

Relazioni tra area e perimetro: convinzioni di insegnanti e studenti

Pubblicato in italiano:

D'Amore B., Fandiño Pinilla M.I. (2005). Area e perimetro Relazioni tra area e perimetro: convinzioni di insegnanti e studenti. *La matematica e la sua didattica*. [Bologna, Italia]. 2, 165-190.

In corso di pubblicazione in spagnolo sulla rivista *Relime* [México DF. México].

Bruno D'Amore – Martha Isabel Fandiño Pinilla

con la collaborazione di:

Gianfranco Arrigo, Lorella Campolucci, Giampiero Ceccherini, Erminia Dal Corso, Margherita Francini, Maura Iori, Ines Marazzani, Annarita Monaco, Fabrizio Monari, Paola Nannicini, George Santi, Silvia Sbaragli, Anna Traverso, Nadia Vecchi

RSDDM - NRD

Dipartimento di Matematica – Università di Bologna

Lavoro eseguito nell'ambito del Programma di Ricerca 60% dell'Università di Bologna (Dipartimento di Matematica): « <i>Aspetti metodologici (teorici ed empirici) della formazione iniziale ed in servizio degli insegnanti di matematica di ogni livello scolastico</i> ».

Sunto. *In questa ricerca si esaminano le convinzioni di insegnanti e studenti a proposito delle relazioni esistenti tra perimetro ed area di una figura piana. La ricerca si inserisce in un classico filone, molto esplorato da oltre 60 anni, ma con molti fattori di novità. In particolare, si esamina la modifica delle convinzioni, il linguaggio usato per esprimerla, il grado di incidenza che hanno gli esempi forniti; si discute un'idea secondo la quale proprio le supposte relazioni tra perimetro ed area sono un esempio di comportamento in base al quale lo studente tende acriticamente a confermare maggiorazioni o minorazioni tra entità poste in relazione.*

Résumé. *Dans cette recherche on examine les convictions d'enseignants et étudiants au sujet des relations existantes entre périmètre et surface d'une figure plane. La recherche s'insère dans un filon classique, très exploré de plus que 60 ans, mais*

avec plusieurs facteurs de nouveauté. En particulier, on examine la modification des convictions, le langage utilisé pour la exprimer, le degré d'incidence que ont les exemples donnés; on discute une idée selon laquelle justement les présumées relations entre périmètre et surface sont un exemple de comportement sur la base duquel l'étudiant tend non critiquement à confirmer augmentations ou diminutions entre entités mises en relation.

Resumen. *En esta investigación examinamos las convicciones de maestros y estudiantes en lo concerniente a las relaciones existentes entre perímetro y área de una figura plana. La investigación se inserta en una corriente clásica, explorada por más de 60 años, pero que hoy incluye nuevos factores. En particular, se estudia el cambio en las convicciones, el lenguaje utilizado para expresar dicho cambio, el grado de incidencia que tienen los ejemplos dados; y en particular discutimos la idea según la cual exactamente las supuestas relaciones entre perímetro y área constituyen un ejemplo de la actitud no crítica del estudiante que tiende a confirmar aumentos o disminuciones entre entidades puestas en relación.*

Summary. *In this paper we examine teachers' and students' convictions connected with the relations that exist between area and perimeter of a plane figure. The research joins, with many new features, a classic mainstream that has been explored a lot for over 60 years. In particular we examine the change of convictions, the language used to express it, the degree of incidence of the examples we provide; we discuss an idea according to which just the supposed relations between area and perimeter are an example of the student's behaviour that leads him to confirm without criticism majorizations and minorizations between entities that are put in relationship.*

1. Premessa e quadro teorico

Le riflessioni critiche sul problema dell'apprendimento dei concetti di perimetro ed area delle figure piane possono vantare il fatto di essere state tra le prime ad essere studiate. Dopo essersi occupato della nascita del pensiero e del linguaggio nel bambino, poi dell'acquisizione – costruzione dell'idea di numero (nelle sue varie accezioni), Piaget si occupò, a partire dagli anni '30 del XX secolo, delle costruzioni concettuali aventi a che fare con la Geometria. Tra le varie opere che sarebbe qui possibile citare, ci limitiamo a quelle nelle quali appaiono esplicitamente perimetro ed area o riferimenti a tali concetti (Piaget, 1926; Piaget, 1937; Piaget, Inhelder, Szeminska, 1948; Piaget, Inhelder, 1962). A queste opere di base, fecero rapidamente seguito, negli anni '50 e '60, studi di allievi o seguaci del caposcuola ginevrino, basate sulle stesse certezze tratte dall'epistemologia genetica, per esempio Vihn et al. (1964), Vihn, Lunzer (1965). Segnaliamo anche lo studio di Battro (1969) che ripete tutti i celebri esperimenti del Maestro.

Sono, questi, gli studi classici che hanno condizionato per oltre 20 anni le successive analisi su tale tema; essi erano basati soprattutto sugli insuccessi dei giovani allievi a determinati stadi – età. In particolare, in questo filone si sono studiate le idee di lunghezza e di area, fra le altre, con molta attenzione, mettendo in evidenza la grande difficoltà da parte degli allievi di appropriarsi dell'idea di superficie. Ancor più in particolare, le ricerche misero in evidenza come, al variare della forma, lo studente giovane tenda a non essere capace di accettare l'invarianza della misura superficiale. Le difficoltà legate a false relazioni tra area e perimetro sembrano perdurare fino ai 12 anni, secondo queste ricerche, e sono assai poco connesse con lo sviluppo linguistico del soggetto.

[È ben noto che le conclusioni di Piaget furono sottoposte a severa critica da parte degli studiosi successivi; per non appesantire troppo il lavoro, rimandiamo solo a Resnick, Ford (1981, soprattutto il cap. 7)].

A questi studi preliminari e classici fecero seguito numerosissime altre ricerche, tanto che è impossibile fare ora qui un quadro completo; ci limiteremo (seguendo un percorso cronologico) solo a quelle che, in qualche modo, fanno riferimento alla difficoltà di apprendimento specifico delle idee di perimetro ed area; esse hanno senza dubbio condizionato l'indirizzo della nostra attuale ricerca.

In Rogalski (1979) si segnala che uno dei grandi problemi dell'apprendimento delle superfici sta nel fatto che esistono specifici ostacoli concettuali che si rafforzano l'un l'altro. Le difficoltà salienti sono le seguenti: i cambi di dimensione, lo specifico statuto delle unità di misura, le loro relazioni con le unità di lunghezza e le misure spaziali.

In Gentner (1983), pur con molte cautele, si suggerisce l'uso di modelli semplici per i primi approcci alla geometria in generale, allo studio delle superfici in particolare.

L'idea di modello intuitivo è molto ben spiegata in Fischbein (1985): «Per creare un supporto intuitivo alla ricerca intellettuale, ai concetti e alle operazioni mentali tendiamo ad associare spontaneamente modelli significativi dal punto di vista intuitivo (...) *Un modello intuitivo ha sempre un significato pittorico - comportamentale e induce sempre effetti di accettazione immediata.* (...)» (pagg. 14-15); ma: «L'insistere eccessivamente nel fornire suggerimenti intuitivi usando rappresentazioni artificiali e troppo elaborate può fare più male che bene» (pag. 18).

Un discorso assai più generale viene proposto in Speranza (1987); insieme a considerazioni generali di straordinario interesse culturale, si dimostra come le difficoltà concettuali rilevate nella scuola primaria su questioni connesse con area e perimetro permangano anche tra allievi evoluti, anche fino all'università. [Vedremo quanto questo sia vero, anche grazie alla presente ricerca].

Interessante la riflessione proposta in Iacomella, Marchini (1990) in cui si evidenzia come vi sia un contrasto tra le misure dirette (es. con geopiani, quadrettature, teorema di Pick) e indirette (es. tramite il ricorso alle formule, facendo appello a misure lineari) di una superficie e come questo contrasto possa costituire un ostacolo alla comprensione.

In Outhred, Mitchelmore (1992) si presentano casi di bambini di fine scuola primaria in grado di eseguire confronti tra le superfici di figure rettangolari, ma non in grado di passare da questa esperienza alle misure superficiali. In generale, l'articolo è dedicato a specifiche difficoltà di concettualizzazione di area e perimetro da parte degli allievi della primaria.

Un ampio studio, da molti ricercatori considerato oramai un classico, è quello di Rouche (1992); in esso si dimostra come il rettangolo costituisca il punto di partenza più importante per l'acquisizione del concetto di superficie, il punto cruciale, la figura campione, dato che ad esso si riducono quasi tutte le altre figure che l'allievo conoscerà nella scuola primaria e certamente le prime (triangolo, parallelogrammo, trapezio, ...). Si insiste anche sul fatto che la determinazione dell'area di un rettangolo come prodotto delle misure di due segmenti sia un esempio di misura indiretta, difficile da accettare e da costruire concettualmente.

Di rilievo ci pare la ricerca di Giovannoni (1996) dove si discutono e si ripetono celebri esperimenti di Piaget sul problema della comprensione del concetto di superficie presso bambini di 3-6 anni; si dimostra con vigore che tale concetto non è *di per sé* al di fuori della portata dei bambini, come si è ritenuto in passato, ma che questa conquista dipende dalle condizioni al contorno, soprattutto riferite al linguaggio ed alla proposta di modelli adeguati specifici (fogli verdi interpretati come tali e non fogli verdi interpretati come pascoli; area superficiale interpretata come tale e non come erba da pascolo per mucche). Dunque, il possesso di un linguaggio specifico ha profonde incidenze sulla costruzione di tale concetto: l'uso di un ambiguo aggettivo "grande" viene sostituito

lentamente e consapevolmente da “esteso”, comportando un notevole successo apprenditivo anche presso soggetti di 5 anni.

In Marchini (1999) si parla del conflitto tra i due concetti e del modo didattico di affrontare l'argomento per venirne a capo; l'articolo contiene molte considerazioni di grande pregio e di ampio respiro non solo didattico, ma pure matematico ed epistemologico.

In Medici (1999) si discute sulla questione della formulazione linguistica degli enunciati dei problemi di geometria, se cioè sia necessario far ricorso ad un linguaggio semmai meno preciso ma più accessibile e che non faccia uso eccessivo di formule.

Altro studio di interesse è quello di Jaquet (2000), nel quale si presenta e si discute molto approfonditamente un problema proposto ad allievi di III e IV primaria, nel corso del *Rally matematico transalpino* nei mesi di gennaio e febbraio 2000; in tale problema, originale nella sua formulazione, si tratta di valutare un confronto tra aree di figure non standard, delle quali non sono fornite misure superficiali né lineari. Si studiano gli approcci di molti soggetti esaminati, mostrando la complessità dei processi messi in campo dagli allievi, i quali mescolano metodi diretti ed indiretti, valutando aree e perimetri dei poligoni che appaiono nel disegno. Si tratta di uno studio interessante che dimostra la complessità del rapporto tra i due concetti.

Un lavoro che abbiamo seguito da vicino anche nel suo sviluppo è quello di Chamorro (1997); l'Autrice vi analizza 8 aspetti distinti che determinano gli intorni di apprendimento per quanto concerne la misura (in generale), in accordo con le idee di Guy Brousseau; essi sono: oggetto supporto, grandezza, valore particolare (o quantità di grandezza), applicazione misura, misura immagine, misura concreta, misurazione, ordine di grandezza. L'interessante ricerca della Chamorro riguarda la misura in generale e dimostra la complessità di tale tema, specie per quanto concerne il suo apprendimento. Tra gli esempi specifici che vengono fatti, appaiono proprio perimetro e superficie: «Nella superficie, in quanto misura prodotto, concorrono molteplici ostacoli concettuali. Tra questi, c'è la relazione che le unità di superficie mantengono con le unità di lunghezza, essendo le prime sussidiarie alle seconde come prodotto di misure. Tali relazioni possono essere comprese solo a partire da relazioni spaziali che a loro volta devono essere coordinate con relazioni moltiplicative. La coordinazione tra la linearità di ciascuna delle dimensioni e la linearità delle superfici deve

poter essere garantita attraverso un modello geometrico che aiuti a visualizzare tali relazioni».

Alla tesi di dottorato della Chamorro, fa seguito un lungo articolo che ne è una sintesi ma anche un approfondimento, tanto che l'abbiamo tradotto e pubblicato per intero in italiano: Chamorro (2001-02); qui si fanno analisi di esperienze realizzate nella scuola primaria a proposito del problema dell'insegnamento – apprendimento della misura ed in modo specifico di perimetro ed area; lo scopo di questo studio è di contribuire alla realizzazione di sapienti situazioni a-didattiche ed ingegnerie tese ad eliminare o almeno a contenere le ben note difficoltà di apprendimento.

Come si vede, il quadro scientifico di riferimento, pur nelle limitazioni di contenuto che ci siamo posti, è di straordinaria complessità ed ampiezza.

2. Problemi di ricerca

È evidente dunque che i due concetti geometrici: *perimetro / area di una figura piana*, hanno molti elementi comuni sul piano scientifico, ma anche molti altri che sono semplicemente supposti sul piano delle misconcezioni, assai diffuse tra gli studenti di ogni livello scolastico.

Per esempio, la letteratura ha ampiamente mostrato come molti studenti di ogni età siano convinti che vi sia una relazione di dipendenza stretta tra i due concetti sul piano relazionale, del tipo:

se A e B sono due figure piane, allora:

- se (perimetro di A > perimetro di B) allora (area di A > area di B)
- idem con <
- idem con = (per cui: due figure isoperimetriche sono necessariamente equiestese);
- e viceversa, scambiando l'ordine “perimetro – area” con “area – perimetro”.

Difficilmente questo tema viene preso in esame didatticamente in modo esplicito, anche per una supposta difficoltà, secondo gli insegnanti.

Ci si potrebbe allora chiedere se presso gli insegnanti, a qualsiasi livello scolastico, vi sia piena consapevolezza sul tema o se, per caso, anche presso alcuni insegnanti vi siano problemi di costruzione concettuale. Ciò evidentemente riguarda il problema delle convinzioni e delle

concezioni degli insegnanti.¹ Un ampio quadro teorico su questo tema si può trovare in D'Amore, Fandiño Pinilla (2004), il che ci esime dal ripeterlo qui.

Gioca inoltre un altro fattore, evidenziato da Azhari (1998); cercheremo di dirlo in modo rapido: se vi sono due relazioni con qualche mutuo legame reciproco, lo studente tenta di applicare la seguente “legge di conservazione”:

- se la tal cosa cresce, anche quest'altra ad essa relazionata cresce (e viceversa).

Ora, l'esempio che lega tra loro perimetro ed area sembra calzare a pennello per le considerazioni di Azhari (1998) (anzi, questo è proprio uno degli esempi offerti in questo lavoro, citato da Stavy, Tirosh, 2001).

Se mettiamo in relazione i perimetri di due figure A e B, con le loro rispettive aree, ci sembra che un modo convincente per evidenziare che le “leggi” di cui sopra NON valgono, sia di:

mostrare un esempio per ciascuno dei seguenti 9 possibili casi:

p	S	p	S	p	S
>	>	>	=	>	<
=	>	=	=	=	<
<	>	<	=	<	<

La prima casella > > dice:

- trovare due figure tali che, passando dalla prima alla seconda, il perimetro cresca e l'area cresca e così via.

¹ Reputiamo di un certo interesse dichiarare esplicitamente che ci serviremo delle seguenti interpretazioni di tali termini (proposte anche in apertura di: D'Amore, Fandiño Pinilla, 2004), peraltro sempre più diffuse e condivise:

- *convizione* (belief) (o credenza): opinione, insieme di giudizi/attese, quel che si pensa a proposito di qualcosa;
- l'insieme delle convinzioni di qualcuno (A) su qualcosa (T) dà la *concezione* (K) di A relativamente a T; se A appartiene ad un gruppo sociale (S) e condivide con gli altri appartenenti ad S quell'insieme di convinzioni relativamente a T, allora K è la concezione di S relativamente a T.

Spesso, in luogo di “concezione di A relativamente a T” si parla di “immagine che A ha di T”.

Per evitare difficoltà, si può partire sempre da figure molto semplici, come un rettangolo, quando è possibile, compiendo le varie trasformazioni su di esso o su figure da esso derivate. Ci sembra necessario far sì che le figure da trattare siano le più elementari possibili per evitare complicazioni dovute alla figura stessa.

Nell'Appendice si danno i 9 esempi di cui sopra in casi estremamente elementari. Questi esempi non vengono mai forniti preliminarmente ai soggetti sottoposti alla prova che verrà descritta in seguito; ciascuno dei soggetti dovrebbe provvedere da sé stesso a trovare esempi opportuni, almeno in prima istanza.

3. Domande, metodologia della ricerca ed ipotesi di risposta²

Ad un gruppo di *collaboratori*, docenti di scuola primaria, di scuola media, di scuola superiore e di università, abbiamo proposto di farsi carico della ricerca qui sopra descritta, dando le seguenti indicazioni che sono, all'un tempo, le domande esplicite della ricerca, le relative indicazioni metodologiche e le nostre ipotesi di risposta, suddivise in 3 punti.

PUNTO 1.

PROBLEMA di ricerca R1: Abbiamo chiesto a tutti i collaboratori di mettere alla prova loro stessi, in tutta sincerità, ed alcuni loro colleghi delle scuole primarie, medie, superiori, nonché studenti universitari in formazione di insegnante.

DOMANDA di ricerca D1: È vero o non è vero che si possono trovare esempi per tutti e 9 i casi? È vero o non è vero che viene spontaneo pensare che all'aumentare del perimetro di una figura piana, ne aumenti l'area, in generale? È vero o non è vero che bisogna fare uno sforzo, per *convincersi* che le cose NON stanno così?

IPOTESI di risposta I1: Ritenevamo che non solo presso molti studenti, ma anche presso alcuni insegnanti vi fossero misconcezioni radicate a proposito di supposte relazioni necessarie tra perimetri ed aree delle figure piane. Che non fosse così banale trovare i 9 esempi detti (specialmente nel caso in cui il perimetro deve diminuire e la superficie aumentare). Che anche dopo aver visto gli esempi, vi fosse qualche

² Contrariamente alle nostre abitudini, in questo lavoro non separiamo questi tre punti perché essi sono questa volta profondamente legati tra loro.

resistenza. Quali indicatori di tali misconcezioni radicate abbiamo pensato di assumere le dichiarazioni stesse dei collaboratori.

PUNTO 2.

PROBLEMA di ricerca R2: Abbiamo chiesto a tutti i collaboratori di far fare delle prove a studenti di scuola primaria, media, superiore ed a studenti universitari. Ciascuno di essi era invitato ad introdurre un discorso qualsiasi su perimetro ed area di figure piane semplici e provare a far eseguire delle trasformazioni, verificando se gli studenti

- accettano spontaneamente
- accettano di buon grado dopo un esempio
- accettano con difficoltà dopo vari esempi
- ...
- rifiutano senza discussione
- rifiutano anche dopo esempi
- ...

che possono valere tutte e 9 le relazioni e cioè che NULLA si possa dire a priori del legame tra “aumento (uguaglianza, diminuzione) del perimetro” ed “aumento (uguaglianza, diminuzione) dell’area di figure piane”.

A noi interessava rilevare due cose:

- a) il *mutamento delle convinzioni*; se cioè, dopo alcuni esempi, gli studenti sono disposti a cambiare idea e se su questo incide l’età; diventava così essenziale far esprimere le convinzioni dei soggetti *prima* e *dopo* gli esempi; per raggiungere questo scopo, più che fare dei test, diventava essenziale intervistare i soggetti in piccoli gruppi (2-3 per gruppo) o singolarmente;
- b) il linguaggio che usano gli studenti per spiegare il loro pensiero, prima e dopo: esempi, discorsi generali, frasi,..., uso di disegni, di schemi,...

DOMANDA di ricerca D2: Con quanta naturalezza e spontaneità gli studenti riescono ad accettare che non esistono relazioni obbligate tra perimetro ed area delle figure piane? Come varia questa accettazione con l’età? Risulta facile accettare i 9 esempi? Come esprimono le loro convinzioni al proposito? Che tipo di linguaggio usano?

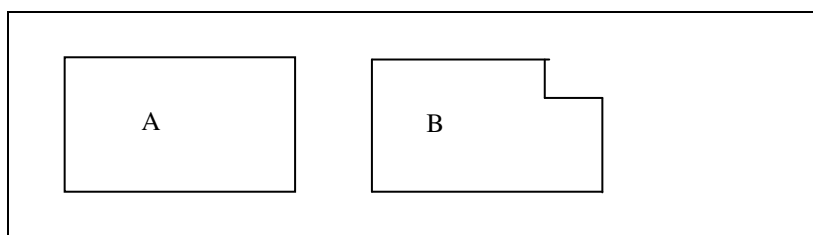
IPOTESI di risposta I2: Ritenevamo che gli studenti, di qualsiasi età, esprimessero una grande difficoltà ad accettare quel che sembra anti - intuitivo. Che con il crescere dell’età, questa accettazione aumentasse

nettamente. Che i soggetti trovassero qualche difficoltà ad accettare gli esempi. Che avrebbero espresso le loro convinzioni in maniera assai poco accademica, dato che esse contrastano con le convinzioni costruite scolasticamente. Che il linguaggio usato avrebbe teso ad essere il più possibile colloquiale, forse con l'uso spontaneo di grafici e disegni schematici.

PUNTO 3.

PROBLEMA DI RICERCA R3: Abbiamo invitato i collaboratori a sottoporre a studenti diversi, che non erano stati sottoposti alla prova precedente, la seguente, durante interviste singole.

Essi dovevano consegnare a tali nuovi soggetti una scheda contenente le due figure seguenti:



(L'esagono B è stato ottenuto molto visibilmente dal rettangolo A eliminando un piccolo rettangolo in alto a destra).

Ora, a metà degli studenti andavano poste le due seguenti domande:

d1: La superficie di A è minore, uguale o maggiore della superficie di B?

E il perimetro di A è minore, uguale o maggiore del perimetro di B?

All'altra metà, invece, si dovevano porre le due seguenti domande:

d2: Il perimetro di A è minore, uguale o maggiore del perimetro di B?

E l'area di A è minore, uguale o maggiore dell'area di B?

DOMANDA di ricerca D3: Può l'ordine invertito delle domande che caratterizza d1 e d2 modificare radicalmente le risposte degli studenti?

IPOTESI di risposta I3: La nostra ipotesi era che:

- in d1 gli studenti avrebbero verificato facilmente che l'area di A è maggiore di quella di B (perché ciò appare graficamente molto evidente) e avrebbero allora teso a dire, senza verifiche, che il

perimetro di A è maggiore del perimetro di B; i collaboratori dovevano solo verificare se questa tendenza esisteva davvero;

- in d2 gli studenti sarebbero stati imbarazzati dalla prima domanda sul perimetro, che avrebbero dovuto verificare con attenzione perché NON è immediatamente evidente; una volta verificato che il perimetro di A è uguale a quello di B, tuttavia, non avrebbero dovuto avere problemi a dire che l'area di A è maggiore di quella di B; i collaboratori dovevano far sì che lo studente verificasse che i due perimetri sono uguali e lo dicesse, dopo di che stare attenti a che cosa avrebbero risposto spontaneamente a proposito delle aree.

Se le cose avessero funzionato davvero così, avremmo contraddetto l'ipotesi di Azhari (1998) (citata ed almeno parzialmente fatta propria da Stavy e Tirosh, 2001) in base all'evidenza delle figure; non varrebbe allora più la loro supposta "legge di conservazione", ma tutto si ricondurrebbe ad un fatto legato a misconcezioni ed evidenze percettive.

In totale abbiamo avuto 14 *collaboratori*:

- n° 7 docenti della scuola primaria
- n° 2 docenti della scuola media
- n° 3 docenti della scuola superiore
- n° 2 docenti dell'università (o equivalente).

Ciascuno di essi ha messo alla prova sé stesso ed alcuni colleghi; in totale, i numeri di *insegnanti* sottoposti alla prova sono stati:

- n° 26 della scuola primaria
 - n° 16 della scuola media
 - n° 13 della scuola superiore
 - n° 2 docenti dell'università,
- per un totale di 57 insegnanti.

I numeri degli *studenti* sottoposti alla prova 2 sono stati i seguenti:

- n° 29 della scuola primaria (tutti di V)
- n° 20 della scuola media (6 di I e 14 di III)
- n° 21 della scuola superiore (8 del biennio di Liceo Scientifico, 9 di IV o V di Liceo Scientifico, 4 di Istituto Professionale)
- n° 13 dell'Università o analoghi (4 del corso di laurea in Scienza della Formazione, 1 del III anno del corso di laurea in Matematica, 8 dell'Alta Scuola Pedagogica)

per un totale di 83 studenti.

I numeri degli *studenti* sottoposti alla prova 3 sono stati i seguenti:

n° 50 della scuola primaria (tutti di V)

n° 26 della scuola media (12 di I e 14 di III)

n° 14 della scuola superiore (4 del I biennio del Liceo Scientifico, 5 dell'Istituto Professionale, 5 di III, IV o V Liceo Scientifico)

n° 17 dell'università o simili (4 del corso di laurea in Scienza della Formazione, 12 dell'Alta Scuola Pedagogica, 1 del III anno del corso di laurea in Filosofia)

per un totale di 107 studenti.

Ricordiamo che tutte le prove sono state effettuate sotto forma di intervista.

4. Risultati della ricerca, discussione dei risultati e risposte alle domande di ricerca

4.1. Insegnanti alla prova su perimetro e area

4.1.1.

Per quanto riguarda il punto 1., problema di ricerca R1, abbiamo fatto una distinzione tra le due consegne:

- abbiamo chiesto a tutti i collaboratori di mettere alla prova loro stessi, in tutta sincerità, ed
- alcuni colleghi delle scuole primarie, medie, superiori, nonché studenti universitari di corsi (di specializzazione in Italia e di master in Svizzera) per la formazione degli insegnanti di scuola secondaria (inferiore o superiore).

In entrambi i casi le domande di ricerca D1 erano le seguenti: È vero o non è vero che si possono trovare esempi per tutti e 9 i casi? È vero o non è vero che viene spontaneo pensare che all'aumentare del perimetro di una figura piana, ne aumenti l'area, in generale? È vero o non è vero che bisogna fare uno sforzo, per *convincersi* che le cose NON stanno così?,

mentre le nostre ipotesi di risposta I1 erano: Ritenevamo che presso alcuni insegnanti vi fossero misconcezioni radicate a proposito di supposte relazioni necessarie tra perimetri ed aree delle figure piane. Che non fosse così banale trovare i 9 esempi detti [specialmente nel caso $(p<, S>)$ in cui il perimetro deve diminuire e la superficie aumentare]. Che anche dopo aver visto gli esempi, vi fosse qualche resistenza.

In questo paragrafo **4.1.1.** esamineremo il caso in cui i soggetti sottoposti alla (auto)prova erano gli stessi nostri collaboratori alla ricerca, mentre rimandiamo al paragrafo **4.1.2.** il caso in cui i soggetti sottoposti alla prova erano colleghi dei collaboratori alla ricerca o studenti universitari.

Dai 14 collaboratori alla ricerca abbiamo reazioni piuttosto simili per quanto concerne la modalità di risposta:

- 1 soggetto (docente di università) si limita a compiere un'analisi esclusivamente matematica della questione, ovviamente corretta, non rispondendo alla domanda personale sulle proprie difficoltà;
- 13 scrivono testi che vanno da 1 a 6 pagine in risposta, a volte piuttosto ricche di riferimenti alle proprie difficoltà:
 - 9 collaboratori (7 insegnanti di primaria, 1 di superiore, 1 di università) confessano la propria difficoltà al momento di dover dare una forma alla propria idea, anche se corretta e consapevole; ammettono anche che hanno dovuto compiere uno sforzo per immaginare tutte le 9 situazioni;
 - 4 collaboratori (2 insegnanti di media, 2 di superiore) dichiarano di non aver avuto alcun problema a trovare subito le risposte e dichiarano soprattutto la loro piena consapevolezza che le cose dovessero funzionare così.

[4 collaboratori (2 di primaria, 2 di media) fanno ampio riferimento ai propri allievi, non riuscendo a rispondere in prima persona solo come soggetti, ma interpretando la nostra domanda come un implicito invito a pensare ad una situazione d'aula].

Il caso dichiarato quasi unanimemente il più complesso è proprio quello $(p<, S>)$ che avevamo supposto ed il suo analogo $(p>, S<)$.

Le nostre ipotesi I1 sono dunque ampiamente confermate: perfino presso persone di alto livello culturale, quali sono i nostri collaboratori, vi sono,

almeno di primo acchito, misconcezioni radicate a proposito di supposte relazioni necessarie tra perimetri ed aree delle figure piane. Come indicatori di tali misconcezioni avevamo deciso di assumere o le loro stesse ammissioni esplicite, o la prova evidente delle loro difficoltà. Per molti, non è stato così banale trovare i 9 esempi detti [specialmente nei casi $(p<, S>)$ e (un po' meno) $(p>, S<)$], per esplicita ammissione. Uno dei collaboratori dichiara esplicitamente per iscritto: «(...) Ho avuto maggiori difficoltà a trovare figure nei casi dove il perimetro deve diminuire e l'area deve rimanere uguale o crescere», frase che prendiamo come prototipo per molte altre dello stesso tenore.

Si vede bene come le autodichiarazioni di difficoltà si addensino tra gli insegnanti dei primi livelli scolastici, forse a causa della minor preparazione tecnica (da più d'uno denunciata; molti collaboratori insegnanti di primaria confessano di aver appreso a trattare criticamente di queste questioni nell'ambito dei corsi organizzati dal NRD di Bologna).

La scelta delle figure per i 9 casi si addensa, almeno all'inizio, attorno a poligoni convessi ed in particolare rettangoli.

Uno dei collaboratori dichiara di aver messo alla prova alcuni propri familiari

- quelli impegnati in attività edili, quotidianamente di fronte a situazioni concrete nelle quali i casi $(p>, S<)$ e $(p<, S>)$ sono ricorrenti, non hanno avuto problemi non solo a rispondere correttamente, ma anche a fornire esempi;
- altri, impegnati in attività più di routine, hanno mostrato di tendere a dare le classiche risposte attese: esistono solo i casi $(p>, S>)$, $(p<, S<)$, $(p=, S=)$; gli altri casi sono ritenuti impossibili; per esempio, non è ritenuto possibile trovare esempi per il caso $(p<, S>)$.

4.1.2.

Gli 43 insegnanti intervistati (19 di scuola primaria, 8 di scuola media, 10 di scuola superiore, 6 in formazione post laurea come insegnanti di scuola secondaria inferiore) hanno comportamenti molto dissimili, ma anche parecchie reazioni in comune; i protocolli delle interviste sono a disposizione, qui coglieremo solo l'essenziale. Riporteremo tra «» le

frasi che confermano le nostre affermazioni e che ci sembrano più rappresentative.

Una reazione molto diffusa, a tutti i livelli scolastici, è la differenza manifestata a livello intuitivo, al primo contatto con il problema, rispetto al cambio (a volte forte) tra la prima risposta intuitiva e la convinzione acquisita alla fine della prova.

Quasi ogni intervista iniziava con il cosiddetto “problema di Galileo”:
«Un paese ha due piazze A e B; il perimetro della piazza A è maggiore del perimetro della piazza B; quale delle due piazze ha area maggiore?». Moltissimi degli intervistati, decisamente la grande maggioranza, 40 su 43, anche laureati, anche insegnanti di scuola superiore, affermano che ha area maggiore la piazza che ha perimetro maggiore, salvo poi:

- correggersi spontaneamente, affermando che “non è detto”, ancor prima di effettuare tutte le prove previste nell’intervista (e qui si nota un maggior addensamento tra gli insegnanti di scuola superiore)

oppure

- accettare che la propria risposta fosse criticabile e scorretta, ma solo dopo aver eseguito le prove (e qui si nota un maggior addensamento tra gli insegnanti dei primi livelli scolastici).

Dunque, il *cambio di convinzione* è palese, a volte forte, ed in parecchi casi richiede prove e riflessione non banali.

Alla domande:

«È vero o non è vero che si possono trovare esempi per tutti e 9 i casi? È vero o non è vero che viene spontaneo pensare che all’aumentare del perimetro di una figura piana, ne aumenti l’area, in generale? È vero o non è vero che bisogna fare uno sforzo, per *convincersi* che le cose non stanno così?»,

molti dei docenti, e NON necessariamente della sola scuola primaria, cominciano con il rispondere di no, alla prima, il che rivela che le misconcezioni radicate a proposito di supposte relazioni necessarie tra perimetri ed aree delle figure piane non risiedono solo presso *alcuni* insegnanti, come noi ritenevamo, ma presso la maggior parte.

Per molti intervistati non è stato affatto banale trovare i 9 esempi detti [specialmente nel caso $(p <, S >)$ o viceversa). Abbiamo avuto parecchi casi di insegnanti (anche di scuola superiore e di scuola media) che hanno avuto bisogno di ricorrere agli (o ad alcuni degli) esempi forniti dall'intervistatore. [Molti hanno notato la simmetria delle richieste; e qualcuno ha manifestato insofferenza nel caso $=, =$ per non voler semplicemente applicare una isometria o lasciare le figure identiche].

Quel che si evince, però, è che, dopo aver visto gli esempi, o creati dall'intervistato stesso o proposti dall'intervistatore, sono (quasi) del tutto scomparse le persistenze delle misconcezioni legate all'intuizione; si arriva a frasi piene di consapevolezza, come la seguente:

«Dunque, due figure equiestese non sono automaticamente anche isoperimetriche» [questa perfetta enunciazione, viene fatta con evidente sorpresa da una insegnante di scuola primaria che dichiara di aver lottato parecchio con sé stessa per trovare i 9 esempi, bloccata dalla propria convinzione a tal proposito, una misconcezione radicata della quale prima non si era mai resa conto, che all'aumentare del perimetro fosse necessario che aumentasse anche l'area].

Appare molto chiaro che le misconcezioni rivelate siano dovute al fatto che quasi tutti i modelli figurati che accompagnano queste questioni sono realizzati con figure piane convesse piuttosto usuali, il che spinge a credere che si possa affrontare il problema SOLO con tali figure. Anzi, questa considerazione è confermata da più d'uno degli stessi intervistati: «È possibile partendo da un quadrato; non è possibile partendo da un cerchio» (in altre parole, il quadrato è considerato figura ammissibile per trasformazioni come quelle proposte a noi, il cerchio no); alla proposta di una figura concava: «Ma questa non è una figura geometrica» [intende dire: non di quelle usualmente utilizzate nella pratica didattica quando si parla di area e perimetro]; altri considerano possibili solo omotetie, per cui: «...ma con i quadrati è impossibile» dato che l'omotetico di un quadrato è ancora un quadrato.

Molto ricorrente è il rinvio che gli insegnanti intervistati fanno ai propri allievi; molte delle domande e delle risposte vengono infatti "filtrate" attraverso l'esperienza con o dei propri allievi: «Anche loro non lo vedono» [quel che io non ho visto]; «...fanno fatica ad immaginarlo»; «Bisogna cambiare molto le figure» [cioè passare da figure standard ad

altre, per esempio concave; in realtà, non ce ne sarebbe sempre bisogno, ma gli esempi forniti dagli intervistatori (ved. Appendice) vengono spesso considerati come unici].

Interessante il fatto che alcuni insegnanti delle scuole secondarie (inferiori e superiori) considerano che questo tipo di questione sia più vicina al mondo della scuola primaria, «perché lì si lavora sulle figure, più sul concreto, meno in astratto», quasi a giustificare il proprio fallimento (e quello potenziale dei propri allievi) nel compito. Naturalmente, in questo c'è molto di vero; nella scuola primaria, troppo spesso, vengono trasformate in modelli radicati delle immagini che dovrebbero restare solo parziali; spesso non c'è neppure consapevolezza del problema.

Vedremo nei prossimi paragrafi **4.2.1.** e **4.2.2.** l'andamento della ricerca con gli studenti ed azzardiamo qui l'ipotesi, che analizzeremo criticamente in **5.**, che l'ostacolo che parrà evidente rispetto alla costruzione di una conoscenza matematicamente soddisfacente sulle relazioni tra “perimetro e area” non sia solo di natura epistemologica bensì assai più di natura didattica.

La natura epistemologica è evidente ed ha molteplici aspetti:

- a) non è un caso che storielle e leggende che legano area e perimetro siano antichissime e si ripetono nel tempo, anche a distanza di secoli (basti pensare al mito della fondazione di Cartagine da parte di Didone ed al celebre indovinello di Galileo); questo è un segnale di ostacolo epistemologico;
- b) per compiere queste analisi si devono operare trasformazioni geometriche sulle figure; ebbene, solo alla fine del XIX secolo queste trasformazioni, la loro potenza, la loro necessità, si sono rivelate completamente agli occhi dei matematici; per millenni ha dominato la staticità degli *Elementi* di Euclide; anche questo ritardo nell'introduzione-accettazione è ovvio segnale di ostacolo epistemologico.

D'altra parte, però, su questi ostacoli epistemologici evidenti si innestano anche ostacoli didattici; se sono servite interviste opportune, piuttosto profonde, per cambiare le convinzioni degli stessi insegnanti, come non pensare che le scelte didattiche che questi utilizzano in aula con i propri allievi non influenzino la formazione di misconcezioni, relativamente a questo strategico tema?

4.2. Studenti alla prova su area e perimetro

4.2.1.

Ricordiamo che al punto 2., come problema di ricerca R2, avevamo chiesto a tutti i collaboratori di intervistare studenti di scuola primaria, media, superiore e studenti universitari. Ciascuno di essi era invitato ad introdurre un discorso qualsiasi su perimetro ed area di figure piane semplici e provare a far eseguire delle trasformazioni, verificando se gli studenti

- accettano spontaneamente
- accettano di buon grado dopo un esempio
- accettano con difficoltà dopo vari esempi
- ...
- rifiutano senza discussione
- rifiutano anche dopo esempi
- ...

che possono valere tutte e 9 le relazioni e cioè che NULLA si possa dire a priori del legame tra “aumento (uguaglianza, diminuzione) del perimetro” ed “aumento (uguaglianza, diminuzione) dell’area di figure piane”.

A noi interessava rilevare due cose:

- a) il *mutamento delle convinzioni*; se cioè, dopo alcuni esempi, gli studenti sono disposti a cambiare idea e se su questo incide l’età; diventava così essenziale far esprimere le convinzioni dei soggetti *prima* e *dopo* gli esempi; per raggiungere questo scopo, più che fare dei test, diventava essenziale intervistare i soggetti in piccoli gruppi (2-3 per gruppo) o singolarmente;
- b) il linguaggio che usano gli studenti per spiegare il loro pensiero, prima e dopo: esempi, discorsi generali, frasi,..., uso di disegni, di schemi,...

A questo scopo, le domande di ricerca D2 erano le seguenti:

Con quanta naturalezza e spontaneità gli studenti riescono ad accettare che non esistono relazioni obbligate a priori tra perimetro ed area delle figure piane? Come varia questa accettazione con l’età? Risulta facile

accettare i 9 esempi? Come esprimono le loro convinzioni al proposito?
Che tipo di linguaggio usano?

Come ipotesi preliminari, ritenevamo che gli studenti, di qualsiasi età, esprimessero una grande difficoltà ad accettare quel che sembra anti-intuitivo. Che con il crescere dell'età, questa accettazione aumentasse nettamente. Che i soggetti trovassero qualche difficoltà ad accettare gli esempi. Che avrebbero espresso le loro convinzioni in maniera assai poco accademica, dato che esse contrastano con le convinzioni costruite scolasticamente. Che il linguaggio usato avrebbe teso ad essere il più possibile colloquiale, forse con l'uso spontaneo di grafici e disegni schematici.

Il risultato più clamoroso della ricerca è legato al fatto che i casi più complessi ($p>$, $S<$; viceversa; $p>$, $S=$; viceversa) non vengono maggiormente accettati spontaneamente con l'aumento dell'età e neppure del livello scolastico.

Oltre il 90% degli studenti intervistati, indipendentemente dal livello scolastico, tende spontaneamente ad affermare che vi sia una dipendenza stretta tra l'aumento/diminuzione del perimetro e l'aumento/diminuzione dell'area;

messi di fronte al compito di fornire esempi, le difficoltà sono concentrate soprattutto nei casi detti or ora;

solo pochi riescono in questo compito e il risultato positivo non è correlato all'età (dunque al grado scolastico); tra gli studenti universitari si hanno alcuni dei risultati negativi più clamorosi;

una volta mostrato, da parte del ricercatore, che i 9 casi che esauriscono tutte le possibilità sono davvero tutti possibili, si hanno le seguenti reazioni:

- più della metà degli studenti mostra sorpresa dovuta all'uso di figure concave; qualcuno giunge a dichiarare «Che queste non sono figure geometriche», che «Non sono corrette», che «A scuola non si usano»,...; questo atteggiamento non è correlabile in modo significativo all'età e dunque al livello scolastico o al tipo di scuola frequentata;
- più della metà degli studenti capisce il senso della proposta ed ammette di aver subito un cambio di convinzione; anche questo

atteggiamento, leggermente superiore ai livelli alti di scolarità, non è però statisticamente legato all'età;

- in casi di non riuscita, spesso lo studente si trincerava dietro giustificazioni dovute alla mancanza di svolgimento di questo argomento da parte dell'insegnante; questo fatto è assai più presente nella scuola media; numerosi studenti delle superiori dimostrano di aver ben capito il *sensu* della ricerca e rivelano interesse e motivazione nel dare le risposte; alcuni riconoscono la loro propria personale difficoltà nel compiere sulle figure trasformazioni opportune; interessante come alcuni studenti delle superiori si facciano carico personale del problema, senza scaricare sugli insegnanti dei livelli precedenti responsabilità (al contrario, abbiamo avuto insegnanti laureati che hanno incolpato di queste loro manchevolezze e difficoltà gli studi universitari, nei quali, accusano, questo tipo di argomenti sono ignorati; o i libri di testo, per motivi analoghi).

Tornando al cambio di convinzione, in diversi casi chi lo dichiara lo fa in modo sorpreso, come se esso scardinasse una consapevolezza data per acquisita.

Dei 13 studenti universitari intervistati, uno solo del corso di laurea in Matematica, quelli che dichiarano spontaneamente che i 9 casi sono tutti possibili, indipendentemente dal saperli trovare, sono meno della metà; degli altri, quelli che hanno bisogno di fare le prove, solo la metà dichiara alla fine in modo convincente di aver cambiato convinzione; di questi, alcuni lo fanno in modo molto esplicito;

parecchi sostengono che il malinteso di pensare che l'aumento del perimetro comporti l'aumento dell'area derivi da una cattiva didattica e si ripromettono di tenerne conto durante la loro futura professione, anzi iniziando già dall'azione di tirocinio.

Non sempre l'accettazione è facile: «Per me è dura accettarlo, ero convinto che dipendevano, è una bella sorpresa che devo digerire, è dura».

Quanto al linguaggio, enorme il ricorso al linguaggio naturale, a confusioni terminologiche (per esempio, nonostante si parlasse esplicitamente di perimetro e area, molti studenti, dalla scuola primaria alla superiore, dicono “perimetro” in luogo di “area” e viceversa), ad espressioni inadeguate dal punto di vista lessicale.

Si noti che il ricorso ad un linguaggio colloquiale di basso profilo formale o almeno culturale in ambito matematico NON è fatto peculiare dei primi livelli di scolarità. Sono anzi alcuni studenti universitari quelli che più ci sorprendono con aggettivi e locuzioni assai poco consoni alla geometria ufficiale: «Se una [figura] lo fai sottilina...», «Se faccio una cosa molto spigolosa, il perimetro...» etc.

Moltissimi intervistati tentano di ricorrere a disegni esplicativi che illustrino, confermino, smentiscano il proprio pensiero; il risultato, però, è assai deludente: ben pochi studenti, senza distinzioni di livello scolastico, sanno usare davvero il disegno per validare o negare le proprie asserzioni; provano, ma non dominano questo specifico linguaggio grafico.

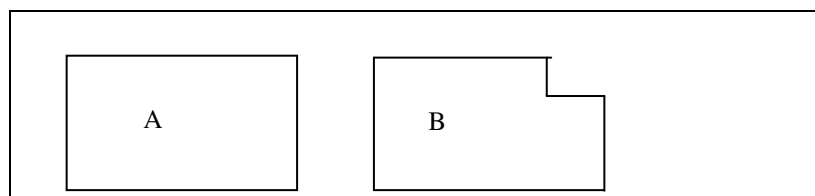
Interessante notare come allievi di V primaria di varie zone italiane che rispondono bene spontaneamente alla I domanda (se cioè, avendo un rettangolo ed un quadrato di ugual perimetro, necessariamente vi sia anche uguale area), affermano di no perché il quadrato è «più ampio», «ha più spazio dentro», «è più grosso»,...

È ovvio che tra quadrilateri isoperimetrici, il quadrato è quello di maggior superficie; e questo fatto viene immaginato, visto, intuito da un punto di vista grafico, più alla scuola primaria che poi. Naturalmente, non mancano i casi di studenti delle superiori che mostrano competenza su questi temi; in V, per esempio, abbiamo avuto casi di studenti che conoscevano e dominavano le relazioni tra superfici di figure isoperimetriche.

4.2.2.

Venendo al punto 3 della ricerca, abbiamo invitato i collaboratori a sottoporre a studenti diversi, che non erano stati sottoposti alla prova precedente, la seguente, durante interviste singole.

Essi dovevano consegnare a tali nuovi soggetti una scheda contenente le due figure seguenti:





(L'esagono B è stato ottenuto molto visibilmente dal rettangolo A eliminando un piccolo rettangolo in alto a destra).

Ora, a metà degli studenti andavano poste le due seguenti domande:

d1: La superficie di A è minore, uguale o maggiore della superficie di B?

E il perimetro di A è minore, uguale o maggiore del perimetro di B?

All'altra metà, invece, si dovevano porre le due seguenti domande:

d2: Il perimetro di A è minore, uguale o maggiore del perimetro di B?

E l'area di A è minore, uguale o maggiore dell'area di B?

Avevamo un'unica domanda di ricerca R3: Può l'ordine invertito delle domande che caratterizzano d1 e d2 modificare radicalmente le risposte degli studenti?

La nostra ipotesi I3 era che:

- in d1 gli studenti avrebbero verificato facilmente che l'area di A è maggiore di quella di B (perché è graficamente molto evidente) e avrebbero allora teso a dire, senza verifiche, che il perimetro di A è maggiore del perimetro di B; i collaboratori dovevano solo verificare se questa tendenza esisteva davvero;
- in d2 gli studenti sarebbero stati imbarazzati dalla prima domanda sul perimetro, che avrebbero dovuto verificare con attenzione perché NON è immediatamente evidente; una volta verificato che il perimetro di A è uguale a quello di B, tuttavia non avrebbero dovuto avere problemi a dire che l'area di A è maggiore di quella di B; i collaboratori dovevano far sì che lo studente verificasse che i due perimetri sono uguali e lo dicesse, dopo di che stare attenti a che cosa avrebbero risposto a proposito delle aree.

Se le cose avessero funzionato davvero così, avremmo contraddetto l'ipotesi di Azhari (1998) (ed almeno parzialmente fatta propria da Stavy e Tirosh, 2001) in base all'evidenza delle figure; non varrebbe allora più la loro supposta "legge di conservazione", ma tutto si ricondurrebbe ad un fatto legato a misconcezioni ed evidenze percettive.

I risultati delle prove fatte dimostrano in modo assolutamente incontrovertibile la nostra ipotesi; l'ordine delle domande è

fondamentale nelle risposte ma, in questo caso, l'età (e dunque il livello scolastico) incide in forma statisticamente assai rilevante.

La risposta corretta alla domanda d1 è data spontaneamente ed immediatamente dal 90-91% dei casi;

la risposta corretta alla domanda d2 è data spontaneamente senza necessità di riflessione in non molti casi, anche ad alti livelli di scolarità, mentre viene data dopo prove o ripensamenti nell'84-85% dei casi.

Le risposte dunque non sono legate a quella supposta "legge di conservazione", ma a misconcezioni legate a quanto emerso nel paragrafo precedente ed all'evidenza percettiva che, nel caso dell'area, è immediata, mentre nel caso del perimetro no.

L'ipotesi di Azhari viene qui falsificata.

I problemi che si incontrano sono di tipi diversi e solo in parte attesi:

- alcuni studenti confondono nella loro terminologia area e perimetro; il che comporta l'inaccettabilità delle dichiarazioni dell'intervistato da parte del ricercatore;
- difficoltà di accettare confronti tra le due figure perché una delle due è figura insolita, non contemplata tra quelle cui la scuola ha dedicato formule;
- quando uno studente, specie dei primi livelli scolastici, tenta di misurare i perimetri, non sempre sa come comportarsi; da notare che, per rispondere alle domande, non era affatto necessario misurare alcunché; la misurazione viene tentata nei casi in cui il soggetto intervistato lo ritiene necessario (il che avviene in più casi del previsto, e non solo nella scuola primaria o media; vari studenti delle superiori fanno uso di quadrilateri specificandone sempre le misure dei lati e calcolandone area e perimetro).

5. Conclusioni e note didattiche

Visto l'andamento della ricerca con gli studenti è del tutto evidente che l'ostacolo che si oppone alla costruzione di una conoscenza soddisfacente sulle relazioni tra "perimetro ed area" non è solo di natura epistemologica bensì anche di natura didattica.

Esso quindi risiede nelle scelte didattiche:

- si usano sempre e solo figure convesse provocando la misconcezione che le figure concave *non possono* essere usate o è sconveniente usarle;

- si usano sempre solo figure standard provocando la misconcezione che viene spesso espressa con la frase: «Ma questa non è una figura geometrica»;
- quasi mai si mettono esplicitamente in relazione area e perimetro della stessa figura; anzi, a volte si insiste solo sul fatto che il perimetro si misura in metri (m) mentre l'area in metri al quadrato (m^2), insistendo sulle differenze e mai sulle reciproche relazioni;
- quasi mai si operano trasformazioni sulle figure in modo da conservare o modificare area e perimetro, creando una misconcezione sul significato che ha il termine “trasformazione”; molti studenti interpretano infatti spontaneamente con “trasformazione” una modifica che deve consistere solo in un rimpicciolimento o in un ingrandimento; nel caso ($p=$, $S=$) molti studenti rifiutano di conseguenza come “trasformazione” l'identità o una isometria.

La conferma di quanto sopra deriva anche dalla ricerca svolta con gli insegnanti; si verifica il caso di insegnanti, non solo di scuola primaria, che hanno reazioni del tutto analoghe a quelle degli studenti, di stupore cioè, di fronte ad un necessario cambio di convinzioni. Un insegnante afferma: «Ma se nessuno ci ha mai insegnato queste cose, come possiamo saperle?»; questa ci pare la conferma del fatto che quasi tutto si possa ricondurre ad ostacoli didattici.

Le scelte degli insegnanti NON avvengono dentro una corretta trasposizione didattica che li faccia agire trasformando un “Sapere” (che per alcuni di loro di fatto non c'è) in un “sapere da insegnare”, in modo colto e consapevole (spesso, purtroppo, non c'è neppure consapevolezza della esistenza e della differenza tra “Sapere” e “sapere a insegnare”). Di fatto, almeno nel campo da noi indagato, si perpetra uno scenario di questioni acritiche, trite e ritrite, seguendo un copione prestabilito e consacrato dai libri di testo. La conferma sta nei seguenti fatti:

- quando l'insegnante cambia di convinzione, lo fa con sincera meraviglia
- insistendo sul fatto che questo argomento dovrebbe entrare esplicitamente nella didattica
- ripromettendosi spontaneamente a volte di includerlo nella propria azione didattica di insegnamento/apprendimento.

Bibliografia

- Azhari N. (1998). *Using the intuitive rule «Same of A, same of B» in conservation tasks*. Manoscritto non pubblicato, cit. in Stavy, Tirosh (ved. oltre).
- Battro A.M. (1969). *Il pensiero di Jean Piaget*. Bologna: Pitagora, 1983. [Ed. originale in lingua spagnola: 1969, Buenos Aires: Emecé].
- Chamorro M.C. (1997). *Estudio de las situaciones de enseñanza de la medida en la escuela elemental*. Tesi di dottorato. UNED.
- Chamorro M. C. (2001-02). Le difficoltà nell'insegnamento – apprendimento delle grandezze nella scuola di base. *La matematica e la sua didattica*. I parte: 4, 2001, 332-351. II parte: 1, 2002, 58-77.
- D'Amore B., Fandiño Pinilla M.I. (2004). Cambi di convinzioni in insegnanti di matematica di scuola secondaria superiore in formazione iniziale. *La matematica e la sua didattica*. 3, 27-50.
- Fischbein E. (1985). Intuizione pensiero analitico nell'educazione matematica. In: Artusi Chini L (ed.) (1985). *Numeri e operazioni nella scuola di base*. Bologna: Zanichelli. 8-19.
- Gentner D. (1983). Structure mapping: a theoretical framework. *Cognitive Science*. 7, 156-166.
- Giovannoni L. (1996). Misure di estensione superficiale nella scuola dell'infanzia. *La matematica e la sua didattica*. 4, 394-423.
- Iacomella A., Marchini C. (1990). Riflessioni sul problema della misura. *Periodico di matematiche*. 66, VI, 4, 28-52.
- Jaquet F. (2000). Il conflitto area - perimetro. *L'educazione matematica*. I parte: 2, 2, 66-77; II parte: 2, 3, 126-143.
- Marchini C. (1999). Il problema dell'area. *L'educazione matematica*. 1, 1, 27-48.
- Medici D. (1999). Un problema e la sua analisi: frazione di terreno. In: Grugnetti L., Jaquet F. (eds.) (1999). *Il Rally matematico transalpino. Quali apporti per la didattica?* Atti delle giornate di studio sul Rally matematico transalpino. Brigue, 1997-98. Parma – Neuchâtel: Dipartimento di matematica dell'Università di Parma – IRDP di Neuchâtel.
- Outhred L., Mitchelmore M. (1992). Representation of area: a pictorial perspective. *XVI PME*. 2, 194-201.

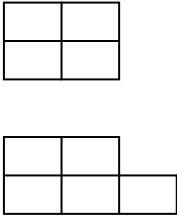
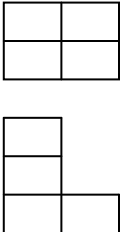

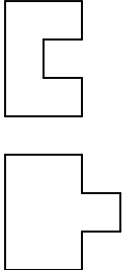
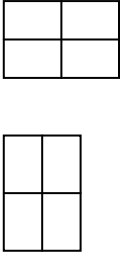
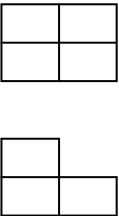
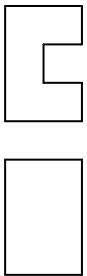
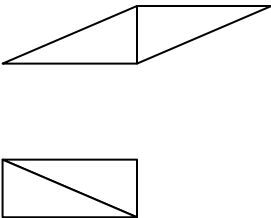
- Piaget J. (1926). *La rappresentazione del mondo nel fanciullo*. Torino: Boringhieri, 1966. [Ed. originale in lingua francese: 1926, Paris: Alcan].
- Piaget J. (1937). *La costruzione del reale nel bambino*. Firenze: La Nuova Italia, 1973. [Ed. originale in lingua francese: 1937, Neuchâtel: Delachaux & Niestlé].
- Piaget J., Inhelder B. (1962). *Lo sviluppo delle quantità fisiche nel bambino*. Firenze: La Nuova Italia, 1971. [Ed. originale in lingua francese: 1962, Paris-Neuchâtel: Delachaux & Niestlé].
- Piaget J., Inhelder B., Szeminska A. (1948). *La geometria spontanea del bambino*. Firenze: Giunti Barbèra, 1976. [Ed. originale in lingua francese: 1948, Paris: PUF].
- Resnick L.B., Ford W.W. (1981). *Psicologia della matematica e apprendimento scolastico*. Torino: Sei. [Ed. originale in lingua inglese: 1981, Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates].
- Rogalski J. (1979). Quantités physiques et structures numériques. Mesures et quantification: les cardinaux finis, les longueurs, surfaces et volumes. *Bulletin de l'APMEP*. 320, 563-586.
- Rouche N. (1992). *Le sense de la mesure*. Bruxelles: Didier Hatier.
- Speranza F. (1987). La geometria dalle cose alla logica. In: D'Amore B. (ed.) (1987). *La matematica e la sua didattica*. Bologna: Pitagora. 105-114.
- Stavy R., Tirosh D. (2001). *Perché gli studenti fraintendono matematica e scienze?* Trento: Erickson.
- Tierney C., Boyd C., Davis G. (1990). Prospective Primary Teachers's Conception of area. *XIV PME*. 2, 307-315.
- Vihn B. et al. (1964). *L'épistemologie de l'espace*. Paris: PUF.
- Vihn B., Lunzer E. (1965). *Conservations spaciales*. Paris: PUF.

Gli Autori ringraziano i collaboratori alla ricerca per il prezioso aiuto fornito e per la enorme disponibilità non solo a condurre le prove di ricerca su allievi e colleghi, ma anche su sé stessi. Li ringraziano anche per la collaborazione fornita al termine del lavoro, con pazienti letture critiche e suggerimenti di modifiche.

Ringraziano altresì tutti coloro (colleghi e studenti) che hanno gentilmente accettato di sottoporsi alle prove; i loro nomi ovviamente qui non compaiono.
Ringraziano infine i tre anonimi referee per i preziosi suggerimenti critici.

APPENDICE

p	S	p	S	p	S
>	>	>	=	>	<
=	>	=	=	=	<
<	>	<	=	<	<

<p>1</p> 	<p>2</p> 	<p>3</p> 
<p>4</p> 	<p>5</p> 	<p>6</p> 
<p>7</p> 	<p>8</p> 	<p>9</p> 