

396. D'Amore B., Fandiño Pinilla MI. (2001). Concepts et objets mathématiques. In: Gagatsis A. (ed) (2001). *Learning in Mathematics and Science and Educational Technology*. Atti del Third Intensive Programme Socrates-Erasmus, Nicosia, Università di Cipro, 22 giugno —6 luglio 2001. Nicosia (Cipro): Intercollege. 111-130.

Concepts et objets mathématiques

Bruno D'Amore et Martha Isabel Fandiño Pinilla

*Nucleo di Ricerca in Didattica della Matematica
Dipartimento di Matematica, Università di Bologna, Italia
Facoltà di Scienze della Formazione Primaria
Libera Università di Bolzano, Italia, Freie Universität Bozen, Italien*

Résumé. Dans cet article on analysera de différentes interprétations des termes “concept” et “objet” en Mathématique, dans l’histoire de la pensée philosophique, psychologique, et dans la toute récente acception “anthropologique”, en montrant qu’il est nécessaire d’adopter une théorie “pragmatique”.

Summary. In this article various interpretations of terms “concept” and “object” in Mathematics are analysed, using the History of Philosophical Thought, Psychology, and the recent “anthropological” perspective, demonstrating how it could be necessary to enter into a “pragmatic” theory.

1. Le rôle du langage dans l’apprentissage et dans la formulation des concepts

Il est évident que pendant l’apprentissage et la formation des concepts le langage joue un rôle d’une importance extraordinaire.

Il est bien connu que de la position de Piaget on a approché toujours plus «une dévaluation cognitive progressive du langage» (Pontecorvo, 1983, page 292); ce dernier «doit être vu par rapport à la position de Piaget. Elle se situe contre toute conception identifiant l’origine de la pensée dans la communication sociale à travers le langage, et contre toute conception assimilant les systèmes logiques à des systèmes linguistiques (...). La pensée, insiste Piaget, n’est pas originée par le langage (...) la “structure” d’un système opératoire n’est pas la structure d’un système de signes mais la structure d’un système “d’actions intériorisées”» (Tornatore, 1974, page 137).

Voilà pourquoi Piaget assume la position suivante:

- l’image est un signifiant dont le but est celui de désigner des objets de manière figurative;
- le concept est un signifié ayant comme fonction l’individuation des caractères constitutifs de l’objet par rapport à d’autres termes de la même classe (et non de le nommer);
- le mot, signe verbal désignant le concept n’ajoute rien, quant à la connaissance, au concept lui-même.

La position de Vygotsky (1962, page 106 de l’Ed. it.) est très différente: en effet il voit le langage comme un médiateur entre l’individu et la culture; il affirme que la formation d’un concept se vérifie par le moyen d’une opération intellectuelle «guidée par l’utilisation des paroles nécessaires à la concentration active de l’attention, l’abstraction de certains concepts, la synthèse et la symbolisation de ces concepts par le moyen d’un signe».

L’organisation cognitive de l’enfant reçoit donc, grâce au langage, une dimension

n'appartenant qu'à elle, et qui lui est naturelle depuis son début: la dimension *sociale*. S'il est vrai que l'enfant apprend à catégoriser dans le rapport linguistique avec l'adulte, il est vrai aussi que des formes de catégorisation doivent être déjà présentes en embryon *avant* leur systématisation définitive et adulte. Vygotsky établit donc une comparaison entre les concepts spontanés (ou quotidiens) et les concepts scientifiques:

- les premiers ont la caractéristique d'appartenir à l'expérience personnelle,
- les seconds font déjà partie d'un système de concepts. L'effet de l'école sur les compétences de l'enfant est celui de systématiser les concepts qu'il possède déjà et ceux qu'il acquiert au fur et à mesure.

2. Les définitions de concept et de schéma élaborées par Vergnaud

Gérard Vergnaud, a affronté dans plusieurs occasions la problématique visant à distinguer et à définir les idées de concept et de schéma. Après avoir déclaré que la connaissance rationnelle doit être de type opératif, il définit le schéma «d'organisation invariante du comportement par une classe de situations données» (Vergnaud, 1990).

En particulier, beaucoup de ses exemples sont tirés du domaine de la mathématique:

- la numération d'une petite collection d'objets de la part d'un enfant de 5 ans nécessite de l'application d'un schéma lui permettant de coordonner les mouvements des yeux et des mains et de coordonner la séquence numérique avec eux; en particulier, il existe une constante significative d'un comportement de type schématique dans la répétition du dernier nom numéral, prononcé sur un ton différent;
- la résolution d'équations linéaires par des adolescents suit à son avis un schéma, une organisation inchangée;
- l'exécution de l'addition en colonne de nombres naturels suit un schéma déjà assumé; et cetera.

Selon Vergnaud, si on analyse de manière critique la difficulté de certains élèves dans la solution de devoirs de mathématique, par exemple d'enfants face à des problèmes d'arithmétique, c'est en termes de *schémas* qu'il faut analyser le choix des données à utiliser, le choix des opérations, surtout quand il existe plusieurs choix possibles. Même les procédures ne seraient que des schémas.

Selon Vergnaud, le point décisif dans la conceptualisation du réel et dans la didactique est le passage des *concepts-comme-instrument* aux *concepts-comme-objet* et une opération linguistique essentielle dans cette transformation est justement la nominalisation. Cela pourrait se résumer en un seul mot: *conceptualisation*.

Il est donc fondamental de donner une définition pertinente et efficace de *concept*. Dans plusieurs travaux, avec des variations minimales, Vergnaud en suggère une qu'on peut illustrer de la manière suivante:

un concept est une triade d'ensembles:

$C=(S,I,S)$

où:

- S est l'ensemble des situations donnant sens au concept (le *réfèrent*);
- I est l'ensemble des invariants sur lesquels se fonde la capacité opérationnelle des schémas (le *signifié*);
- S est l'ensemble des formes linguistiques et non linguistiques permettant de représenter symboliquement le concept, ses procédures, les situations et les procédures de tractation (le *signifiant*).

Selon Vergnaud, le fait d'étudier le développement et le fonctionnement d'un concept signifie prise en considération tour à tour de ces trois "plans" séparément et dans leurs relations réciproque et mutuelle.

3. Théories réalistes vs théories pragmatiques

Malgré cela, les questions sur la nature cognitive des concepts mathématiques et sur la nature de la signification des objets mathématiques prirent tout autre direction déjà au cours des années '70.

«Une théorie de la signification est une théorie de la compréhension; c'est à dire, ce dont doit rendre compte une théorie de la signification est ce qu'on connaît quand on connaît le langage, soit quand on connaît les significations des expressions et des discours du langage», déclarait Dummett en 1975 (Dummett, 1991).

Peu d'années après, en 1980, Brousseau se demanda: «Quelles sont les composantes de la signification déductibles du comportement mathématique qu'on observe dans l'élève? Quelles sont les conditions qui mènent à la reproduction d'un comportement tout en gardant la même signification?» (Brousseau, 1981). N'existerait-il pas, par hasard, une "variété didactique" du concept de sens, spécifique pour la mathématique, jamais étudiée, jamais soulignée jusqu'à présent ni en linguistique ni en psychologie? (Brousseau, 1986).

L'accentuation de la nécessité d'études sur les concepts centrés sur les procès d'apprentissage a été mise en acte par Sierpiska (1990) aussi: «La compréhension du concept sera (...) conçue comme l'acte d'acquisition de sa signification. Tel acte sera probablement un acte de généralisation et synthèse de significations par rapport à des éléments propres à la 'structure' du concept (la 'structure' du concept est le réseau de significations des énoncés qu'on a pris en considération). Ces significations particulières doivent être acquises par des actes de compréhension. (...) La méthodologie des actes de compréhension est concernée principalement par le processus de construction de la signification des concepts».

On se trouve là face à la nécessité d'éclairer la nature de la signification, en confrontant deux catégories différentes dans lesquelles les théories peuvent être partagées en théories réalistes (ou figuratives) et en théories pragmatiques (cette division a déjà paru en Kutschera, 1979).

Dans la **théories réalistes** la signification est «une relation conventionnelle entre des signes et des entités concrètes ou idéales existant indépendamment des signes linguistiques; par conséquent elles se fondent sur un réalisme conceptuel» (Godino, Batanero, 1994). Comme le déclarait déjà Kutschera (1979), «Selon cette conception la signification d'une expression linguistique ne dépend pas de son utilisation dans des situations concrètes, mais il advient que l'utilisation se fonde sur la signification, une division nette entre sémantique et pragmatique étant possible».

Dans la sémantiques réaliste qui en dérive, on attribue des fonctions purement sémantiques aux expressions linguistiques: la signification d'un nom propre (comme 'Bertrand Russell') est l'objet que ce nom propre désigne (dans ce cas Bertrand Russell); les énoncés atomiques (comme 'A est un fleuve') expriment des faits décrivant la réalité (dans ce cas A est vraiment le nom d'un fleuve); les prédicats binaires (comme 'A lit B') désignent des attributs, ceux indiqués par la phrase qui les exprime (dans ce cas la personne A lit la chose B). Toute expression linguistique est donc un attribut de certaines entités: la relation nominale qui en dérive est la seule fonction sémantique des expressions.

On reconnaît là les positions de Frege, de Carnap, et les positions assumées par Wittgenstein dans le *Tractatus*.

Une conséquence de cette position est l'admission d'une observation scientifique (en même

temps donc empirique et objective ou intersubjective) comme pourrait l'être, à un premier niveau, une logique des énoncés et des prédicats.

Du point de vue qui nous intéresse le plus, si on applique les suppositions ontologiques de la sémantique réaliste à la mathématique, on en tire nécessairement une vision platonique des objets mathématiques: dans ce domaine en effet, les notions, les structures, et cetera, ont une réelle existence qui ne dépend pas de l'être humain, parce qu'elles appartiennent à un domaine idéal; «connaître» du point de vue mathématique signifie découvrir des entités et leurs relations dans ce domaine. Et il est évident aussi que cette vision comporte un absolutisme de la connaissance mathématique en tant que système de vérités certaines, éternelles, non modifiables par l'expérience humaine, vu qu'elles la précèdent ou, au moins, elles lui sont étrangères et indépendantes. Des positions de ce genre, même si elles ont des nuances différentes, ont été adoptées par Frege, Russell, Cantor, Bernays, Gödel, ...; et elles durent faire face à des critiques véhémentes [le conventionnalisme de Wittgenstein et le presque empirisme de Lakatos: voir Emest (1991) et Speranza (1997)].

Dans les **théories pragmatiques** les expressions linguistiques ont des significations différentes selon le contexte où on les utilise, toute observation scientifique résulte donc impossible, parce que la seule analyse possible est "personnelle" ou subjective, de toute manière circonstanciée et non généralisable. On ne peut qu'examiner les différentes "utilisations": l'ensemble des "utilisations" détermine en effet la signification des objets. On reconnaît là les positions de Wittgenstein dans les *Recherches Philosophiques*, quand il admet que la valeur significative d'un mot dépend de sa fonction dans un jeu linguistique, vu qu'à l'intérieur de celui-ci, le mot a un mode d'«emploi» et un but concret pour lequel il a été utilisé, justement. Le mot n'a donc pas de signification en lui-même, et cependant il peut être significatif.

Les objets mathématiques sont donc des symboles d'unités culturelles qui émergent d'un système d'utilisations caractérisant les pragmatiques humaines (ou, au moins, de groupes homogènes d'individus) et se modifiant sans cesse dans le temps, aussi suivant la nécessité. En fait, les objets mathématiques et la signification de ces objets dépendent des problèmes affrontés en mathématique et de leurs solutions.

	THEORIES "REALISTES"	THEORIES "PRAGMATIQUES"
signification	relation conventionnelle entre signes et entités concrètes ou idéales, indépendantes des signes linguistiques	dépend du contexte et de l'emploi
sémantique contre pragmatique	division nette	non-division ou division nuancée
objectivité ou intersubjectivité	totale	absente ou discutable
sémantique	les expressions linguistiques ont des fonctions purement sémantiques	les expressions linguistiques et les mots ont des significations "personnelles", ils sont significatifs dans des contextes convenables, mais ils n'ont pas de significations absolues, en soi
analyse	possible et licite: la logique, par exemple	une analyse "personnelle" ou subjective, seule, est possible, l'analyse ne doit pas être généralisable, ni absolue
conséquente vision	conception platonique des	conception problématique des objets

épistémologique	objets mathématiques	mathématiques
connaître	découvrir	employer dans les contextes qui conviennent
connaissance	elle est un absolu	elle est relative à la circonstance et à l'emploi spécifique
exemples	Wittgenstein dans le <i>Tractatus</i> , Frege, Carnap, Russell, Cantor, Bernays, Gödel	Wittgenstein dans les <i>Recherches Philosophiques</i> , Lakatos

4. Le virage “anthropologique”: signifié institutionnel et personnel des objets mathématiques

Dans la direction pragmatique, on comprend la définition que donne Chevallard (1991) d'objet mathématique: un objet mathématique est «un *émergent* d'un système de pratiques où sont manipulés des objets matériels qui se découpent dans différents *registres sémiotiques*: registre de l'oral, des mots ou expressions prononcés; registre du gestuel; domaine de la scripture, de ce qui est écrit ou dessiné (graphismes, formalismes, calcul etc.), c'est-à-dire registre de l'écrit» étant donné que le “praxema” est un objet matériel lié à la praxis, l'objet est alors émergent d'un système de praxème». Dans cette acception, la notion de signification d'un objet a moins d'intérêt que celle de *rapport à l'objet*, rapport, relation à l'objet. C'est sur cette idée que s'appuie la construction de la “théorie de la connaissance” de Chevallard, ou mieux de son “anthropologie cognitive”, à l'intérieur de laquelle on peut situer la didactique.

Mais alors la personne (ou l'institution, comme ensemble de personnes) qui se met en relation avec l'objet est centrale, et non l'objet en lui-même: «Un objet existe dès lors qu'une personne X ou une institution I reconnaît cet objet comme un *existant* (pour elle). Plus précisément, on dira que l'objet O *existe pour X* (respectivement, *pour I*) s'il existe un objet, que je note R(X,O) (respectivement R_I(O)), que j'appelle *rapport personnel de X à O* (respectivement *rapport institutionnel de I à O*)» (Chevallard, 1992, page. 86).

Cette position a marqué un tournant intéressant dans le contexte des théories encadrant toute recherche en Didactique de la Mathématique, encore plus si on souligne les recherches successives dans lesquelles plusieurs Auteurs ont éclairci et rendu opératoires les notions de Chevallard, en créant des instruments conceptuels adéquats et en les mettant en rapport à ceux que d'autres positions avaient fourni à ce propos.

5. Quelques précisions, avant de continuer

Dans ce paragraphe, il s'agira de quelques précisions terminologiques, de considérations complémentaires et de notes cautionnelles.

5.1. Parfois, en mathématique, on parle de “concepts” parfois d’“objets”. Quelle est la différence? Elle pourrait être le résultat d'un caprice des mathématiciens, mais il s'agit par contre d'une différence bien fondée, puisqu'elle se base sur les trois points suivants:

- Tout concept mathématique a des liens avec des “non-objets”, du point de vue du réalisme naïf; la conceptualisation n'est donc pas fondée sur des significations s'appuyant sur la réalité concrète, et elle ne peut pas l'être, vu que, dans les mathématiques, des renvois ostensibles ne sont pas possibles;

- Tout concept mathématique doit nécessairement se servir de représentations, vu qu'il n'y a pas d'"objets" à exhiber à leur place ou à leur évocation;¹ la conceptualisation doit donc nécessairement passer à travers des registres de représentation qui, pour de différentes raisons, surtout s'ils ont un caractère linguistique, ne peuvent pas être univoques: dans les mathématiques il n'y a pas d'accès sensible (vue, toucher, ...) direct aux "objets" mais seulement à leurs représentations sémiotiques dans des différents registres linguistiques;
- On parle plus souvent en mathématique d'"objets mathématiques" que de concepts mathématiques car en mathématique on étudie *de préférence* des objets plus que des concepts: «la notion d'objet est une notion que l'on ne peut pas utiliser dès que l'on s'interroge sur la nature, sur les conditions de validité ou sur la valeur des connaissances» (Duval, 1998, p. 139).

5.2. Dans la voie ouverte par Duval, la notion de concept, préliminaire ou au moins prioritaire chez presque tous les Auteurs, devient secondaire, tandis que ce qui assume un caractère prioritaire est le couple (*signe, objet*), ce qui mène au *paradoxe cognitif de la pensée mathématique*, mis en évidence justement par Duval (1988a, b, c; 1993). En Duval (1996) on cite un passage de Vygotsky dans lequel on déclare dans la substance qu'il n'y a pas de concept sans signe, idée d'autre part déjà bien présente en Peirce: «Toutes les fonctions psychiques supérieures sont unies par une caractéristique commune supérieure, celle d'être des processus médiatisés, c'est à dire d'inclure dans leur structure, en tant que partie centrale et essentielle du processus dans son ensemble, l'emploi du signe comme moyen fondamental d'orientation et de maîtrise des processus psychiques (...) L'élément central [du processus de formation des concepts] est l'utilisation fonctionnelle du signe, ou du mot, comme moyen permettant à l'adolescent de soumettre à son pouvoir ses propres opérations psychiques, de maîtriser le cours des propres processus psychiques...» (Vygotsky, 1962; dans l'édition française, 1985, aux pages 150, 151, 157).

Il est clair que si on met l'accent sur le couple (*signe, objet*), toutes les représentations triadiques (de C.S. Peirce, de G. Frege, de C.K. Ogden et I.A. Richards) deviennent fausses.

6. Le concept (ou objet) en mathématique, comme superposition ou comme accumulation de conceptions provisoires

Nous essaierons ici une convergence entre:

- (a) une position exclusivement didactique-cognitive, à caractère fortement naïf, accueillant comme hypothèse de base le constructivisme de la connaissance la plus élémentaire, position celle-ci, se fondant sur les positions a-critiques les plus diffusées;
- (b) une position anthropologique dans laquelle tout se réfère au rapport personnel envers l'objet mathématique. Tout cela dans le domaine d'une théorie de l'apprentissage mathématique qui n'est caractérisée par aucun type de préconception théorique ou ontologique.

Ce paragraphe **6.** n'est qu'une tentative initiale de médiation entre les positions les plus naïves, mais enracinées dans le sens commun, et ce qu'on a expliqué jusqu'à présent.

¹ Ici on entend "objet" dans le sens d'"objet réel" ou de "chose". Dans la *Métaphysique*, Aristote exprime bien ce que cela signifie quand il affirme que la chose, en tant que partie du réel, est ce qui présente les trois caractéristiques suivantes: tridimensionnalité, accessibilité sensorielle multiple (c'est à dire de plusieurs sens à la fois), indépendance des représentations sémiotiques et possibilité de séparation matérielle des autres parties de la réalité, des autres "choses".

Dans le paragraphe 7. nous ferons quelques considérations critiques.

Soient c_i les conceptions provisoires, dans un processus linéaire et évolutif (au moins dans le temps) d'assimilation et mise à point, relativement à un objet mathématique C. Il est nécessaire de distinguer entre:

- c_i scientifiques de type institutionnel, qu'on appellera académiques (a), c'est à dire celles que la communauté scientifique (académique) accepte comme pertinentes, significatives et correctes; il s'agit de $R_I(C)$ partagés; on les appellera c_i de type a;
- c_i cognitives de type institutionnel, qu'on appellera scolaires (s), dues à l'action de école et à la noosphère, c'est à dire celles que quelqu'un construit ou a construit à l'école; il s'agit de $R_x(C)$ qui peuvent être aussi non partagées; on les appellera c_i de type s.

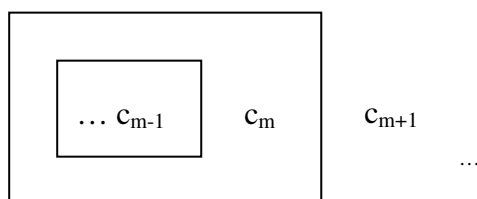
Les c_i de type a se différencient de celles de type s seulement parce que les deuxièmes sont plus en retard par rapport aux premières (c'est à dire: les index déposants ont une valeur numérique inférieure), ou bien parce qu'elles sont critiquement moins riches et plus fondées sur des sensations, sur le bon sens, et qu'elles sont liées à des applications, qui sont moins l'objet de révision et de réflexion critique, et plus liées à de différentes clauses du contrat didactique.

Le sens du processus didactique usité, dans sa forme la plus naïve, mais aussi la plus diffusée, est celui de porter à la fin les individus à la formation d'un concept C qui est le pic du processus évolutif, *le* concept, qu'on suppose existent, de type a (ou, au moins, le plus proche possible de celui-ci).

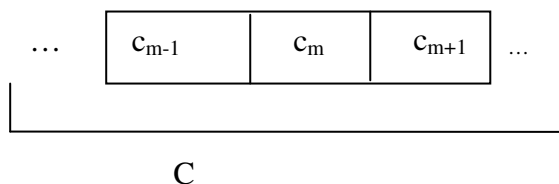
Toutefois, comme toute conception est dans une évolution historico-critique *perpétuelle*, il est impossible d'évaluer le franchissement de cette limite, surtout parce qu'on pourra parler à la rigueur d'«objet acquis par la communauté scientifique jusqu'à présent» sans se mettre dans la situation de prévoir le futur de cet objet. L'"objet" est donc dans cette conception quelque chose d'idéal, d'abstrait, l'apex d'un processus toujours en acte, dont on n'a qu'une idée limitée à l'évolution historique et à l'état actuel.

La formation de C à partir de la succession c_i peut se penser selon deux modalités:

- superposition: toute conception provisoire c_{m+1} ajoute et intègre la précédente c_m , c'est à dire la comprend et y ajoute quelque chose, en se superposant à elle:



- accumulation: toute conception provisoire c_{m+1} ajoute quelque chose (en plus) à la c_m précédente:



En réalité, on a souvent (toujours?) des mélanges des deux modalités.

EXEMPLE 1: le pseudo-objet droite.

Je vais tracer, de manière approximative, une succession de conceptions provisoires relativement à un objet supposé *droite*. Dans sa longue histoire évolutive, on pourrait penser à une succession comme celle-ci:

c_1 : droite primitive: segment (ses caractéristiques sont: le fait d'être droit et subtil, et son indépendance nominale de la longueur); celle-ci est l'idée naïve d'un enfant

c_2 : droite euclidienne: idéalisation de c_1 [ses caractéristiques sont: le fait d'avoir une seule dimension (ce qui est l'idéalisation du "subtil") et le fait d'être allongeable (ce qui est l'idéalisation de l'indépendance du nom de la longueur)]; la relation entre points et droite n'est pas très claire; au sens pitagorique, le modèle est celui des perles (monades) enfilées dans le collier (droite); mais chez Euclide cette position naïve a déjà disparu

c_3 : droite dense: idéalisation de c_2 : entre deux points il y en a *toujours* un autre: le modèle pitagorique est dépassé

c_4 : droite continue (déjà aux temps de Newton et Leibniz): sur la droite il existe de sièges convenables aux points correspondants à des valeurs irrationnelles ($\sqrt{2}$) et transcendantes (π) même si leur statut épistémologique n'est pas encore bien clair

c_5 : droite d'Hilbert (définie implicitement par les axiomes): il n'y a plus de tentative de définition explicite pour essayer d'égaliser l'image de droite à un modèle pre-figé qu'on veut rejoindre, mais on a une idéalisation de cette conception à l'intérieur d'un système théorique

c_6 : droite comme nom commun utilisé indifféremment dans le domaine euclidien et non euclidien: on ne parle plus de dimension, du fait d'être droite, ou d'être infinie (mais toujours illimitée)

c_7 : dénomination de droite donnée à des entités différentes de modèles différents (droite finie ou infinie, discrète, dense ou continue, limitée ou illimitée...)

c_8 : objet $(n-2)$ -dimensionnel dans une variété n -dimensionnelle

...

Comment peut-on établir si d'autres c_i suivront, et lesquels? Le pseudo-objet C "droite" est une superposition ou une accumulation des conceptions précédentes; il semble que de c_1 à c_5 on puisse parler surtout de passages de type "superposition", tandis que de c_6 à c_8 il semble s'agir surtout de passages de type "accumulation".

EXEMPLE 2: le pseudo-objet addition.

Je tracerai, de manière approximative, une succession de conceptions provisoires relatives à l'objet supposé *addition*. Dans sa longue histoire évolutive, on pourrait penser à une succession comme celle-ci:

c_1 : addition pythagorique (ordinal et cardinal confondus) en $N-\{0\}$; l'addition comme cardinal de recueils disjoints; il s'agit là de la conception naïve d'un petit enfant (c'est sur ce point que Vergnaud explique quelques-uns de ses *théorèmes en acte*)

c_2 : addition en Q_a ; je pense aux additions entre fractions, dans l'histoire sumérienne, égyptienne, et puis grecque

c_3 : addition en N et en Q_a (0 inclus); au cours du Moyen - Age, dans le monde indien-arabe il devient nécessaire de référer l'addition aux cas où un des termes de la somme est zéro

c_4 : addition en Z

c_5 : addition en Q

c_6 : addition en R

c_7 : addition dans le domaine complexe C

c_8 : addition dans les quaternions et, plus en général, dans les systèmes complexes n -valables; je pense aux recherches de Hamilton, Grassmann, Frobenius et Hankel; certaines propriétés formelles de l'addition typiques des nombres N , Z , Q , R et C se perdent, et toutefois l'opération qui étend et généralise l'addition est appelée toujours de la même manière

c_9 : addition généralisée dans les réseaux et dans les algèbres de Boole

c_{10} : addition généralisée dans les structures $\langle A, +, \times, 0, 1, \dots \rangle$

...

Comment peut-on établir si d'autres c_i suivront, et lesquels? Le pseudo-objet C "addition" est superposition ou accumulation des conceptions précédentes; il semble que de c_1 à c_7 on puisse parler de passages surtout de type "superposition", tandis que de c_8 à c_{10} il semble s'agir surtout de passages de type "accumulation".

7. Critiques à la position précédente

La vision tracée dans le paragraphe 6. n'est qu'un schéma résumant les positions les plus naïves, mais aussi les plus populaires à cet égard. Voyons maintenant quelques notes fortement critiques.

En tout cas, une réflexion mûre montre que l'activité des particuliers face aux problématiques créant des c_i est essentielle; dans ce sens, un supposé ordre hiérarchique perd de sens, à nos avis; par conséquent, une plus grande... noblesse conceptuelle supposée pour les c_i de type a , par rapport à celles de type s , disparaît. Les "objets" se constituent de l'activité des personnes face à la solution de problèmes, de façon indépendante de tout contexte institutionnel aussi; même, dans un certain sens, on privilégie les significations personnelles par rapport aux significations institutionnelles.

De ce point de vue, il semble insensé de parler, par exemple, de l'"objet droite" (ou de l'"idée de droite", ou du "concept de droite") comme on le fait normalement: évidemment, on est plutôt forcé à parler de "pluralité d'objets"; il ne s'agit donc pas tellement d'une "montée" vers un apex, mais d'une pluralité d'"objets" *différents* qui, tout banalement, ont leur nom propre en commun, mais ce dernier n'identifie pas une seule entité, comme dans la vision qu'on a appelé "théorie réaliste", et sa signification dépend d'un contexte d'utilisation, comme dans la vision qu'on a appelé "théorie pragmatique".

Tout c_i est donc, dans cette vision, un "objet droite" (probablement, une analyse plus attentive pourrait montrer qu'à son tour, il est lui-même une pluralité...).

Tout c_i est le résultat d'un rapport personnel à l'objet, mais, comme on a vu Chevallard et Godino-Batanero, *l'objet est ce rapport personnel lui-même*, et non pas un supposé "objet en soi".

D'autre part, Wittgenstein lui-même insiste sur le fait qu'on ne doit pas parler d'idées mathématiques au sens où, par contre, on le fait normalement, c'est à dire comme le résultat d'un processus d'abstraction, vu que cela est à l'origine de graves confusions philosophiques, psychologiques [et didactiques, comme nous le suggère Juan Godino (dans une lettre privée)]. Wittgenstein dans les *Recherches Philosophiques* insiste sur le concept de diversité d'utilisation, ou d'utilisations différentes du "terme" ("droite", "addition", dans nos exemples plus haut).

Chez Godino-Batanero, on propose d'associer l'entité théorique "signification de Ox " (en réalité une classe de significations) à l'objet mathématique Ox : on passe ainsi de l'accentuation du "concept", de ses définitions et de ses règles d'utilisation, à une nouvelle accentuation des domaines de problèmes, des pratiques des techniques qui constituent la base

de ces entités intensionnelles.

Les deux cas que nous avons fourni, “droite” et “addition”, constituent donc justement un exemple de la relativité des objets Ox qui parfois sont des entités mentales (donc personnelles), et parfois des entités abstraites (institutionnelles). Nous n’avons pas trop insisté sur l’éclaircissement et la définition de cette distinction, parce que nous la considérons occasionnelle et réciproque...

Nous croyons pouvoir déclarer que l’identification de problèmes spécifiques, d’activités pratiques, d’activités techniques etc. qui, ont porté même d’un point de vue historique à la création de toute “conception”, tout “objet”, toute “règle”, est d’une importance fondamentale dans les études théoriques d’Education Mathématique, dans la recherche dans ce domaine, et dans la pratique didactique. Il est aussi extrêmement important d’établir la dépendance réelle ou présumée de cette recherche des contextes institutionnels (il pourrait y avoir une raison historique, ou éducative, ou instrumentale etc., ou toutes ces raisons ensemble).

Bibliographie

- Anderson R.C., Spiro R.J., Montague W.E. (1977). *Schooling and the acquisition of knowledge*. Hillsdale N.J., Lea.
- Astolfi J.P., Develay M. (1989). *La transposition didactique en mathématique, en physique et biologie*. Irem de Lyon, Lirdis.
- Brousseau G. (1981). Address of members of the G.R.D.M. (France) at the ICME IV. August 1980. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 2, 1, 130-135.
- Brousseau G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 7, 2, 33-115.
- Bruner J.S. (1964). The course of cognitive growth. *American Psychologist*. 19, 1-15.
- Chevallard Y. (1991). Dimension instrumentale, dimension sémiotique de l’activité mathématique. *Séminaire de Didactique des Mathématiques et de l’Informatique de Grenoble*. LSD2-IMAG, Université Joseph Fourier, Grenoble.
- Chevallard Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique de la Mathématique*. 12, 1, 73-112.
- Clary M., Genin C. (1991). *Enseigner l’histoire à l’école?* Paris, Hachette/Istra.
- Cornu L., Vergnion A. (1992). *La didactique en questions*. Paris, Hachette.
- D’Amore B. (1999). *Elementi di Didattica della Matematica*. Bologna, Pitagora.
- D’Amore B. (2001). Conceptualisation, registres de représentations sémiotiques et noétique: interactions constructivistes dans l’apprentissage des concepts mathématiques et hypothèse sur quelques facteurs inhibant la dévolution. *Scientia Paedagogica Experimentalis*. Gent, Belgio. XXXVIII, 2, 143-168.
- Dewey J. (1933). *How we think*. Edit. Italienne: 1961. Florence, La Nuova Italia.
- Dummett A.A.E. (1991). ¿Qué es una teoría del significado? In: Valdés L.M. (ed.). *La búsqueda del significado*. Madrid, Tecnos. [Il faut remarquer que la version originale de ce travail remonte au 1975].
- Duval R. (1988a). Ecart sémantiques et cohérence mathématique. *Annales de Didactique et de Sciences cognitives*. 1, 7-25.
- Duval R. (1988b). Approche cognitive des problèmes de géométrie en termes de congruence. *Annales de Didactique et de Sciences cognitives*. 1, 57-74.

- Duval R. (1988c). Graphiques et équations. *Annales de Didactique et de Sciences cognitives*. 1, 235-253.
- Duval R. (1993). Registres de représentations sémiotiques et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Science Cognitives*. ULP, IREM Strasbourg. 5, 37-65.
- Duval R. (1996). Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques? Texte du cours tenu à la VIII Ecole estivale de Didactique de la Mathématique, 1995; actes de 1996.
- Duval R. (1998). Signe et objet (I). Trois grandes étapes dans la problématique des rapports entre représentations et objet. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*. 6, 139-163.
- Ernest P. (1991). *The philosophy of mathematics education*. London, Falmer Presso.
- Gagné R. (1965-1985). *The conditions of learning*. New York, Holt, Rinehart & Winston Inc. 1965. L'oeuvre subit un changement complet de plan quand il fut publié par Cbs College Publishing, 1985.
- Gal'perin P Ja. (1969). Contributo allo studio dello sviluppo intellettuale del bambino. Dans: Veggetti M.S. (ed.) (1977). 43-63. [L'article de Gal'perin fut publié dans une revue soviétique en 1969].
- Giordan A., De Vecchi G. (1987). *Les origines du savoir*. Neuchâtel, Delachaux et Niestlé.
- Godino J., Batanero C. (1994). Significado institucional y personal de los objectos matematicos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 14, 3, 325-355. [Trad. it. Bologna, Pitagora 1999, comment livre dans la série: Bologna-Querétaro].
- Godino J., Batanero C. (1998). The dialectic relationships among theory, development and practice in Mathematics Education: a meta-analysis of three investigations. In: Malara N.A. (Ed.) (1998), *An international view on didactics of mathematics as a scientific discipline. Proceedings of WG 25 ICME 8, Sevilla July 1996*. Modena, CNR-MURST-University of Modena. 13-22.
- Klausmeier H.J. (1979). *Un modello per l'apprendimento dei concetti*. In: Pontecorvo C., Guidoni P. (ed.) (1979).
- Klausmeier H.J. (1980). *Learning and teaching concepts*. New York, Academic Press.
- Klausmeier H.J., Gathala E.S., Frayer d.A. (1974). *Conceptual learning and development*. New York and London, Academic Press.
- Kutschera F. von (1979). *Filosofia dell'linguaggio*. Madrid, Gredos.
- Luria A.R. (1982). *Language and Cognition*. (ed. by J. V. Wertsch). Washington, V. H. Winston.
- Meirieu P. (1987). *Apprendre... oui, mais comment?* Paris, ESF.
- Nelson K. (1974). Concept, word and sentence: interrelations in acquisition and development. *Psychological Review*. 81,4.
- Nelson K. (1977). Cognitive development and the acquisition of concepts. In: Anderson R.S., Spiro r.l, Montague W.E. (eds.), (1977).
- Piaget J., Inhelder B., Szeminska A. (1948). *La géométrie spontanée de l'enfant*. Paris, PUF.
- Vygotsky L.S. (1962), *Thought and language*. Cambridge, MIT Press. Il s'agit d'un résumé
- Pontecorvo C. (Ed.) (1983). *Conoscenza scientifica e insegnamento*. Torino, Loescher.
- Pontecorvo C., Guidoni P. (1979). *Scienza e scuola di base*. Rome, Istituto della Enciclopedia Treccani.
- Sierpinska A. (1990). Some remarks on understanding in mathematics. *For the Learning of Mathematics*. 10, 3, 24-36.
- Speranza F. (1997). *Scritti di Epistemologia della Matematica*. Bologne, Pitagora.
- Tomatore L. (1974). *Educazione e conoscenza*. Turin, Loescher.
- Vergnaud G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 19, 133-169.

- Vygotsky L.S. (1960). The development of higher forms of attention in childhood. In: Werscht J. V. (Ed.). *The concept of activity in Soviet psychology*. Armonk NY, Sharpe 1981, 189-240. La 1^{ère} édition russe remonte au 1960, Moscou, Izd. Akad. Pedag.
- Vygotsky L.S. (1962). *Thought and language*. Cambridge, MIT Press. Il s'agit d'un résumé tiré de l'édition originale en langue russe, un recueil d'articles publiés à Moscou en 1956. Ed. française: 1985, Paris, éd. Sociale. Ed. italienne: 1990, Bari Laterza.