senso della domanda. Il verbo <i>verificare</i> significa, in questo caso, trattare ciascuna espressione separatamente e confrontare i risultati finali che devono coincidere".</p> <p>Allora l'alunno così svolge: $\sqrt[3]{2\sqrt{8}} = \sqrt[3]{4 \times 8} = \sqrt[3]{32}$</p> $\sqrt[3]{4\sqrt{2}} = \sqrt[3]{8 \times 2} = \sqrt[3]{16}$ $\sqrt{2\sqrt[3]{4}} = \sqrt[3]{6 \times 4} = \sqrt[3]{24}$ <p>evidenziando il suo errore di procedimento, mimetizzato nel primo radicale. Quindi non può verificare l'uguaglianza.</p> <p>La seconda domanda dell'esercizio risulta incomprensibile per l'alunno X, che riesce a districarsi soltanto dopo il <i>suggerimento</i> di sostituire un parametro, per esempio "a" (numero qualsiasi non negativo) al numero 2.</p> <p>Altra domanda colloquiale: L'uguaglianza: $(\sqrt{a})^2 = \sqrt{a^2}$ è vera anche se $a < 0$?</p> <p>La risposta immediata è un "sì", senza analizzare a fondo la scrittura.</p> <p>Precisata e condivisa la <i>terminologia</i>, ossia la distinzione fra <i>simbolo</i> e <i>significato</i>, senza costringerlo ad imparare e saper ripetere a memoria <i>enunciati</i> o <i>formule</i>, è possibile guidare l'alunno X a riflettere e a ricercare le cause dei suoi "errori" o "sbagli", se in presenza o in mancanza di <i>abilità di base indispensabili</i>.</p> <p>Si</p> <p>Che l'introduzione dell'insieme R dei numeri reali rappresenti – dal punto di vista didattico – uno scoglio, è ben noto ad ogni insegnante. D'altra parte, dimostrare che la <i>radice quadrata</i> di un numero che non sia un quadrato perfetto non è <i>razionale</i>, significa almeno riconoscere, caratterizzare e costruire numeri irrazionali. La calcolatrice scientifica ben utilizzata dall'alunno X, digitando $\sqrt{2}$; $\sqrt[3]{2}$; $\sqrt[4]{2}$; $\sqrt{3}$ etc., visualizza quanto siano <i>densi</i> questi numeri (senza esaurirne tutti i punti!), sia pur su un piccolo intervallo della retta assunta come modello: cosa a cui l'<i>esperienza</i> e l'<i>intuizione</i> non possono arrivare. Il passaggio agli "irrazionali" esige, infatti, un controllo razionale ed il superamento di una impostazione ingenua che si limiti a considerare solo ciò che si "può vedere". L'acquisizione di una operatività con i "radicali", ossia, la loro introduzione per via <i>algebraica</i> è un'esigenza connessa agli <i>strumenti algebrici</i> del 2° grado, anche per un programma di matematica poco esteso. Gli elementi di "costruzione rigorosa" che non contrastino quanto l'alunno apprenderà negli anni successivi, suppliscono alla mancanza di una <i>definizione assiomatica</i>, la cui "comprensione concettuale" sarà raggiunta a poco a poco.</p> <p>[c2]</p>	

SS II	5 Lo studente Y si focalizza su:					
	a	b	c			
			c1	c2	c3	c4
T3	Si Forma (simbolo che indica l'orientamento)	Situazioni in cui si usa in classe "è compreso" [e]	Si Come disegnare o costruire una figura			Passaggio dalla def legata al linguaggio alla rappr grafica e viceversa [c1]
T4	Individua come prima cosa il centro della circonferenza, quindi disegna il resto. Applica correttamente i principi di equivalenza delle equazioni, ed è in grado di passare da una forma all'altra senza difficoltà. [c1]		Vedi a			
T5			Si Come disegnare o costruire una figura	Si	Si	Lettura passo-passo + visione d'insieme [c1]
T24						
T27	Si Aspetti concreti di R, legati alla sua forma: $\sqrt[n]{a}$.	Si Radice quadrata e radice cubica di quadrati e di cubi non perfetti. [e]	Si Come scrivere o riconoscere una formula o un'espressione.			

SS II	5 Lo studente Y si focalizza su:						
	d	e	f				g
			f1	f2	f3	f4	
T3	Si Invece di "punti compresi" parla di "punti interni" e li indica sulla figura [f2]			Si			Def. apprese nei livelli di scuola precedenti, legate all'intuizione [f2]
T4							
T5		Si Riconosce una costruzione (o parte di essa) già vista in precedenza (perché ha acquisito anche una buona padronanza di linguaggio)	Si	Si	Si		
T24		Retta geometria piana					
T27		Si Aspetti di rinvio ad altri oggetti matematici, come: il numero razionale ed il monomio.					Si Apprendimento a manipolare rappresentazioni semiotiche, a manipolare passaggi e registri, ossia: collegare modelli astratti. [c.f]

6						
Aspetti del punto 5 ai quali si riconduce la capacità di Y nell'uso di R						
SS II	a	b	c			
			c1	c2	c3	c4
T3			Si			
T4	Buone capacità di visualizzazione e di controllo dei procedimenti algebrici. [c1]					
T5			Si	Si	Si	Si [c1]
T24						
T27	Si La capacità dello studente Y di utilizzare la rappresentazione R, consiste essenzialmente nella corretta interpretazione di numero <i>non razionale</i> , simbolicamente rappresentato da $\sqrt[n]{a}$, anzi, ancor meglio, dall'espressione irrazionale $b\sqrt[n]{a}$ ($a \in \mathbb{R}^+$) detta <i>radicale aritmetico</i> . La risposta è affermativa alla domanda se sia possibile procedere in un qualunque calcolo con questi radicali (<i>numeri esatti!</i>) senza dover passare ai loro valori approssimati ed è questo il vantaggio che ha inteso lo studente Y. [c2]	Si Un'analogia con il calcolo di espressioni con i monomi è riscontrata dallo studente Y là dove la parte irrazionale di un radicale si comporta come la parte letterale di un monomio. Sono le proprietà delle operazioni definite in questo insieme numerico che giustificano la modalità con cui due monomi simili si sommano o si lasciano indicati: allo stesso modo si comportano due radicali. Ma anche il ricorso al "minimo comune multiplo" non è una prassi nuova, in quanto strumento sintattico già utilizzato in altri contesti operativi. [e]	Si	Si [Per c1 e c2:] Acquisite senza difficoltà le operazioni ed il calcolo con i radicali perché, una volta definiti, si avvalgono di principi e proprietà già incontrati, lo studente Y, senza dover eccessivamente concentrare la sua attenzione su formule mnemoniche, ma alla luce di esercizi ed esempi ben mirati, utilizzando i radicali come strumento sintattico, riesce a <i>trasformare</i> e addirittura <i>semplificare</i> un'espressione con passaggi procedurali corretti. Ma ancor di più: il <i>principio di equivalenza</i> e la <i>riduzione di radicali allo stesso indice</i> consente il confronto, non solo fra numeri irrazionali, ma anche con "rappresentanti" di altri <i>insiemi numerici</i> , una volta trasformati nella stessa immagine semiotica.	Si	Si

6							
Aspetti del punto 5 ai quali si riconduce la capacità di Y nell'uso di R							
SS II	d	e	f				g
			aspetti convenzionali				
			f1	f2	f3	f4	
T3	Si [f2]			Si			
T4							
T5		Si	Si	Si	Si		
T24		Si					
T27	Si [e]	Si	Si	Si	Si	Si [Per c3, c4, d, e, f1, f2, f3, f4:] <u>Esempio di partecipazione all'attività didattica dello studente Y</u> Esercizio 1. Scrivere in un linguaggio matematico: "la metà di $\sqrt{2}$ è uguale al suo inverso". L'alunno scrive correttamente $\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ e chiede se "sia estensibile" ad altri irrazionali. La risposta è affermativa, "adeguando" ovviamente la richiesta ad ogni numero naturale diverso. Esercizio 2. <i>Disegnare un quadrato doppio di un altro (già disegnato).</i> Con il suggerimento della prof.: "non occorre nessun calcolo: basta la quadrettatura del foglio!", lo studente costruisce il quadrato di area $2\ell^2$ correttamente sulla diagonale del primo quadrato di lato ℓ disegnato. Esercizio 3. <i>Il rapporto fra i lati del rettangolo del foglio di formato A4 è $\sqrt{2}$. Scrivere la relazione fra i due lati, indicando con a il lato maggiore.</i> Correttamente l'alunno esegue: $a = b\sqrt{2}$ e sa verbalmente commentare la formula e motivarla. Successivamente chiede alla prof. se, viceversa, sia possibile ricavare un rettangolo "dello stesso tipo" da un quadrato. Tradotto in termini geometrici, il problema consiste nella possibilità di trovare una <i>costruzione geometrica</i> per ritagliare, da un quadrato, un <i>simile rettangolo</i> , con il lato maggiore ovviamente uguale al lato del quadrato. La prof.	Si Lo studente Y, anche di fronte ad un nuovo oggetto matematico, sa di poter contare su conoscenze ed immagini mentali precedentemente acquisite. Vero che un simbolo, un termine in matematica possono nascondere significati e interpretazioni differenti. Oltre il libro di testo, a volte oscuro, il dialogo con la prof. ed il confronto con i compagni possono favorire l'approccio e la formazione di un concetto. Il vantaggio dello studente Y risiede soprattutto nella sua disponibilità ed apertura verso il nuovo, a mettersi in gioco, senza vergognarsi delle sue "credenze" o del tempo impiegato per riflettere. Sentendo ripetere dalla prof. il termine "numero irrazionale", senza alzata di mano e con voce udibile chiede: "...e π ?" La prof. risponde: "Sì, è un numero irrazionale, ma non un radicale. Ha un'altra storia". Ancora aggiunge lo studente: "la prof. di Scienze ci ha parlato della sezione aurea...". La prof. allora risponde: "Oh, sì. È il numero $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. È il numero più bello!". [e]

					<p>risponde che è possibile ed esiste la dimostrazione costruttiva.</p> <p>Esercizio 4. <i>Dato un cubo di spigolo s, determinare la misura dello spigolo di un cubo doppio e la diagonale di ciascun cubo.</i></p> <p>Anche se le domande non sono formalizzate in modo preciso, l'alunno Y comprende il significato della consegna e, dopo aver scritto i dati del problema ed aver introdotto gli adeguati parametri, pur senza un disegno geometrico, imposta e trasforma correttamente le formule necessarie di calcolo con i radicali per la risoluzione.</p>	
--	--	--	--	--	--	--

SS II	7 Confusione con un'altra rapp. S	8 Rappresentazione T meno problematica	9 Caratteristiche di T meno problematiche
T3	Di un altro oggetto, l'angolo, la semiretta	Quella grafica	Possibilità di indicare i punti compresi, anche se non li cita espressamente.
T4	Non ritengo confonda rappresentazioni diverse, ma credo cerchi di riportare contemporaneamente tutte le proprietà che sa essere relative all'oggetto senza saper scegliere quelle necessarie al caso specifico.	Rappresentazione grafica sul piano cartesiano (c^3), equazione esplicita o implicita (c^4), rappresentazione in geometria piana (c^1). La prima e l'ultima sono spesso confuse tra loro, come le due intermedie.	Un numero minore di termini specifici (coefficiente angolare, intercetta...) e una rappresentazione algebrica più semplice.
T5	La forma della rappresentazione è un "testo descrittivo di una costruzione geometrica" e quindi credo non possa essere confusa da X con altri tipi di rappresentazione. (Perché il testo scritto è per lo studente X una forma di comunicazione "usuale"). Quello che lo studente confonde sono, eventualmente, parti dell'oggetto da costruire... tipo disegna un segmento al posto di una retta, un angolo esterno errato (cioè disegna ciò che per lui è un angolo esterno) ... ma questo non rientra, direi, nella "forma della rappresentazione"...	Oggetto: retta Rappresentazione algebrica, in forma di equazione. Esempio: $y = 3x - 2$ è facilmente riconoscibile, meno difficoltoso di $3x - y - 2 = 0$ Campo c^1 : geometria analitica.	Scrittura codificata a cui lo studente X associa il corretto significato. La scrittura in forma di equazione, per X evidenzia bene il legame fra le variabili. Nel caso precedente, per lo studente X è problematico trasformare in costruzione geometrica quanto descritto "a parole".
T24	Segmento tra i punti che soddisfano la funzione di primo grado	Retta geometria piana. Ric. Perché lo studente X (più in difficoltà) non ha problemi nel gestire la "retta della geometria piana" (alla quale fa riferimento lo studente Y più bravo, in base alla tua risposta 5e), ma non si focalizza su di essa nel "tracciare il grafico" (risposta 3 c1)? Forse perché non riesce a "trasportare" le caratteristiche della retta della geometria piana in quella rappresentata sul piano cartesiano. Geometria piana, funzione di primo grado e rappresentazione sul piano cartesiano rimangono argomenti, e tipologia di esercizi, distinti. Mi capita di osservare alunni che, per esempio, rappresentano la funzione del tipo $y = ax$ come una semiretta di origine il punto di intersezione degli assi. Poi, facendo osservare loro che si tratta di una retta, spesso la prolungano nel terzo quadrante. Oppure che disegnino segmenti sulla retta $y = ax$ e sulla retta $y = bx$ e non individuino il loro punto di intersezione, mentre se si dice loro di disegnare due rette in genere considerano il disegno prolungabile all'infinito.	Aver avuto familiarità con la retta della geometria piana fin dalla scuola primaria.
T27	Dallo studente X non viene confusa la rappresentazione R, ma il suo oggetto O, sostituito da un altro oggetto O', ossia dalla relazione operativa di \mathbb{Q}^+ in \mathbb{Q}^+ che è l'estrazione di radice n -esima.	Ho pensato ad un'altra rappresentazione semiotica dello stesso oggetto matematico O (numero irrazionale), ma scritta come potenza ad esponente frazionario.	Questa rappresentazione richiama tutte le proprietà delle potenze già note: beninteso delle potenze con "base non negativa". Con tale scrittura, assume significato la notazione convenzionale di sottintendere 2 – senza scriverlo – come indice di estrazione di radice quadrata e di indicare invece il numero 1 – come indice di radice – volendo riscrivere un numero razionale (o naturale) sotto forma di "radicale apparente". Anche la modalità del confronto fra irrazionali con questa notazione sarebbe agevolata perché, da un confronto di a^n con b^m , usando adeguatamente le proprietà delle potenze, il confronto si trasferisce fra $(a^m)^{\frac{1}{n}}$ e $(b^n)^{\frac{1}{m}}$,

			ossia, fra le due potenze a^m e b^n . Dopo un adeguato esercizio con questa <i>rappresentazione semiotica</i> , lo studente X potrebbe ritornare più agevolmente al calcolo con i radicali, a partire dal <i>confronto di due radicali</i> (numeri irrazionali), senza dover calcolare il minimo comune indice, ma usando come "scorciatoia" la regola per cui: basta elevare il radicando dell'uno all'indice del radicale dell'altro e confrontare le potenze ottenute. In formule: per confrontare $\sqrt[m]{a}$ con $\sqrt[n]{b}$, basta confrontare a^m con b^n .
--	--	--	---

SS II	R1 =				
	I somialtanze con	II confusione con	III convenzioni per l'uso di R1	IV contesti d'uso	V complessità
T3	Lo studente non vede somiglianze però (purtroppo) fa confusione perché usare "=" con registri diversi e/o in situazioni diverse per lui non fa alcuna differenza.	Equivalenza (nelle equazioni) Equiestensione Congruenza	Riguardano i simboli, di cui conosce (a memoria) il significato, ma che non riesce a padroneggiare	Equazioni Congruenza	abb compl (insiemi soluzione uguali ed eq equivalenti) mc (come corrisp biunivoche con caratt diverse)
T4	Equivalenza tra superfici (\equiv) \approx (approssimazione) Uguaglianza in un'equazione Operazionale	Equivalenza tra superfici (\equiv) \approx (approssimazione) Uguaglianza in un'equazione Operazionale	Legge del trasporto, criteri di scomposizione per superfici, confronto tra numeri decimali e frazioni.	Espressioni Equazioni Equivalenza di superfici Trasformazione di numeri	pc pc abb c abb c
T5					
T24	Identità	Risultato	Nell'uso dei calcoli	Calcolo numerico Calcolo simbolico	pc pc
T27	1. Identità aritmetica in riferimento a modi diversi di indicare lo stesso oggetto. 2. Equivalenza sintattica, ossia, vera per ogni valore delle lettere (o parametri universali) che vi compaiono. 3. Uguale con valenza procedurale, ossia, fra espressioni sintatticamente equivalenti. 4. Uguaglianza che è segno di domanda e di una ricerca di valori da sostituire alla variabile o variabili che la verificano.	1. indicatori con simboli diversi: \equiv ; \cong ; \rightarrow ; \leftarrow ; \leftrightarrow . 2. $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ predicato falso, senza specificazione dell'insieme numerico. 3. $\sqrt[3]{8a} = 2$ espressione senza significato.	Poiché lo studente non ha mai incontrato una definizione "giusta" del predicato "=", anche per il suo abuso nel linguaggio comune, le eventuali convenzioni del suo utilizzo sono legate alla conoscenza dei <i>principi di equivalenza</i> e delle <i>regole logiche dell'identità</i> applicati in abituali contesti ripetitivi. Questo segno però, molto usato semanticamente, nasconde un processo che si configura nell' <i>uguaglianza sintattica</i> , spesso fondata su più ampie e approfondite conoscenze.	Contesto 1: $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{8}} = \sqrt{\frac{2}{8}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$ Contesto 2: $(a + \sqrt{b})^2 = a^2 + 2a\sqrt{b} + b$ Contesto 3: $\sqrt{a}(\sqrt{a} - 1) + 2a + 2\sqrt{a} = a - \sqrt{a} + 2a + 2\sqrt{a} = 3a + \sqrt{a}$ Contesto 4: $5x + \sqrt{5} = 5$	pc abb c abb c pc

SS II	R2 "Il doppio di 5/6"				
	I somiglianze con	II confusione con	III convenzioni per l'uso di R2	IV contesti d'uso	V complessità
T3	Il doppio di un numero intero. Il quadrato di un razionale.	Ingrandire. Molt per 2 il N e D di 5/6		Q Rappr sulla retta dei numeri	abb c pc
T4	Il doppio di 5 Il triplo di... Il multiplo di n tramite m	La metà di... Il quadrato di 0,833333...2	2/1·5/6	Espressioni numeriche Espressioni algebriche Pb numerici	pc pc abb c
T5	2·5/2·6 (5/6) ²	Il quadrato di 5/6		Descrizione della lunghezza di un segmento. Lettura di un'espressione (richiesta dell'insegnante).	pc mc
T24					
T27					

SS II	R3 $\frac{1}{\frac{2}{4}}$				
	I somiglianze con	II confusione con	III convenzioni per l'uso di R3	IV contesti d'uso	V complessità
T3					
T4	1:(2/4)	1:(2/4)	Moltiplicare per l'inverso di 2/4	espressioni numeriche	abb c
T5	Per lo studente X questa scrittura sembra avulsa dalla realtà...	1/(2/4)	Uso delle parentesi (che lo studente colloca a caso...)	Espressioni aritmetiche. Traduzione dal linguaggio alla notazione aritmetica.	mc mc
T24					
T27					

SS II	R4 $\frac{0}{\frac{0}{3}}$				
	I somiglianze con	II confusione con	III convenzioni per l'uso di R4	IV contesti d'uso	V complessità
T3	$\frac{3}{0}$; 0,3	$\frac{3}{0}$	Controllare il risultato della divisione 0:3 con una moltiplicazione	Espr alg in Q Equaz alg in Q	pc abb c
T4	3/0 3/n, n≠0 3·0	3/0 3/n, n≠0 3·0	Non si può dividere per 0!!!!	Risultato di un'espr numerica Calcolo di un limite Espr goniometrica	pc abb c mc
T5	0:3	3/0	Secondo X, bisogna rispondere "impossibile" o "indeterminata", ma manca la consapevolezza...	Aritmetico. Tradurre la frase "dividi zero con tre". Algebrico, come risultato di un'equazione.	abb c mc mc
T24					
T27					

SS II	R5 -5^2				
	I somialianze con	II confusione con	III convenzioni per l'uso di R5	IV contesti d'uso	V complessità
T3	$(-5)^2$ $-(5)^2$ $-(-5)^2$	$-(-5)^2$ $(-5)^2$	Def e prop potenze	Espr alg Equaz alg Pb ris con eq	pc abb c mc
T4	$(-5)^2$ 5^2	$(-5)^2$ 5^2	Elevando al quadrato ottengo sempre un valore positivo	Espr numeriche Traduz dal ling nat a quello alg nella risol di pb numerici	pc abb c
T5	"Il quadrato di -5 "	$(-5)^2$	Pensa subito all'esponente pari e conclude che il risultato sarà positivo	Aritmetico. Tradurre una frase in simboli.	abb c mc
T24					
T27					

SS II	R6 3^0				
	I somialianze con	II confusione con	III convenzioni per l'uso di R6	IV contesti d'uso	V complessità
T3	0^0 $3 \cdot 0$	$3 \cdot 0$	Def e prop potenze	Espr alg	abb c
T4	a^0 per ogni $a \neq 0$ 0^0 0^a per ogni $a \neq 0$	a^0 per ogni $a \neq 0$ 0^0 0^a per ogni $a \neq 0$	0^0 è privo di significato $a^0 = 1$ per ogni $a \neq 0$	Espressioni numeriche Limiti in forma indeterminata	pc abb c
T5					
T24					
T27					

SS II	R7 $y = \sqrt{x^2}$				
	I somialianze con	II confusione con	III convenzioni per l'uso di R7	IV contesti d'uso	V complessità
T3	$\frac{1}{x^2}$			Eq alg in \mathbb{R} Pb algebrici	abb c abb c
T4	$y = \sqrt{x^m}$ $y = x^{m/n}$	$y = \sqrt[m]{x^m}$ $y = x^{m/n}$	Valore assoluto e segno delle radici algebriche	Espr irrazionali Calcolo con le potenze	abb c abb c
T5					
T24					
T27	1. P(x ; y) 2. Sistema di riferimento cartesiano. 3. Rappresentazione grafica dell'equazione algebrica. 4. Rappresentazione di una funzione.	1. $3 = \sqrt{9}$ 2. $a = \sqrt{a^2}$ 3. $y = x$ 4. $y = -x$	In questa struttura algebrica, lo studente riconosce l'assenza di qualsiasi manipolazione operativa e la richiesta di una rappresentazione grafica passando ad un registro geometrico.	Contesto 1: $y = x$ Contesto 2: $\sqrt[3]{a^2} = \sqrt[3]{ a }$ Contesto 3: $y = - x $	per nulla c mc mc

SS II	R8 "Coefficiente angolare"				
	I somialtanze con	II confusione con	III convenzioni per l'uso di R8	IV contesti d'uso	V complessità
T3	"Pendenza di una retta" "Tangente dell'angolo che la retta forma con l'asse x"			Geom nel piano cart Fisica	abb c pc
T4	$y = mx + q$ $m = a/b$ dove $ax + by + c = 0$ $m = (y_A - y_B)/(x_A - x_B)$	$m = b$ dove $ax + by + c = 0$ $m = (x_A - x_B)/(y_A - y_B)$ q dove $y = mx + q$	Trasformazione da forma esplicita ad implicita della retta e viceversa	Esercizi di geometria analitica e fisica	pc
T5					
T24	Angolo	Misura dell'angolo	Capacità di disegnare e misurare un angolo	Geometria piana Ric Che cosa intendi per "contesto: geometria piana" nel caso del coefficiente angolare? Che in genere tendono a visualizzare l'angolo e non il rapporto tra variabile dipendente e variabile indipendente.	pc
T27					

SS II	R9 $1 = 3x$				
	I somialtanze con	II confusione con	III convenzioni per l'uso di R9	IV contesti d'uso	V complessità
T3					
T4	$-3x = 1$ $3x = -1$ $x = 3/1$	$x = 1 - 3$ $x = 3/1$	Cambiamento di segno nella legge del trasporto	Eq algebriche	abb c (se riguarda il mancato riconoscimento dell'operazione coinvolta)
T5					
T24					
T27					

SS II	R10 $0x = 5$				
	I somialtanze con	II confusione con	III convenzioni per l'uso di R10	IV contesti d'uso	V complessità
T3	$0 = 5$ $x = 5$	Classif eq determinata, indet... Lettura del coeff di un monomio	Principi di equivalenza	Eq algebriche Pb geometrici	abb c abb c
T4	$a x = 5$ $x = 5/0$	$5x = 0$	"Non si può dividere per 0!"	calcolo numerico calcolo letterale limiti	pc abb c mc
T5					
T24					
T27					

R11 "Forma indeterminata"					
SS II	I somiglianze con	II confusione con	III convenzioni per l'uso	IV contesti d'uso di R11	V complessità
T3					
T4					
T5					
T24					
T27					

R12 $\frac{x+2}{2} + x = x + 2$					
SS II	I somiglianze con	II confusione con	III convenzioni per l'uso di R12	IV contesti d'uso	V complessità
T3					
T4	Espressioni algebriche di qualunque tipo. Equazioni a coeff interi.	Equazioni fratte	Calcolo del denominatore comune ed eventuali condizioni di esistenza	Equazioni e sistemi	pc
T5					
T24					
T27					

R13 $y = 2x^2 - x$					
SS II	I somiglianze con	II confusione con	III convenzioni per l'uso di R13	IV contesti d'uso	V complessità
T3	$x(2x-1)$ $y = 2x^2 - x$ $2x^2 - x = 0$	$y = 2x^2 - x$ $2x^2 - x = 0$	Rappresenta un polinomio	Fattorizzazione di polinomi Eq algebriche Parabola nel piano cart	mc abb c pc
T4	Calcolo letterale Scomposizione di polinomi Risoluzione di equazioni	Vedi I, cioè, confusione tra: "svolgere" le espressioni, "scomporre" polinomi, "inventare" un testo che porti a quell'espr come eq risolvente	Tutto quanto è relativo a ciò che è indicato sopra	Calcolo letterale Scomposizione di polinomi Risoluzione di equazioni	pc abb c pc
T5					
T24					
T27					

R14					
SS II	I somiglianze con	II confusione con	III convenzioni per l'uso di R14	IV contesti d'uso	V complessità
T3	Ortocentro in un triangolo	Baricentro Incentro	Manipolando la figura con un software di geometria dinamica alcune caratteristiche della figura non cambiano	Geometria euclidea	pc
T4	Mediane di un triangolo e loro punto di incontro, con relative proprietà. Bisettrici di un triangolo e loro punto di incontro, con relative proprietà. Assi di un triangolo e loro punto di incontro, con relative proprietà.	Mediane di un triangolo e loro punto di incontro, con relative proprietà. Bisettrici di un triangolo e loro punto di incontro, con relative proprietà. Assi di un triangolo e loro punto di incontro, con relative proprietà.	Uso di riga, squadra e compasso per tracciare le figure, definizione e proprietà dei segmenti notevoli dei triangoli	Geometria sintetica	abb c
T5					
T24					
T27					

SS II	 R15				
	I somiglianze con	II confusione con	III convenzioni per l'uso di R15	IV contesti d'uso	V complessità
T3					
T4	Rappres. di funzioni biettive. Posizioni reciproche di circonferenze nel piano. Figure simili.	Rappresentazioni di funzioni. Figure isometriche (cambiando scala).	Rappresentazioni grafiche di relazioni, di funzioni iniettive e suriettive, caratteristiche delle circonferenze, figure simili e figure isometriche	Il cosiddetto "linguaggio della matematica". Geometria.	mc abb c
T5					
T24					
T27					

SS II	 R16				
	I somiglianze con	II confusione con	III convenzioni per l'uso di R16	IV contesti d'uso	V complessità
T3					
T4	Serie numeriche	Rappresentazione di figure nel piano		Prove Invalsi e test di "logica". Serie numeriche.	Non so abb c
T5					
T24					
T27					

Bibliografia

- Adler, J., Ball, D., Krainer, K., Lin, F.-L., & Novotna, J. (2005). Reflections on an emerging field: Researching mathematics teacher education. *Educational Studies in Mathematics*, 60(3), 359-381. doi: 10.1007/s10649-005-5072-6
- Aiken, L. R. (1970). Attitudes towards mathematics. *Review of Educational Research*, 40(4), 551-596.
- Aiken, L. R., & Dreger, R. M. (1961). The effect of attitudes on performance in learning mathematics. *Journal of Educational Psychology*, 52(1), 19-24.
- Anderson, M. L. (2003). Embodied Cognition: A field guide. *Artificial Intelligence*, 149, 91-130.
- Arzarello, F. (2006). Semiosis as a multimodal process. In L. Radford & B. D'Amore (Eds.), *Semiotics, Culture and Mathematical Thinking* [Special Issue]. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 9(1), 267-299.
- Arzarello, F., Paola, D., Robutti, O., & Sabena, C. (2009). Gestures as semiotic resources in the mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, 70(2), 97-109.
- Baber, R. L. (2011). *The language of mathematics: Utilizing math in practice*. Hoboken, NJ, USA: John Wiley & Sons, Inc. doi: 10.1002/9781118061770.ch1
- Bagni, G. T. (2006). *Linguaggio, storia e didattica della matematica*. Bologna: Pitagora.
- Bagni, G. T. (2007). *Rappresentare la matematica: Simboli, parole, artefatti, figure*. Roma: Aracne.
- Bagni, G. T. (2008). *Giochi: Storia, geografia, didattica della matematica*. Bologna: Archetipolibri.
- Bagni, G. T. (2009a). Storia e didattica della matematica: Una prospettiva ermeneutica. *Quaderni di Ricerca in Didattica*, 19, 45-57.
- Bagni, G. T. (2009b). *Interpretare la matematica: Introduzione all'ermeneutica dell'apprendimento*. Bologna: Archetipolibri.

- Bagni, G. T. (2009c). *Interpretazione e didattica della matematica: Una prospettiva ermeneutica*. Bologna: Pitagora.
- Bagni, G. T., & D'Amore, B. (2005). Epistemologia, sociologia, semiotica: La prospettiva socio-culturale. *La matematica e la sua didattica*, 1, 73-89.
- Bagni, G. T., & Douek, N. (2011). Ermeneutica e semiotica: Spunti teorici per la didattica della matematica. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 34B(4), 407-424.
- Baillaud, B., & Bouget, H. (Eds.) (1905). *Correspondance d'Hermite et de Stieltjes*. Paris: Gauthier-Villars.
- Bakhtin, M. (1986). *Speech genres and other late essays*. Austin: University of Texas Press.
- Bateson, G. (1972). *Steps to an ecology of mind*. New York: Ballantine.
- Baur, L. (Ed.) (1912). *Die Philosophischen Werke des Robert Grosseteste, Bischofs von Lincoln*. Münster: Aschendorff.
- Bergman, M. (2010). C. S. Peirce on interpretation and collateral experience. *Signs - International Journal of Semiotics*, 3, 134-161.
- Bernstein, R. J. (1983). *Beyond objectivism and relativism: Science, hermeneutics, and praxis*. Philadelphia: University of Pennsylvania Press.
- Blumer, H. (1969). *Symbolic interactionism: Perspective and method*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.
- Boden, M. A. (2004). *The creative mind: Myths and mechanisms* (2nd ed.). London: Routledge.
- Bresson, F. (1987). Les fonctions de représentation et de communication. In J. Piaget, P. Mounoud, & J.-P. Bronckart (Eds.), *Psychologie* (pp. 933-982). Paris: Encyclopédie de la Pléiade.
- Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7(2), 33-115.
- Brousseau, G. (1989). Utilité et intérêt de la didactique pour un professeur de collège. *Petit x*, 21, 47-68.
- Brousseau, G. (1997). *La théorie des situations didactiques*. Cours donné lors de l'attribution à Guy Brousseau du titre de Docteur Honoris Causa de l'Université de Montréal. Récupéré à partir de <http://guy-brousseau.com/1694/la-theorie-des-situations-didactiques-le-cours-de-montreal-1997/>

- Brousseau, G., & D'Amore, B. (2008). I tentativi di trasformare analisi di carattere meta in attività didattica: Dall'empirico al didattico. In B. D'Amore & S. Sbaragli (Eds.), *Didattica della matematica e azioni d'aula*. Atti del XXII Convegno Nazionale: Incontri con la matematica. Castel San Pietro Terme, 7-8-9 novembre 2008 (pp. 3-14). Bologna: Pitagora.
- Cajori, F. (2007). *A History of Mathematical Notations: Volume I*. New York: Cosimo Classics.
- Cassin, B., Apter, E., Lezra, J., & Wood, M. (Eds.) (2014). *Dictionary of Untranslatables: A Philosophical Lexicon*. Princeton and Oxford: Princeton University Press.
- Chevallard, Y. (1985). *Transposition didactique du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble: La Pensée Sauvage Éditions.
- Chevallard, Y. (1991). Dimension instrumentale, dimension sémiotique de l'activité mathématique. *Séminaire de Didactique des Mathématiques et de l'Informatique de Grenoble*. LSD2-IMAG, Université Joseph-Fourier, Grenoble.
- Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: Perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 12(1), 73-112.
- Chevallard, Y. (1995). Note sur l'individualisation de la formation. *Didaskalia*, 6, 115-131.
- Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(2), 221-266.
- Chevallard, Y. (2005). Didactique et formation des enseignants. In B. David (Ed.), *Impulsions 4* (pp. 215-231). Lyon: INRP.
- Cole, M. (1996). *Cultural psychology: A once and future discipline*. Cambridge, MA: The Belknap Press of Harvard University Press.
- Connolly, J., & Keutner, T. (1988). Introduction: Interpretation, decidability, and meaning. In J. M. Connolly & T. Keutner (Eds.), *Hermeneutics versus science? Three German views: Essays by H.-G. Gadamer, E.K. Specht, W. Stegmüller* (pp. 1-67). Notre Dame, IN: University of Notre Dame Press.
- Corbetta, P. (1999). *Metodologia e tecniche della ricerca sociale*. Bologna: Il Mulino.
- Corrao, S. (2000). *Il focus group*. Milano: Franco Angeli.
- Creswell, J. W. (1998). *Qualitative inquiry and research design: Choosing among five traditions*. Thousand Oaks, CA: Sage.

- Creswell, J. W. (2007). *Qualitative inquiry and research method: Choosing among five approaches* (2nd. ed.). Thousand Oaks, CA: Sage.
- Creswell, J. W. (2009). *Research design: Qualitative, quantitative, and mixed methods approaches*. Thousand Oaks, CA: Sage.
- D'Amore, B. (1979-80). Riflessioni sulla *Characteristica* leibniziana. *Annali dell'Istituto di Discipline Filosofiche dell'Università di Bologna*, 1, 204-208. [Articolo pubblicato anche in: D'Amore, B. (2001). *Scritti di Epistemologia Matematica 1980-2001* (pp. 1-9). Bologna: Pitagora].
- D'Amore, B. (1999a). *Elementi di didattica della matematica*. Bologna: Pitagora.
- D'Amore, B. (1999b). Scolarizzazione del sapere e delle relazioni: effetti sull'apprendimento della matematica. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 22A(3), 247-276.
- D'Amore, B. (2000a). La Didattica della Matematica alla svolta del millennio: radici, collegamenti e interessi. *La matematica e la sua didattica*, 3, 407-422.
- D'Amore, B. (2000b). "Concetti" e "oggetti" in Matematica. *Rivista di Matematica dell'Università di Parma*, 3(6), 143-151.
- D'Amore, B. (2001a). Un contributo al dibattito su concetti e oggetti matematici: la posizione "ingenua" in una teoria "realista" vs il modello "antropologico" in una teoria "pragmatica". *La matematica e la sua didattica*, 1, 4-30.
- D'Amore, B. (2001b). Concettualizzazione, registri di rappresentazioni semiotiche e noetica. *La matematica e la sua didattica*, 2, 150-173.
- D'Amore, B. (2002a). Basta con le cianfrusaglie! *La Vita Scolastica*, 8(1), 14-18.
- D'Amore, B. (2002b). L'uso acritico degli strumenti! *La Vita Scolastica*, 16(1), 15-19.
- D'Amore, B. (2002c). Matematica in alcune culture sudamericane. Un contributo all'Etnomatematica. *Bollettino dei docenti di matematica*, 44, 39-46.
- D'Amore, B. (2003). *Le basi filosofiche, pedagogiche, epistemologiche e concettuali della Didattica della Matematica*. Prefazione di Guy Brousseau. Bologna: Pitagora.
- D'Amore, B. (2005a). Pratiche e metapratiche nell'attività matematica della classe intesa come società. Alcuni elementi rilevanti della didattica della matematica interpretati in chiave sociologica. *La matematica e la sua didattica*, 3, 325-336.
- D'Amore, B. (2005b). L'argomentazione matematica di allievi di scuola secondaria e la logica indiana (nyaya). *La matematica e la sua didattica*, 4, 481-500.

- D'Amore, B. (2005c). Pipe, cavalli, triangoli e significati. Contributo ad una teoria problematica del significato concettuale, da Frege e Magritte, ai giorni nostri. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 28B(5), 415-433.
- D'Amore, B. (2006a). Oggetti matematici e senso. Le trasformazioni semiotiche cambiano il senso degli oggetti matematici. *La matematica e la sua didattica*, 4, 557-583.
- D'Amore, B. (2006b). Oggetti matematici, trasformazioni semiotiche e senso. In B. D'Amore & S. Sbaragli (Eds.), *Il convegno del ventennale*. Atti del Convegno Nazionale "Incontri con la Matematica" n. 20. Castel San Pietro Terme, 3-4-5 novembre 2006 (pp. 15-22). Bologna: Pitagora.
- D'Amore, B. (2006c). Objetos, significados, representaciones semióticas y sentido. In L. Radford & B. D'Amore (Eds.), *Semiotics, Culture and Mathematical Thinking* [Special Issue]. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 9(1), 177-195.
- D'Amore, B. (2006d). *Concepts, objects, semiotic and meaning. Investigations of the concept's construction in mathematical learning* (Doctoral thesis, Università Costantino Filosofo, Nitra, Slovacchia). Retrieved from http://math.unipa.it/%7Egrim/Tesi_it.htm
- D'Amore, B. (2007a). How the treatment or conversion changes the sense of mathematical objects [Invited speaker article]. In E. P. Avgerinos & A. Gagatsis (Eds.), *Current trends in Mathematics Education*. Proceedings of 5th MEDCONF2007 (Mediterranean Conference on Mathematics Education), 13-15 April 2007, Rhodes, Greece (pp. 77-82). Athens: New Technologies Publications.
- D'Amore, B. (2007b). Mathematical objects and sense. How semiotic transformations change the sense of mathematical objects. *Acta Didactica Universitatis Comenianae*, 7, 23-45.
- D'Amore, B. (2011). Alcune riflessioni su didattica, concetto, competenza, schema, situazione. *Bollettino dei docenti di matematica*, 63, 19-26.
- D'Amore, B. (2014). *Il problema di matematica nella pratica didattica*. Modena: Digital Docet.
- D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2009). La formazione degli insegnanti di matematica, problema pedagogico, didattico e culturale. In F. Frabboni & M. L. Giovannini (Eds.), *Professione insegnante* (pp. 145-154). Milano: Franco Angeli.

- D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2012). Su alcune D in didattica della matematica: designazione, denotazione, denominazione, descrizione, definizione, dimostrazione. Riflessioni matematiche e didattiche che possono portare lontano. *Bollettino dei docenti di matematica*, 64, 33-46.
- D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2014). Illusioni, panacee, miti nell'insegnamento-apprendimento della matematica. *Difficoltà in Matematica*, 11(1), 89-109.
- D'Amore, B., & Godino, J. D. (2006). Punti di vista antropologico ed ontosemiotico in Didattica della Matematica. *La matematica e la sua didattica*, 1, 9-38.
- D'Amore, B., & Matteuzzi, M. (1976). *Gli interessi matematici*. Venezia: Marsilio.
- D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., & Iori, M. (2013). *Primi elementi di semiotica: La sua presenza e la sua importanza nel processo di insegnamento-apprendimento della matematica*. Prefazioni di Raymond Duval e Luis Radford. Bologna: Pitagora.
- D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., Iori, M., & Matteuzzi, M. (2013). Alcune riflessioni storico-critiche sul cosiddetto “paradosso di Duval”. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 36B(3), 207-236.
- D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., Marazzani, I., & Sarrazy, B. (2010). *Didattica della matematica. Alcuni effetti del “contratto”*. Prefazione e postfazione di Guy Brousseau. Bologna: Archetipolibri.
- D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., Marazzani, I., & Sbaragli, S. (2008). *Difficoltà nell'apprendimento della matematica. Il punto di vista della didattica*. Trento: Erickson.
- D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., Marazzani, I., Santi, G., & Sbaragli, S. (2009). Il ruolo dell'epistemologia dell'insegnante nelle pratiche d'insegnamento. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 32B(2), 171-192.
- D'Amore, B., Godino, J. D., Arrigo, G., & Fandiño Pinilla, M. I. (2003). *Competenze in matematica*. Bologna: Pitagora.
- D'Amore, B., Radford, L., & Bagni, G. T. (2006). Ostacoli epistemologici e prospettiva socio-culturale. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 29B(1), 11-40.
- Dascal, M. (1987). *Leibniz: Language, signs, and thought: A collection of essays*. Amsterdam: John Benjamins.

- Davis, B., & Simmt, E. (2006). Mathematics-for-teaching: An ongoing investigation of the mathematics that teachers (need to) know. *Educational Studies in Mathematics*, 61(3), 293–319. doi: 10.1007/s10649-006-2372-4
- Davis, G. E., & McGowen, M. A. (2001). *Embodied objects and the signs of mathematics*. Paper prepared for the PME 25 discussion group “Symbolic Cognition in Advanced Mathematics”. Utrecht, The Netherlands: Freudenthal Institute, University of Utrecht.
- De Cruz, H., & De Smedt, J. (2010). Mathematical symbol as epistemic actions. *Synthese*, 1-17.
- Denzin, N. K., & Lincoln, Y. S. (2011). *The SAGE Handbook of Qualitative Research*. Thousand Oaks, CA: Sage.
- Descartes, R. (1641). *Meditationes de prima philosophia, in qua Dei existentia et animæ immortalitas demonstratur*. Paris: Michel Soly.
- Descartes, R. (1852). *Oeuvres philosophiques de Descartes*. Paris: Panthéon littéraire.
- Dewey, J. (1916). The Pragmatism of Peirce. *The Journal of Philosophy, Psychology and Scientific Methods*, 13(26), 709-715.
- Dewey, J. (1920). *Reconstruction in philosophy*. New York: Henry Holt and Company.
- Dewey, J. (1986). Logic: The theory of inquiry. In J. A. Boydston (Ed.), *John Dewey: The Later Works, 1925-1953* (Vol. 12, pp. 1-527). Carbondale: Southern Illinois University Press. (Original work published 1938).
- Di Martino, P. (2004). *Difficoltà in matematica e sistemi di convinzioni* (Tesi di dottorato, Dipartimento di Matematica, Università di Pisa). Tratto da http://math.unipa.it/%7Egrim/Tesi_it.htm
- Dörfler, W. (2005). Diagrammatic thinking: Affordances and constraints. In M. H. G. Hoffmann, J. Lenhard, & F. Seeger (Eds.). *Activity and Sign: Grounding Mathematics Education* (pp. 57-66). New York: Springer.
- Douady, R. (1986). Jeux de cadre et dialectique outil-objet. *Recherches en didactique des mathématiques*, 7(2), 5-31.
- Douglas, M. (1986). *How institutions think*. Syracuse, New York: Syracuse University Press.
- Driscoll, M. P., & Rowley, K. (1997). Semiotics: Toward learning-centered instructional design. In C. R. Dills & A. J. Romiszowski (Eds.), *Instructional Development Paradigms* (pp. 311-334). New Jersey: Educational Technology Publications.

- Dufour-Janvier, B., Bednarz, N., & Belanger, M. (1987). Pedagogical considerations concerning the problem of representation. In C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 109-122). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.
- Duval, R. (1988a). Ecarts sémantiques et cohérence mathématique. *Annales de Didactique et de Sciences cognitives*, 1, 7-25.
- Duval, R. (1988b). Approche cognitive des problèmes de géométrie en termes de congruence. *Annales de Didactique et de Sciences cognitives*, 1, 57-74.
- Duval, R. (1988c). Graphiques et équations. *Annales de Didactique et de Sciences cognitives*, 1, 235-253.
- Duval, R. (1993). Registres de représentations sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*. ULP, IREM Strasbourg, 5, 37-65.
- Duval, R. (1994). Les différents fonctionnements d'une figure dans une démarche géométrique. *Repères-IREM*, 17, 121-138.
- Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Berne: Peter Lang.
- Duval, R. (1996). Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques? *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 16(3), 349-382. [Versione in lingua italiana: Duval, R. (1996). Quale cognitivo per la didattica della matematica? *La matematica e la sua didattica*, 3, 250-269].
- Duval, R. (1998a). Signe et objet (I): Trois grandes étapes dans la problématique des rapports entre représentations et objet. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 6, 139-163.
- Duval, R. (1998b). Signe et objet (II): Questions relatives à l'analyse de la connaissance. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 6, 165-196.
- Duval, R. (1999). Representation, vision and visualization: Cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning. In F. Hitt & M. Santos (Eds.), *Proceedings of the 21st Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 3-26). Cuernavaca, Morelos, Mexico.
- Duval, R. (2000). Basic issues for research in mathematics education. In T. Nakahara & M. Koyama (Eds.), *Proceedings of the 24th Conference of the International Group*

- for the *Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 55-69). Hiroshima University.
- Duval, R. (2001). *The cognitive analysis of problems of comprehension in the learning of mathematics*. Paper Presented to the Discussion Group on Semiotics and Mathematics Education at the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Utrecht.
- Duval, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie: Développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 10, 5-53.
- Duval, R. (2006a). Trasformazioni di rappresentazioni semiotiche e prassi di pensiero in matematica. *La matematica e la sua didattica*, 4, 585-619.
- Duval, R. (2006b). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61(1-2), 103-131.
- Duval, R. (2006c). Quelle sémiotique pour l'analyse de l'activité et des productions mathématiques? In L. Radford & B. D'Amore (Eds.), *Semiotics, Culture and Mathematical Thinking* [Special Issue]. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 9(1), 45-81.
- Duval, R. (2006d). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, 9(1), 143-168.
- Duval, R. (2008). Eight problems for a semiotic approach in mathematics education. In L. Radford, G. Schubring, & F. Seeger (Eds.), *Semiotics in mathematics education: Epistemology, history, classroom, and culture* (pp. 39-61). Rotterdam: Sense Publishers.
- Duval, R. (2009a). «Objet»: Un mot pour quatre ordres de réalité irréductibles? In J. Baillé (Ed.), *Du mot au concept: Objet* (pp. 79-108). Grenoble: PUG.
- Duval, R. (2009b). Sémiosis, pensée humaine et activité mathématique. *Amazônia - Revista de Educação em Ciências e Matemáticas*, 6(11) (jul. 2009/dez. 2009) e 6(12) (jan. 2010/jun. 2010), 126-143.
- Duval, R. (2011). *Ver e ensinar a matemática de outra forma. Entrar no modo matemático de pensar: os registros de representações semióticas*. Organização de Tânia M. M. Campos. Tradução de Marlene Alves Dias. São Paulo: PROEM.
- Duval, R. (2012). Quelles théories et quelles méthodes pour les recherches sur

- l'enseignement des mathématiques? *Práxis Educativa*, 7(2), 305-330.
- Duval, R. (2013). Les problèmes dans l'acquisition des connaissances mathématiques: apprendre comment les poser pour devenir capable de les résoudre? *REVEMAT: revista eletrônica de educação matemática*, 8(1), 1-45.
- Duval, R. (2014a). Commentary: Linking epistemology and semio-cognitive modeling in visualization. *ZDM Mathematics Education*, 46, 159–170. doi: 10.1007/s11858-013-0565-8
- Duval, R. (2014b). Comment analyser le problème crucial de la compréhension des mathématiques? *UNIÓN - Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 37, 9-29.
- Eco, U. (1975). *Trattato di semiotica generale*. Milano: Bompiani.
- Eco, U. (1984). *Semiotica e filosofia del linguaggio*. Torino: Einaudi.
- Eco, U. (2007). *Dall'albero al labirinto. Studi storici sul segno e l'interpretazione*. Milano: Bompiani.
- Engeström, Y., Miettinen, R., & Punamäki, R.-L. (Eds.) (1999). *Perspectives on activity theory*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Enriques, F. (1936). *Il significato della storia del pensiero scientifico*. Bologna: Zanichelli.
- Enriques, F. (1942). L'errore nelle matematiche. *Periodico di matematiche*, serie IV, vol. XXII, 57-65. [Con lo pseudonimo di Giovannini A.].
- Epstein, Y. M., Suedfeld, P., & Silverstein, S. J. (1973). The experimental contract: Subjects' expectations of and reactions to some behaviors of experimenters. *American Psychologist*, 28(3), 212-221.
- Ernest, P. (1997). Introduction: Semiotics, mathematics and mathematics education. *The Philosophy of Mathematics Education Journal*, 10, 3-5.
- Ernest, P. (1998). The epistemological basis of qualitative research in mathematics education: A postmodern perspective. In A. R. Teppo (Ed.), *Qualitative Research Methods in Mathematics Education (Journal for Research in Mathematics Education, Monograph No. 9)*, (pp. 22-39). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Ernest, P. (2006). A semiotic perspective of mathematical activity: The case of number. *Educational Studies in Mathematics*, 61(1-2), 67-101.
- Ernest, P. (2010). Mathematics and metaphor. *Complicity: An International Journal of Complexity and Education*, 7(1), 98-104.

- Fandiño Pinilla, M. I. (2005). *Frazioni, aspetti concettuali e didattici*. Bologna: Pitagora.
- Fandiño Pinilla, M. I. (2008). *Molteplici aspetti dell'apprendimento della matematica*. Prefazione di Giorgio Bolondi. Trento: Erickson.
- Fennema, E. (1989). The study of affect and mathematics: A proposed generic model for research. In D. B. McLeod & V. M. Adams (Eds.), *Affect and mathematical problem solving: A new perspective* (pp. 205-219). New York: Springer.
- Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics*, 24(2), 139-162.
- Flick, U. (1998). *An introduction to qualitative research: Theory, method and applications*. London: Sage.
- Flick, U. (2002). *An introduction to qualitative research* (2nd ed.). London: Sage.
- Font, V., Godino, J. D., & Contreras, A. (2008). From representations to onto-semiotic configurations in analysing mathematics teaching and learning processes. In L. Radford, G. Schubring, & F. Seeger (Eds.), *Semiotics in mathematics education: Epistemology, history, classroom, and culture* (pp. 157-173). Rotterdam: Sense Publishers.
- Font, V., Godino, J. D., & D'Amore, B. (2007). An onto-semiotic approach to representations in mathematical education. *For the learning of mathematics*, 27(2), 2-7 and 14.
- Font, V., Godino, J. D., & D'Amore, B. (2010). Representations in mathematics education: An onto-semiotic approach. *International Journal for Studies in Mathematics Education*, 2(1), 58-86.
- Font, V., Godino, J. D., & Gallardo, J. (2013). The emergence of objects from mathematical practices. *Educational Studies in Mathematics*, 82(1), 97-124.
- Font, V., Godino, J. D., Planas, N., & Acevedo, J. I. (2010). The object metaphor and synecdoche in mathematics classroom discourse. *For the Learning of Mathematics*, 30(1), 15-19.
- Frega, R. (2004). John Dewey: Dal pragmatismo semantico al pragmatismo epistemologico. *Discipline filosofiche*, 14(1), 43-62.
- Frege, G. (1891). *Function and Concept*. Jena: Hermann Pohle.
- Frege, G. (1892). Über Sinn und Bedeutung. *Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik*, 100(1), 25-50.

- Freitas, J. L. M., & Rezende, V. (2013). Entrevista: Raymond Duval e a teoria dos registros de representação semiótica. *RPEM: Revista Paranaense de Educação Matemática*, 2(3), 10-34.
- Fumagalli, A. (2000). *Il reale nel linguaggio: Indicalità e realismo nella semiotica di Peirce*. Milano: Vita e Pensiero.
- Furth, H. G. (1968). Piaget's theory of knowledge: The nature of representation and interiorization. *Psychological Review*, 75(2), 143-154. doi: 10.1037/h0025515
- Furth, H. G. (1994). Representation in Piaget's theory. In N. V. Chavchavadze, G. Nodia, & P. Peachey (Eds.), *National identity as an issue of knowledge and morality: Georgian philosophical studies, I* (pp. 231-236). Washington, D.C.: Paideia Press & the Council for Research in Values and Philosophy.
- Gadamer, H.-G. (1989). *Truth and method* (2nd rev. ed.; J. Weinsheimer & D. G. Marshall, Trans.). New York: Crossroad. (1st English ed. published 1975).
- Gattis, M., & Holyoak, K. J. (1996). Mapping conceptual to spatial relations in visual reasoning. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition*, 22(1), 231-239.
- Giddings, L. S., & Grant, B. M. (2006). Mixed methods research for the novice researcher. *Contemporary Nurse*, 23, 3-11.
- Giorgi, A. (1989). One type of analysis of descriptive data: Procedures involved in following a scientific phenomenological method. *Methods: A Journal for Human Science*, 1, 39-61.
- Giusti, E. (1999). *Ipotesi sulla natura degli oggetti matematici*. Torino: Bollati Boringhieri.
- Glaser, B. G., & Strauss, A. L. (1967). *The discovery of grounded theory: Strategies for qualitative research*. Chicago: Aldine.
- Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 22(2-3), 237-284.
- Godino, J. D., & Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14(3), 325-355.
- Godino, J. D., & Batanero, C. (1998). Clarifying the meaning of mathematical objects as a priority area of research in mathematics education. In A. Sierpiska & J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics Education as a research domain: A search for identity* (pp. 177-195). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

- Godino, J. D., & Font, V. (2010). The theory of representations as viewed from the onto-semiotic approach to mathematics education. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, 9(1), 189-210.
- Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM—The International Journal on Mathematics Education*, 39(1-2), 127-135.
- Godino, J. D., Bencomo, D., Font, V., & Wilhelmi, M. R. (2006). Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas. *Paradigma*, 27(2), 221-252.
- Godino, J. D., Contreras, A., & Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques*, 26(1), 39-88.
- Godino, J. D., Font, V., Wilhelmi, M. R., & Lurduy, O. (2009). Sistemas de prácticas y configuraciones de objetos y procesos como herramientas para el análisis semiótico en educación matemática. *Semiotic Approaches to Mathematics, the History of Mathematics and Mathematics Education – 3rd Meeting* (pp. 1-22). Aristotle University of Thessaloniki. Retrieved from <http://www.ugr.es/~jgodino>
- Greene, J. C. (2006). Toward a methodology of mixed methods social inquiry. *Research in the Schools*, 13(1), 93-98.
- Guba, E. G. (1990). The alternative paradigm dialog. In E. G. Guba (Ed.), *The Paradigm Dialog* (pp. 17-27). Newbury Park, CA: Sage.
- Guba, E. G., & Lincoln, Y. S. (1982). Epistemological and methodological bases of naturalistic inquiry. *Educational Technology Research and Development*, 30(4), 233-252.
- Guba, E. G., & Lincoln, Y. S. (1994). Competing paradigms in qualitative research. In N. K. Denzin & Y. S. Lincoln (Eds.), *Handbook of Qualitative Research* (pp. 105-117). London: Sage.
- Guest, G., Bunce, A., & Johnson, L. (2006). How many interviews are enough? An experiment with data saturation and variability. *Field Methods*, 18, 59-82.
- Harper, D. (2001-2014). Diagram. *Online Etymology Dictionary*. Retrieved from <http://www.etymonline.com>
- Hart, K. (1989). There is little connection. In P. Ernest (Ed.), *Mathematics teaching: The state of the art* (pp. 138-142). London, UK: Falmer Press.

- Hatano, G. (1988). Social and motivational bases for mathematical understanding. In G. B. Saxe & M. Gearhart (Eds.), *Children's mathematics* (pp. 55-70). San Francisco: Jossey-Bass.
- Heidegger, M. (1962). *Being and time* (J. Macquarrie & E. Robinson, Trans.). London: SCM Press.
- Heron, J., & Reason, P. (1997). A participatory inquiry paradigm. *Qualitative Inquiry*, 3(3), 274-294.
- Hershkowitz, R., Bruckheimer, M., & Vinner, S. (1987). Activities with teachers based on cognitive research. In M. Lindquist & A. Schulte (Eds.), *Learning and teaching geometry, K-12, NCTM 1987 Yearbook* (pp. 222-235). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Hesse-Biber, S. N. (2010). *Mixed methods research: Merging theory with practice*. New York, NY: The Guilford Press.
- Hesse-Biber, S. N., & Leavy, P. (2011). *The practice of qualitative research*. Thousand Oaks, CA: Sage.
- Hickman, L. A. (1990). *John Dewey's pragmatic technology*. Bloomington: Indiana University Press.
- Hiles, D. (2006a). *Methodological diversity and the logic of human inquiry*. Paper presented at the 25th International Human Science Research Conference, Pleasant Hill, California, USA.
- Hiles, D. (2006b). *The logic of human inquiry: Epistemological and pluralistic issues*. Paper presented at the 6th European Qualitative Research Conference in Health and Social Care, Bournemouth, UK.
- Hiles, D. (2008). *Participatory perspectives on counselling research*. Keynote paper presented at Newport Centre for Counselling Research Conference, Newport, November 22nd, 2008. Retrieved from <http://psy.dmu.ac.uk/drhiles/papers.htm>
- Hitt, F. (2003). Le caractère fonctionnel des représentations. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 8, 255-271.
- Hjelmslev, L. (1943). *Omkring sprogteoriens grundlæggelse*. Copenhagen: Munksgaard. [Versione inglese: *Prolegomena to a Theory of Language*. Madison: University of Wisconsin, 1961].
- Hoffmann, M. H. G. (2010). Diagrams as scaffolds for abductive insights. *Workshops at the Twenty-Fourth AAAI Conference on Artificial Intelligence*, 42-49.

- Hoffmann, M. H. G. (2011). Cognitive conditions of diagrammatic reasoning. *Semiotica*, 186, 189-212.
- Hoffmann, M. H. G., & Roth, W.-M. (2007). The complementarity of a representational and an epistemological function of signs in scientific activity. *Semiotica*, 164, 101-121.
- Howe, K. (2004). A critique of experimentalism. *Qualitative Inquiry*, 10(4), 42-61.
- Husserl, E. (1900-01). *Logical Investigations*. (Findlay J.N., Trans., 1970). Vol. I. London: Routledge and Kegan Paul.
- Hutchins, E. (1995). *Cognition in the wild*. Cambridge, MA: MIT Press.
- Iori, M. (2014a). *Objects, signs and representations in the semio-cognitive analysis of the processes involved in teaching and learning mathematics*. Unpublished manuscript.
- Iori, M. (2014b). *The semio-cognitive dimension in the solution of mathematical problems*. Unpublished manuscript.
- James, W. (1907). *Pragmatism: A new name for some old ways of thinking*. New York, NY: Longmans, Green, and Company.
- Janvier, C. (Ed.) (1987). *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.
- Johnson, R. B. (2011). Do we need paradigms? A mixed methods perspective. *Mid-Western Educational Researcher*, 24(2), 31-40.
- Johnson, R. B., & Onwuegbuzie, A. J. (2004). Mixed methods research: A research paradigm whose time has come. *Educational Researcher*, 33(7), 14-26.
- Johnson, R. B., Onwuegbuzie, A. J., Turner, L. A. (2007). Toward a definition of mixed methods research. *Journal of Mixed Methods Research*, 1(2), 112-133.
- Keller, C. M., & Keller, J. D. (1996). *Cognition and tool use: The blacksmith at work*. New York: Cambridge University Press.
- Klaus, G. (1969). *Wörterbuch der Kybernetik*. Frankfurt: Fischer.
- Kuhn, T. S. (1962). *The structure of scientific revolutions*. Chicago: University of Chicago Press.
- Kuutti, K. (1991). Activity theory and its applications to information systems research and development. In H.-E. Nissen (Ed.), *Information Systems Research* (pp. 529-549). Amsterdam: Elsevier Science Publishers.
- Kvale, S., & Brinkmann, S. (2009). *InterViews: Learning the craft of qualitative research interviewing*. Thousand Oaks, CA: Sage.

- Lakoff, G., & Johnson, M. (1980). *Metaphors we live by*. Chicago: University of Chicago Press.
- Lakoff, G., & Johnson, M. (1999). *Philosophy in the flesh: The embodied mind and its challenge to Western thought*. New York: Basic Books.
- Lanfredini, R. (Ed.) (2006). *A priori materiale. Uno studio fenomenologico*. Milano: Guerini e Associati.
- Leibniz, G. W. (1875-1890). *Die philosophischen Schriften von Gottfried Wilhelm Leibniz*, 7 vols, C. I. Gerhardt (Ed.). Berlin: Weidmann. Reprint, Hildesheim: Georg Olms, 1965.
- Lenninger, S. (2006). Piaget and Vygotsky on the child becoming sign-minded. In G. Sonesson (Ed.), *Heterogénesis*. Konstföreningen Mulati Gil. Retrieved from <http://www.sol.lu.se/en/person/SaraLenninger>
- Liddell, H. G., & Scott, R. (1940). *A Greek-English lexicon*. Oxford: Clarendon Press.
- Lincoln, Y. S., & Guba, E. G. (1985). *Naturalistic inquiry*. Beverly Hills, CA: Sage.
- Locatello, S., Meloni, G., & Sbaragli, S. (2008). “Soli, muretti, regoli e coppie ...”. Riflessioni sull’uso acritico dei regoli Cuisenaire-Gattegno: I numeri in colore. *L’insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 31A(5), 455-483.
- Maddalena, G. (2009). *Metafisica per assurdo: Peirce e i problemi dell’epistemologia contemporanea*. Soveria Mannelli: Rubbettino.
- Marietti, S. (2001). *Icona e diagramma: Il segno matematico in Charles Sanders Peirce*. Milano: LED Edizioni Universitarie.
- Marton, F. (1981). Phenomenography: Describing conceptions of the world around us. *Instructional science*, 10(2), 177-200.
- Marton, F. (1986). Phenomenography: A research approach to investigating different understandings of reality. *Journal of Thought*, 21(3), 28-49.
- Marton, F., & Booth, S. (1997). *Learning and awareness*. Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum.
- Masterman, M. (1970). The nature of a paradigm. In I. Lakatos & A. Musgrave (Eds.), *Criticism and the growth of knowledge* (pp. 59-89). Cambridge: Cambridge University Press.
- Mauss, M., & Fauconnet, P. (1901). Sociologie. *Grande Encyclopédie*, vol. 30. (pp. 165-176). Paris: Société anonyme de la Grande Encyclopédie.
- McIntyre, R., & Smith, D. W. (1989). Theory of intentionality. In J. N. Mohanty & W. R. McKenna (Eds.), *Husserl’s Phenomenology: A Textbook* (pp. 147-179).

- Washington, D.C.: Center for Advanced Research in Phenomenology and University Press of America.
- Mead, G. H. (1934). *Mind, self, and society: From the standpoint of a social behaviorist*. Chicago, IL: The University of Chicago Press.
- Mead, G. H. (1966). *Mente, sé e società* (R. Tettucci, Trad. it.). Firenze: Giunti.
- Mead, G. H. (1996). *La voce della coscienza* (C. Bombarda, Ed.). Milano: Jaca Book.
- Merrell, F. (2009). Sign, mind, time, space: Contradictory complementary coalescence. *Semiotica*, 177, 29-116.
- Miettinen, R. (2000). The concept of experiential learning and John Dewey's theory of reflective thought and action. *International Journal of Lifelong Education*, 19(1), 54-72.
- Miettinen, R. (2001). Artifact mediation in Dewey and in cultural-historical activity theory. *Mind, Culture, and Activity*, 8(4), 297-308.
- Moore, G. E. (1903). The refutation of idealism. *Mind*, 12(48), 433-453.
- Morse, J. M. (1994). Designing funded qualitative research. In N. K. Denzin & Y. S. Lincoln (Eds.), *Handbook of qualitative research* (pp. 220-235). Thousand Oaks, CA: Sage.
- Morse, J. M. (1995). The significance of saturation. *Qualitative Health Research*, 5, 147-149.
- Mortari, L. (2010). Cercare il rigore metodologico per una ricerca pedagogica scientificamente fondata. *Education Sciences & Society*, 1(1), 143-156.
- Nardi, B. A. (1996). Studying context: A comparison of activity theory, situated action models, and distributed cognition. In B. A. Nardi (Ed.), *Context and consciousness: Activity theory and human-computer interaction* (pp. 69-102). Cambridge: MIT Press.
- Nelson, C., Treichler, P. A., & Grossberg, L. (1992). Cultural studies: An introduction. In L. Grossberg, C. Nelson, & P. A. Treichler (Eds.), *Cultural studies* (pp. 1-16). New York: Routledge.
- Nöth, W. (1995). *Handbook of semiotics*. Bloomington, IN: Indiana University Press.
- Nunan, D. (1992). *Research methods in language learning*. New York: Cambridge University Press.
- Oliver, P. (2006). Purposive sampling. In V. Jupp (Ed.), *The SAGE dictionary of social research methods* (pp. 244-245). London - Thousand Oaks - New Delhi: Sage.

- Onwuegbuzie, A. J., & Collins, K. M. T. (2007). A typology of mixed methods sampling designs in social science research. *The Qualitative Report*, 12(2), 281-316.
- Onwuegbuzie, A. J., & Daniel, L. G. (2003). Typology of analytical and interpretational errors in quantitative and qualitative educational research. *Current Issues in Education*, 6(2). Retrieved from www.ethiopia-ed.net/images/16212155.doc
- Onwuegbuzie, A. J., & Johnson, R. B. (2006). The validity issue in mixed research. *Research in the Schools*, 13(1), 48-63.
- Onwuegbuzie, A. J., & Leech, N. L. (2007). A call for qualitative power analyses. *Quality & Quantity: International Journal of Methodology*, 41, 105-121.
- Otte, M. (2001). *Mathematical epistemology from a semiotic point of view*. Paper presented to the Discussion Group on Semiotics in Mathematics Education Research at the 25th PME International Conference. The Netherlands, University of Utrecht.
- Otte, M. (2003). Does mathematics have objects? In what sense? *Synthese*, 134, 181-216.
- Otte, M. (2006). Proof and explanation from a semiotical point of view. In L. Radford & B. D'Amore (Eds.), *Semiotics, Culture and Mathematical Thinking* [Special Issue]. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 9(1), 23-43.
- Paavola, S. (2006). *On the origin of ideas: An abductivist approach to discovery* (Doctoral dissertation). Department of Philosophy, University of Helsinki.
- Paavola, S. (2011). Diagrams, iconicity, and abductive discovery. *Semiotica*, 186, 297-314.
- Palmer, R. E. (1969). *Hermeneutics: Interpretation theory in Schleiermacher, Dilthey, Heidegger, and Gadamer*. Evanston, IL: Northwestern University Press.
- Panza, M. (2009). Is the notion of mathematical object an historical notion? *Amazônia - Revista de Educação em Ciências e Matemáticas*, 6(11) (jul. 2009/dez. 2009) e 6(12) (jan. 2010/jun. 2010), 56-80.
- Panza, M., & Sereni, A. (2010). *Il problema di Platone. Un'introduzione storica alla filosofia della matematica*. Roma: Carocci.
- Pehkonen, E. (1995). What are the key factors for mathematics teachers to change? In L. Meira & D. Carraher (Eds.), *Proceedings of the 19th Conference of the*

- International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME)* (Vol. 2, pp. 178-185). Recife, Brazil: University of Pernambuco.
- Peirce, C. S. (1885). On the algebra of logic: A contribution to the philosophy of notation. *American Journal of Mathematics*, 7(2), 180-196.
- Peirce, C. S. (1886). The regenerated logic. *The Monist*, 7(1), 19-40.
- Peirce, C. S. (1902). *MS L75: Logic, Regarded As Semeiotic (The Carnegie application of 1902)* (J. Ransdell, Ed.), Arisbe Eprint. Retrieved from <http://www.iupui.edu/~arisbe/menu/library/bycsp/L75/175.htm>
- Peirce, C. S. (1906). Prolegomena to an apology for pragmatism. *The Monist*, 16(4), 492-546. (Reprinted in CP v. 4, paragraphs 530-572 and *Peirce on signs: Writings on semiotic*, 249-252).
- Peirce, C. S. (1981). *Scritti di logica* (A. Monti, Ed.). Firenze: La Nuova Italia.
- Peirce, C. S. (CP). (1931-1958). *Collected Papers*. I-VIII. Cambridge: Harvard University Press. In M. A. Bonfantini (Ed.) (2003), *Opere*. Milano: Bompiani.
- Peirce, C. S. (EP). *The Essential Peirce. Selected Philosophical Writings*. Vol. 1 (1867-1893), N. Houser & C. Kloesel (Eds.) (1992). Vol. 2 (1893-1913), The Peirce Edition Project (Eds.) (1998). Bloomington and Indianapolis: Indiana University Press.
- Peirce, C. S. (NEM). *The New Elements of Mathematics*, C. Eisele (Ed.) (1976). The Hague: Mouton Publishers.
- Peirce, C. S. (PPM). *Pragmatism as a Principle and Method of Right Thinking: The 1903 Harvard Lectures on Pragmatism*, P. A. Turrisi (Ed.) (1997). Albany: State University of New York Press.
- Peirce, C. S. (SS). *Semiotic and Significs: The correspondence between C. S. Peirce and Victoria Lady Welby*, C. S. Hardwick & J. Cook (Eds.) (1977). Bloomington: Indiana University Press.
- Peirce, C. S. (W). *The Writings of Charles S. Peirce*. Vol. 1, M. Fisch et al. (Eds.). Vol. 2, E. C. Moore et al. (Eds.). Vols. 3-5, C. Kloesel et al. (Eds.). Vol. 6, The Peirce Edition Project (Eds.). Bloomington: Indiana University Press, 1980-2000.
- Peters, F. E. (1967). *Greek philosophical terms: A historical lexicon*. New York: New York University Press.
- Piaget, J. (1923). *Le langage et la pensée chez l'enfant*. [The language and thought of the child (1st English edition, 1926)] Neuchatel: Delachaux et Niestle.

- Piaget, J. (1924). *Le jugement et le raisonnement chez l'enfant*. [Judgment and reasoning in the child (1st English edition, 1928)] Neuchatel: Delachaux et Niestle.
- Piaget, J. (1936). *La naissance de l'intelligence chez l'enfant*. Neuchâtel-Paris: Delachaux et Niestlé.
- Piaget, J. (1945). *La formation du symbole chez l'enfant: imitation, jeu et rêve, image et représentation*. Neuchâtel-Paris: Delachaux et Niestlé.
- Piaget, J., & Inhelder, B. (1966). *L'image mentale chez l'enfant: études sur le développement des représentations imaginées*. Paris: Presses Universitaires de France.
- Pianigiani, O. (1907). *Vocabolario etimologico della lingua italiana*. Roma-Milano: Società Editrice Dante Alighieri di Albrighi, Segati & C.
- Pohjola, P. (2007). Ontology, artefacts, and models of reasoning. *Studies in Computational Intelligence*, 64, 315-331.
- Polanyi, M. (1958). *Personal knowledge: Towards a post-critical philosophy*. Chicago, IL: The University of Chicago Press.
- Ponte, J. P., & Chapman, O. (2006). Mathematics teachers' knowledge and practices. In A. Gutiérrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (pp. 461-494). Rotterdam-Taipei: Sense Publishers.
- Ponte, J. P., Berger, P., Cannizzaro, L., Contreras, L. C., & Safuanov, I. (1999). Research on teachers' beliefs: Empirical work and methodological challenges. In K. Krainer, F. Goffree, & P. Berger (Eds.), *Proceedings of the First Conference of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME)* (Vol. 3, pp. 79-97). Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik, Osnabrück.
- Prediger, S., Bikner-Ahsbals, A., & Arzarello, F. (2008). Networking strategies and methods for connecting theoretical approaches: First steps towards a conceptual framework. *ZDM Mathematics Education*, 40, 165-178.
- Presmeg, N. (1985). *The role of visually mediated processes in high school mathematics: A classroom investigation* (Doctoral dissertation). University of Cambridge, Cambridge, UK.
- Presmeg, N. (2005). Metaphor and metonymy in processes of semiosis in mathematics education. In M. H. G. Hoffmann, J. Lenhard, & F. Seeger (Eds.), *Activity and sign: Grounding mathematics education* (pp. 105-115). New York: Springer.

- Presmeg, N. (2006). Research on visualization in learning and teaching mathematics. In A. Gutiérrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (pp. 205-235). Rotterdam: Sense Publishers.
- Presmeg, N. (2008). *An overarching theory for research in visualization in mathematics education*. Paper presented at the 11th International Congress in Mathematical Education (ICME 11), Monterrey, Mexico.
- Radford, L. (1997). On psychology, historical epistemology and the teaching of mathematics: Towards a socio-cultural history of mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 17(1), 26-33.
- Radford, L. (1998a). *On culture and mind, a post-Vygotskian semiotic perspective, with an example from Greek mathematical thought*. Paper presented at the 23rd Annual Meeting of the Semiotic Society of America, Victoria College, University of Toronto.
- Radford, L. (1998b). On signs and representations: A cultural account. *Scientia Paedagogica Experimentalis*, 35(1), 277-302.
- Radford, L. (1999). The rhetoric of generalization. *Proceedings of the 23rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 89-96). Haifa: Technion-Israel Institute of Technology.
- Radford, L. (2000a). Signs and meanings in students' emergent algebraic thinking: A semiotic analysis. *Educational Studies in Mathematics*, 42(3), 237-268.
- Radford, L. (2000b). Students' processes of symbolizing in algebra: A semiotic analysis of the production of signs in generalizing tasks. In T. Nakahara & M. Koyama (Eds.), *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME)* (Vol. 4, pp. 81-88). Japan: Hiroshima University.
- Radford, L. (2001). On the relevance of semiotics in mathematics education. *Proceedings of the PME 25 Conference*. Utrecht.
- Radford, L. (2002a). The seen, the spoken and the written: A semiotic approach to the problem of objectification of mathematical knowledge. *For the Learning of Mathematics*, 22(2), 14-23.
- Radford, L. (2002b). The object of representations: Between wisdom and certainty. In F. Hitt (Ed.), *Representations and Mathematics Visualization* (pp. 219-240). Mexico: Departamento de matemática educativa Cinvestav-IPN.

- Radford, L. (2003a). Gestures, speech, and the sprouting of signs: A semiotic-cultural approach to students' types of generalization. *Mathematical Thinking and Learning*, 5(1), 37-70.
- Radford, L. (2003b). On culture and mind: A post-Vygotskian semiotic perspective, with an example from Greek mathematical thought. In M. Anderson, A. Sáenz-Ludlow, S. Zellweger, & V. Cifarelli (Eds.), *Educational Perspectives on Mathematics as Semiosis: From Thinking to Interpreting to Knowing* (pp. 49-79). Ottawa: Legas Publishing.
- Radford, L. (2004). Cose sensibili, essenze, oggetti matematici ed altre ambiguità. *La matematica e la sua didattica*, 1, 4-23.
- Radford, L. (2005). La generalizzazione matematica come processo semiotico. *La matematica e la sua didattica*, 2, 191-213.
- Radford, L. (2006a). The anthropology of meaning. *Educational Studies in Mathematics*, 61(1-2), 39-65.
- Radford, L. (2006b). Tre tradizioni semiotiche: Saussure, Peirce e Vygotskij. *Rassegna*, 29, 34-39.
- Radford, L. (2006c). Algebraic thinking and the generalization of patterns: A semiotic perspective. In S. Alatorre, J. L. Cortina, M. Sáiz, & A. Méndez (Eds.), *Proceedings of the Twenty Eighth Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. November 9-12, 2006 (Vol. 1, pp. 2-21). Mérida, Mexico: Universidad Pedagógica Nacional.
- Radford, L. (2006d). Elementos de una teoría cultural de la objetivación. In L. Radford & B. D'Amore (Eds.), *Semiotics, Culture and Mathematical Thinking* [Special Issue]. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 9(1), 103-129.
- Radford, L. (2008a). Iconicity and contraction: a semiotic investigation of forms of algebraic generalizations of patterns in different contexts. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, 40(1), 83-96. doi: 10.1007/s11858-007-0061-0
- Radford, L. (2008b). Connecting theories in mathematics education: Challenges and possibilities. *ZDM Mathematics Education*, 40, 317–327.
- Radford, L. (2008c). Diagrammatic thinking: Notes on Peirce's semiotics and epistemology. *PNA*, 3(1), 1-18.

- Radford, L. (2009). Mathematical activity and classroom practice from a sociocultural perspective. In F. Spagnolo (Ed.), *Proceedings CIEAEM 61 – Montréal, Québec, Canada, July 26-31, 2009 “Quaderni di Ricerca in Didattica (Matematica)”*, 19, *Supplemento n. 2* (pp. 32-42). Palermo, Italy: Department of Mathematics.
- Radford, L. (2010). Signs, gestures, meanings: Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. In V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne, & F. Arzarello (Eds.), *Proceedings of the Sixth Conference of European Research in Mathematics Education (CERME 6)* (pp. XXXIII-LIII). Université Claude Bernard, Lyon, France.
- Radford, L. (2013a). Three key concepts of the theory of objectification: Knowledge, knowing, and learning. *Journal of Research in Mathematics Education*, 2(1), 7-44.
- Radford, L. (2013b). En torno a tres problemas de la generalización [Concerning three problems of generalization]. In L. Rico, M. C. Cañadas, J. Gutiérrez, M. Molina, & I. Segovia (Eds.), *Investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje a Encarnación Castro* (pp. 3-12). Granada, España: Editorial Comares.
- Radford, L. (2014). De la teoría de la objetivación. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, 7(2), 132-150.
- Radford, L., Schubring, G., & Seeger, F. (Eds.) (2008). *Semiotics in mathematics education: Epistemology, history, classroom, and culture*. Rotterdam: Sense Publishers.
- Ricoeur, P. (1971). The model of the text: Meaningful action considered as a text. *Social Research*, 38, 529-562.
- Rivera, F. D. (2011). *Toward a visually-oriented school mathematics curriculum: Research, theory, practice, and issues*. Dordrecht Heidelberg London New York: Springer.
- Rojas Garzón, P. J. (2014). *Articulación de saberes matemáticos: Representaciones semióticas y sentidos*. Prólogo di Bruno D'Amore. Bogotá: Editorial de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas.
- Rorty, R. (1979). *Philosophy and the mirror of nature*. Princeton: Princeton University Press.
- Rosenthal, R., & Rosnow, R. L. (Eds.) (1969). *Artifact in behavioral research*. New York, NY: Academic Press.

- Sáenz-Ludlow, A. (2006a). Classroom interpreting games with an illustration. *Educational Studies in Mathematics*, 61, 183-218.
- Sáenz-Ludlow, A. (2006b). Learning mathematics: Increasing the value of initial mathematical wealth. In L. Radford & B. D'Amore (Eds.), *Semiotics, Culture and Mathematical Thinking* [Special Issue]. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 9(1), 225-245.
- Sáenz-Ludlow, A., & Presmeg, N. (2006). Guest editorial: Semiotic perspectives on learning mathematics and communicating mathematically. *Educational Studies in Mathematics*, 61, 1-10.
- Sandelowski, M. (1995). Focus on qualitative methods: Sample sizes in qualitative research. *Research in Nursing & Health*, 18, 179-183.
- Santi, G. (2010). *Changes in meaning of mathematical objects due to semiotic transformations: A comparison between semiotic perspectives* (Doctoral thesis, University of Palermo, Italy). Retrieved from <http://www.dm.unibo.it/rsddm/it/articoli/santi/santi.htm>
- Sarantakos, S. (2005). *Social research*. Basingstoke: Palgrave Macmillan.
- Sarbo, J. J., Farkas, J. I., & van Breemen, A. J. J. (2011). *Knowledge in formation: A computational theory of interpretation*. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag.
- Saussure, F. de (1916). *Cours de linguistique générale*. Paris: Payot. [Trad. it.: De Mauro T. (Ed.) (1968), *Corso di linguistica generale*. Bari: Laterza].
- Sbaragli, S., & Santi, G. (2012). Le scelte dell'insegnante relative al concetto di angolo. *Bollettino dei docenti di matematica*, 65, 35-55.
- Schleicher, A. (1861/62). *Compendium der vergleichenden Grammatik der indogermanischen Sprachen*. (Kurzer Abriss der indogermanischen Ursprache, des Altindischen, Altiranischen, Altgriechischen, Altitalischen, Altkeltischen, Altslawischen, Litauischen und Altdeutschen.) (2 vols.). Weimar: H. Boehlau.
- Schubauer-Leoni, M. L. (1988). L'interaction expérimentateur-sujet à propos d'un savoir mathématique: La situation de test revisitée. In A. N. Perret-Clermont & M. Nicolet (Eds.), *Interagir et connaître* (pp. 251-264). Cousset: Delval.
- Schubring, G. (2011). Conceptions for relating the evolution of mathematical concepts to mathematics learning – epistemology, history, and semiotics interacting. To the memory of Carl Menger (1902-1985). *Educational Studies in Mathematics*, 77, 79-104.
- Schuppe, W. (1894). *Grundriss der Erkenntnistheorie und Logik*. Berlino: R. Gaertners.

- Schwandt, T. A. (2000). Three epistemological stances for qualitative inquiry: Interpretivism, hermeneutics, and social constructionism. In N. K. Denzin & Y. S. Lincoln (Eds.), *Handbook of Qualitative Research* (2nd ed., pp. 189-213). Thousand Oaks, CA: Sage.
- Sebeok, T. A. (Ed.) (1986). *Encyclopedic dictionary of semiotics*. Berlin: Mouton de Gruyter.
- Sfard, A. (2009). *Psicologia del pensiero matematico*. Trento: Erickson.
- Shaw, K. L., Davis, N. T., & McCarty, B. J. (1991). A cognitive framework for teacher change. In R. G. Underhill (Ed.), *Proceedings of the Thirteenth Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 161-167). Blacksburg, VA: Virginia Tech.
- Sherry, D. (2009). The role of diagrams in mathematical arguments. *Foundations of Science*, 14(1-2), 59-74.
- Short, T. L. (2007). *Peirce's theory of signs*. New York: Cambridge University Press.
- Silvonen, J. (2010). Vygotsky's plural discourse on the human mind. In P. Aunio, M. Jahnukainen, M. Kalland, & J. Silvonen (Eds.), *Piaget is dead, Vygotsky is still alive, or? An honorary book for professors Airi and Jarkko Hautamäki*. Helsinki: FERA.
- Skemp, R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics Teaching*, 77, 26-29.
- Steinbring, H. (2006). What makes a sign a *mathematical sign*? – An epistemological perspective on mathematical interaction. *Educational Studies in Mathematics*, 61(1-2), 133-162.
- Stjernfelt, F. (2007). *Diagrammatology: An investigation on the borderlines of phenomenology, ontology, and semiotics*. Synthese Library, 336. Dordrecht, The Netherlands: Springer.
- Stjernfelt, F. (2013). The generality of signs: The actual relevance of anti-psychologism. *Semiotica*, 194, 77-109.
- Strauss, A., & Corbin, J. (1990). *Basics of qualitative research: Grounded theory procedures and techniques*. Newbury Park, CA: Sage.
- Sumner, M. (2006). Ethics. In V. Jupp (Ed.), *The SAGE dictionary of social research methods* (pp. 96-98). London - Thousand Oaks - New Delhi: Sage.
- Tashakkori, A., & Teddlie, C. (1998). *Mixed methodology: Combining qualitative and quantitative approaches*. Thousand Oaks, CA: Sage.

- Tashakkori, A., & Teddlie, C. (2003). *Handbook of mixed methods in social & behavioral research*. Thousand Oaks, CA: Sage.
- Teppo, A. R. (1998). Qualitative research methods in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education, Monograph No. 9*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Vergel, R. (2014). *Formas de pensamiento algebraico temprano en alumnos de cuarto y quinto grados de educación básica primaria (9-10 años)* (Tesis Doctoral Laureada, Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia). Recuperado de <http://funes.uniandes.edu.co/4054/>
- Vygotskij, L. S. (1930). The instrumental method in psychology. In J. V. Wertsch (Ed.), *The concept of activity in Soviet psychology* (pp. 134-143). Armonk, NY: Sharpe.
- Vygotskij, L. S. (1978). *Mind in society: The development of higher psychological processes*. Cambridge, MA: Harvard University Press.
- Vygotskij, L. S. (1980). *Il processo cognitivo*. Torino: Boringhieri. (Lavoro originale pubblicato nel 1931).
- Vygotskij, L. S. (1990). *Pensiero e linguaggio: ricerche psicologiche*. Bari: Laterza. (Lavoro originale pubblicato nel 1934).
- Vygotskij, L. S. (1997). The problem of consciousness. In R. W. Rieber & J. Wollock (Eds.), *The Collected Works of L. S. Vygotsky. Volume 3: Problems of the Theory and History of Psychology* (pp. 129-138). New York: Plenum Press. (Original work published 1933).
- Vygotskij, L. S., & Luria, A. (1994). Tool and symbol in child development. In R. van der Veer & J. Valsiner (Eds.), *The Vygotsky reader* (pp. 99-174). Oxford: Blackwell Publishers.
- Webb, E. J., Campbell, D. T., Schwartz, R. D., & Sechrest, L. (1966). *Unobtrusive measures*. Chicago: Rand McNally.
- Webb, N. L. (1979). Processes, conceptual knowledge, and mathematical problem-solving ability. *Journal for Research in Mathematics Education, 10*(2), 83-93.
- Wertsch, J. V. (1998). *Mind as action*. New York: Oxford University Press.
- Wertsch, J. V., del Rio, P., & Alvarez, A. (Eds.) (1995). *Sociocultural studies of mind*. New York: Cambridge University Press.
- Wilson, S. (1977). The use of ethnographic techniques in educational research. *Review of Educational Research, 47*(1), 245-265.
- Wittgenstein, L. (1953). *Philosophische Untersuchungen*. Oxford: Basil Blackwell.

Zan, R. (1998). *Problemi e convinzioni*. Bologna: Pitagora.

Zan, R. (2007). *Difficoltà in matematica. Osservare, interpretare, intervenire*. Milano: Springer-Verlag.