

# **Concettualizzazione, registri di rappresentazioni semiotiche e noetica: interazioni costruttivistiche nell'apprendimento dei concetti matematici e ipotesi su alcuni fattori che inibiscono la devoluzione<sup>1</sup>**

D'Amore B. (2001). Concettualizzazione, registri di rappresentazioni semiotiche e noetica. *La matematica e la sua didattica*. 2, 150-173. Questo articolo è stato pubblicato anche in varie altre lingue.

Bruno D'Amore

N.R.D.  
Nucleo di Ricerca in  
Didattica della Matematica  
Dipartimento di Matematica  
Università di Bologna

Facoltà di Scienze  
della Formazione  
Libera Università di Bolzano  
Freie Universität Bozen  
Bressanone - Brixen (Bz)

Summary. Questo lavoro si ispira agli studi nei quali è stato pioniere indiscusso Raymond Duval (1988a,b,c, 1993), e si situa nel filone delle ricerche del NRD di Bologna, tese a rintracciare ed evidenziare le diverse ipotesi che stanno alla base della mancata devoluzione (Perrin Glorian, 1994), quindi alla base della scolarizzazione del sapere matematico (D'Amore, 1999a).

Summary. This study derives inspiration from the original discussions of Raymond Duval (1988a,b,c 1993), and forms part of the research being done by the NRD of Bologna University. It attempts to draw out and to substantiate the diverse hypotheses that lie at the foundations of unsuccessful devolution (Perrin Glorian, 1994), and therefore also at the foundations of the school long of mathematical awareness (D'Amore, 1999a).

---

<sup>1</sup> Lavoro eseguito nell'ambito del Programma di ricerca locale: *Ricerche sul funzionamento del sistema allievo-insegnante-sapere: motivazioni della mancata devoluzione*, finanziato ex 60%.

## 1. Concetto e concettualizzazione

Che cos'è un "concetto"?

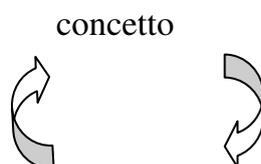
In (D'Amore, 1999b, 193-208) ho cercato di dare le idee di base attraverso le quali tentare una risposta a questa domanda apparentemente ingenua; quel che si arriva con certezza assoluta a constatare, però, è solo che la "definizione" si rivela, per molti motivi, di un'immensa complessità...

Una delle difficoltà è che all'idea di "concetto" partecipano tanti fattori e tante cause; per dirla in breve, e dunque in modo incompleto, non pare corretto affermare per esempio che il "concetto di retta" (supposto che esista) è quello che risiede nella mente degli scienziati che a questo argomento hanno dedicato la loro vita di studio e riflessione; sembra più corretto affermare invece che vi sia una forte componente per così dire "antropologica" che mette in evidenza l'importanza delle relazioni tra  $R_I(X,O)$  [rapporto istituzionale a quell'oggetto del sapere] e  $R(X,O)$  [rapporto personale a quell'oggetto del sapere] (sto usando simboli e termini tratti da Chevallard, 1992). Qui, ovviamente, "oggetto del sapere" sottointende "oggetto *matematico* del sapere", quello che Chevallard (1991, pag. 8) definisce:

«un emergente da un sistema di prassi dove sono manipolati oggetti materiali che si scompongono in differenti registri semiotici: registro orale, delle parole, o delle espressioni pronunciate; registro gestuale; dominio delle iscrizioni, ovvero ciò che scrive o si disegna (grafici, formule, calcoli, ...), vale a dire registro della scrittura».

Dunque, alla "costruzione" di un "concetto" parteciperebbe tanto la parte istituzionale (il Sapere) quanto la parte personale (di chiunque abbia accesso a tale Sapere, quindi non solo lo scienziato). Su questa posizione sono schierati diversi Autori; io qui mi limito a suggerire il lavoro Godino e Batanero (1994) perché questo articolo è di straordinaria importanza nel dibattito nel quale sto tentando di inserirmi, in quanto tratta proprio dei rapporti tra significati istituzionali e personali degli oggetti matematici.

Ma allora, distinguere il "concetto" dalla sua costruzione non è facile e, forse, non è né possibile né auspicabile: un concetto è, per così dire, continuamente in fase di costruzione ed in questa stessa costruzione sta la parte più problematica e dunque ricca del suo significato:



costruzione      costruzione

significato

Potremmo chiamare, come fanno altri Autori, tale costruzione: *concettualizzazione*, e chiederci che cosa sia e come avvenga. Nel tentativo di far luce su questo argomento, molti autorevoli studiosi hanno proposto ipotesi e teorie sulle quali non entro in dettagli, rinviando ancora, per una rapida carrellata, a D'Amore (1999b); basti ricordare i contributi (spesso tra loro in ferma opposizione) di Vygotskij, di Piaget, di Gal'perin, di Bruner, di Gagné,... tanto per limitarmi solo ai più noti.

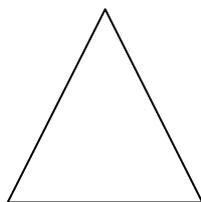
Addentrarsi in questa avventura, conduce a rendersi conto almeno di una cosa: che la seconda domanda (*Che cos'è o Come avviene la concettualizzazione?*) resta fundamentalmente un mistero...

Un passo chiarificatore molto profondo è stato tentato da Vergnaud (1990) che unifica nel concetto la sua stessa componente costruttiva; secondo Vergnaud, il punto decisivo nella concettualizzazione (e nella didattica, ma questo è un discorso più specifico, che dovrò riprendere e sviluppare tra breve) è il passaggio dai *concetti-come-strumento* ai *concetti-come-oggetto* ed un'operazione linguistica essenziale in questa trasformazione è la *nominalizzazione*; egli intende con "concettualizzazione" proprio questa appropriazione consapevole, quando propone la seguente definizione: un concetto C è la terna (S, I, S) dove S è il referente, I il significato ed S il significante.

L'idea di Vergnaud potrebbe essere considerata come una possibile conclusione di un filone "classico", quello che passa attraverso i tre famosi cosiddetti "triangoli" (bibliografia specifica in: D'Amore, 1999b):

il triangolo di Charles Sanders Peirce [1839-1914], oggetto di pubblicazione nel 1883:

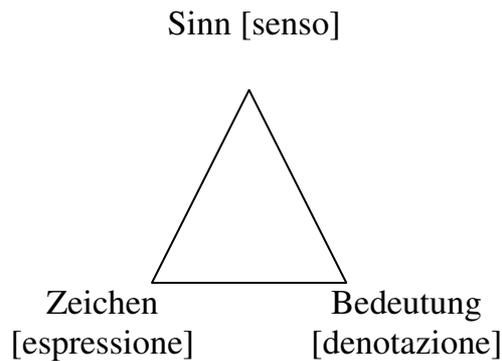
interpretante



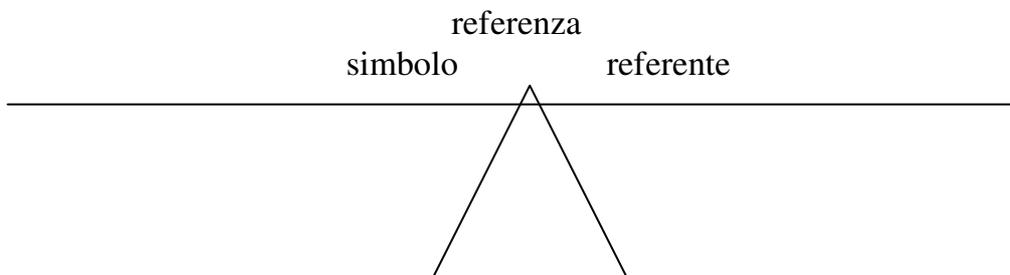
rappresentante

oggetto

il triangolo di Gottlob Frege [1848-1925], oggetto di pubblicazione nel 1892:



il triangolo di C. K. Ogden ed I. A. Richards, che avrebbe voluto essere un compendio di quei due, oggetto di pubblicazione nel 1923:



Resta il fatto che *appropriarsi* di un concetto (qualsiasi cosa ciò significhi) richiede comunque sempre ben più che *nominarlo* (la questione risale almeno al Medioevo)... (D'Amore, 1999b).

Ora, lungi da me l'idea di tentare una teoria generale di queste cose; ma, certo, il caso della matematica è, in questo settore, peculiare; ciò, almeno per tre motivi:

- ogni concetto matematico ha rinvii a "non-oggetti"; dunque la concettualizzazione non è e non può essere basata su significati che poggiano sulla realtà concreta; in altre parole in matematica non sono possibili rinvii ostensivi
- ogni concetto matematico è costretto a servirsi di rappresentazioni, dato che non vi sono "oggetti" da esibire in loro vece o a loro

evocazione;<sup>2</sup> dunque la concettualizzazione deve necessariamente passare attraverso registri rappresentativi che, per vari motivi, soprattutto se sono a carattere linguistico, non possono essere univoci

- si parla più spesso in matematica di “oggetti matematici” che non di concetti matematici in quanto in matematica si studiano preferibilmente oggetti piuttosto che concetti; «la nozione di oggetto è una nozione che non si può non utilizzare dal momento in cui ci si interroga sulla natura, sulle condizioni di validità o sul valore della conoscenza» (Duval, 1998).

È assolutamente necessario sottolineare che il termine “concetto” che qui si userà nel seguito, non rinvia affatto alle stesse occorrenze ed allo stesso uso che ne fanno Piaget, Kant, Vergnaud, Vygotskij, Chavallard, da me citati. Nel sentiero tracciato da Duval, la nozione di concetto, preliminare o comunque prioritaria in quasi tutti gli Autori, diventa secondaria, mentre ciò che assume carattere di priorità è la coppia (*segno, oggetto*), come metterò in evidenza ancora meglio nel prossimo paragrafo, al momento in cui farò riferimento al *paradosso cognitivo del pensiero matematico*, evidenziato proprio da Duval (1993, pag. 38). In Duval (1996) si cita un passo di Vygotskij nel quale sostanzialmente si dichiara che non c'è concetto senza segno:

«Tutte le funzioni psichiche superiori sono unite da una caratteristica comune superiore, quella di essere dei processi mediati, cioè di includere nella loro struttura, come parte centrale ed essenziale del processo nel suo insieme, l'impiego del segno come mezzo fondamentale di orientamento e di dominio dei processi psichici... L'elenco centrale [del processo di formazione dei concetti] è l'uso funzionale del segno, o della parola, come mezzo che permette all'adolescente di sottomettere al suo potere le proprie operazioni psichiche, di dominare il corso dei propri processi psichici...» (Vygotskij, 1962; nell'ed. francese, 1985, alle pagg. 150, 151, 157).

A proposito di questa citazione di Vygotskij o, meglio, approfittando di essa, è bene compiere una rapida considerazione a proposito della parola “segno”, suggeritami da conversazioni e scambi di idee con Raymond Duval, in quanto, egli afferma, presso alcuni studiosi di

---

<sup>2</sup> Qui “oggetto” è inteso nel senso di “oggetto reale” o di “cosa”. Che cosa ciò significhi è ben espresso nella *Metafisica* di Aristotele, quando afferma che la cosa, in quanto parte del reale, è ciò che presenta le tre caratteristiche seguenti: tridimensionalità, accessibilità sensoriale multipla (cioè di più sensi alla volta) indipendente dalle rappresentazioni semiotiche e possibilità di separazione materiale e da altre parti della realtà, da altre “cose”.

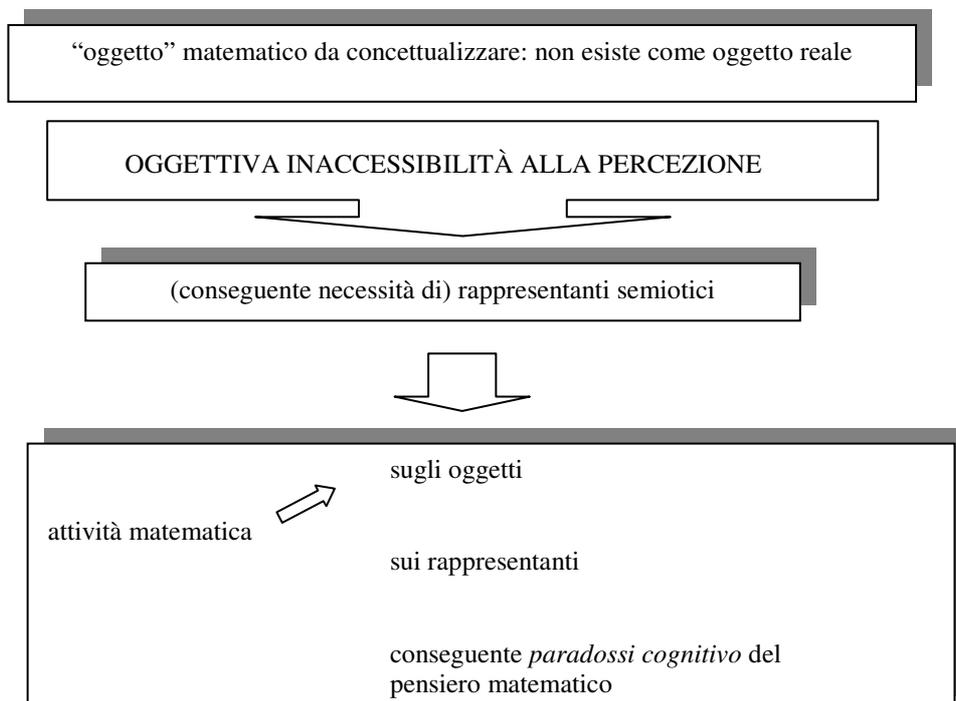
didattica si scorge una riduzione del *segno* ai *simboli convenzionali* che connotano direttamente e isolatamente degli oggetti.

In riferimento a De Saussure (1915) (che Vygotskij conosceva bene a causa della sua formazione di linguista) non c'è segno fuori da un "sistema di segni". Per esempio, le parole non hanno significato che all'interno del sistema di una lingua (da qui i problemi ben noti di traduzione). Quando in Duval (e dunque qui) si parla di "registro di rappresentazione semiotica" ci si riferisce ad un sistema di segni che permette di riempire le funzioni di comunicazione, trattamento e di oggettivazione, e non ci si riferisce invece a delle notazioni convenzionali che non formano un sistema. Per esempio, la numerazione binaria, o quella decimale, formano un sistema, ma non le lettere o i simboli che si utilizzano per indicare delle operazioni algebriche. Forse converrebbe allora tradurre Vygotskij ponendo in luogo della parola "segno" la locuzione "sistema di segni".

Si noti anche che da questo punto di vista e contrariamente all'opinione diffusa, un sistema semiotico non è uno strumento: esso è costitutivo del funzionamento stesso del pensiero e della conoscenza. Solo un codice che venga usato per ricodificare un messaggio già espresso, può essere uno strumento.

## 2. Il caso della matematica

Molto più che un discorso a parole, mi sembra possa essere efficace il seguente schema:





Vediamo in che cosa consiste questo *paradosso* (Duval, 1993, pag. 38; la traduzione è mia, concordata con l'Autore):

«(...)da una parte, l'apprendimento degli oggetti matematici non può che essere un apprendimento concettuale e, d'altra parte, è solo per mezzo di rappresentazioni semiotiche che è possibile un'attività su degli oggetti matematici. Questo paradosso può costituire un vero circolo vizioso per l'apprendimento. Come dei soggetti in fase di apprendimento potrebbero non confondere gli oggetti matematici con le loro rappresentazioni semiotiche se essi non possono che avere relazione con le sole rappresentazioni semiotiche? L'impossibilità di un accesso diretto agli oggetti matematici, al di fuori di ogni rappresentazione semiotica, rende la confusione quasi inevitabile. E, al contrario, come possono essi acquisire la padronanza dei trattamenti matematici, necessariamente legati alle rappresentazioni semiotiche, se non hanno già un apprendimento concettuale degli oggetti rappresentati? Questo paradosso è ancora più forte se si identifica attività matematica ed attività concettuale e se si considera le rappresentazioni semiotiche come secondarie o estrinseche».

In questo paradosso, così ben evidenziato da Raymond Duval, si può nascondere una potenziale causa di mancate devoluzioni?

Secondo l'insegnante, secondo la noosfera e secondo lo stesso studente, egli (studente) sta entrando in contatto con un "oggetto" matematico ma, di fatto, e nessuno talvolta sembra rendersene conto, lo studente sta entrando a contatto solo con una rappresentazione semiotica particolare di quell'"oggetto". Lo studente non ha, non può avere, accesso diretto all'"oggetto" e l'insegnante e la noosfera confondono le due cose; lo studente è come bloccato, come inibito: non può far null'altro che confondere "oggetto" e sua rappresentazione semiotica perché non se ne rende conto, non lo sa. E quindi, di fronte ad un successivo bisogno concettuale, che si manifesta per esempio con la necessità di modificare la rappresentazione semiotica di quello stesso "oggetto", lo studente non ha mezzi critici né culturali né cognitivi; l'insegnante e la noosfera non capiscono il perché ed accusano lo studente, colpevolizzandolo di

qualche cosa che egli non capisce.

In realtà: in questa fase paradossale, nessuno capisce più quel che sta accadendo in quanto ciascuno degli attori di questa avventura ha una percezione diversa del problema.

D'altra parte, l'analisi delle rappresentazioni è fatto nuovo, nello studio dei processi cognitivi. Anche se lo è meno sul piano strettamente filosofico. Scrive Duval (1998):

«L'analisi delle rappresentazioni è cominciata dal momento in cui ci si è interrogati sulle condizioni di validità della conoscenza e che si è scoperto che ogni conoscenza è inseparabile da un'attività di rappresentazione. La terza delle *Meditationes Metaphysicae* di Cartesio è il primo testo nel quale la problematica di una tale analisi si trova sviluppata esplicitamente. Essa è interamente centrata sul contenuto delle rappresentazioni».

Ma dovrò affrontare questa questione con assai più dettagli e con molta più specificità. Per fare questo, devo affrontare una lunga spiegazione su un aggettivo presente nel titolo.

### **3. Apprendimento, costruttivismo, simbolizzazione**

Perché nel titolo ho messo l'aggettivo "costruttivistiche"?

Per rispondere a questa domanda, devo partire da lontano, ispirandomi a Moreno Armella (1999).

Nella *Critica della ragion pura*, Kant postula che la conoscenza sia il risultato di un contatto tra un soggetto apprendente ed un oggetto di conoscenza. Egli ricorre ad un paragone: così come il liquido adotta la forma del recipiente che lo contiene, le impressioni sensoriali adottano le forme che sono loro imposte dalle strutture cognitive. Ma perché ciò avvenga, ed è la ben nota ipotesi forte di Kant, occorrono forme innate di sensibilità, come spazio, tempo, causalità, permanenza dell'oggetto, permanenza ed usabilità di esperienze precedenti etc.

La conoscenza dunque non è più banalmente rappresentazione della realtà esterna; essa è invece il risultato dell'interazione tra il soggetto apprendente (le sue strutture cognitive) e le sue "esperienze sensoriali". Inoltre il soggetto apprendente abbandona la tipica passività (cartesiana o lockiana) e costruisce, struttura le sue esperienze, partecipando attivamente al processo apprenditivo in una vera e propria *costruzione*. Si tratta di una trasformazione: un oggetto

di conoscenza, entrando in contatto con un soggetto apprendente, viene trasformato, ri-costruito, grazie agli strumenti conoscitivi che questi possiede.

Per capire bene la posizione kantiana, mi servirò di Duval (1998); è essenziale capire che da Cartesio a Kant è comune la problematica dei rapporti tra rappresentazione e oggetto: si passa dal contenuto delle rappresentazioni del soggetto agli oggetti di conoscenza (scientifica). Se si vogliono analizzare le rappresentazioni nel loro rapporto agli oggetti rappresentati, si hanno rapporti in termini di *causalità*: in Cartesio si fa l'ipotesi di una corrispondenza tra il contenuto della rappresentazione e l'oggetto rappresentato; in Kant si passa, come volevo mettere in evidenza, all'analisi di ricerche sull'organizzazione interna del soggetto, per passare dal contenuto all'oggetto. Infine, qual è la natura delle rappresentazioni?<sup>3</sup> I processi di pensiero sono processi puramente mentali, tanto in Cartesio quanto in Kant, il che implica uno stretto legame tra le rappresentazioni del soggetto e gli oggetti.

Tutto ciò costituisce, secondo Duval (1998), la “prima tappa”; tale posizione verrà superata in una “seconda tappa” da Bolzano all'Hilbert del 1904 e poi da una “terza tappa” che va dall'Hilbert del 1922 a Turing e Von Neumann.

Torniamo a Kant.

Da dove provengono appunto proprio quegli strumenti conoscitivi che servono per trasformare le esperienze del soggetto? L'epistemologia dell'apprendimento di Kant, per usare una terminologia moderna, si riferisce ad un soggetto apprendente adulto, dunque già dotato di un linguaggio sviluppato, con capacità di astrazione e di generalizzazione. È lecito porsi la seguente domanda: come cambia tutto ciò se parliamo di apprendimento in ambiente scolastico, di giovani soggetti apprendenti (bambini o adolescenti o giovani) alle prime armi, con linguaggi ancora in via di elaborazione?

Non è del tutto assurdo pensare che l'epistemologia costruttivista abbia avuto origine dal bisogno di dare risposta proprio a questo problema. Piaget, nel 1937, si esprimeva così:

«.. la conoscenza del mondo esterno comincia da una utilizzazione

---

<sup>3</sup> Può essere interessante quel che Kant scrive a proposito della stessa parola *rappresentazione*: «La parola *rappresentazione* è ben compresa ed impiegata con fiducia, benché il suo significato non possa mai essere esplicitato da una definizione» (Kant, cit. da Duval, 1998, all'inizio del paragrafo 1).

immediata delle cose [...] l'intelligenza non comincia così né dalla conoscenza dell'io né dalle cose in quanto tali ma dalla loro interazione e, orientandosi simultaneamente verso i due poli di questa interazione, l'intelligenza organizza il mondo, organizzando sé stessa» (Piaget, 1937).

Il sapere acquisito può dunque essere visto come il prodotto dell'elaborazione dell'esperienza con la quale entra in contatto il soggetto apprendente; e questa elaborazione consiste nell'interazione tra l'individuo ed il suo ambiente e nel modo in cui l'individuo interiorizza il mondo esterno. Quali che siano le peculiarità di queste "attività", il soggetto apprendente deve impegnarsi in un qualche cosa che necessariamente lo porta a simbolizzare. Si tratta di una necessità tipicamente umana, l'unica sulla quale tutti gli Autori concordano! Si tratta di un'elaborazione (con caratteristiche interne o sociali o entrambe) che si organizza attorno o nei sistemi semiotici di rappresentazione.

Si può dire di più: che la conoscenza "è" l'intervento e l'uso dei segni. Dunque, il meccanismo di produzione e d'uso, soggettivo ed intersoggettivo, di questi segni e di rappresentazione degli "oggetti" dell'acquisizione concettuale, è cruciale per la conoscenza.

In questo senso, accetto e faccio mio quel che Moreno Armella (1999) enuncia come «un principio che ci sembra essenziale rispettare: *ogni azione cognitiva è un'azione mediata da strumenti materiali o simbolici*». La conoscenza dipende anche e proprio da quegli strumenti di mediazione che mettiamo in campo per la sua costruzione, e dall'insieme e dal tipo di significazioni che tali strumenti ricevono dall'intorno sociale.

Ora, tutto ciò era già stato previsto nel programma dell'epistemologia costruttivista, ed espresso nel modo seguente:

«...] l'azione non ha luogo solo come risultato degli impulsi interni [...] Nella sua esperienza, le situazioni che il bambino incontra sono generate dal suo intorno sociale e gli oggetti appaiono situati in contesti che danno loro il significato specifico. Il bambino non assimila oggetti puri [...] assimila le situazioni nelle quali gli oggetti hanno ruoli specifici. Nella misura in cui il suo sistema di comunicazione si fa più complesso [...] quel che possiamo chiamare esperienza diretta degli oggetti resta subordinata [...] al sistema di interpretazioni somministrato dall'intorno sociale» (Piaget, Garcia, 1983, cap. IX).

È fuor di dubbio che la conoscenza, a scuola, ed il suo apprendimento come costruzione siano condizionati da situazioni specifiche

dell'istituzione. Dunque l'apprendere a scuola non è l'apprendere *tout court!* I problemi dell'apprendimento matematico a scuola, prima ancora di essere di ordine epistemologico, pertengono a quell'ambiente socioculturale così specifico.<sup>4</sup>

Da queste considerazioni condivisibili, nascono però alcune riflessioni che si rivelano presto necessarie. Se semplicemente si trasportano, per così dire, a scuola le tesi dell'epistemologia costruttivista, ci si trova di fronte ad affermazioni del tipo: «Lo studente costruisce la propria conoscenza»; o, più radicalmente: «Ogni studente costruisce *la sua propria versione* della conoscenza». Ma, vista la specificità dell'ambiente scuola, nascono domande la cui risposta sembra lontana; per esempio, come possiamo verificare che le costruzioni del sapere dello studente siano compatibili con quelle dei suoi compagni, con le esigenze dell'istituzione, con le attese dell'insegnante?

Se è vero, come è vero, che ogni conoscenza (matematica, in particolare) riflette allo stesso tempo una dimensione sociale ed una personale, la scuola non è un'eccezione, ma addirittura il luogo dove si istituzionalizza questa doppia natura.

Durante l'apprendimento della matematica, gli studenti vengono introdotti ad un nuovo mondo, concettuale e simbolico (soprattutto rappresentativo). Questo mondo non è il frutto di una costruzione solitaria, ma il frutto di una vera e complessa interazione con i membri della microsocietà di cui il soggetto apprendente è parte: i propri compagni e gli insegnanti (e la noosfera, a volte sfumata, a volte pressante) (Chevallard, 1992). E grazie ad un continuo dibattito sociale che il soggetto apprendente prende coscienza del conflitto tra “concetti spontanei” e “concetti scientifici”; insegnare non consiste solo nel tentativo di generalizzare, amplificare, rendere più critico il “senso comune” degli studenti, si tratta di un'azione ben più complessa, come ci ha insegnato Vygotskij in *Pensiero e Linguaggio* (1962):

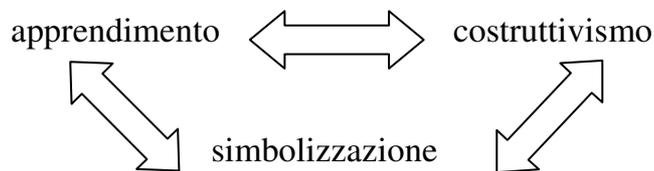
«Come sappiamo grazie alle ricerche sul processo di formazione dei concetti, un concetto è qualcosa di più che non la somma di certi vincoli associativi formati dalla memoria [...] è un autentico e complesso atto di pensiero che non si può insegnare mediante l'esercitazione e al quale si può arrivare solo quando lo sviluppo mentale del bambino ha raggiunto il livello richiesto [...]. Lo sviluppo dei concetti, o significati delle parole, presuppone lo sviluppo di molte

---

<sup>4</sup> Questa prospettiva socioculturale così peculiare ha notevolmente influenzato gli studi educativi (Wertsch, 1993).

funzioni intellettuali (attenzione, memoria logica, astrazione, capacità di paragonare e differenziare). Anche l'esperienza dimostra che l'insegnamento diretto dei concetti è impossibile e sterile. Un insegnante che tenta di fare questo, normalmente non raggiungerà nulla, se non un vuoto verbalismo».

**Apprendere** sembra dunque essere una **costruzione** sottoposta al bisogno di “socializzare”, il che avviene ovviamente grazie ad un mezzo comunicativo (che può essere il linguaggio) e che nella matematica sempre più decisamente sarà condizionato dalla scelta del mediatore **simbolico**, cioè, poi, del registro di rappresentazione prescelto (o imposto, a vario titolo, anche solo dalle circostanze). [Il che spiega finalmente il titolo di questo paragrafo].



#### 4. Semiotica e noetica nell'apprendimento della matematica

In Matematica, l'acquisizione concettuale di un oggetto passa necessariamente attraverso l'acquisizione di una o più rappresentazioni semiotiche. Lo dice per primo Duval, presentando la problematica dei registri, nei celebri articoli del 1988 pubblicati sugli *Annales* (1988a, 1988b, 1988c) [dei quali il lavoro del 1993 costituisce un primo tentativo di sintesi (1993); ma Duval pubblica su questo argomento anche lavori nel 1989 e 1990]; lo confermano Chevallard (1991), Godino e Batanero (1994).

Dunque, prendendo a prestito da Duval: **non c'è noetica senza semiotica.**

Tanto per chiarezza terminologica, ma senza alcuna pretesa di completezza, dato che non sempre questi termini sono usati nello stesso senso preferisco esplicitarne i significati dei quali mi servo:

semiotica =<sub>df</sub> acquisizione di una rappresentazione realizzata per

mezzo di segni

noetica =<sub>df</sub> acquisizione concettuale di un oggetto<sup>5</sup>

Intenderò, d'ora in poi:

$r^m$  =<sub>df</sub> registro semiotico ( $m = 1, 2, 3, \dots$ )

$R^m_i(A)$  =<sub>df</sub> rappresentazione semiotica  $i$ -esima ( $i = 1, 2, 3, \dots$ ) di un contenuto  $A$  nel registro semiotico  $r^m$

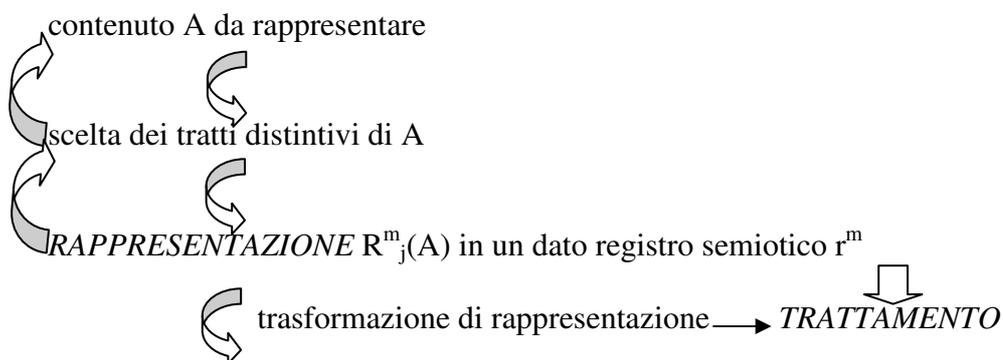
Si può notare che, in base a queste scelte, se cambia il registro semiotico cambia necessariamente anche la rappresentazione semiotica, mentre non è detto il viceversa; cioè può cambiare la rappresentazione semiotica pur mantenendosi lo stesso registro semiotico.

Ancora una volta, uso un grafico per illustrare la questione, perché mi sembra più incisivo ed efficace:<sup>6</sup>

**caratteristiche  
della  
semiotica**

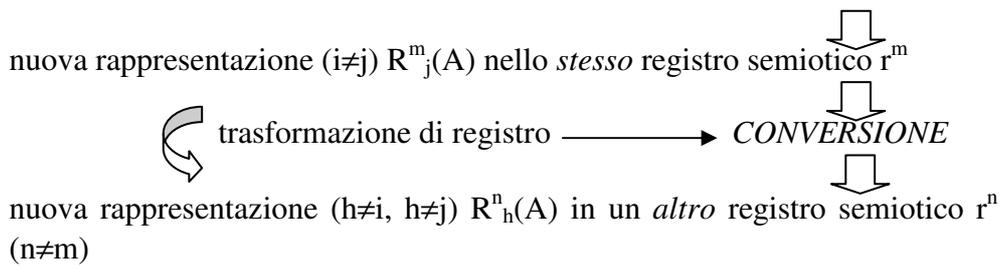
{ *rappresentazione*  
*trattamento*  
*conversione*

{ queste tre sono  
attività cognitive  
diverse



<sup>5</sup> Per Platone, la noetica è l'atto di concepire attraverso il pensiero, per Aristotele, l'atto stesso di comprensione concettuale.

<sup>6</sup> Faccio ancora riferimento a Duval (1993).



( $m, n, i, j, h = 1, 2, 3, \dots$ )

Si notino le frecce che vanno, nella prima parte del grafico, dal basso verso l'alto. Esse hanno la ragion d'essere seguente. I tratti distintivi fissati del contenuto  $A$  dipendono dalle capacità semiotiche di rappresentazione del registro scelto. Scegliendo un registro diverso si fisserebbero altri tratti di  $A$ . Ciò dipende dal fatto che due rappresentazioni dello stesso oggetto, ma in registri diversi, hanno contenuti diversi.

### Caratteristiche della noetica

L'acquisizione concettuale di un oggetto matematico si basa su due sue caratteristiche "forti" (Duval, 1993):

1. l'uso di più registri di rappresentazione semiotica è tipica del pensiero umano
2. la creazione e lo sviluppo di sistemi semiotici nuovi è simbolo (storico) di progresso della conoscenza.

Queste considerazioni mostrano l'interdipendenza stretta tra noetica e semiotica, come si passa dall'una all'altra: non solo dunque non c'è noetica senza semiotica, ma la semiotica viene assunta come caratteristica necessaria per garantire il primo passo verso la noetica.

A questo punto è doverosa una precisazione sulla teoria che da anni sta sviluppando Raymond Duval.

In essa, egli accorda alla conversione un posto centrale rispetto alle altre funzioni, ed in particolare rispetto a quella di trattamento, considerata dai più come decisiva dal punto di vista matematico.

Perché? A mio avviso, per almeno tre ragioni distinte:

1. La conversione cozza contro dei fenomeni di non congruenza che sono per nulla concettuali (in quanto legati al senso stesso della

conversione). Questi fenomeni di non congruenza costituiscono l'ostacolo più stabile osservabile nell'apprendimento della matematica, a tutti i livelli ed in tutti i domini.

2. La conversione permette di definire delle variabili cognitive indipendenti, il che rende possibile costruire delle osservazioni e delle sperimentazioni relativamente precise e fini. Certo, una volta validate attraverso una ricerca molto metodica, esse possono poi essere utilizzate come delle variabili didattiche. Dunque, Duval non lavora al livello dell'osservazione di una classe per settimane, ma piuttosto si comporta come fanno un biologo o un medico, quando vogliono capire il funzionamento del cervello.

3. La conversione, in casi di non congruenza, presuppone una coordinazione dei due registri di rappresentazione mobilizzati, coordinazione che non è mai data in partenza e che non si costruisce spontaneamente basandosi sul solo fatto che si facciano effettuare delle attività matematiche didatticamente interessanti. Ciò che si chiama la "concettualizzazione" comincia realmente solo quando si mette in moto, anche solo abbozzandola, la coordinazione di due distinti registri di rappresentazione.

La teoria dei registri deve essere valutata basandosi sugli apporti relativi alla ricchezza, alla novità delle osservazioni, così come alla novità delle attività di apprendimento che le variabili cognitive permettono di definire. E non in rapporto a delle decisioni a priori su che cos'è la matematica o in base a considerazioni globalizzanti non controllabili attraverso metodologie precise.

È ogni singolo allievo che apprende, e nessuno può apprendere (o comprendere) al posto di un altro! Inoltre, la riuscita di un'azione didattica non si giudica immediatamente, ma solo alcuni anni più tardi: ci sono molti casi di riuscita immediata che si rivelano poi essere degli insuccessi, a distanza di tempo...

Ecco, dunque, perché Duval insiste sul carattere centrale della conversione; è questo il punto decisivo, quel che veramente differenzia la sua teoria dei registri, rispetto a tutto quel che si può dire e si usa dire su segni e semiotica, o sul cognitivo.

Ma questo punto, dovrà essere ulteriormente indagato in futuro, molto più approfonditamente...

## 5. Costruzione della conoscenza matematica e registri di rappresentazione semiotica: un tentativo di “definizione” di *costruzione*

La costruzione dei concetti matematici è dunque strettamente dipendente dalla capacità di usare *più* registri di rappresentazioni semiotiche di quei concetti:

- ① di *rappresentarli* in un dato registro
- ② di *trattare* tali rappresentazioni all'interno di uno stesso registro
- ③ di *convertire* tali rappresentazioni da un dato registro ad un altro

L'insieme di questi tre elementi e le considerazioni dei precedenti paragrafi 2 e 3, mettono in evidenza il profondo legame che c'è tra noetica e costruttivismo: che cosa vuol dire “costruzione della conoscenza in matematica” se non proprio l'unione di quelle tre “azioni” sui concetti, cioè l'espressione stessa della capacità di *rappresentare* i concetti, di *trattare* le rappresentazioni ottenute all'interno di un registro stabilito e di *convertire* le rappresentazioni da un registro ad un altro?

È come se si stessero specificando le operazioni-base che, nel loro insieme, definiscono quella “costruzione” che, altrimenti, resta un termine misterioso ed ambiguo, disponibile ad ogni sorta di interpretazione, anche metafisica.<sup>7</sup>

Si noti ancora che, da un punto di vista cognitivo, si deve accordare più importanza al punto 3 (la conversione) piuttosto che al punto 2 (il trattamento) perché ciò permette di definire le variabili indipendenti sia per l'osservazione sia per l'insegnamento.

Ma da un punto di vista matematico si usa accordare più importanza al trattamento piuttosto che alla conversione. Ed è per questo che nella storia i matematici hanno sviluppato dei registri specifici che hanno permesso forme diverse di calcolo (aritmetico, algebrico, analitico, logico, ...).

---

<sup>7</sup> Naturalmente questa osservazione, tutto il paragrafo, ma anche tutto questo articolo, sono specifici per la matematica; non so valutare quanto siano estendibili ad una teoria dei concetti o, addirittura, ad una gnoseologia.

## 6. Scolarizzazione e mancata noetica

La rinuncia dello studente alla devoluzione (ovviamente inconsapevole), l'incapacità dello studente di implicarsi (come risultato di esiti negativi nei casi di tentativi), assumendosi carico diretto e personale della responsabilità della costruzione della conoscenza, in ambiente scuola, sono legate alla incapacità (talvolta solo supposta) o di rappresentare, o di trattare o di convertire, a causa di una mancanza didattica specifica a monte. L'insegnante potrebbe infatti non preoccuparsi dei singoli componenti della costruzione a causa di una supposta identità tra semiotica e noetica (Duval, 1993) (identità che è molto diffusa nel pensiero degli insegnanti, specie di quelli che non hanno mai avuto occasione di riflettere su questa questione, o che la considerano superflua).<sup>8</sup> Ciò potrebbe portare alla scelta rinunciataria da parte dello studente e quindi alla scolarizzazione dei saperi (D'Amore, 1999a).<sup>9</sup>

Occorre invece riflettere sul fatto che nell'apprendimento matematico concettuale non ci può essere noetica se non c'è stata semiotica in quanto l'acquisizione di un concetto matematico  $C$  è di fatto l'acquisizione di una sua rappresentazione semiotica  $R^m_i(C)$  in un dato registro semiotico  $r^m$ ; infatti, solo attraverso ciò  $C$  si "manifesta" e si rende disponibile alla costruzione dell'apprendimento nel senso detto.<sup>10</sup>

Ma c'è di più: qualsiasi sia  $R^m_i(C)$  in  $r^m$ , esso non dà tutte le referenze (semiotiche) di  $C$  in  $r^m$  (la rappresentazione semiotica di un concetto

---

<sup>8</sup> Il che rimanda ad un discorso assai più generale, quello sulle credenze implicite dell'insegnante, affrontato in modo profondo, sistematico e ricorrente, in (Speranza, 1997; Porlán, Rivero, Martín, 1997).

<sup>9</sup> «Con il termine "scolarizzazione del sapere" intendo qui riferirmi a quell'atto in larga misura inconsapevole, attraverso il quale l'allievo, ad un certo punto della sua vita sociale e scolastica (ma quasi sempre nel corso della Scuola Elementare) delega alla Scuola (come istituzione) ed all'insegnante di scuola (come rappresentante dell'istituzione) il compito di *selezionare per lui i saperi significativi* (quelli che lo sono socialmente, per status riconosciuto e legittimato della noosfera), rinunciando a farsi carico diretto della loro scelta in base a qualsiasi forma di criterio personale (gusto, interesse, motivazione,...). Poiché questa scolarizzazione comporta il riconoscimento dell'insegnante come depositario dei saperi che socialmente contano, è anche ovvio che vi è, più o meno contemporaneamente, una scolarizzazione dei rapporti interpersonali (tra studente ed insegnante e tra studente e compagni) e del rapporto tra lo studente ed il sapere: è quel che (...) si chiama "scolarizzazione delle relazioni".» (D'Amore, 1999a).

<sup>10</sup> A mio avviso, questo è un punto essenziale da trattare nei corsi per la formazione degli insegnanti, arricchendolo di esempi significativi.

non è mai univoca); ci saranno altre rappresentazioni semiotiche  $R_h^m(C)$  ( $h \neq i$ ) di  $C$  in  $r^m$ . (Si passa dall'una all'altra con una trasformazione di trattamento).

Si può allora parlare di  $C^m$ : concetto  $C$  rappresentato in  $r^m$ , "limitato" cioè al suo aspetto "relativo" al registro semiotico  $r^m$ .

$C^m$  si può "apprendere" in  $r^m$  ma quel che si ottiene è dunque solo una parziale approssimazione a  $C$ , diciamo: una sua "costruzione" parziale.

Per raggiungere la comprensione di  $C$  occorre impadronirsi della conversione che porta da  $R_i^m(C^m)$  in  $r^m$  a  $R_j^n(C^n)$  in  $r^n$ , per ogni  $m$  e  $n$ : ciò rende possibile la scelta di un registro in luogo di un altro di fronte a qualsiasi situazione relativa a  $C$ .

Quello trattato qui è il punto centrale di tutta l'argomentazione, quello che ci porta a ribadire e rafforzare la frase più volte ricorrente e che costituisce il perno fondamentale di tutto l'impianto che sto descrivendo: **non c'è noetica senza semiotica.**

A rafforzare il "gioco delle terne" (rappresentazione, trattamento, conversione), si può vedere l'esito della ricerca descritta in D'Amore (1998). In essa lo stesso messaggio, concernente una situazione connessa con un semplice esempio di relazione binaria (si davano nomi di città e nomi di stati e la relazione binaria era: "è in"), veniva proposto ad allievi di vari livelli scolastici in differenti registri semiotici e con diverse rappresentazioni semiotiche, con la richiesta di riconoscere che si trattava, appunto, dello *stesso messaggio*, della *stessa informazione*.

Il risultato della ricerca mostra proprio le enormi difficoltà che hanno gli studenti

- a risalire da una rappresentazione al contenuto rappresentato
- a verificare che tra due rappresentazioni in un dato registro semiotico è semplicemente avvenuta una trasformazione di rappresentazione del tipo trattamento
- a verificare che tra due rappresentazioni semiotiche in due diversi registri semiotici è avvenuta una trasformazione di rappresentazione di tipo conversione.

In mancanza di chiavi di lettura ed in difficoltà nel "leggere" le situazioni, gli studenti danno "senso" al messaggio creando informazioni di vario tipo (che ho chiamato in qualche caso "informazioni parassite") anche lontane da ogni intenzione comunicativa dell'autore; e cercano appigli di trattamento o

conversione in aspetti del tutto marginali, come; la forma dei grafici, il tipo di figure casualmente presenti etc. che per l'adulto sono insignificanti.

## 7. Esempi

Prima di entrare in dettaglio in alcuni esempi, sono necessarie alcune note cautelative.

Una prima nota riguarda la lingua naturale come registro.

Pur accettando che la lingua naturale sia un registro, si deve però precisare in modo esplicito che si tratta di un registro più complesso degli altri che verranno richiamati. In primo luogo, questo registro permette dei funzionamenti discorsivi (e dunque dei trattamenti) molto eterogenei. C'è così un funzionamento spontaneo che è quello delle conversazioni, narrativo, delle discussioni e c'è un funzionamento specializzato che si ritrova, per esempio, nel ragionamento deduttivo in matematica, e che è del tutto diverso. E per questo che Duval (1995, pagg. 91 e segg.) distingue quattro funzioni discorsive caratterizzanti ogni registro che si chiami "lingua":

- funzione referenziale di designazione di oggetti,
- funzione apofantica di espressione di enunciati completi,
- funzione di espansione discorsiva di un enunciato completo e
- funzione di riflessività discorsiva.

Una lingua, in sostanza, a differenza degli altri registri, è plurifunzionale (Duval, 1996, parte III).

Una seconda nota riguarda il fatto se sia o meno lecito considerare i segni e le rappresentazioni isolatamente.

Sebbene negli esempi successivi, ma solo a scopo illustrativo, ciò venga proposto, in realtà si dovrebbe sempre tendere a presentare il sistema o i sistemi che le rappresentazioni formano e nei quali esse funzionano come rappresentazioni. Ciò è facile per il sistema di scrittura dei numeri, per le figure geometriche; ma lo è assai meno per le scritture algebrica e logica. La ragione di questa differenza è la seguente. L'interesse di un sistema semiotico in matematica è anzitutto di permettere un trattamento (matematico) delle rappresentazioni. Occorre dunque presentarlo, quando è possibile,

rispetto al gioco di trasformazioni interne che esse permettono. E, da questo punto di vista, la lingua e le figure geometriche non sono affatto, parlando propriamente, dei registri “tecnici”. Ciò corrisponde alla distinzione tra due strutture di significato: ternaria (lingue e forme) e binarie (per le quali i “triangoli” richiamati nel riquadro del paragrafo 1 sono degli schemi falsi).

Solo tenendo conto delle forti limitazioni indotte dalle due note precedenti, ha senso accettare i seguenti esempi che hanno solo uno scopo illustrativo.

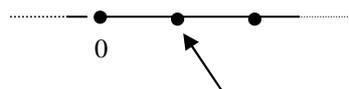
concetto C

registro semiotico  $r^1$ : la lingua comune  
 rappresentazione semiotica  $R^1_1$ : un mezzo  
 rappresentazione semiotica  $R^1_2$ : la metà  
 etc.

registro semiotico  $r^2$ : la lingua aritmetica  
 rappresentazione semiotica  $R^2_1$ :  $\frac{1}{2}$  (scrittura frazionaria)  
 rappresentazione semiotica  $R^2_2$ : 0.5 (scrittura decimale)  
 rappresentazione semiotica  $R^2_3$ :  $5 \cdot 10^{-1}$  (scrittura esponenziale)  
 etc.

registro semiotico  $r^3$ : la lingua algebrica:  
 rappresentazione semiotica  $R^3_1$ :  $\{x \in \mathbb{Q}^+ / 2x-1=0\}$  (scrittura insiemistica)  
 rappresentazione semiotica  $R^3_2$ :  $y=f(x): x \rightarrow x/2$  (scrittura funzionale)  
 etc.

registro semiotico  $r^4$ : il linguaggio figurale  
 rappresentazione semiotica  $R^4_1$ :  
 etc.



registro semiotico  $r^5$ : schemi pittografici  
 rappresentazione semiotica  $R^5_1$ :

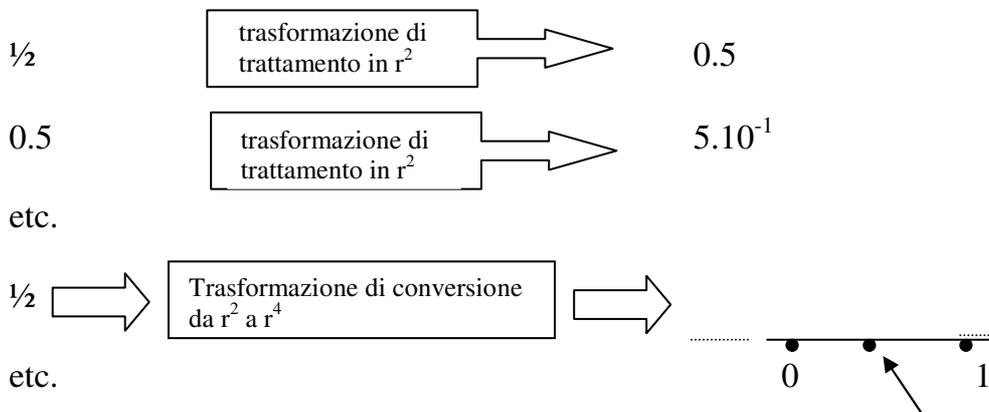


rappresentazione semiotica  $R_2^5$ : 

rappresentazione semiotica  $R_3^5$ : 

etc.

etc.



Altri esempi possono essere tratti dalla teoria degli insiemi elementare o ingenua, la cosiddetta “insiemistica”, nella quale lo stesso insieme può essere rappresentato in vari registri semiotici e, all’interno di ciascuno di questi, usando varie rappresentazioni semiotiche.

### 8. La mancata devoluzione, la cessazione dell’implicazione

In caso di fallimento nel gestire questa enorme massa di rappresentazioni e trasformazioni, è troppo banale e semplicistico limitarsi alla sua constatazione, come talvolta sembra fare l’insegnante deluso dal mancato apprendimento dei suoi allievi. Dove si annida il *motivo* di tale fallimento? Già questo aspetto è molto più interessante ed un’analisi dei diversi fallimenti potrebbe rivelare molto.

Ma qui a me interessa la problematica della mancata devoluzione,

della cessazione di un'implicazione personale.

Ho in mente la figura di uno studente anche bravo, anche consapevole, anche sensibile, il quale si limita, forse proprio per questa sua sensibilità non soddisfatta o per incapacità introspettiva della quale non ha colpa, ad osservare e constatare il suo proprio fallimento nel tentativo di far fronte alla complessità della chiamata in causa della terna "rappresentazione, trattamento, conversione". Lo studente potrebbe decidere (anche se in modo del tutto inconsapevole) di... limitare i danni accettando il formalismo, la superficie di quanto gli viene richiesto, adeguandosi a scolarizzare il proprio sapere ed il proprio comportamento, accettando cioè la totale mediazione dell'insegnante verso l'oggetto del sapere, accettando le sue scelte ed anche i suoi gusti (D'Amore, 1999a). Un'analisi molto stringente delle varie componenti, e cioè la capacità di puntualizzare i vari aspetti in cui si configura la costruzione della conoscenza (nel nostro caso specifico, nell'esempio dato in 7., quel concetto che ha come uno dei suoi tanti rappresentanti  $\frac{1}{2}$ ), potrebbe aiutare l'insegnante a capire qual è stato il momento esatto della resa, della mancata devoluzione, della cessazione dell'implicazione personale dello studente in tale costruzione.

C'è un'enorme differenza tra l'istituzionalizzazione della conoscenza da parte dell'insegnante come rappresentante dell'istituzione che ha deciso qual è il sapere che conta; e la scolarizzazione, l'accettazione supina delle scelte dell'insegnante.

- Nel primo caso l'insegnante funge da mediatore tra allievo e sapere e fa essere il primo attivo: consacra le scelte e le "scoperte" dell'allievo riconoscendo ad esse uno statuto istituzionale di spendibilità e un permesso ufficiale d'uso; il fondamento di tutto ciò sta nel fatto che è stato l'allievo a costruire.
- Nel secondo caso l'insegnante funge da mediatore totalizzante e fa essere l'allievo soggetto passivo: gli chiede fiducia cieca, gli chiede fiducia cieca nell'istituzione in cambio di promesse su capacità e competenze future che non è detto arrivino mai o che potrebbero non essere mai spendibili. L'allievo cessa di costruire, cessa cioè di apprendere.

Io credo che lo studio preciso della terna (rappresentazione, trattamento, conversione) possa applicarsi all'analisi delle situazioni di rinuncia all'implicazione personale, per snidare il motivo scatenante di questa rinuncia, il motivo della scolarizzazione.

## Appendice: Relatività dei registri

Un dubbio di natura teorica assale chi studia questo genere di problemi: un registro di rappresentazione semiotica è un assoluto o no?

Cioè: se io vedo un segno, disegno, formula, scrittura,... come rappresentazione semiotica  $R^x_y(C)$  di un certo “oggetto” o concetto  $C$ , posso stabilire con certezza a quale registro semiotico  $r^x$  essa appartiene? Cioè: esistono in assoluto registri di rappresentazione semiotica desumibili dalla *forma* di una singola rappresentazione specifica?

A mio avviso, la risposta è *negativa*: la caratteristica specifica di un registro semiotico è dipendente strettamente dall’oggetto che si vuol rappresentare; dunque per “capire” il messaggio proposto bisogna già avere delle indicazioni preliminari sull’oggetto.

Lo mostrerò ricorrendo a due esempi.

Esempio 1. Se l’oggetto  $C$  è “calcolo numerico in  $Q$ ”, il registro semiotico  $r^1$  “scrittura decimale” e il registro semiotico  $r^2$  “scrittura frazionaria” sono due registri semiotici *diversi* perché le 3 attività cognitive fondamentali legate alla semiotica (rappresentazione, trattamento, conversione) sono diverse (come si dimostra in Duval, 1993, pagg. 41-42); ed inoltre il passaggio dall’uno all’altro è una trasformazione di conversione (stesso rif. bibl.).

Esempio 2. Se l’oggetto  $C$  è “valore di un dato elemento di  $Q$ ” (per esempio quello rappresentato, tra gli altri, da  $\frac{1}{2}$ ), il registro semiotico “scrittura decimale” e il registro semiotico “scrittura frazionaria” si possono pensare identici all’interno del registro semiotico  $r^1$  “scritture in forma aritmetica” (il passaggio dall’uno all’altro è infatti una trasformazione di trattamento).

Darò ora alcuni esempi di rappresentazioni semiotiche il cui aspetto puramente figurale si presta a differenti interpretazioni, dovute al registro nel quale si ritiene di doverle interpretare:

	“quadrato”: nel registro geometrico figurale “è necessario che”: nel registro scrittura formale della logica modale
---	--

	“minore”: nel registro scrittura dell’aritmetica
--	--

<	“angolo”: nel registro figurale geometrico
	“valor assoluto”: nel registro scrittura algebrica “coppia di rette parallele”: nel registro simbolico geometrico elementare
^	“angolo”: nel registro figurale geometrico “et”: nel registro scrittura formale della logica enunciativa
	“1/8”: nel registro schematico pittografico riferito a frazioni “45°”: nel registro figurale geometrico sintetico “settore circolare”: nel registro figurale geometrico sintetico
+	“più”: nel registro scrittura aritmetica “assi cartesiani non orientati”: nel registro figurale geometrico analitico “rette perpendicolari”: nel registro figurale geometrico sintetico
x	“per”: nel registro scrittura aritmetica “rette incidenti”: nel registro figurale geometrico sintetico
→	“vettore”: nel registro algebra lineare o fisica o geometria “indicatore”: in uno registro schema “implicazione materiale”: nel registro logica formale o matematica
∅	“vuoto”: nel registro scrittura insiemistica “zero”: nel registro scrittura numerica degli informatici “1/2” nel registro schematico pittografico scrittura frazionaria

etc.

Dunque, una rappresentazione semiotica in sé non è un messaggio in assoluto, a meno che non ne sia specificato in qualche modo il registro di rappresentazione; esso dipende cioè dall’oggetto che si vuol rappresentare, in una sorta di circolo vizioso. In altre parole, una rappresentazione semiotica costituisce un significante diverso a seconda del significato di cui è significante.

## Bibliografia

- Chevallard Y. (1991). Dimension instrumentale, dimension sémiotique de l'activité mathématique. *Séminaire de Didactique des Mathématiques et de l'Informatique de Grenoble*. LSD2, IMAG, Université J. Fourier, Grenoble.
- Chevallard Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 12, 1, 73-112.
- D'Amore B. (1998). Oggetti relazionali e diversi registri rappresentativi: difficoltà cognitive ed ostacoli. *L'educazione matematica*, 1, 7-28 [testo bilingue, italiano ed inglese]. In lingua spagnola: *Uno*, 15, 1998, 63-76.
- D'Amore B. (1999a). Scolarizzazione del sapere e delle relazioni: effetti sull'apprendimento della matematica. *L'insegnamento della Matematica e delle scienze integrate*. 22A, 3, 247-276.
- D'Amore B. (1999b). *Elementi di Didattica della Matematica*. Bologna, Pitagora.
- De Saussure F. (1915), *Cours de linguistique générale*. Paris et Lausanne, Payot. [5a ediz. 1960]. [Trad. it.: 1968, Bari, Laterza].
- Duval R. (1988a). Ecartés sémantiques et cohérence mathématique. *Annales de Didactique et de Sciences cognitives*. 1, 7-25.
- Duval R. (1988b). Approche cognitive des problèmes de géométrie en termes de congruence. *Annales de Didactique et de Sciences cognitives*. 1, 57-74.
- Duval R. (1988c). Graphiques et équations. *Annales de Didactique et de Sciences cognitives*. 1, 235-253.
- Duval R. (1993). Registres de représentations sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, ULP, IREM Strasbourg. 5, 37-65.
- Duval R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Berne, Peter Lang.
- Duval R. (1996). Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques? *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 16, 3, 349-382. [Trad. it. *La matematica e la sua didattica*, 3, 1996, 250-269].
- Duval R. (1998). Signe et objet (I). Trois grandes étapes dans la problématique des rapports entre représentation et objet. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*. 6, 139-163.

- Godino J.D. & Batanero C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 3, 325-355.
- Moreno Armella L. (1999). Epistemologia ed Educazione Matematica. *La matematica e la sua didattica*, 1, 43-59.
- Perrin Glorian M.-J. (1994). Théorie des situations didactiques: naissance, développement, perspectives. In: Artigue M., Gras R., Laborde C. & Tavinot P. (eds.) (1994), *Vingt ans de didactique des mathématiques en France. Hommage à Guy Brousseau et Gérard Vergnaud*. Grenoble, La Pensée Sauvage. 97-148.
- Piaget J. (1937). *La construction du réel chez l'enfant*. Neuchatel, Delachaux et Niestlé.
- Piaget J. & Garcia R. (1983). *Psychogenèse et histoire des sciences*. Paris, Flammarion.
- Porláa R., Rivero A. & Martin R. (1997). Conocimiento profesional y epistemológico de los profesores. *Enseñanza de las Ciencias*, 15-2, 155-171.
- Speranza F. (1997). *Scritti di Epistemologia della Matematica*. Bologna, Pitagora.
- Vergnaud G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19, 133-169.
- Vygotskij L. (1962). *Thought and Language*. Cambridge, MIT Press. [Ed. francese: 1985, Paris, Editions Sociale]. [Ed. italiana: 1990, Bari, Laterza].
- Wertsch J. (1993). *Voces de la mente*. Madrid, Visor.

Esprimo la mia gratitudine più sincera a Raymond Duval, paziente lettore di precedenti versioni di questo articolo, che mi ha suggerito diverse modifiche ed integrazioni, che mi ha consigliato alcuni testi che ora figurano in bibliografia e che, più in generale, mi sta indirizzando e guidando verso questo genere di studi.