

601. D'Amore B. (2007). La didattica della matematica, oggi. In: Marazzani I. (ed.) (2007). *La matematica e la sua didattica*. Atti del I Convegno Nazionale, Giulianova (Te), 4-5-6 maggio 2007. Bologna: Pitagora. 18-24. ISBN: 88-371-1677-2.

La Didattica della Matematica, oggi

Bruno D'Amore

Dipartimento di Matematica, Università di Bologna, Italia
 Facoltà di Scienza della Formazione, Università di Bolzano, Italia
 Alta Scuola Pedagogica, Locarno
 Dottorato di Ricerca in Didattica della Matematica, Bogotà

L'attuale ricerca in didattica disciplinare sembra tutta tesa ad accentrare l'attenzione sul fenomeno dell'apprendimento, ma da un punto di vista fondazionale e comunque non accettando un unico modello di teoria dell'apprendimento (anche se la psicologia cognitiva in questo momento sembra la più autorevole candidata al ruolo di organizzatrice fondazionale per molte esperienze di ricerca).

Affrontando la didattica disciplinare come epistemologia dell'apprendimento, farò esempi nel campo che mi compete, cioè in quello della matematica. Discussioni con colleghi, didatti di altre discipline e letture occasionali, però, mi danno conferma del fatto che le problematiche generali sembrano essere le stesse, anche nelle diverse specificità. Per cui, pur non volendo (potendo) uscire dallo stretto ambito detto, sono convinto che non troppo diversi sarebbero i possibili analoghi resoconti critici di appartenenti ad altri settori di ricerca.

Quel che farò qui è presto dichiarato. Analizzerò una delle problematiche che sembrano emergere con più forza negli ultimi anni, che si sono consolidate come elementi di ricerca **in didattica della matematica**, e che mi sembrano fornire appigli solidi e significativi per una possibile generalizzazione. Mi asterrò da presentazioni troppo tecniche e mi limiterò dunque solo alla posizione di ogni singolo problema proposto, passando in rassegna, nei prossimi paragrafi, alcune tematiche molto diffuse nell'ambiente di ricerca e che sembrano essere di particolare interesse per gli insegnanti.

Il contratto didattico

Fin dagli anni '70 fece l'ingresso nel mondo della ricerca in Didattica della matematica l'idea di *contratto didattico*, lanciata da Guy Brousseau (1986), che si rivelò subito fruttifera e che venne definitivamente sancita dalle sue ricerche dei primi anni '80. Furono poi gli studi della seconda metà degli anni '80 a decretarne il trionfo e la teorizzazione piena; ad essi parteciparono vari studiosi di tutto il mondo: l'idea veniva riconosciuta ed entrava a far parte del linguaggio condiviso dall'intera comunità internazionale.

Questa idea, di spirito tutto francese, non era del tutto nuova. Nel 1973, Jeanine Filloux introdusse il termine di *contratto pedagogico* per definire alcuni tipi di rapporto tra docente ed allievo. Quello della Filloux era un contratto generale, più sociale che cognitivo, mentre il contratto didattico di Brousseau tiene conto anche delle conoscenze in gioco. Il primo tentativo di "definizione" del contratto didattico è il seguente: «In una situazione d'insegnamento, preparata e realizzata da un insegnante, l'allievo ha generalmente come compito di risolvere un problema (matematico) che gli è presentato, ma l'accesso a questo

compito si fa attraverso un'interpretazione delle domande poste, delle informazioni fornite, degli obblighi imposti che sono costanti del modo di insegnare del maestro. Queste abitudini (specifiche) del maestro attese dall'allievo ed i comportamenti dell'allievo attesi dal docente costituiscono il contratto didattico». (Brousseau, 1986)

Spesso queste "attese" non sono dovute ad accordi espliciti, imposti dalla scuola o dagli insegnanti o concordati con gli allievi, ma alla concezione della scuola, della matematica, alla ripetizione di modalità.

Qualche esempio.

Es. 1 (concezione della scuola): L'allievo ritiene che la scuola sia direttiva e valutativa; quindi anche se l'insegnante chiede all'allievo di scrivere *liberamente* quel che pensa (per esempio sulle altezze di un triangolo), l'allievo ritiene di doverlo fare con un linguaggio il più possibile rigoroso perché suppone che sotto quella richiesta vi sia comunque una prova, un controllo; non scriverà affatto "liberamente" ma cercherà invece di dare la definizione che ritiene essere quella 'corretta', cioè quella che ritiene essere attesa dall'insegnante.

Es. 2 (concezione della matematica): Lo studente ritiene che in matematica si *devono* fare dei calcoli; per cui, anche se la risposta alla domanda posta in un problema può essere data solo rispondendo a parole, lo studente è a disagio e tende a far uso dei dati numerici per dare comunque una risposta formale.

Es. 3 (ripetizione delle modalità): Per tre lunedì consecutivi l'insegnante di matematica fa svolgere esercizi alla lavagna; da quel punto in poi l'allievo sa che ogni lunedì sarà così; una modifica al programma atteso genera sorpresa. Lo stesso vale, per esempio, quanto all'attesa del programma possibile nel corso di un'interrogazione: se l'insegnante ha sempre e solo fatto domande sul programma svolto nelle ultime lezioni, non può, a detta dello studente, fare domande su argomenti oggetto di lezione in un passato più remoto...

Lo studio dei vari fenomeni di comportamento degli allievi da questo punto di vista ha dato enormi frutti, di estremo interesse. Oggi molti comportamenti considerati fino a poco tempo fa inspiegabili o legati al disinteresse, all'ignoranza, o alla età immatura, sono invece stati chiariti.

Uno degli studi più noti è quello che va sotto il nome di *L'età del capitano* e messo in luce, tramite un libro avente quel titolo, dalla psicologa francese Stella Baruk nel 1985. Io lo racconterò qui di seguito, così come l'ho vissuto (e fatto vivere) personalmente (D'Amore, 1993a). In una classe IV elementare (età degli allievi 9-10 anni) di un importante centro agricolo, ho proposto il celeberrimo problema (nel quale il "capitano" diventa un "pastore"): «Un pastore ha 12 pecore e 6 capre. Quanti anni ha il pastore?».

In coro, con sicurezza, e *tutti* senza eccezioni o riserve, i bambini hanno dato la risposta attesa: «18». Di fronte allo sgomento della maestra, ho reagito spiegandole che si tratta di un fatto legato al contratto didattico: lei non aveva mai dato problemi senza soluzione, o impossibili (per una delle tante forme di impossibilità) (D'Amore, Sandri 1993), dunque i bambini avevano introdotto nel contratto didattico una clausola in base alla quale, per così dire: «Se la maestra ci dà un problema, questo deve essere risolto certamente». E, poiché vige un'altra clausola micidiale secondo la quale i dati numerici presenti nel testo vanno presi tutti (una ed una sola volta), e possibilmente nell'ordine in cui compaiono, i bambini di quella classe non avevano nessun'altra possibilità, nessuno scampo: *dovevano* rispondere usando i dati 12 e 6. L'unico imbarazzo stava semmai nella scelta della operazione da eseguire. Ora, può darsi che quella dell'addizione sia stata una scelta casuale; ma va detto che alla mia richiesta ad un biondino particolarmente vivace di spiegare perché non avesse fatto uso per

esempio della divisione, questo, dopo un attimo di riflessione, mi ha spiegato che: «No, è troppo piccolo!», riferendosi ovviamente all'età del pastore...

[Si potrebbe qui fare una nota didattico-curricolare: nei programmi ministeriali per la scuola elementare italiana si legge un esplicito invito agli insegnanti a proporre agli allievi problemi con dati mancanti, con dati in eccesso, con dati contraddittori. Non si tratta di una cattiveria architettata da un burocrate ottuso ed insensibile, ma di una sollecitazione a tentare di eliminare appunto queste clausole nocive dal contratto didattico: come si sa, i bambini di solito neppure leggono il testo di un problema, ma si limitano a scorgerlo rapidamente, concentrandosi sui dati numerici e cercando d'intuire il tipo di operazione necessaria. Ma se gli allievi si comportano così, qualcosa o qualcuno deve averli indotti a questo comportamento; inutile cercare giustificazioni legate all'eccessivo tempo passato davanti alla TV, alla disgregazione delle famiglie, alla mancanza di letture, alla perdita di interesse,... Ci sono clausole del contratto didattico che sono sfuggite al controllo critico adulto e che, anzi, sembrano talvolta esplicitate.

Ci sono due dimostrazioni del fatto che non si tratta di semplicistica "colpa dei tempi".

Prima. Gli *stessi* bambini, in un contesto diverso da quello classe, alla stessa proposta di problema, non danno più la risposta detta, ma mettono in evidenza la incongruità fra i dati e la richiesta.

Seconda. Gli allievi di una classe *diversa*, nella quale l'insegnante ha più volte proposto agli allievi problemi di questi tipi, sono abituati a stare vigili: quando l'insegnante dà il testo di un problema, occorre analizzarne bene il testo; nel caso del "problema del pastore", i bambini hanno, dopo varie risatine e scambi di occhiate furtive tra loro, risposto con frasi ironiche mettendo in evidenza che il problema, così com'è formulato, non si può risolvere].

Con l'espressione *effetto «età del capitano»* si designa oggi la condotta di un allievo che calcola la risposta di un problema utilizzando una parte o la totalità dei numeri che sono forniti nell'enunciato, allorché questo problema non possieda una soluzione numerica.

Naturalmente, il "caso" non è esclusivo della scuola elementare ma, mutando quel che c'è da mutare, interessa ogni ordine di scuola.

Tale effetto rientra tra quelli cosiddetti di *rottura* del contratto didattico: se anche l'allievo si rende conto dell'assurdità del problema posto, necessita di farsi carico personale di una rottura del contratto didattico, per poter rispondere che il problema non si può risolvere. Questa nuova situazione, infatti, contrasta con tutte le sue attese, con tutte le sue abitudini, con tutte le clausole fin qui messe in campo nelle situazioni didattiche. Ma lo studente non ha la forza, non essendo mai stato abituato, a rompere il contratto e preferisce rispettarne le supposte clausole pur di non rischiare, pur di non osare in prima persona.

Studi approfonditi sul contratto didattico hanno permesso di rivelare appunto che i bambini ed i ragazzi hanno attese particolari, schemi generali, comportamenti che nulla hanno a che fare *stricto sensu* con la matematica, ma che dipendono dal contratto didattico instaurato in classe.

Per esempio, in una ricerca sui problemi con dati mancanti e sugli atteggiamenti degli allievi di fronte a problemi di questo tipo (D'Amore, Sandri, 1998) ecco un testo proposto in III elementare (allievi di 8-9 anni) ed in II media (allievi di 12-13 anni):

«Giovanna e Paola vanno a fare la spesa; Giovanna spende 10.000 lire e Paola spende 20.000 lire. Alla fine chi ha più soldi nel borsellino, Giovanna o Paola?».

Ed ecco un prototipo del genere di risposte più diffuse in III; scelgo il protocollo di risposta di Stefania, che riporto esattamente come lo ha redatto l'allieva:

Stefania:

Nel borsellino rimane più soldi giovanna
 $30-10=20$
 $10 \times 10=100$

La risposta "Giovanna" (58,4% di tali risposte in III elementare, età degli allievi 8-9 anni) è giustificata dal fatto che (clausola delle attese e della costanza) lo studente ritiene che, se l'insegnante affida un problema, questo *debba poter essere risolto*; dunque, anche se si accorge che manca il dato della somma iniziale, se lo inventa implicitamente più o meno come segue: «Questo problema *deve* essere risolto; dunque, forse Giovanna e Paola partivano dalla stessa somma». A quel punto, *la risposta è corretta*: Giovanna spende meno e quindi le resta più danaro. E ciò giustifica la parte scritta della risposta di Stefania. Dopo di che scatta un altro meccanismo legato ad un'altra clausola (del tipo: immagine della matematica, attese presupposte da parte dell'insegnante): «Non può bastare così, in matematica si devono fare dei calcoli, la maestra se li aspetta di certo». A quel punto, il controllo critico crolla e... qualsiasi calcolo va bene...

Nel lavoro D'Amore, Sandri (1998), abbiamo chiamato questa clausola del contratto didattico: "esigenza della giustificazione formale" (egf), studiandola in ogni dettaglio. Tale clausola egf è molto presente anche nella scuola media (età degli allievi: 11-14 anni). [La percentuale di risposte "Giovanna" scende dal 58,4% della III elementare (8-9 anni) al 24,4% della II media (12-13 anni); ma solo il 63,5% degli allievi di II media denuncia in qualche modo l'impossibilità di dare una risposta; dunque il 36,5% dà una risposta: oltre 1/3 di ciascuna classe].

Ecco un prototipo di risposta avuta allo stesso problema in II media; ho scelto il protocollo di risposta di un'allieva, riportandolo esattamente come da lei prodotto:

Silvia:

Secondo me, chi ha più soldi nel borsellino è Giovanna [poi corretto in Paola]
 perché:
 Giovanna spende 10.000 mentre Paola spende 20.000.,

10.000	20.00
Giovanna	Paola

 $20.000-10.000=10.000$ (soldi di Giovanna)
 $10.000+10.000=20.000$ (soldi di Paola)

Nel protocollo di Silvia si riconoscono in azione le stesse clausole del contratto didattico messe in opera nel protocollo di Stefania, ma la sua analisi è più complessa. Per prima cosa, si nota un tentativo di organizzazione logica e formale più impegnativo. Silvia, poi, dapprima scrive "Giovanna" perché ha ragionato come Stefania; poi, però, a causa della clausola egf, ritiene di *dover* produrre calcoli. È probabile che si renda conto, anche se in modo confuso, che le operazioni che sta facendo sono slegate dal problema, le fa solo perché ritiene di *dover fare* qualche calcolo. Ma, per quanto assurde, finisce con assumerle come fossero plausibili: tanto è vero che, dato che da questi calcoli insensati ottiene un risultato che contrasta con quello dato in via intuitiva, preferisce violentare la propria intuizione ed accetta piuttosto

quanto ottenuto per via formale: i calcoli le danno "Paola" come risposta e non "Giovanna", come invece aveva supposto; e dunque barra "Giovanna" ed al suo posto scrive "Paola". Il contratto didattico, che questa volta è dettato da una immagine formale (a vuoto, deleteria) della matematica, ha vinto, sconfiggendo la ragione...

In D'Amore (1993b), racconto una curiosa esperienza basata sul testo seguente, dato in una scuola elementare a diverse classi:

«I 18 allievi di seconda vogliono fare una gita di un giorno da Bologna a Verona. Devono tener conto dei seguenti dati:

- due di essi non possono pagare;
- da Bologna a Verona ci sono 120 km;
- un pulmino da 20 posti costa 200.000 lire al giorno più 500 lire al chilometro (compresi i pedaggi autostradali).

Quanto verrà a spendere ciascuno?».

Inutile dire che si tratta di un problema complesso, che si voleva realmente effettuare la programmazione di una gita, che gli studenti avrebbero dovuto discutere del problema e cercare la risoluzione in gruppo eccetera.

Di fatto, la stragrande maggioranza degli studenti, di fronte alla risoluzione di questo problema, commette un errore ricorrente: non tiene conto del viaggio di ritorno e calcola dunque la spesa totale con l'espressione errata: $500 \times 120 + 20000$.

Su questo punto c'è una vasta bibliografia che tende a giustificare questo fatto. Una delle giustificazioni più ricorrenti è una sorta di... dimenticanza strategica o affettiva: l'andata di una gita è emotivamente un momento forte, il ritorno no.

Per cercare di capire meglio la questione, spezzai il problema in varie componenti o fasi, con tante "domandine" parziali specifiche; ma l'errore si ripeteva. Sugerii allora ad alcuni insegnanti di far mimare le scene dell'andata e del ritorno, di disegnare i vari momenti della gita. Il caso incredibile che trovai e che descrissi in D'Amore (1993b) è quello di un bambino che ha disegnato il pullman sotto una doppia freccia:

in una c'è scritto «Bologna \longrightarrow Verona 120 km», nell'altra «Verona \longrightarrow Bologna 120 km», dunque c'è perfetta consapevolezza del fatto che in una gita ci sono andata e ritorno; ma poi quello stesso bambino, al momento di risolvere, utilizza di nuovo solo il dato per l'andata.

Una delle giustificazioni più presenti date dai bambini nelle interviste è che essi non si sentono autorizzati ad usare un dato che esplicitamente non appare nel testo. Conta poco il senso della richiesta contenuta nei problemi di Matematica, quel che conta è far uso dei dati numerici esplicitamente proposti come tali. Uno dei bambini, intervistato, dichiara: «Se tu volevi calcolare anche il ritorno, dovevi dirlo»; è evidente la lacuna che il bambino avverte: in nessuno dei dati appare lecito raddoppiare la spesa per il percorso chilometrico.

Gli studi sul contratto didattico, praticamente coltivati in tutto il mondo, si stanno rivelando molto fruttiferi ed hanno dato, in pochissimi anni, risultati di grande interesse, che sempre più ci stanno facendo conoscere l'epistemologia dell'apprendimento matematico.

Bibliografia

- Brousseau G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7, 2, 33-115.
- D'Amore B. (1993a). Il problema del pastore. *La vita scolastica*, 2, 14-16. Firenze: Giunti.

- D'Amore B. (1993b). *Problemi. Pedagogia e psicologia della matematica nell'attività di problem solving*. Milano: Angeli. II ed. it. 1996. [Ed. in lingua spagnola: Madrid, Sintesis, 1996].
- D'Amore B. (1999). *Elementi di Didattica della matematica*. Bologna: Pitagora.
- D'Amore B. (2001). *Didattica della matematica*. Bologna: Pitagora.
- D'Amore B., Sandri P. (1993). Una classificazione dei problemi cosiddetti impossibili. *La Matematica e la sua didattica*, 3, 348-353. Bologna: Pitagora. Ristampato in: A. Gagatsis (ed.), *Didactiché ton Mathematicon*, Erasmus ICP 93G 2011/II, Thessaloniki 1994, in greco 247-252, in francese 579-584.
- D'Amore B., Sandri P. (1998). Risposte degli allievi a problemi di tipo scolastico standard con un dato mancante. *La matematica e la sua didattica*, 1, 4-18. Bologna: Pitagora. Traduzione francese in: *Scientia Paedagogica Experimentalis*. Belgio, XXXV, 1, 1999, 55-94.