

Il “senso dell’infinito”^{1 2}

D’Amore B., Arrigo G., Bonilla Estévez M., Fandiño Pinilla M.I., Piatti A., Rojas Garzón P.J., Rodríguez Bejarano J., Romero Cruz J. H., Sbaragli S. (2004). Il “senso dell’infinito”. *La matematica e la sua didattica*. 4, 46-83.

**Bruno D’Amore³ - Gianfranco Arrigo⁴ - Martha Bonilla Estévez⁵ -
Martha Isabel Fandiño Pinilla³ - Alberto Piatti⁶ - Jorge Rodríguez
Bejarano⁵ - Pedro Javier Rojas Garzón⁵ - Jaime Humberto Romero
Cruz⁵ - Silvia Sbaragli⁷**

NRD Bologna - ASP Locarno – MESCUUD Bogotá

Sunto. Si intende per “stima” «il risultato di un procedimento (coscìo o inconscìo) che tende a individuare il *valore incognito* di una quantità o di una grandezza» (Pellegrino, 1999). Che cosa accade se tale *valore incognito* è infinito? Esiste un “senso dell’infinito”, così come esiste un “senso del numero”? Se sì, come si configura? Se no, perché? Si riesce a dare un senso intuitivo alla differenza tra l’infinito numerabile e l’infinito continuo? In questa ricerca si danno risposte a queste e ad altre domande, analizzando i comportamenti di soggetti di vario genere, da adolescenti ad adulti, da

¹ Lavoro eseguito in collaborazione tra:

NRD (Nucleo di Ricerca in Didattica della Matematica, Dipartimento di Matematica, Università di Bologna, Italia),

ASP (Alta Scuola Pedagogica, Locarno, Cantone Ticino, Svizzera),

MESCUUD (Matemáticas Escolares Universidad Distrital, Univ. Distrital Francisco J. de Caldas, Bogotá, Colombia).

² Il lavoro è eseguito nell’ambito del Programma di Ricerca dell’Unità di Bologna: *«Aspetti metodologici (teorici ed empirici) della formazione iniziale ed in servizio degli insegnanti di matematica di ogni livello scolastico»*, inserito nel Programma di Ricerca Nazionale: *«Difficoltà nell’insegnamento / apprendimento della matematica: sviluppo di strumenti per osservare, interpretare, intervenire»*, cofinanziato con fondi del MIUR (Ministero Italiano dell’Istruzione, Università e Ricerca) per gli anni 2005-06.

³ Italia: NRD, ASP, MESCUUD.

⁴ Svizzera: NRD, ASP.

⁵ Colombia: NRD, MESCUUD.

⁶ Svizzera: ASP.

⁷ Italia: NRD, ASP.

matematici esperti a persone di cultura, ma non nello specifico matematico. La ricerca, effettuata in Colombia, Italia e Svizzera, offre un vasto panorama ma poche differenze di rilievo tra Paese e Paese.

Resumen. Entendemos por “estimación” «el resultado de un proceso (consciente o no) que tiende a individuar el *valor desconocido* de una cantidad o de una magnitud» (Pellegrino, 1999). ¿Qué pasa si tal *valor desconocido* es infinito?. ¿Existe un “sentido del infinito”, así como existe un “sentido del número”? Si existe, ¿cómo se configura?. Si no existe, ¿por qué?. ¿Se logra dar un sentido intuitivo a la diferencia entre el infinito numerable y el continuo?. En esta investigación se dan respuestas a estas y a otras preguntas, analizando el comportamiento de diversos sujetos, desde adolescentes hasta adultos, desde matemáticos expertos hasta personas de cultura no específica en matemática. La investigación, efectuada en Colombia, Italia y Suiza, ofrece un vasto panorama con pocas diferencias relevantes entre los diferentes países.

Sommaire. Par le mot “estimation” on entend «le résultat d’un procédé (conscient ou inconscient) qui a pour but de déterminer la *valeur inconnue* d’une quantité ou d’une grandeur» (Pellegrino, 1999). Qu’est-ce qui se passe si cette *valeur inconnue* est infinie? Est-ce qu’il existe un “sens de l’infini”, pareillement au “sens du nombre”? Si oui, comment se forme-t-il? Si non, pourquoi? Est-ce qu’on réussit à donner un sens intuitif à la différence entre l’infini dénombrable et l’infini continu? Dans cette recherche on donne des réponses à ces questions et à d’autres, en analysant les comportements de différents sujets, adolescents et adultes, mathématiciens experts et personnes de culture non-mathématique. La recherche, qui a été effectuée en Colombie, en Italie et en Suisse, montre un cadre assez vaste, mais peu de différences entre les Pays intéressés.

Summary. The word “estimate” means «the result of a process (conscious or unconscious) that determines the unknown value of an amount or a quantity» (Pellegrino, 1999). What happens if this unknown value is infinite? There exists a “sense of infinity” just as there exists a “sense of number”? If the answer is positive, what shape does it assume? If the answer is negative, why? Is it possible to succeed in giving an intuitive sense of the difference between “countable infinity” and “continuous infinity”? In this research we answer these and other questions, analysing the behaviour of different kind of individuals, from adolescents to adults, from expert mathematicians to people of culture, but not in the specific sphere of mathematics. The research carried out in Colombia, Italy and Switzerland, offers a wide outline but with little prominent differences from country to country.

1. “Stima” e “senso del numero”

Si intende per “stima” «il risultato di un procedimento (conscio o inconscio) che tende a individuare il valore incognito di una quantità o di una grandezza» (Pellegrino, 1999, pag. 145); non si tratta, dunque, di “approssimare” un risultato, ma di cogliere l’essenza del cardinale di una raccolta. Che ciò sia “importante” e “difficile”, dato che comporta varie abilità, trova d’accordo l’Autore or ora citato anche con Hofstadter (1982) e Villani (1991).

Circa le abilità necessarie, Pellegrino (1999, pagg. 146-147) ne elenca parecchie; a suo avviso, un buon estimatore deve:

- essere dotato di buone capacità mentali e matematiche, anche se intuitive e spontanee
- saper scegliere a intuito qual è la strada migliore per effettuare la stima
- saper accettare la presenza di un errore nella sua stima, rispetto al valore esatto
- saper trasformare dati numerici astratti o astrusi in qualche cosa di familiare o di interpretabile
- saper usare e coordinare tra loro varie strategie di calcolo mentale.

Come si vede, in questa ... identikit del “buon estimatore” si mescolano fattori psicologici, metacognitivi, affettivi e competenze matematiche (lo ripetiamo: anche se ingenua).

Più volte, però, nel corso di ricerche precedenti su questioni aventi a che fare con cardinali infiniti, ci si è imbattuti in allievi che dichiaravano curiose “stime” nelle quali mescolavano numeri finiti ed infiniti con una certa naturalezza e senza porsi troppi problemi (Arrigo, D’Amore, 1999, 2002).

Ecco una rassegna brevissima, ma per noi emblematica, di alcune di tali situazioni; le riportiamo in sequenza cronologica, per come si sono presentate, e le chiameremo “episodi”. Sulla base delle possibili interpretazioni di tali *episodi* si è fondata la nostra attuale ricerca.

Episodio 1. Ambiente: II media (età degli allievi: 12-13 anni).

Gli studenti stanno discutendo tra loro circa la quantità di punti di un dato segmento ed un’allieva, sulla base del fatto che «un punto non ha

dimensione», sostiene che i punti di quel segmento sono dunque infiniti. Questa affermazione fa scattare la reazione di vari compagni, uno dei quali s'avvicina alla lavagna e, riportando il gesso sul segmento tracciato, sembra valutare quante volte la punta del gesso sta tra i due estremi. Alla fine, a proposito della quantità di punti del segmento, esclama: «Ce ne saranno 21».

Certo, quest'ultima affermazione è legata alla mancata comprensione di quel che significa, a proposito del punto, affermare che “non ha dimensione”. Tuttavia, che cosa impedisce a questo studente d'accettare la cardinalità infinita di tale insieme? Solo un'immagine concreta degli enti matematici? Solo una totale impossibilità di darsi un'immagine dell'infinito (in atto)? Non sarà, per caso, *anche*, la totale impossibilità di compiere *stime* intuitive *dell'infinito*?

Episodio 2. Ambiente: V primaria (età degli allievi: 10-11 anni).

Fin da piccoli, gli allievi di quella classe sono stati abituati a dire che i numeri (sottinteso: naturali) sono infiniti. Lo ripetono alla loro maestra come in una specie di botta e risposta, sapendo che è quel che lei vuol sentirsi dire. Durante una prova fatta con noi (dunque con persone estranee, non più in regime di contratto didattico ma semmai di contratto sperimentale), alla domanda se esiste tra i numeri (naturali) il “più grande di tutti”, si ha un vasto coro di risposte affermative. Alla richiesta di dire quale esso sia, abbiamo svariatissime risposte e discussioni, molte delle quali tese ad indicare un valore grande ma mai infinito. Si fa notare agli allievi che c'è una contraddizione tra le due seguenti affermazioni: i numeri sono infiniti – c'è un numero più grande di tutti. La contraddizione non sembra venire colta, ma un allievo asserisce: «Va be', ma è diverso; sono sì, sono infiniti, ma poi, se tu conti sempre, arrivi a una fine, lassù» (e indica verso l'alto).

Sappiamo bene quali siano le influenze del contratto didattico e come il ripetere all'insegnante quel che si sa essere da questi atteso non costituisca conoscenza; sappiamo anche come sia difficile se non impossibile attivare nello studente consapevolezza e responsabilità quando lo si pone di fronte ad esplicite contraddizioni, in particolare proprio nel caso dell'infinito (Tsamir, Tirosh, 1992; D'Amore, Martini, 1998). E tuttavia, come non essere incuriositi da questa confusione di “stima”? Lo studente potrebbe vedere il numero dei numeri (naturali) come un numero “grandissimo” e riservare dunque la denominazione

“infinito” a qualche cosa che, nella sua competenza, risulta soprattutto essere “indefinito”. Non si tratterà, per caso, di una mancanza di capacità di *stima dell’infinito*?

Episodio 3. Ambiente: corso di aggiornamento per insegnanti di scuola primaria e secondaria inferiore (età: dai 25 ai 60 anni).

Su richiesta degli stessi insegnanti, si sta trattando il tema dell’infinito in modo estremamente elementare. Si sta dicendo che nella lingua c’è un abuso semantico di tale parola, abuso che si può ripercuotere in modo negativo sul linguaggio matematico. Si fa notare che, rispetto all’infinito, qualsiasi numero naturale, per quanto grande, è sempre piccolissimo. Allo scopo, anche per coinvolgere insegnanti di Lettere presenti, si chiama in causa il *Paradiso* di Dante ed il calcolo del numero degli angeli che, istante per istante, nascono; si tratta di un numero sterminato e si cerca di dare un’immagine di quanto grande sia questo numero.⁸ Più di un docente afferma che, dunque, quel numero, essendo così mostruosamente grande, è infinito. Al tentativo di spiegare che no, che per quanto grande sia, è sempre finito, si ha quasi una reazione unanime dovuta per certo al fatto che “infinito”, nella competenza di molti, ha come modello una quantità grande, talmente grande che non si può contare; tanto grande che non se ne può fare una *stima*.

Episodio 4. Ambiente: IV media svizzera (età: dai 14 ai 16 anni).

Si era chiesto di paragonare la cardinalità di **N** a quella di **Z**. Nella maggior parte dei casi, i ragazzi hanno utilizzato immagini mentali legate ai calcoli con i numeri finiti; questo ha portato naturalmente al fenomeno della dipendenza (Arrigo, D’Amore, 1999, 2002), secondo il quale, per dirla qui in breve, la cardinalità di un insieme infinito dipende dalla sua estensione, in base al modello grafico; in questo senso, un segmento lungo ha più punti di un segmento corto, mentre un insieme A , $A \subset B$, ha meno elementi di B . Gli studenti, nella maggior parte, hanno dunque, “ovviamente” convenuto che: $|N| = \frac{1}{2}|Z|$. [Qualche allievo puntualizza: «(...) escluso lo zero»].

In altri casi, gli allievi hanno effettivamente utilizzato una primitiva immagine mentale di infinito ma sono caduti nel fenomeno

⁸ Il calcolo del numero che Dante sembra voler celare in Par. XXVIII 91-93 è presentato in D’Amore (2000).

dell'*appiattimento* secondo il quale, per dirla qui in breve, tutti gli insiemi infiniti, in quanto infiniti, hanno stessa cardinalità. Questi allievi hanno sostenuto che $|N| = |Z|$ dato che entrambi sono infiniti (Arrigo, D'Amore, 1999, 2002).

Va pure detto che gli studenti dell'intera classe, trovandosi di fronte queste due relazioni fra cardinali ($|N| = \frac{1}{2}|Z|$ e $|N| = |Z|$), ovviamente contraddittorie,⁹ non hanno voluto ammettere che vi fosse qualche cosa di anormale in tale incoerenza. Un commento è stato: «Dipende da come si ragiona». Questo rinvio ad una relatività del “come si ragiona” è legato in modo esplicito ai modelli cui si ricorre per le due uguaglianze:

- la prima si riferisce al modello grafico consueto, l'ordine “naturale”, nel quale N si “appoggia” su una semiretta orientata (con i numeri - punti discreti) e Z ad un'analogha retta orientata;
- la seconda uguaglianza fa riferimento ad un ordinamento di Z del tipo: 0 +1 -1 +2 -2 +3 -3 ..., grazie al quale si stabilisce una (abbastanza) ovvia corrispondenza biunivoca con N.

Questo atteggiamento è stato rilevato da molti Autori nelle ricerche in campo internazionale (come mostrato ampiamente in D'Amore, 1996, 1997).¹⁰

La domanda a carattere nuovo che ci poniamo è: al di là delle spiegazioni già fornite a questo atteggiamento, non è possibile inoltre rilevare una incapacità di *stimare* l'infinito comune ai due insiemi N e Z? Non è possibile pensare che lo studente tenda a compiere stime diverse solo perché i modelli grafici proposti per i due insiemi sono diversi? Dunque, la stima sarebbe condizionata da fattori per così dire esterni. Questa considerazione aggiungerebbe un'ulteriore “abilità” a quelle elencate da Pellegrino (1999), da noi ricordate in **1.**:

⁹ Si noti bene: da un punto di vista matematico, dato che $n = \frac{1}{2} n$ (o $\aleph_0 = \frac{1}{2} \aleph_0$), l'affermazione è in un certo senso corretta; ma essa richiede competenze matematiche di una certa rilevanza; al livello scolastico cui l'Episodio 4 si riferisce, le due relazioni dovrebbero entrare in conflitto tra di loro, a meno che non si imponga il fenomeno dell'*appiattimento*.

¹⁰ D'Amore, 1996, 1997, traccia un panorama internazionale delle ricerche sulla didattica dell'infinito fino al 1996; esso fu la base per la conferenza di apertura del Topic Group XIV in occasione dell'ottavo ICME (International Congress on Mathematical Education), a Siviglia, nel quale l'autore era Chief Organiser.

- saper effettuare la stima senza tenere conto di fattori al contorno non significativi (il recipiente che contiene gli oggetti concreti da stimare, nel caso fisico finito; il modello grafico cui si ricorre per indicare l'insieme cui ci si riferisce, nel caso di insiemi infiniti).¹¹

Episodio 5. Ambiente: ultimi anni delle scuole superiori (italiane e svizzere) (età degli allievi: 17-19 anni).

A studenti che avevano già studiato l'argomento "infinito matematico", è stata sottoposta la seguente domanda (le domande esplicitate nella prima riga sono state formulate sulla base di precedenti dichiarazioni degli studenti, ottenute da precedenti ricerche: Arrigo, D'Amore, 1999, 2002):

3) Malgrado che fra due razionali diversi ve ne siano addirittura infiniti, credi ancora che vi siano tanti razionali quanti naturali?

se sì

se no

	perché lo ha detto l'insegnante giustificandolo con una dimostrazione che però non mi ha convinto	perché sono tutti e due infiniti	perché abbiamo visto una dimostrazione chiarissima e convincente	perché è contraria al buon senso	perché nella dimostrazione c'è qualcosa che non mi convince	perché l'insieme dei razionali è più grande di quello dei naturali
CH	1.11%	30%	27.78%	0%	1.11%	38.89%
			58.89%			40%
I	1.01%	66.67%	11.1%	3.03%	2.02%	13.13%
			81.82%			15.15%
T	1.06%	49.21%	19.05%	1.59%	1.59%	25.4%
			70.9%			26.98%

Il 70,9% di risposte "positive" non deve trarre in inganno: esso si compone di oltre 11% di studenti italiani e di oltre 58% di svizzeri. Il forte contributo dato dagli studenti svizzeri si è poi rivelato, in sede di intervista clinica, non tanto frutto di una vera comprensione, ma della

¹¹ Su questo punto, si potrebbe inserire il riferimento ai "modelli parassiti" ai quali gli studenti fanno riferimento anche se, dal punto di vista delle attese dell'insegnante, essi sono insignificanti (forme grafiche, ordine delle lettere,...) (D'Amore, 1998).

diffusa fiducia (un po' acritica) che lo studente svizzero attribuisce a ciò che afferma l'insegnante in aula. Se prendiamo le percentuali di risposte degli studenti italiani, abbiamo un quadro più fedele delle reali capacità dei liceali di confrontare cardinali di insiemi infiniti. Qui incontriamo di nuovo l'effetto di appiattimento: oralmente, il 67% risponde che sì, i due insiemi sono equipotenti, ma solo perché sono tutti e due infiniti.

Riuscire a percepire l'uguaglianza $|N| = |Q|$ come un fatto intuitivo supera ogni possibilità non solo dei principianti, ma anche di molti studenti considerati ottimi in matematici. Nonostante la dimostrazione di Cantor (o analoghe, da essa derivate), sembra che l'intuizione non giochi a favore. Il fatto è che le *stime* delle cardinalità dei due insiemi sono fortemente ostacolate dall'intuizione che sembra spingere verso l'affermazione $|N| < |Q|$. Anche in questo caso, le abilità citate all'inizio dell'articolo, quelle tratte dall'articolo di Pellegrino (1999), vengono messe in crisi...

Episodio 6. Ambiente: ultimi anni delle scuole superiori (italiane e svizzere) (età degli allievi: 17-19 anni).

A studenti che avevano già studiato l'argomento "infinito matematico", sono state sottoposte le due seguenti domande:

4a) Vi sono più numeri reali tra 0 e 1 oppure più numeri razionali tra 0 e 1?

	tra 0 e 1 vi sono più razionali	tra 0 e 1 vi sono più reali	i due insiemi hanno la stessa cardinalità	non si può dire
CH	3.33%	75.56%	13.33%	7.78%
I	9.09%	44.44%	35.35%	9.09%
T	6.35%	59.26%	24.87%	8.47%

4b) Vi sono più numeri reali tra 0 e 1 oppure più numeri razionali in tutto l'insieme Q?

	più numeri razionali in Q	più numeri reali tra 0 e 1	i due insiemi hanno la stessa cardinalità	non si può dire
CH	5.56%	48.89%	24.44%	21.11%
I	15.15%	22.22%	38.38%	18.18%
T	10.58%	34.92%	31.75%	19.58%

In questo caso è interessante vedere come un apprendimento apparentemente realizzato (il 60% circa degli studenti sembra avere

capito il fatto che la cardinalità di \mathbf{R} sia maggiore di quella di \mathbf{Q} , verificato mediante una seconda domanda (la 4b), nella quale si mette alla prova la sua reale costruzione, mostra un'evidente caduta (dal 60% di risposte corrette si cala al 35%).

In questo caso, la *stima* sembra richiedere abilità di alto livello, fortemente legate alla reale costruzione di una competenza matematica assai poco diffusa. Anzi: perfino tra professionisti della matematica si scopre che la disuguaglianza $|\mathbf{Q}| < |\mathbf{R}|$ non è del tutto conosciuta e fatta propria (Arrigo, D'Amore, 1999, 2002; Sbaragli, 2003), il che rende impossibile una *stima* significativa e corretta.

Da qui parte la nostra ricerca; parte cioè dalla consapevolezza che dietro questi *Episodi* si nasconde qualche cosa d'altro rispetto a quanto la letteratura ci dice. Abbiamo ipotizzato che un'ulteriore spiegazione fosse legata all'idea di *stima*, come abbiamo già cercato di far trapelare nei commenti finali di ciascun episodio.

2. La nostra ricerca

Dato per scontato che esista qualcosa che può essere chiamato “senso del numero” sulla base degli “episodi” precedenti (che sono solo alcuni di quelli che potremmo citare), ci chiediamo, ancora in modo vago, se possa dichiararsi esistere qualche cosa di analogo ma riferito all'infinito, che potremmo allora chiamare “senso dell'infinito”.

Si tratta di un oggetto personale di sapere che generalmente non culmina in una istituzionalizzazione della conoscenza in quanto non esiste un sapere codificato che si chiami così. Esso dunque non è oggetto di didattica esplicita nel corso di un curriculum scolastico.

Se tale oggetto di conoscenza matematica esistesse, potrebbe allora essere chiamato in causa in varie occasioni aventi a che fare con l'apprendimento del concetto di infinito, la cui complessità è stata più volte evidenziata nella ricerca internazionale (D'Amore, 1996, 1997). Dunque, una prova nella direzione da noi auspicata sembra avere un notevole interesse di ricerca, con forte ricaduta didattica.

Ci siamo proposti, di conseguenza, di effettuare delle ricerche per giungere a dare risposta alle seguenti domande. Raccogliamo le molte domande che ci hanno spinto alla ricerca in due gruppi, per evitare

inutili frammentazioni. La prima tipologia, **D1**, ha soprattutto carattere intuitivo e linguistico; la seconda, **D2**, è più raffinata e tecnica. Dunque la prima chiama in causa, oltre a studenti che hanno raggiunto alti livelli di competenza matematica, anche studenti non troppo evoluti o persone non esplicitamente colte in matematica (studenti senza preparazioni raffinate o insegnanti di scuola primaria o persone colte, ma non in matematica); la seconda domanda riguarda più da vicino solo studenti molto evoluti o persone colte in matematica (come, per esempio, insegnanti di matematica di un certo livello).

D1. Nel senso comune, c'è differenza tra “grandissimo” (nelle sue varie accezioni semantiche) e infinito? Se sì, quale? Studenti o adulti non specificamente colti in matematica, riescono a dare un esempio di qualche raccolta che davvero consti di infiniti elementi, o confondono “infinito” con “indefinito” o con “molto grande” o simili? Qual è il “senso dell'infinito” che essi riescono ad esprimere? Esiste? Quanto esso è eventualmente influenzato dalla cultura matematica acquisita?

Studenti o adulti riescono a distinguere tra “infinito” (inteso come cardinalità), “illimitato”, estensione infinita, successione infinita? Nel caso dell'estensione, ci sono differenze di accettazione tra il caso di una dimensione (linea), di due (superficie), di tre (solido)? Qual è il “senso dell'infinito” che queste domande mettono in evidenza? Esiste? Quanto esso è eventualmente influenzato dalla cultura matematica acquisita?

Ci sono differenze tra l'infinito come oggetto e l'infinito come processo? Il “senso dell'infinito” evidenzia o è evidenziato da tali differenze?

Quali riferimenti spontanei vengono proposti all'intervistatore da un punto di vista fisico o naturale? (Tempo, spazio, materia, energia, ...). Qual è il “senso dell'infinito”, se questo coinvolge fatti fisici?

Ci sono più problemi ad accettare il termine “infinito” come sostantivo o come aggettivo? Il “senso dell'infinito” è una acquisizione dell'infinito come oggetto o come processo?

Se l'intervistato dimostra di accettare spontaneamente l'uso di tale termine, quali altri concetti vi coinvolge? Qual è il senso che dà loro?

D2. È ben noto che l'assioma euclideo del tutto e delle parti («Il tutto è maggiore di ciascuna delle sue parti») vale solo per insiemi finiti. Esso ovviamente non vale più nel caso di insiemi infiniti, tant'è vero che proprio questa sua caratterizzazione viene spesso usata per definire un

insieme infinito “alla maniera di Galilei – Dedekind”: «Un insieme è infinito quando è possibile metterlo in corrispondenza biunivoca con una sua parte propria». Una volta accettato questo passo, riservato dunque a soggetti di discreta competenza matematica, si sa dalla letteratura che l’appiattimento (Arrigo, D’Amore, 1999, 2002) è misconcezione difficile da superare. Con appiattimento (come abbiamo già detto in precedenza) intendiamo quella misconcezione secondo la quale *tutti gli insiemi infiniti sono tra loro equipotenti*. Sappiamo bene che questa errata convinzione viene rafforzata dalle dimostrazioni che \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} sono effettivamente tra loro equipotenti, nonostante l’apparente impossibilità intuitivamente chiamata in causa da modelli figurati usuali. A questo punto, lo studente finisce con il credere che dimostrazioni analoghe debbano valere per *tutti* gli insiemi infiniti. Per capire il passaggio tra l’infinità numerabile \mathfrak{n} (di \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , per esempio) e l’infinità continua \mathfrak{c} (dei punti di una retta o di un segmento, o di \mathbb{R} e dei complessi, per esempio), occorre una maturità, una competenza, una capacità critica di alto livello.

Affermare, come si fa di solito, che $\mathfrak{n} < \mathfrak{c}$, che livello di competenze richiede? Quanti insegnanti di matematica lo sanno davvero o lo sanno capire di fronte ad una dimostrazione? Può una dimostrazione, in questi casi, essere strumento di costruzione di conoscenza? Come gli studenti dei corsi avanzati, per esempio dei corsi universitari, vedono questa disuguaglianza? Qual è il “senso dell’infinito” chiamato in causa?

Riteniamo che alla comprensione effettiva di tale disuguaglianza si opponga anche l’ostacolo dovuto al fatto che la dimostrazione di essa è data per assurdo, il che ulteriormente la rende ostica. C’è poi un sottile gioco di quantificatori che probabilmente sfugge ai più.

A proposito del “senso dell’infinito”, c’è da accertare: ammesso che un soggetto abbia dimostrato di possedere tale “senso dell’infinito”, esso vale esclusivamente per \mathfrak{n} o anche per \mathfrak{c} ? Si arriva ad avere un “senso di \mathfrak{c} ”. Come, quale?

3. Metodologia della ricerca

La metodologia seguita nella ricerca è stata assolutamente identica nei tre Paesi coinvolti.

Abbiamo deciso di servirci solo di TEPs (D'Amore, Maier, 2002) e di interviste cliniche, puntando più su un'indagine qualitativa che non quantitativa.¹² Temevamo infatti che le risposte date a test scritti di tipo

¹² In realtà, ciascuno dei gruppi nazionali (Colombia, Italia e Svizzera) ha anche compiuto un'analisi quantitativa dei dati raccolti che, in questo articolo, abbiamo però deciso di non riportare; ci sembrava fuori luogo fare differenze nazionali o compattare i risultati in una sola analisi quantitativa, vista anche la profonda differenza di numeri di soggetti sottoposti alla prova. Successivamente alla pubblicazione di questo articolo, ciascuno dei gruppi nazionali produrrà i risultati riscontrati sul proprio campione, mostrandoli anche in modo quantitativo.

Vorremmo notare, però, a scanso di equivoci, che i risultati ottenuti nei tre Paesi sono notevolmente simili, dal punto di vista qualitativo, nonostante le profonde differenze strutturali per quanto concerne l'organizzazione degli studi superiori (scuola secondaria superiore, università, corsi postlaurea e formazione insegnanti) ed i loro contenuti matematici.

In Colombia, la scuola basica (che corrisponde alla scuola obbligatoria) dura 10 anni e comprende: 1 anno di pre-scolare (da 5 a 6 anni di età), 5 anni di scuola primaria (6-11), 4 anni di scuola media (11-15); seguono 2 anni di scuola superiore (15-17); l'università dura di norma non meno di 5 anni; il futuro insegnante di pre-scolare, dopo la scuola superiore, deve frequentare un corso di laurea specifico di 5 anni ("licenciatura" in pre-scolare); idem per il futuro insegnante di scuola primaria ("licenciatura" in primaria); il futuro insegnante di matematica di scuola media o superiore, dopo la scuola superiore, deve frequentare un corso di laurea specifico di 5 anni ("licenciatura" in matematica); è molto diffusa la frequenza da parte degli insegnanti in servizio di matematica di 2 anni di specializzazione in Didattica della Matematica, al fine di qualificare il proprio insegnamento.

In Italia, la scuola primaria inizia a 6 anni e dura 5 anni (da 6 a 11 anni); la scuola media dura 3 anni (11-14); la scuola superiore dura 5 anni (14-19); l'università fino a pochi anni fa durava non meno di 4 anni ma ora vige il sistema 3 + 2 nel quale i primi 3 anni costituiscono la laurea ed i successivi 2 la specializzazione; il futuro insegnante di scuola primaria o di scuola dell'infanzia, dopo la scuola superiore, deve frequentare un corso di laurea apposito della durata di 4 anni; il futuro insegnante di matematica di scuola secondaria deve seguire 3 anni di università e 2 di specializzazione.

In Svizzera, la scuola primaria inizia a 6 anni e dura 5 anni (6-11); la scuola media dura 4 anni (11-15); la scuola superiore dura 4 anni (15-19); l'università ha durate molto variabili; il futuro insegnante di scuola dell'infanzia o di scuola primaria, dopo la scuola superiore, deve frequentare un corso di 3 anni presso l'Alta Scuola Pedagogica; il futuro insegnante di scuola secondaria, dopo la scuola superiore, una volta superato il concorso –che comporta l'esibizione dei titoli di studio conseguiti e l'effettuazione di una lezione di prova– viene assunto al 50% e per il resto del tempo è tenuto a frequentare un anno di formazione presso l'Alta Scuola Pedagogica, che prevede un esame finale di abilitazione all'insegnamento. Nel prossimo futuro l'organizzazione cambierà in questo modo: ogni candidato deve essere in possesso di un diploma di "bachelor" in una disciplina e deve iscriversi a un corso biennale a tempo pieno che,

usuale potessero essere influenzate da fattori già riscontrati nella letteratura, quali: fretta di terminare, superficialità nella risposta, timore di una valutazione,... Il TEP e l'intervista clinica, specie se effettuati da ricercatori estranei e con estrema pacatezza e senza fretta, possono mettere il soggetto a proprio agio; qui non si tratta di fare domande "cruciali" o "patologiche", ma di analizzare a fondo le competenze reali, profonde, nascoste, dei soggetti. Le interviste, infatti, duravano parecchio tempo; di tutte abbiamo le registrazioni sonore e/o le trascrizioni su carta che sono a disposizione dei ricercatori interessati.

Abbiamo deciso di prendere in esame:

- studenti colombiani, italiani e svizzeri delle scuole secondarie
- studenti universitari italiani del corso di laurea in scienza della formazione (futuri maestri di scuola primaria)
- studenti universitari colombiani di "licenciatura", cioè di corsi di laurea di matematica (la durata del corso è di 10 semestri), ma specifici per la formazione di insegnanti di scuola secondaria
- studenti universitari svizzeri del corso di laurea in comunicazione o della scuola universitaria professionale
- insegnanti colombiani e italiani in servizio di scuola primaria e secondaria
- persone senza relazione con il mondo della scuola o con il mondo accademico, di livello culturale alto, italiani e colombiani.

Il numero totale dei soggetti sottoposti alla prova è il seguente:

- relativamente alla domanda di ricerca **D1**: 130 colombiani, 298 italiani e 579 svizzeri, per un totale di 1007 soggetti
- relativamente alla domanda di ricerca **D2**: 20 colombiani e 16 italiani, per un totale di 36 soggetti.

La differenza così rilevante tra i numeri dei soggetti chiamati in causa in **D1** ed in **D2** dipende da un fatto ovvio; per poter porre le domande relative a **D2**, occorre una competenza forte su questioni che coinvolgono le cardinalità **n** del numerabile e **c** del continuo, il che restringe notevolmente l'universo campionario all'interno del quale scegliere i soggetti; inoltre la metodologia di ricerca adottata in **D2** è

alla fine, superati gli esami previsti, darà il titolo di master per l'insegnamento in due discipline; la seconda disciplina (detta disciplina del master) è scelta dal candidato stesso.

esclusivamente di intervista clinica, il che comporta un notevole impegno e molto tempo a disposizione.

Nel tentare di dare risposte alle precedenti domande, abbiamo necessariamente dovuto classificare le risposte sia in base al tipo di proposta (TEP o intervista), ma anche in base alla tipologia degli intervistati.

I TEPs e le interviste si sono svolte a scuola o all'università, nel caso di studenti, di studenti di corsi di postgrado o di insegnanti in servizio; in qualsiasi altro luogo idoneo, nel caso di persone generiche.

Le interviste sono state tutte condotte a coppia; uno dei ricercatori effettuava le domande, mentre un altro ascoltava e registrava (in alcuni casi veniva registrata tutta l'intervista clinica, in altri casi solo i punti salienti).

4. I temi delle interviste

Daremo una traccia generale dei contenuti dei TEPs nel corso di **5.** per comodità di lettura.

Diamo qui invece l'elenco delle tracce delle interviste cliniche; esse iniziavano tutte nello stesso modo, ma si evolvevano anche in modi nettamente diversi, a seconda della competenza o della maturità dimostrata dal soggetto intervistato.

Oltre a chiedere approfondimenti circa le proprie dichiarazioni nei TEPs, all'intervistato veniva chiesto di fare esempi:

- di una cosa grande (A)
- di un numero grande (n)
- di una cosa più grande di A (B)
- di un numero più grande di n (m)
- di una cosa infinita (C)
- di un numero infinito (p),

al solo scopo di valutare le singole reazioni.

Tramite l'analisi dei TEPs e interviste cliniche, si valutava se l'intervistato aveva intuizioni diverse a proposito di:

- infinito (come cardinale)
- illimitato
- infinito come estensione (1D, 2D, 3D).

Tramite TEPs e intervista clinica, si valutava se l'intervistato aveva più propensione ad accettare l'infinito come:

- processo
- oggetto.

Si verificava a quali fatti fisici o naturali egli facesse più riferimento parlando di infinito:

- tempo, spazio, materia, energia,...

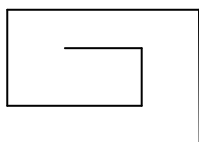
Si verificava se aveva maggior propensione ad utilizzare la parola "infinito" come

- sostantivo
- aggettivo.

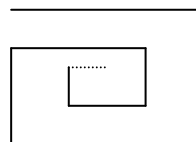
Solo con persone matematicamente evolute si affrontava il discorso della differenza tra **n** e **c**. Si cercava di capire se scattava l'appiattimento, che tipo di competenza queste persone avessero in realtà, se accettavano la doppia natura dell'infinito o se erano succubi dell'appiattimento.

Se **n** e **c** venivano dichiarati accettati ed anche $n < c$, si cercava di indagare a fondo sulla reale competenza necessaria per capire la disuguaglianza precedente.

Ecco alcune delle domande poste, per avviare la discussione delle interviste cliniche.



si può continuare all'infinito?



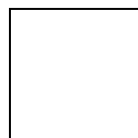
si può continuare all'infinito?

Stessa domanda per le successioni:

0 1 2 3 4 5 ...

1 1/2 1/3 1/4 1/5 ...

0 1/2 2/3 3/4 4/5 ...





...

0,9 0,99 0,999 ...

Su un foglio appare scritto quanto segue; l'intervistatore doveva scegliere coppie che poi il soggetto intervistato doveva paragonare:

ci sono più... o più...?
granelli di sabbia sulla spiaggia di Cartagena¹³
gocce di acqua nel lago di Lugano
fili d'erba nella campagna di tutto il dipartimento di Cundinamarca¹⁴
esseri umani sulla Terra
stelle nell'universo
numeri naturali multipli di 106
lettere alfabetiche su tutti i libri pubblicati nel mondo
capelli su tutte le teste di tutti gli Svizzeri
foglie degli alberi della foresta amazzonica
formiche in tutta America del Sud
punti su un segmento lungo 2 cm
atomi del Monte Bianco
chicchi di riso di tutti i supermercati del mondo
microbi presenti in tutta Europa

...

A studenti evoluti si chiedeva se ci sono più punti nel segmento di estremi A e B ([AB]) o sul segmento ottenuto da quello togliendo il punto B ([AB[).¹⁵ Così procedendo, si può arrivare ad un segmento privo di punti? Dopo quanti passi? Si possono "contare" tali passi?

Ai soggetti venivano proposti 3 testi - stimolo di avvio alla redazione dei TEPs; tali test verranno presentati in **5.1.**; una volta che i ricercatori avevano analizzato i TEPs, alcuni soggetti venivano scelti per l'intervista clinica; si cominciava sempre dall'analisi dei TEPs prodotti, poi si avviava l'intervista, servendosi dei test stimolo che sono stati

¹³ Città turistica sulla costa atlantica, nel pieno Caribe, capoluogo del dipartimento dell'Atlántico.

¹⁴ Uno dei 31 dipartimenti nei quali è divisa la Colombia, avente come capoluogo Bogotá (che è inoltre capitale della Colombia).

¹⁵ Si usa in questo articolo la simbologia matematica diffusa in Italia; ma nei diversi Paesi si è ovviamente usata quella ivi più usuale.

riportati qui sopra e di altri (analoghi). Tali test stimolo erano identici nei tre Paesi coinvolti, con piccole variazioni locali dovute alle contingenze, ma di nessun interesse per la ricerca.

Come si vede, si tratta di domande “classiche” della ricerca sul tema dell’infinito; ma, come abbiamo già evidenziato, era nostra intenzione interpretare le risposte scritte (nei TEPs) ed orali (nelle interviste cliniche) sulla base di “senso dell’infinito” e “stima”, dunque, in modo assai diverso rispetto a quanto fatto nella letteratura classica sul tema.

Con alcuni soggetti particolarmente evoluti (studenti dei corsi finali di laurea in matematica e simili, studenti universitari che dimostravano particolare interesse, studenti dei corsi postlaurea in formazione da insegnante di matematica, insegnanti di matematica di scuola primaria particolarmente interessati, insegnanti di matematica di scuola secondaria, per un totale di 36 soggetti) si procedeva, dando le dimostrazioni di alcuni teoremi classici:¹⁶

- la corrispondenza biunivoca tra \mathbb{N} e \mathbb{Z} , quella tra \mathbb{N} e \mathbb{Q} , da cui si deduce che anche \mathbb{Z} e \mathbb{Q} hanno la cardinalità \aleph_0 del numerabile
- l’impossibilità di stabilire una corrispondenza biunivoca tra \mathbb{N} e $]0, 1[(\subset \mathbb{R})$, da cui si arriva a dedurre che \mathbb{R} ha una cardinalità maggiore di quella di \mathbb{N}
- la corrispondenza biunivoca tra gli insiemi dei punti di due segmenti di lunghezza diversa, tra segmento e semiretta, tra segmento e retta
- la corrispondenza biunivoca tra l’insieme dei punti di un quadrato e l’insieme dei punti di un suo lato.

Una parte finale della ricerca, nella quale sono stati coinvolti, nei tre Paesi, soggetti in numero limitato, è stata dunque dedicata all’intervista clinica, durante e dopo la proposta di queste dimostrazioni.

5. Risultati della ricerca

5.1. Relativamente a D1

¹⁶ Omettiamo i vari passaggi matematici delle singole dimostrazioni, ritenendoli ben noti ai lettori di questo articolo. Essi si trovano, in ogni caso, in qualsiasi buon testo anche di divulgazione che tratti questi argomenti (Arrigo, D’Amore, 1992).

Come abbiamo già detto, la raccolta dati è stata fatta mediante TEPs e interviste cliniche riferite a stimolazioni scritte. Le stimolazioni vengono proposte qui di seguito di volta in volta per comodità di lettura.

Si tratta di tre situazioni che coinvolgono l'infinito attuale, descritte mediante dialoghi fra due personaggi; questa scelta è stata fatta per rendere più spontanea e meno formale l'entrata in tema da parte degli intervistati.

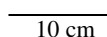
TEP 1

In un quadrato di lato 10 cm
vi sono infiniti punti...



10 cm

Anche in un lato del quadrato
vi sono infiniti punti



10 cm

Nel quadrato ce ne sono molti di più... Secondo me sono infiniti entrambi

Sicuramente nell'intero piano
ve ne sono ancora di più

Forse questa volta
hai ragione tu!

Tu, che cosa ne pensi?

Più della metà dei soggetti che hanno lavorato sul TEP 1 evidenzia l'effetto appiattimento. Si rileva una certa tendenza, più evidenziata in Italia e Svizzera, ad un aumento percentuale con l'aumentare dell'età e dunque del grado scolastico; nel caso colombiano, invece, l'effetto è invertito: maggiore tra i soggetti più giovani. Non si tratta, in ogni caso, di differenze rilevanti.

Un terzo dei soggetti sostiene che in una figura limitata (segmento o quadrato) non possono esserci infiniti punti, mentre ciò appare possibile in una figura illimitata (retta o piano). Appare chiara la confusione tra "infinito" e "illimitato", già rilevato dalla letteratura di ricerca internazionale (D'Amore, 1996, 1997).

Soggetti giovani asseriscono che nel lato e nel quadrato non ci sono infiniti punti; essi asseriscono che i punti del lato e del quadrato devono essere “moltissimi” o analoghi.

Notevole la presenza percentuale di soggetti evoluti (comuni a tutti i Paesi in modo massiccio) che sostengono che le quantità infinite non si possono né contare né confrontare, mentre nei soggetti meno scolasticamente evoluti questo limite non si pone in modo tanto chiaro. Appare evidente il fatto che, anche nei soggetti evoluti, “infinito” appare sinonimo di “indeterminato”. In alcuni soggetti più giovani appare chiara l’idea che “infinito” è sinonimo di “numero grandissimo” (ma finito).

Qualche soggetto evoluto asserisce che “cardinale di un insieme infinito A” è solo un modo di dire; a differenza di “cardinale di un insieme finito”, tale locuzione starebbe a dire che A non si può numerare.

L’effetto dipendenza (dalle misure o dalle dimensioni) si stabilizza attorno ad un terzo o poco più dei soggetti esaminati, ma appare meno marcato nei soggetti evoluti, probabilmente come effetto di uno specifico insegnamento. Questo fatto è comune a tutti i Paesi.

Sono molti i soggetti le cui risposte scritte per mezzo di TEP non possono essere categorizzate.

Una volta esaminati i testi prodotti come TEP 1, si sono scelti soggetti da sottoporre ad interviste cliniche (40 in Svizzera, 15 in Italia e 8 in Colombia).

Per condurre le interviste cliniche, sempre si parte con l’analisi dei TEPs prodotti dai soggetti, ma poi si mettono in campo le sollecitazioni già illustrate in precedenza.

Relativamente a questi soggetti intervistati, rileviamo l’appartenenza alle seguenti categorie.¹⁷

Prima categoria: l’infinito è visto come numero, forse enorme, ma finito (o genericamente come illimitato)

Per questi soggetti l’infinito è un numero naturale che non si riesce ad immaginare, tanto è grande. Alcuni di questi soggetti, anche durante il

¹⁷ Avvertiamo che le categorie qui presentate sono un po’ generiche, rispetto a quelle che si potrebbero presentare, a causa del fatto che si tratta di coordinare risultati con soggetti diversi, in condizioni diverse, in Paesi diversi, con storie culturali diverse. Come abbiamo già detto, a questo articolo seguiranno altri tre, ciascuno specifico per il gruppo di ricerca nazionale; in essi sarà più facile elaborare strategie di categorizzazione più specifiche e caratterizzanti.

colloquio, non ammettono l'esistenza del concetto di infinito così come lo concepiscono i matematici (viene quasi del tutto evitato l'infinito attuale). Essi, coerentemente con la loro idea di infinito, non ammettono che in una figura geometrica limitata (nelle stimolazioni: un quadrato ed un segmento, due segmenti di differente lunghezza, un segmento ed un cubo, ...) ci possano essere infiniti punti, in senso attuale. Spesso questo fatto è legato alla materialità attribuita agli oggetti della matematica, da alcuni di noi già riscontrata in altre occasioni (Arrigo, D'Amore, 1999, 2002; Sbaragli, 2003).

Ecco alcune frasi tratte dalle interviste cliniche:¹⁸

«Se si continua a riempire un quadrato con punti, a un certo momento non ce ne stanno più... a meno che non si mettano i punti uno sopra l'altro»;

«Io non riesco a pensare che in uno spazio finito o in una misura finita ci possono essere infiniti punti. [...] so che in un segmento ci sono infiniti punti ma se qualcuno mi chiede quanti punti ci sono, nella mente mi figuro i puntini che coprono i segmenti e direi subito un numero e non risponderei infiniti punti»;

«[...] per me non ci sono infiniti punti né qui [nel quadrato] né qui [nel lato]. In uno spazio finito non ci possono essere infiniti punti»;

«Io penso che l'infinito, proprio perché tale, non sia quantificabile; se poi viene considerato in relazione al punto, diventa maggiormente difficile, direi impossibile, stabilirne la quantità. Ritengo che contare, quantificare l'infinità dei punti, sempre che sia lecito parlare così, sia un'operazione insensata che non porta ad alcun risultato oltre che, ripeto, materialmente impossibile»;

«Mi dispiace, ma nessuno mi ha mai insegnato cos'è l'infinito, penso però che sia un qualcosa di cui non si sa la quantità ben definita»;

«[...] tanto all'aumentare come al diminuire ci saranno cose con molta difficoltà da contare e non si potranno contare e è per questo che si dice aumentare o diminuire all'infinito. [...] Tra i numeri ci sono troppi

¹⁸ Le frasi che seguono sono trascritte tali e quali risultano dalle registrazioni; l'uso della punteggiatura, inserita da parte nostra, ricalca le pause del soggetto o è legata al tentativo di dare senso a frasi orali che, come spesso capita, sono talvolta un po' sfuggenti. Le traduzioni delle frasi delle interviste cliniche dallo spagnolo all'italiano riproducono il senso delle frasi stesse e non le specifiche caratteristiche sintattiche e semantiche.

numeri e poiché non c'è una quantità si può stabilire che ci sono infinite parti».

Seconda categoria: l'infinito non si riduce ad un numero, per quanto enorme, ma assume un senso relativo rispetto ad altro

Alcuni soggetti, ben pochi in verità, pensano all'infinito come a qualche cosa che supera un finito enorme; vi sono due casistiche:

in riferimento alla fisica (universo), come in questo esempio nel quale il finito enorme è l'universo e l'infinito è lo spazio che lo contiene:

«Poiché universo è quel che già esiste attraverso l'esplosione e l'evoluzione dei pianeti e tutta questa storia, lo spazio è lo spazio dove sta l'universo e può continuare ad espandersi poiché ha una misura, e quando si dice infinita misura significa che la misura non può essere calcolata e se dicono che ha 200 mila milioni di anni luce di misura, allora è calcolato e non lo si potrebbe dichiarare infinito, perché l'infinito è il non sapere qual è la misura finale, dunque in un pensiero comune direi l'universo, perché uno sempre sente le persone parlare di universo come il più grande che ha l'infinito, però con questa idea resterebbe definito che è infinito, piuttosto sarebbe lo spazio»;

in riferimento alle grandezze, come in questo esempio nel quale sembra che l'infinito di un tipo di grandezze dipenda dal fatto che esse non possano essere espresse sulla base delle altre:

«[L'infinito è] qualcosa di tanto grande o tanto piccolo che non si può misurare con qualche cosa d'altro che sia manipolabile... Sì, in generale, se sono omogenee e con più volte dell'una non posso superare l'altra è perché l'altra è più grande, è infinita».

Terza categoria: il fenomeno dell'appiattimento

Essendo l'infinito una categoria non sottoponibile ad ulteriori classificazioni, tutti gli infiniti sono uguali tra loro; dalla maggior parte dei soggetti che fanno questa considerazione o simili, l'infinito è visto come *entità numerica* non precisabile, più un modo di dire che un oggetto passibile di oggettivazione matematica.

Ecco alcune frasi tratte dalle interviste cliniche:

«[...] Se due insiemi sono infiniti, sono infiniti e basta»;

«Dicendo infiniti, abbiamo già detto tutto, più di così, è impossibile»;

«Secondo me sono infiniti entrambi, perché comunque non ci può essere un infinito più numeroso [cancella “numeroso” e scrive “grande”] che un altro. Sono infiniti entrambi»;

«Infinito è come dire che non si può... Insomma se non si può per l'uno, non si può neanche per l'altro e così sono uguali; cioè sono uguali tutti perché non si può per nessuno; [Domanda: “Non si può” che cosa?] Eh, non si può dire nulla, come faccio a dire quanti sono?»;

«Scusa sai, ma se sono infiniti questi, anche questi, e tutti gli infiniti, sono infiniti tutti e basta»;

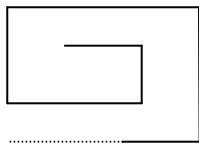
«Considero che, se i punti sono infiniti, non è possibile dire se c'è una maggior o minore quantità in un posto o nell'altro, il fatto è che sono infiniti, e all'essere infinito è come dire che non hanno una fine e pertanto non si potrà stabilire un cardinale di ciascuno di essi per poterli paragonare»;

«No, no, cioè, perché se si dice che è infinito io non potrei assegnare all'insieme dei numeri naturali un numero, l'insieme dei numeri naturali ha centomila numeri, duecentomila numeri, non potrei dire questo, no, no, il processo di contare non terminerebbe mai ed io non mi potrei permettere di assegnare un cardinale a questo insieme».

Quarta categoria: lo scollamento tra l'infinito appreso a scuola e la propria immagine mentale

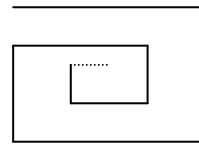
Questi soggetti fanno un'importante distinzione: da una parte capiscono che in matematica ha senso ammettere che in una figura geometrica limitata possano esserci infiniti punti, ma loro, nell'intimo della competenza reale acquisita e concettualmente costruita, continuano ad avere l'immagine dei punti fisici e quindi affermano che nella realtà (che per loro è estranea ed anzi spesso in contraddizione rispetto alla matematica) in una tale figura non possono esserci infiniti punti. Questa osservazione è stata più volte proposta, nei vari Paesi, anche da soggetti esperti che, peraltro, hanno avuto modo di mostrare di avere un'immagine corretta di punto geometrico, almeno sulla base delle dichiarazioni esplicite su questo tema preciso. D'altra parte, come abbiamo già rilevato, la letteratura internazionale di ricerca ha già ampiamente mostrato casi di contraddizione esplicita di questo tipo, anche proprio su fatti esplicitamente legati all'infinito, anche in soggetti evoluti.

In particolare, nella domanda relativa alla spirale,



si può continuare all'infinito?

caso A



si può continuare all'infinito?

caso B

ricorre spessissimo il fatto che si può continuare all'infinito nel caso A, visto che la spirale «si apre verso il piano» (da tutti considerato infinito, ma nel senso di illimitato), ma NON si può continuare all'infinito nel caso B.

Alcuni dei soggetti sono stati sottoposti a dimostrazioni adatte al loro livello scolastico per vedere se esse avevano un effetto di convincimento. La cosa ha evidenziato un tale interesse specifico che lo tratteremo a parte in **5.3**.

Alcune delle frasi riportate precedentemente possono essere considerate anche facenti parte di questa categoria; ecco alcune ulteriori frasi tratte dalle interviste cliniche:

«No, è che si dice infinito, a scuola, spesso, quando ci sono cose così [insieme dei punti di un segmento], ma tutti sanno, io credo che anche il professore, che è un modo di dire, tutti lo sanno, è come un assioma: si dice così e basta; ma una cosa è quello che ti obbligano [sic!] a dire, e altro è quello che succede davvero. Se io devo dire infinito, lo dico e basta; ma poi, che infinito e infinito...»;

«Infinito non c'è da nessuna parte, che se proprio lo devo disegnare lo faccio ed è finito [si riferisce al segmento]; niente... Certo se penso di prolungare [il segmento] allora sembra che non ci sia fine, ma davvero? Sfido chiunque a farla [intende: a disegnare una retta]. [Domanda: E i numeri naturali?] Ah, no, quella è un'altra cosa, sì aggiungo uno, poi uno, poi uno, ma non è tanto che sono infiniti, quanto che la serie non finisce mai»;

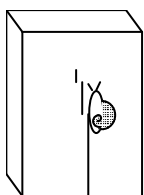
«Un'altra cosa che ho letto è che gli infiniti sono diversi, uno è più grande dell'altro; ma, secondo me, due insiemi con infiniti elementi hanno lo stesso numero di elementi anche se non sono in corrispondenza biunivoca»;

«Secondo il mio giudizio, vi sono infiniti punti in entrambi poiché per ogni punto del quadrato possiamo trovare un punto sul lato del quadrato che corrisponde. Di conseguenza se nel quadrato vi sono infiniti punti anche nel lato del quadrato ci sono. Lo stesso ragionamento si può fare per l'intero piano. Vi è sempre una corrispondenza. [...] Mi è difficile comunque pensare che nel quadrato vi sono infiniti punti come nell'intero piano»;

«[...] Eppure dal libro avevo capito così, quindi ci credevo. E quindi? Non so più che cosa pensare. Peccato, mi sembrava di vederli bene [...]. A questo punto forse sono di più quelli del quadrato»;

«[...] Secondo il senso della successione dei punti posso dire che esiste un limite di spazio e per questa ragione non continuerei all'infinito».

TEP 2



Una lumaca vuole scalare un muretto.
Nella prima ora riesce a salire fino a metà.
Nella seconda ora, essendo stanca, sale solo la metà dello spazio percorso prima.
Nella terza ora, sempre più stanca, compie la metà del percorso fatto nell'ora precedente.
E così via.....

Per me non arriverà mai in cima

Sì che ci arriverà: se pensi che dopo due ore ha già compiuto i tre quarti del cammino...

Tu che cosa ne pensi?

Oltre un terzo dei soggetti sottoposti al TEP afferma che la lumaca non arriverà mai in cima al muro, con punte massime oltre il 40% raggiunte dai soggetti più evoluti in Italia e Svizzera e, viceversa, dai meno evoluti in Colombia.

Una percentuale non trascurabile di soggetti (tra un quarto ed un terzo, con punte più alte in Colombia) ritiene che la lumaca arriverà dopo un certo tempo che qualcuno stima in ore, altri in giorni, mesi o anni. Una

buona parte dei soggetti ritiene che la lumaca arriverà, evitando però di esprimersi sul tempo. Pochi soggetti pongono l'accento sull'altezza della parete.

Vi sono poi delle risposte impossibili da categorizzare.

Una volta esaminato il TEP 2, si sono scelti soggetti da sottoporre ad interviste cliniche (40 in Svizzera, 15 in Italia e 8 in Colombia).

Per condurre le interviste cliniche, sempre si parte con l'analisi dei TEPs prodotti dai soggetti, ma poi si mettono in campo le sollecitazioni già illustrate in precedenza.

Relativamente a questi soggetti intervistati uno per uno, rileviamo l'appartenenza alle seguenti categorie.¹⁹

Prima categoria: attenzione posta sul cammino percorso dalla lumaca

Quasi tutti questi soggetti affermano che la lumaca riesce ad arrivare in cima perché, continuando a viaggiare, dopo “molto tempo” arriverà alla meta. Ma il “molto tempo” viene stimato in quantità finite che variano dalle poche ore ad alcuni anni. In generale i soggetti avvertono la presenza di quantità infinitesime che si addizionano, ma questi “infinitesimi” sono considerate come quantità piccolissime, ma costanti. Un solo soggetto sostiene che la lumaca arriva in cima in un tempo infinito.

Ecco alcune frasi tratte dalle interviste cliniche:

«Se non si stanca, arriva in cima, sicuro, ma quanto tempo ci metterà? A vedere così, molto tempo ancora, guarda quanta strada che ha fatto»;

«Sì, certo [che arriverà in cima]; più o meno potrebbe metterci, be' ha già fatto molta strada in due ore, altre due? È così?»;

¹⁹ Valgono le stesse note precedenti su categorie, frasi riportate e traduzioni. La presente nota non verrà più ripetuta giacché la stessa cosa vale anche negli analoghi punti successivi.

C'è però da aggiungere un'altra considerazione. Le categorie che abbiamo deciso di proporre qui, nel paragrafo 5., sono basate sulla tipologia di risposte date dai soggetti della ricerca ed apparentemente non del tutto legate alle domande poste in 4. Abbiamo scelto di puntare l'attenzione sul comportamento dei soggetti esaminati. Si vedrà come tali soggetti prendano in seria considerazione il riferimento, per noi inessenziale, degli specifici oggetti proposti (la lumaca, il muro, ...) e non il senso logico profondo delle domande. Tuttavia, in 6., al momento di rispondere alle domande poste in 4., useremo i risultati di 5. in modo circostanziato e specifico.

«Un passo alla volta, sempre più piccolo, ha già fatto molta strada, ancora ancora [e traccia sul foglio piccoli tratti], piccolissimi, infinitesimi...[Domanda: Dunque, arriverà in cima o no?] Io credo di sì, ma forse ci vorranno anni e anni».

Seconda categoria: attenzione posta sul cammino che alla lumaca rimane da percorrere

Questi soggetti generalmente non credono che la lumaca riesca ad arrivare in cima, «perché, dopo ogni ora di cammino, le rimane sempre della strada da fare». La loro esperienza di vita li costringe però ad ammettere che la lumaca “prima o poi” arriverà in cima: osserviamo di nuovo uno scollamento tra matematica (modello matematico) e realtà (vissuto quotidiano).

Pensando ai tratti di cammino non ancora percorsi, la maggior parte dei soggetti immagina delle quantità piccolissime, ma costanti. Quelli che hanno risposto con sicurezza che la lumaca arriverà in cima, hanno mostrato di pensare già a quantità piccolissime ma variabili, che diventano sempre più piccole.

Ecco alcune frasi tratte dalle interviste cliniche:

«Dunque, io ragiono così. Ci sono dei pezzetti che mancano, ma sono sempre più piccoli e ogni volta è un'ora; dai e dai, di un'ora in un'ora, si fanno giorni e anni, cosicché mi viene spontaneo dire che no, che non ci arriverà mai; però, insomma, se riesce a resistere, si tratta solo di un tratto finito»;

«Alla prima ora, già manca la metà; in un'altra ora ce la farebbe, ma no, il gioco non è così; dunque un'altra ora e già è a $3/4$; un'altra ora ed è a $7/8$; manca sempre meno sempre meno, $15/16$, così. Tuttavia, un pezzetto manca sempre, $1/16$, $1/32$, quindi no, non ce la può fare. Però non so, se davvero la lumaca, se per davvero la prendi, io credo che ci arrivi alla fine; sai perché? Perché alla fine i pezzetti [che mancano] sono piccolissimi»;

«Tanti tratti di muro [quelli che mancano in salita] tutti piccolissimi, così che la lumaca arriverà di sicuro in fondo, insomma»;

«Sì, ogni volta più piccolo, piccolo, piccolissimo, per cui ce la fa di sicuro».

TEP 3

Questa volta la sfida la propongo io: vince chi riesce a trovare il più grande numero che inizia con 0,....

Io dico: 0.9
Ho vinto!

0,99
Ho vinto io!

0.999
Ho vinto io!

Allora io dico $0,\bar{9}$

Non è giusto! Quello vale 1.

Non è vero.
Ammettilo: non sai perdere.

Se tu fossi l'arbitro della sfida a chi daresti la vittoria e perché?

La stragrande maggioranza dei soggetti intervistati ritiene che $0,\bar{9}$ non sia uguale ad 1 e le percentuali sono altissime anche nei soggetti evoluti. (Solo tra gli studenti della scuola universitaria professionale svizzera, per effetto di un precedente insegnamento esplicito, vari soggetti ammettono l'uguaglianza).

Tra i soggetti sottoposti a prova in Italia e Svizzera, nessuno studente universitario di nessuna facoltà ammette l'uguaglianza fra $0,\bar{9}$ ed 1, neppure tra gli studenti postlaurea; in Colombia invece 7 studenti universitari (corso di laurea o postlaurea) su 53 (15%) dichiarano che vale l'uguaglianza.

Molti i soggetti che non sono categorizzabili, ma si tratta quasi esclusivamente di studenti dei bassi livelli di scolarità.

Una volta esaminato il TEP 3, si sono scelti soggetti da sottoporre ad interviste cliniche (40 in Svizzera, 15 in Italia e 8 in Colombia).

Per condurre le interviste cliniche, sempre si parte con l'analisi dei TEPs prodotti dai soggetti, ma poi si mettono in campo le sollecitazioni già illustrate in precedenza.

Relativamente a questi soggetti intervistati uno per uno, rileviamo l'appartenenza alle seguenti categorie.

Prima categoria: attenzione posta alla somma $0,9+0,09+0,009+\dots$ o alla successione $0,9, 0,99, 0,999, \dots$

Alcuni soggetti, anche se lo esprimono in modi diversi, non accettano l'uguaglianza tra $0,\bar{9}$ ed 1 perché asseriscono che, continuando ad aggiungere altri 9 dopo la virgola, momento per momento, dunque al finito, ci si avvicina sì sempre di più ad 1 senza però mai raggiungerlo, e così generalizzano questa situazione di mancato arrivo al "traguardo".

La scrittura $0,\bar{9}$ non viene considerata come qualche cosa in atto, ma solo come un simbolo che fa riferimento ad un processo potenziale come, d'altra parte, la letteratura internazionale di ricerca aveva già rilevato da tempo.

Ecco alcune frasi tratte dalle interviste cliniche:

«Se io scrivo 0,9 questo è quasi 1 ma non è 1 perché gli manca 0,1; ma se io aggiungo 0,09 mi trovo a 0,99 che è sempre più vicina a 1, ma non è 1 perché gli manca 0,01; ma se io aggiungo 0,009 mi trovo già a 0,999; sempre così, la somma cresce e cresce, ma gli manca sempre 0,0000001 anche con infiniti zeri, sempre qualche cosa, a 1 non ci arrivo mai, perché ogni volta gli manca un po'»;

«Sì, ho capito, è come un trucco: voglio arrivare al traguardo che è 1 e faccio come la lumaca, prima 0,9, poi 0,99, poi 0,999 e così via sempre più 9; sarebbe come dire che faccio un passo alla volta di 0,9, poi 0,99, poi 0,999. Sì, vedo che sono sempre più vicino a 1, ma è ovvio che non ci posso arrivare mai»;

«Mah! Se fosse uguale, perché scriverlo così [indica $0,\bar{9}$]? Tanto vale scriverlo normale [indica 1]; se lo scrivono così [indica di nuovo $0,\bar{9}$], vuol dire che è diverso e vuoi sapere perché? Perché ha vinto quello [si riferisce ai due personaggi dello stimolo per il TEP 3] che non ci crede [che non crede all'uguaglianza] perché ne puoi mettere finché vuoi [di 9], anche uno e poi uno e poi un altro, ma a 1 non ci arrivi mai; se ci guardi, 0,999999 non può essere 1».

Seconda categoria: attenzione posta sulla differenza tra $0,\bar{9}$ e 1

Anche questi soggetti non accettano l'uguaglianza tra $0,\bar{9}$ e 1 adducendo che manca sempre qualcosa esprimibile come $0,0\dots01$. Durante le interviste cliniche emerge chiaramente che qualcuno di loro ammette che l' "ultima cifra 1" non può essere scritta, ed allora dichiara che la differenza è esprimibile come $0,000\dots0\dots$

Alcuni soggetti dichiarano che non è escluso che in matematica questa uguaglianza possa valere, ma nella realtà ciò non è possibile, denunciando il solito "scollamento" tra matematica e realtà.

Alcune delle frasi della categoria precedente potrebbero essere usate anche qui. Ecco alcune altre frasi tratte dalle interviste cliniche:

«Se io scrivo $0,\bar{9}$ allora per arrivare a 1 ci vuole $0,1$. [L'intervistatore gli fa notare l'errore] Ah, sì, diciamo che se scrivo tanti 9 [dopo 0,], allora l'1 appare lontano dopo la virgola. Così: a $0,999999$, ci manca $0,000001$. Quello che manca, ogni volta, è 0, poi molti zeri, poi 1, manca sempre, non è mai 1»;

«[Più o meno fa un discorso analogo al precedente, poi prosegue] Ecco, se io potessi continuare poi e poi all'infinito, allora la differenza dovrebbe essere $0,0000000\dots$ ma la cifra 1 all'infinito, l'ultima cifra 1, non può essere scritta, dunque la differenza c'è sempre, ma è $0,000\dots0\dots$ »;

un soggetto dichiara che questa differenza è zero ed allora riconosce spontaneamente che se la differenza tra due numeri è zero, i due numeri devono essere uguali (purtroppo questa frase non è risultata incisa al registratore; ne abbiamo solo una trascrizione a mano sotto forma di appunto).

5.2. Relativamente a D2

Come abbiamo già detto in **3.**, furono sottoposti a queste prove 20 soggetti colombiani e 16 italiani, per un totale di 36. Il numero relativamente basso dipende dal fatto che i potenziali soggetti da intervistare dovevano dimostrare notevoli competenze matematiche; le interviste cliniche avevano, in questi casi, notevole durata, dovuta alla necessità di far sì che i soggetti non solo rispondessero alle domande - stimolo, ma avessero modo di riflettere, eventualmente contraddirsi, ripensare a quanto affermato, ... Come abbiamo già detto, ad alcuni di

questi soggetti particolarmente maturi, sono state proposte delle dimostrazioni sul cui esito riferiremo in **5.3**.

Quali sono le competenze di base che abbiamo considerato come necessarie per scegliere i soggetti sui quali effettuare queste prove? Abbiamo stabilito di scegliere quei soggetti che:

- accettassero l'idea di infinito come cardinale, dunque fossero disposti ad ammettere l'infinito attuale e non solo potenziale
- accettassero o almeno non rifiutassero a priori l'idea che vi possano essere diversi livelli di infinito.

Ai possibili candidati a queste prove si chiedeva preliminarmente se le seguenti coppie di insiemi potessero essere considerati equipotenti:

- $\{n, n \in \mathbb{N} \mid n \text{ è multiplo di } 45\}$, $\{n, n \in \mathbb{N} \mid n \text{ è multiplo di } 347\}$ (o simili)
- l'insieme dei punti di un segmento lungo 2 centimetri e di un segmento lungo 2 metri (o simili).

Le risposte a queste domande, peraltro interessanti, costituivano elemento di selezione, oppure, a volte, argomento esse stesse di intervista clinica.

Ai candidati veniva anche chiesto se conoscessero ed accettassero dimostrazioni:

- per assurdo
- che richiedessero un uso sofisticato di quantificatori.

Queste condizioni preliminari hanno dimostrato che:

- sono pochissimi coloro che ammettano che i due insiemi della prima coppia (numeri naturali) detta sopra possano essere equipotenti tra loro; qualcuno pone l'accento sul numero che appare in parentesi graffa, come se questo potesse fare la differenza: «Fino ad un certo punto ci si può anche credere, oltre un certo valore, no»; appare ovvia l'incidenza che un modello del finito ha sul “senso dell'infinito”, agendo da barriera; siamo di fronte ad un ostacolo didattico ed epistemologico;
- sono pochissimi coloro che ammettano che i due insiemi della seconda coppia (punti dei segmenti) detta sopra possano essere equipotenti tra loro; qualcuno fa notare che «se fosse così la cosa sarebbe assurda: se non dipendesse dalla lunghezza, allora come si potrebbero distinguere tra loro i segmenti?»; qui appare ovvia l'incidenza di un modello ingenuo (il punto come “perla” di una

collana più o meno lunga) sul “senso dell’infinito”; il modello della collana agisce da blocco; altro ostacolo didattico ed epistemologico;

- praticamente tutti i soggetti avvicinati in qualità di potenziali intervistati ammettono di conoscere ed accettare le dimostrazioni per assurdo e di sapere fare un buon uso dei quantificatori, anche se poi qualche problema successivo, su entrambi questi punti, c’è stato.

Scelti i pochi soggetti considerati idonei, sono cominciate le interviste cliniche, a volte lunghe e complesse, le cui registrazioni sono a disposizione dei ricercatori. Ciascun gruppo nazionale, colombiano ed italiano, studierà ancora a fondo i propri risultati, arrivando a scrivere relazioni specifiche del proprio Paese su questo tema. In questa occasione ci limitiamo a riportare i risultati generali.

Si confermano, anche se con argomentazioni di più alto livello, le seguenti posizioni:

- N ha cardinalità minore di Z (si ricorre al modello grafico usuale):
«L’insieme degli interi supera quello dei naturali perché l’insieme degli interi ha numeri negativi, cosa che non ha l’insieme dei naturali»;
- insieme infinito è solo un modo di dire, il concetto di cardinale vale solo per gli insiemi finiti:
«Io so che cosa vuol dire che {1, 2, 3, 4, 5} ha 5 elementi, ma non ha senso chiedersi quanti numeri ha l’insieme di tutti i numeri; questo ha cardinalità 5, questo \aleph_0 , lo so, ma che cosa significa? Nulla, un bel nulla»;
- infinito è un processo (potenziale) e non un oggetto (attuale) e dunque sull’infinito non si può operare:
«[...] capire il concetto di infinito, cioè che sempre si va ad avere uno di più, uno di più...»;
«Il fatto è che non c’è infinito più uno»;
«Il doppio di infinito, no, non so se potrei accettare questa espressione»;
- oggetti dello stesso tipo, ma di misure diverse hanno cardinalità diverse:
«Ci sono più numeri nell’insieme dei multipli di 45 che nell’insieme dei multipli di 300, è evidente; qui ci sono più vuoti, per trovarne uno ci vuole di più»;

«Va bene che il punto non ha dimensioni, ma se tu uno lo disegni per, faccio per dire, mille volte, hai un segmento così, se lo disegni 1000000 di milioni di volte ce lo avrai così»;

- confusione netta e diffusissima tra infinito e illimitato:
«Ci sono più numeri naturali multipli di 45 che punti nel segmento di lunghezza 2 cm [la domanda NON era stata fatta; il soggetto si pone il problema da solo] perché da una e dall'altra parte il segmento ha dei limiti»;
- l'appiattimento è uno scoglio notevolissimo:
«L'infinito è uno solo, perché l'infinito è l'infinito, è qualche cosa che sempre, sempre va...»;
- ...

Naturalmente, da soggetto a soggetto vi sono variazioni notevoli.

Ma un aspetto è di estremo interesse: l'atteggiamento di fronte alle dimostrazioni.

5.3. Incidenza delle dimostrazioni sui cambi di convinzione

A molti dei soggetti intervistati, come abbiamo detto, venivano proposte le dimostrazioni ricordate sopra.

Possiamo affermare che, nonostante la dichiarata comprensione delle dimostrazioni, moltissimi soggetti, la quasi totalità, non accetta la dimostrazione come fatto atto a cambiare le proprie convinzioni. La quasi totalità, ascoltata la dimostrazione, la accoglie, ne valuta il risultato, poi però fa riemergere le proprie convinzioni e dichiara che:

«[...] fino a qui stava la dimostrazione ed è corretta, però non so, questo non mi convince perché non può essere...» [si tratta della dimostrazione che $0,\overline{9} = 1$];

«Sì, lo accetto perché vedo la corrispondenza biunivoca, ma uno allora potrebbe, ma no, sì vedo la funzione, ma non è, non può essere...» [si tratta della dimostrazione che gli insiemi dei punti di due segmenti di diversa lunghezza possano essere messi in corrispondenza biunivoca tra loro];

«[...] Perché non possiamo, che per lo meno, che per lo meno c'è un irrazionale in più» [si tratta della dimostrazione del fatto che $\mathbf{n} < \mathbf{c}$, una dimostrazione rivelatasi molto ostica, quasi al limite della comprensione anche di professionisti della matematica; la dimostrazione del fatto che, supposto per assurdo di aver scritto in un elenco infinito *tutti* i numeri

reali compresi tra 0 ed 1, se ne possa costruire *un altro*, spinge molti ad affermare che semplicemente ce n'è uno in più, ma non riconoscono che si è trovato un assurdo tra “*tutti*” e “*un altro*”];

«Sì, i passaggi sono semplici, molto facili, molto convincenti; però, non so, se tu il segmento lo metti qui e lo trasli, si vede subito che non può essere; e poi dipende da come prendi le coordinate [si tratta della dimostrazione che vi sono tanti punti in un quadrato quanti in un suo lato, altro scoglio quasi insuperabile anche per professionisti]»;

«La dimostrazione di segmentino e segmentone l'ho capita, mi ha convinto, ma se penso alla realtà penso subito di no. La dimostrazione sarà sicuramente giusta, ma io rimango convinta che non ci sono infiniti punti» [qui c'è una confusione notevole, interessante; la dimostrazione voleva provare che in un “segmentino” di 2 cm ci sono tanti punti quanti in un “segmentone” di 2 m; ma il soggetto ricade nell'idea fisica di punto, ammettendo la sua personale convinzione che in un segmento non ci sono infiniti punti; solo di passaggio, notiamo che si tratta di un soggetto, studentessa in formazione come insegnante di matematica, che aveva dato in precedenza ampie prove di competenza matematica];

«Io la dimostrazione l'ho vista e mi ha convinto[sta parlando della dimostrazione del fatto che l'insieme dei punti di un quadrato e l'insieme dei punti di un suo lato sono equipotenti]; anch'io uso le dimostrazioni con i miei studenti; ma non è mica la stessa cosa; una dimostrazione è una dimostrazione di qualche cosa di vero in geometria, che tu sai che è vero e che lo dimostri, sai? Qui invece è che la dimostrazione, sembra, insomma, sì, è come se la manipoli tu, fai quel che ti pare, ma se io cambio, eh?, cambio quello che prendo, dopo come lo so se è vero; in geometria lo so prima, ma qui, come faccio, chi me lo dice?».

Naturalmente, ci sono soggetti (pochi in verità) che, dopo aver manifestato incredulità su un risultato e dopo aver visto la dimostrazione, ammettono di cambiare la propria convinzione e si comportano di conseguenza. Ci sono anche soggetti (pochissimi in verità) che dimostrano di conoscere già i rudimenti dell'infinito perché hanno seguito corsi specifici su questo argomento (sia in Italia che in Colombia). Tutti ammettono di aver usato l'infinito in vari corsi, da studenti, ma di averne capito il senso solo con corsi specifici.

5.4. Alcune note a margine

Molti soggetti appartengono a più categorie.

Per quanto si tentino categorizzazioni grossolane, è difficile che un soggetto si situi in una sola di esse; a volte, è più un bisogno del ricercatore quello di inserire un soggetto in una categoria anziché in un'altra, scegliendo quella più evidente.

A mo' di esempio, riportiamo le frasi dette in successione, durante l'intervista clinica, da parte di un soggetto, insegnante di matematica:

«Diciamo che i numeri naturali sono infiniti, ma sappiamo che questo non significa nulla, perché non si possono quantificare [infinito come indeterminato] [...] È come dire un numero così grande che non si riesce a dire [infinito come numero grande] [...] nel senso che puoi sempre andare avanti [infinito come processo] [...] Dire retta è come non dire niente, mica esiste, è solo per dire che è una linea sempre più lunga».

A volte, durante l'intervista, i soggetti cambiano posizione ed entrano in contraddizione. A volte, migrano attraverso interpretazioni diverse, ma non necessariamente contraddittorie tra loro.

Infinito, fatti materiali ed immateriali.

L'infinito chiama in causa fatti materiali o fisici, tra tutti soprattutto l'universo ed il tempo; o fatti immateriali come il pensiero umano.

Indifferenza alle contraddizioni esplicite.

Molti sono i soggetti che, entrati in contraddizione tra due posizioni o tra due affermazioni, vengono avvisati di ciò; l'intervistatore mostra la contraddizione esplicita e chiede al soggetto intervistato di sciogliere la contraddizione. Questo quasi mai avviene e, se un soggetto è costretto a scegliere tra due affermazioni, una ingenua, dovuta ad immagini o modelli intuitivi, poveri, semmai acquisiti da bambino o dovuti a sensazioni poco scientifiche, ed una scientifica, semmai acquisita grazie a studi o acquisita proprio durante il corso dell'intervista, allora quasi sempre il soggetto sceglie la prima a scapito della seconda.

Infinito e divinità.

Alcuni soggetti, al sentirsi spinti a parlare dell'infinito, mettono in campo Dio, la divinità, il potere divino.

6. Risposte alle domande poste in 2

In base ai risultati della ricerca presentati in **5.**, siamo ora in grado di rispondere alle domande poste in **2.**; distingueremo le risposte in due paragrafi.

6.1. Relativamente a D1

Nel senso comune, non sembra esserci differenza tra “grandissimo” (nelle sue varie accezioni semantiche) e infinito. La stragrande maggioranza degli intervistati sembra riservare al termine infinito un senso del tutto simile a quello di grande, enorme, vastissimo...

Studenti o adulti non specificamente colti in matematica, tendono a confondere “infinito” con “indefinito”, nel senso di qualche cosa che non può essere afferrata, o con “troppo grande”.

Il “senso dell’infinito” che essi riescono ad esprimere si confonde con quello di indeterminato, illimitato, senza confini, enorme; non esiste un vero e proprio “senso dell’infinito” e ciò sembra causato da null’altro, se non da: ignoranza specifica in matematica. A conferma di ciò, sta la prova inoppugnabile che questo “senso” non risulta a volte minimamente influenzato dalla cultura matematica acquisita negli studi, talvolta anche di livello discreto o alto.

Abbiamo avuto la prova che studenti o adulti anche colti, non riescono o incontrino molta difficoltà a distinguere tra “infinito” (inteso come cardinalità), “illimitato”, estensione infinita, successione infinita. Dunque, il senso che essi danno all’infinito sembra essere vago e nebuloso. Il “senso dell’infinito”, relativamente alle cardinalità, sfugge ai più.

Nel caso della estensione, non ci sono differenze di accettazione di rilievo tra il caso di una dimensione (linea), di due (superficie), di tre (solido). Il “senso dell’infinito” che queste domande mettono in evidenza rivela una grande confusione tra concetti completamente diversi; pochi riescono a capire il senso dell’eventuale differenza dell’infinità dei punti di un segmento, di un quadrato, di un cubo; e chi ci riesce o cade nell’appiattimento o entra in contraddizione. Diventa così impossibile sapere, stando ai soli elementi forniti dalla nostra ricerca, se un tal “senso dell’infinito” esista, tra persone di cultura matematica non particolarmente elevata. Tuttavia, persone di elevata cultura matematica sembrano essere per lo meno più propense a compiere “stime” anziché ricorrere a dimostrazioni.

Risulta chiarissimo che l'infinito è visto più come un processo che non come un oggetto, un modo di fare e di dire, più che qualche cosa su cui fare operazioni; ciò comporta che risulti quasi innaturale compiere "stime" sull'infinito e il "senso dell'infinito" si confonde quindi con le azioni che esso permette di compiere (successioni, estensioni, ...) che l'individuo controlla senza bisogno di mettere in campo uno specifico "senso dell'infinito".

Durante le interviste vengono proposti all'intervistatore da un punto di vista fisico o naturale riferimenti spontanei all'universo, allo spazio ed al tempo, nell'ordine. Questi riferimenti possono essere interpretati in termini di "senso dell'infinito"; ma allora esso sembra essere di basso livello qualitativo, se pensato dal punto di vista della matematica; si tratta per lo più di espressioni precostituite, di scarso significato, non di vere e proprie conquiste scientifiche culturali; sembra che i riferimenti più spontanei a questo termine coinvolgano l'universo, Dio, fatti ideali, non la matematica. L'infinito relativo alla matematica sembra più riservato all'espressione di acquisizioni cognitive.

Il termine "infinito" è assai più accettato come aggettivo e quasi mai come sostantivo; da ciò dipende in parte che il "senso dell'infinito" sia un'acquisizione dell'infinito come processo (potenziale) piuttosto che come oggetto (attuale), confermando quanto sopra affermato.

Quasi mai un soggetto intervistato dimostra di accettare spontaneamente l'uso del termine "infinito" e, quando lo fa, il "senso" che gli attribuisce spontaneamente è mai legato a vere e proprie "stime", ma ad immagini e modelli ingenui, derivati dall'uso che di tale termine si fa nel linguaggio colloquiale. Neppure la competenza matematica acquisita a scuola o negli anni universitari modifica questo "senso", dato che i soggetti tendono a restituirgli il più possibile accezioni poco scientifiche e per nulla rigorose. Interessante il fatto che, nonostante ed anzi in contrasto con un uso matematico scolastico o universitario, le immagini ed i modelli che i soggetti della nostra ricerca danno a questo termine tendano ad essere riappropriazioni di sensi intuitivi o ingenui. Il "senso dell'infinito" decade così ad interpretazione di basso profilo cognitivo.

6.2. Relativamente a D2

Abbiamo visto in 5.2. che affermare che $n < c$ richiede un livello di competenze quasi completamente fuori portata perfino tra chi pratica la matematica, sia come studente di corsi avanzati, sia come insegnante di

matematica. Abbiamo anche visto che la dimostrazione formale poco aiuta ad accettare livelli diversi dell'infinito; essa pone in conflitto i soggetti: da una parte la dimostrazione, dall'altra un senso comune o intuizioni ingenuie o modelli pre-cognitivi; poche volte la dimostrazione riesce a far modificare le convinzioni così radicate a questo proposito.

In pochi casi cognitivi, come in questa conquista matematica dell'infinito, l'essere umano deve compiere uno sforzo così sofferto: trasformare una propria convinzione intuitiva in un "senso dell'infinito" complesso da costruire e quasi impossibile da trasformare in vera e propria competenza altrettanto intuitiva quanto quella precedente.

Possiamo affermare che il "senso dell'infinito" si sviluppa lentamente, con l'acquisizione di competenze molto forti, che però richiedono la capacità di accettare le dimostrazioni come qualche cosa che può cambiare una convinzione, non come un processo matematico di routine o di conferma di verità già acquisite per altra via.

Normalmente il "senso dell'infinito" non esiste o è fortemente ostacolato dall'intuizione basata su modelli pre - cognitivi.

A maggior ragione non esiste, o richiede una cultura davvero notevole e specifica, un "senso dell'infinito" che permetta di accettare anche per intuizione i diversi livelli dell'infinito nei quali **n** e **c** si presentano (per non dire dei livelli successivi).

Riteniamo dunque che alla comprensione effettiva della disuguaglianza **n** < **c** si opponga certamente l'ostacolo legato alla modalità della dimostrazione in cui essa si presenta, ma, molto più, la natura complessa che sottostà alla mancata realizzazione di un "senso dell'infinito" dunque la mancanza di una capacità intuitiva di "stima" dell'infinito. Resta anche confermata la difficoltà di gestire il sottile gioco di quantificatori che interviene nella dimostrazione e che sfugge a quasi tutti gli intervistati.

Abbiamo potuto accertare che anche i soggetti che abbiano dimostrato di possedere un certo qual "senso dell'infinito" ed una competenza specifica sulle cardinalità transfinito, faticano a mettere a fuoco in modo spontaneo delle "stime", così come accade nel mondo dei numeri chiamando in causa il "senso del numero". Probabilmente si potrebbe mostrare che il "senso dell'infinito", con la conseguente capacità di effettuare "stime" infinite non è in diretta successione cognitiva rispetto al "senso del numero" con la conseguente capacità di effettuare "stime"

numeriche finite. Forse tra le due competenze non c'è legame. [Su questo punto, si veda anche la successiva nota finale].

6.3. Una nota finale

Abbiamo sottoposto a prove relative a “stime” su cardinalità transfinita fatte ad intuizione (legate dunque ad un supposto “senso dell'infinito”), alcuni di noi stessi autori di questa ricerca, solo per avere un campo di riscontro; tutti noi abbiamo specifiche competenze in questo settore non solo in quanto matematici (abbiamo visto però che questo fatto, da solo, non risulta essere sufficiente), ma in quanto docenti di corsi nei quali esplicitamente si tratta di queste questioni. Effettivamente, per quel che tali prove possano valere, chi si è sottoposto alla prova ha mostrato un altissimo grado di intuizione, di capacità di compiere “stime” ad occhio delle cardinalità di insiemi transfiniti, anche senza ricorrere a dimostrazioni preliminari (ma usandole, semmai, come argomentazioni successive, di conferma). Per esempio, scegliendo esempi di insiemi infiniti del tutto a caso, si ha subito l'intuizione se si tratti di insiemi numerabili o no; tra questi ultimi, si intuisce subito se si tratta di insiemi che hanno la cardinalità del continuo o maggiore. Dopo aver dato la risposta intuitiva, basata su una stima dovuta ad un personale “senso dell'infinito”, lo sperimentatore doveva anche dare la dimostrazione di quel che aveva affermato.

Ne traiamo la conclusione, grazie anche alle prove precedentemente presentate, che un “senso dell'infinito” esiste, ma che può essere raggiunto solo in casi estremamente specifici.

Tuttavia, molti di noi hanno compiuto clamorosi errori (anche del 25-30%) nel dare stime ad occhio su raccolte finite. Ci sembra essere, questa, una conferma del fatto che non c'è legame tra il “senso del numero” con la conseguente capacità di dare “stime” intuitive accettabili di quantità finite ed il “senso dell'infinito” con la conseguente capacità di dare “stime” intuitive di cardinalità infinite. In altre parole, “senso del numero” e “senso dell'infinito” non sono capacità intuitive personali correlate anche se, a prima vista, potrebbe apparire la prima come una necessaria premessa cognitiva all'altra. Esse invadono due sfere completamente diverse e le relative capacità di “stima” sono legate a condizioni e disponibilità assai diverse.

Bibliografia

Arrigo G., D'Amore B. (1992). *Infiniti*. Milano: Angeli.

Arrigo G., D'Amore B. (1999). «Lo vedo, ma non ci credo». Ostacoli epistemologici e didattici al processo di comprensione di un teorema di Georg Cantor che coinvolge l'infinito attuale. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate* (Paderno, Italia). 22B, 5, 465-494. [In versione inglese: «I see it but I don't believe it...». Epistemological and didactic obstacles to the process of comprehension of a theorem of Cantor that involves actual infinity, *Scientia Paedagogica Experimentalis* (Gent, Belgio), XXXVI, 1, 1999, 93-120; un sunto del testo inglese appare in: *Proceedings of the 2nd Mediterranean Conference on Mathematics Education*, 7-9 January 2000, Nicosia, Cyprus, volume II, 371-383; un altro sunto del testo inglese appare in: *Proceedings of CERME1*, Osnabrück, 1998. In versione spagnola: «Lo veo, pero no lo creo». Obstáculos epistemológicos y didácticos en el proceso de comprensión de un teorema de Georg Cantor que involucra al infinito actual. *Educación matemática* (México DF, México). 11, 1, 5-24].

Arrigo G., D'Amore B. (2002). “Lo vedo ma non ci credo...”, seconda parte. Ancora su ostacoli epistemologici e didattici al processo di comprensione di alcuni teoremi di Georg Cantor. *La matematica e la sua didattica* (Bologna, Italia). 1, 4-57. [Un ampio sunto in lingua spagnola: Arrigo G., D'Amore B. (2004). *Educación matemática* (México DF, México). In corso di stampa].

D'Amore B. (1996). L'infinito: storia di conflitti, di sorprese, di dubbi. *La matematica e la sua didattica* (Bologna, Italia). 3, 322-335.²⁰

D'Amore B. (1997). Bibliografia in progress sul tema: l'infinito in didattica della matematica. *La matematica e la sua didattica* (Bologna, Italia). 3, 289-305.²¹

D'Amore B. (1998). Oggetti relazionali e diversi registri rappresentativi: difficoltà cognitive ed ostacoli – Relational objects and different

²⁰ I lavori (D'Amore, 1996) e (D'Amore, 1997) sono riuniti in edizione spagnola in un unico articolo: *Epsilon*, 36, 1996, 341-360.

representative registers: cognitive difficulties and obstacles. *L'educazione matematica* (Cagliari, Italia). 1, 7-28. [Questo articolo è stato ripubblicato in lingua spagnola: *Uno* (Barcellona, Spagna), 15, 1998, 63-76].

- D'Amore B. (2001). *Più che 'l doppiar de li scacchi s'inmilla*. Bologna: Pitagora.
- D'Amore B., Maier H. (2002). Produzioni scritte degli studenti su argomenti di matematica (TEPs) e loro utilizzazione didattica. *La matematica e la sua didattica* (Bologna, Italia). 2, 2002, 144-189. [Un sunto di questo articolo in lingua spagnola: D'Amore B., Maier H. (2003). Producciones escritas de los estudiantes sobre argumentos de matemáticas (TEPs). *Epsilon* (Cádiz, Spagna). 18(2), 53, 243-262].
- D'Amore B., Martini B. (1998). Il "contesto naturale". Influenza della lingua naturale nelle risposte a test di matematica. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate* (Paderno, Italia). 21A, 3, 1998, 209-234. [In traduzione spagnola: El "contexto natural". Influencia de la lengua natural en las respuestas a las pruebas de matemática. *Suma* (Spagna). 30, 1999, 77-87].
- Hofstadter D.R. (1982). L'insensibilità numerica. Perché l'insensibilità numerica può essere altrettanto pericolosa dell'insensibilità linguistica. *Le Scienze* (Milano, Italia). 168. 102-107.
- Pellegrino C. (1999). Stima e senso del numero. In: Jannamorelli B., Strizzi A. (1999). *Allievo, insegnante, sapere: dagli studi teorici alla pratica didattica*. Atti del 4° Seminario Internazionale di Didattica della Matematica, Sulmona (Aq), 23-25 aprile 1999. Sulmona: Qualevita ed. 145-147.
- Sbaragli S. (2003). Le convinzioni degli insegnanti elementari sull'infinito matematico. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate* (Paderno, Italia). 26A, 2, 155-186. 26A, 5, 573-588.
- Tirosh D. (1990). Inconsistencies in students' mathematical constructs. *Focus of the Learning Problems in Mathematics*. 11, 271-284.
- Tsamir P., Tirosh D. (1992). Students' awareness of inconsistent ideas about actual infinity. *Proceedings of the XVII PME*. Durham NH. 90-97.
- Villani V. (1991). *Matematica per discipline biomediche*. Milano: Mc Graw Hill Libri Italia.

Gli autori sono grati ai revisori per i suggerimenti dati nel corso della loro lettura critica del presente lavoro.