**768.** D'Amore B. (2012). Cosa serve per diventare buoni insegnanti di matematica? In: Bolondi G. (ed.) (2012). *Perché studiare la matematica*. Milano: Pearson. 131-162. ISBN: 9-788871-926568.

# Per una formazione culturale e professionale degli insegnanti di matematica della scuola secondaria

Bruno D'Amore

**Domanda 1.**
Da parecchi anni, almeno 20, tu insisti sul fatto che una buona preparazione professionale e culturale dell'insegnante di matematica delle scuole secondarie deve prendere in seria considerazione per prima cosa la matematica, poi la sua storia e poi, non ultima, la sua epistemologia. Puoi spiegare in breve l'origine di questa tua convinzione che ha avuto molto successo, specie nella organizzazione curricolare della defunta ssis?

**Risposta 1.**
Diversi anni fa, credo fosse il 1991 o il '90, a Francesco Speranza ed a me fu proposto di tenere un ciclo di conferenze presso il Dipartimento di matematica della Facoltà dell'Educazione dell'Università di Salonicco (su invito di Athanasios Gagatsis che, allora, insegnava là); il giorno prima dell'inizio dei seminari, l'Istituto Culturale di Francia di quella città, uno degli sponsor della manifestazione, ci chiese di tenere un seminario a due voci su temi generali di matematica per un pubblico di non specialisti, ovviamente in francese. In quella occasione il prof. Speranza difese il valore culturale della competenza in epistemologia della matematica con parole molto forti, che mi colpirono; giunse a dire che conoscere l'epistemologia della matematica è, per un docente, altrettanto importante che conoscere la matematica stessa; il senso da dare a questa affermazione è che conoscere *solo* la matematica non serve, se non si ha il senso della evoluzione del pensiero matematico. Gli avevo ceduto il seminario introduttivo per ovvii motivi di importanza accademica e dunque mi ritrovai spiazzato dal fatto che lui avesse già anticipato molta parte di quel che avrei voluto dire io, forse solo con toni meno perentori. Dunque, cambiai tema e presi in considerazione la necessità da parte di un docente di matematica di conoscerne l'epistemologia per motivi professionali, per poter disporre di uno strumento adeguato per la valutazione della situazione d'aula, parlando in particolare dei cosiddetti "ostacoli epistemologici".
La notte (e quelle successive) fummo alloggiati in due piccoli appartamenti adiacenti, presso l'Ambasciata Italiana, unici ospiti in un enorme edificio silenzioso e buio; così potemmo continuare a discutere a lungo di queste due visioni, "culturale" e "professionale", che si integrano perfettamente; l'occasione fu ghiotta per mettere a fuoco il senso di questo doppio binario e ci ripromettemmo più volte di avere un giorno il tempo e l'occasione per mettere per iscritto quelle riflessioni.
Purtroppo ciò non è mai accaduto; anche perché le mie riflessioni epistemologiche presero un'altra direzione (verso semiotica e noetica); ma soprattutto perché qualche anno dopo lui venne a mancare non solo a me ma a tutta la comunità scientifica, per la quale era un eccezionale riferimento.
Tenterò qui di riprendere il filo di quelle discussioni, alla luce anche delle mie nuove esperienze di studio e ricerca, per delineare che cosa rappresenti per me quel *doppio binario di senso* per spiegare la necessità di una preparazione forte sul tema *epistemologia della matematica* da parte dei futuri

docenti di matematica (a mio avviso non solo della scuola secondaria, anche se qui mi limiterò a questo livello scolastico).
Mi sarebbe possibile ma inutilmente faticoso fare citazioni esplicite ogni volta, specie nell'àmbito del *primo binario*, a frasi precise che so di trarre direttamente o implicitamente dagli scritti epistemologici di Francesco Speranza (Speranza, 1997), fonte di continua ispirazione; per non tediare il lettore con rinvii continui, preferisco citare qui, una volta per tutte, questo mio importante riferimento per tutto il paragrafo 2. [Naturalmente, mi assumo personalmente la responsabilità di ciascuna affermazione che farò, senza trincerarmi dietro paraventi di mancate citazioni bibliografiche].
Vi sono dunque, come ripeto, a mio avviso, due motivazioni irrinunciabili alla necessità di una preparazione culturale forte in epistemologia della matematica per i futuri docenti di matematica della scuola secondaria; e sono:
fattori culturali;
fattori didattici o professionali.

**Domanda 2.**
Potresti entrare in dettagli?

**Risposta 2.**
Lo sviluppo della nostra disciplina è non solo fatto di progresso tecnico e formale; anzi, al contrario, questi due sono il risultato di una continua revisione di senso e significato che la matematica cerca all'interno di sé stessa. Il rigore, per esempio, che è uno degli aspetti che colpisce di più il profano o lo studente, non è un fatto intrinseco o un vezzo dell'insegnante, ma necessità linguistica e filosofica (D'Amore, Plazzi, 1990), un filtro (a volte faticoso) che il matematico dà al proprio strumento linguistico per evitare fraintendimenti (dunque pluralità di senso) e per dare univocità di significato nella comunicazione. È per questo che il rigore non è fatto assoluto, ma relativo all'epoca ed al luogo, in costante evoluzione.
Lo sviluppo della matematica, d'altra parte, procede in varie direzioni, ma è innegabile che, in prima istanza e con grande portata, esso è teso alla creazione di concetti;[1] ora, non si può produrre un concetto senza delinearlo epistemologicamente, dunque, volente o nolente, chi riflette sullo sviluppo della matematica deve necessariamente porsi il problema della natura dei concetti (quegli stessi che, in matematica, spesso vengono chiamati *oggetti*) (D'Amore, 2001a, b).
Va da sé dunque che, a parte il matematico professionista che potrebbe anche produrre e che talvolta produce teoremi e/o teorie all'interno di un determinato dominio senza uscirne e studiarne il senso generale epistemologico, *chiunque* altro si occupi di matematica e del suo sviluppo *deve* necessariamente porsi il problema epistemologico come fatto culturale.
L'insegnante di matematica non è un creatore di teoremi e/o teorie, ma un professionista, esperto di matematica, al quale la società propone di far sì che giovani cittadini costruiscano ed apprendano ad usare competenze matematiche.[2]
In primo luogo, egli deve conoscere la matematica; nonostante su questo punto si siano sviluppate varie prese di posizioni, io lo giudico punto irrinunciabile di partenza (D'Amore, 1999a).
Ma l'insegnante ha due doveri principali che consistono nel:

effettuare una *trasposizione didattica*; l'insegnante non può limitarsi banalmente a ripetere la matematica appresa all'Università (suo luogo di formazione culturale, per quanto concerne la matematica); egli *deve* trasformare la matematica (il sapere matematico elaborato dall'accademia) in un sapere adatto agli allievi affidati alle sue cure; egli cioè deve trasformare il Sapere in un "sapere da insegnare" (D'Amore, 1999b); questa trasformazione non è fatto banale, anzi, al

[1] Evito accuratamente di dire *scoperta* e preferisco dire *creazione*; la scelta epistemologica a monte è evidente (D'Amore, 2003); essa comunque non è più dibattuta acremente come in passato.
[2] Uso il termine *competenza* in luogo di *conoscenza* non a caso (D'Amore, Godino, Arrigo, Fandiño Pinilla, 2003).

contrario, è ampiamente creativa e fa strettamente parte, condizionandola, della professionalità docente (Fandiño Pinilla, 2002);

*comunicare la matematica*; noi tutti sappiamo che, in una situazione d'aula, il carattere mediatore dell'insegnante è molto forte e che lo studente quasi mai ha accesso diretto al Sapere, limitando il proprio impegno alla relazione personale con l'insegnante ed all'apprendimento della matematica che l'insegnante ha scelto (in modo più o meno consapevole, più o meno vincolato) per lui; dunque, il passaggio dal docente al discente della matematica insegnata avviene in situazione comunicativa piuttosto forte, sottomessa alle complesse maglie della pragmatica della comunicazione umana (Watzlawick, Beavin, Jackson, 1976).

In base a questi due punti, si vede chiaramente come l'insegnante non possa ignorare il *senso* che ha lo sviluppo della matematica:

non potrebbe altrimenti compiere quell'atto creativo che è la *trasposizione*; lo può fare se e solo se è in grado di scegliere criticamente all'interno di un corpus sul quale ha una qualche legittimità e capacità di decisione; se egli ritiene che la matematica non offra alternative epistemologiche, che il corpus delle conoscenze è quello che è, immutabile, eterno, indiscutibile, quel che lui ha appreso (semmai prima della "parentesi universitaria"),[3] allora non compierà la trasposizione e dunque fallirà come insegnante;

non potrebbe altrimenti *comunicare* la matematica; si può comunicare quel che si è costruito dentro, quel che fa parte della esperienza personale, vissuta, cioè personalizzata; se la matematica è vista come qualche cosa di impersonale, di atemporale, solo una successione di risultati concatenati ottenuti da esseri umani che, mentre producono, non pensano che all'interno della teoria in cui creano, allora non si parla più di comunicazione bensì di ripetizione di risultati; nella pragmatica della comunicazione umana è implicito un senso di proprietà critica, di capacità e disponibilità alla scelta personale; d'altra parte, uno dei limiti della matematica trasmessa a scuola, più volte denunciato da Brousseau (1986, per esempio) è proprio questo suo carattere di impersonalità ed atemporalità, questo voler nascondere la ricca storia degli sforzi e delle difficoltà che gli esseri umani hanno incontrato nel costruire la matematica per come è oggi; lo studente che vede della matematica solo i risultati finali, lindi e cristallini, puliti da ogni fatica e discussione, ordinati, apparentemente dedotti da un'assiomatica che sembra essere calata dall'alto, è indotto a credere che la matematica *debba* per sua natura essere così; se questo studente è un futuro insegnante di matematica, porterà con sé, nella sua storia professionale, questa sbagliata concezione di matematica.

Ho molti Autori a mia disposizione da citare a difesa di questa visione che dà importanza alla cultura in epistemologia della matematica da parte di futuri docenti.
Certamente Speranza (1997) che ha impegnato tutto sé stesso per porre questo insegnamento in modo ufficiale ed esplicito nei programmi della Scuola di Specializzazione (post laurea) per l'Insegnamento nella Scuola Secondaria (che dà in Italia attualmente l'abilitazione all'insegnamento nella Scuola Secondaria). In quello stesso testo, specie da pag. 124 a pag. 127, Speranza mi dà la possibilità di considerare anche Enriques schierato in questa ottica, con una molteplicità di citazioni che qui non riporto. Ulteriore conforto mi viene da Vailati, per esempio quando mostra l'importanza che ha riflettere su atteggiamenti anche rivelatisi erronei nel passato, nella costruzione di concetti matematici, anche in attività didattiche (Vailati, 1896). Così come da Bachelard che, anzi, è da

[3] Terminologia di solito attribuita a Felix Klein per indicare il periodo degli studi universitari di un futuro docente di matematica; vi è implicito un negativo giudizio di inutilità nella formazione, visto che, mancando preparazione specifica, il docente di matematica, una volta tale, replicherà il modello osservato quando era studente pre-univeritario (Loria, 1933).

molti considerato il propugnatore della revisione del modo di concepire l'errore nelle scienze come qualcosa di valorizzabile intrinsecamente (Bachelard, 1951), tanto da arrivare, in questo campo, a condizionare il pensiero di Brousseau (1983, 1989), il creatore della moderna didattica della matematica.

**Domanda 3.**
A lume di naso, mi par di capire che le ripercussioni didattiche siano notevoli, no?

**Risposta 3.**
Le scelte delineate hanno dirette conseguenze in campo didattico; ne esaminerò solo alcuni esempi, il primo in maniera più approfondita, mentre degli altri farò solo cenni. Passerò poi trattare gli aspetti metadidattici e quelli "trasversali".

*Il problema degli "elementi primi"*
Come ho già a lungo esaminato in altra occasione (D'Amore, 2000a), nel secolo XVIII ci si appassionò alla domanda: che cosa vuol dire "semplice da capire"? Il "semplice" è un fatto assoluto o relativo? Il "semplice" è tale indifferentemente, tanto per lo scienziato quanto per lo studente alle prime armi? O c'è differenza? Se sì, quale?
Queste domande trovano tentativi di risposte addirittura nella *Encyclopédie* di Jean-Baptiste Le Rond d'Alembert [1717-1783] e Denis Diderot [1713-1784], e soprattutto negli articoli *Analisi*, *Sintesi*, *Metodo*, *Elementi di scienze*. [Si tratta, a mio avviso, già di uno specifico studio di didattica che si differenzia da interessi generali della pedagogia].
Potrebbe essere interessante, tanto per avere un'idea della cosa, vedere come d'Alembert, autore della voce *Elementi di scienze*, tenti di far scaturire idee didattiche dall'ipotesi cartesiana di sintesi, dal semplice al complesso, ma come sia costretto lui stesso ad ammettere che la cosa si complichi immediatamente.
So di forzare un po' la mano, ma è come se si cominciasse ad ammettere qualche cosa di molto moderno, che c'è una profonda differenza tra:
la disciplina in sé per come è conosciuta e praticata dagli specialisti, dagli scienziati;
la didattica generale in sé, per come consti di asserzioni generali credibili e garantite da riflessioni significative condotte da esperti nel settore;
la didattica disciplinare in sé, che ha tutt'altri parametri, paradigmi e scopi.
Il vero punto in discussione è evidenziato quando d'Alembert tenta di vedere che cosa significa che un concetto *precede* un altro: da quale partire, da quale prendere le mosse, quali sono i *concetti primi*?
Per esempio, in matematica, lo scienziato usa prendere le mosse da idee come spazio, piano, retta, punto, numero, ... ed alcuni "collegamenti" tra essi; siamo proprio sicuri che nella didattica della matematica questo sia conveniente? Gli elementi primi dello scienziato sono o devono necessariamente essere gli elementi primi dell'allievo?
Più che accettare gli elementi primi dello scienziato, non vale forse la pena di ripercorrere la generazione delle idee che hanno portato a scegliere quegli oggetti come oggetti primi?
Non è qui il caso di approfondire, ma è singolare come proprio questo dibattito di stampo didattico faccia passare d'Alembert da una posizione tutta cartesiana ad una lockiana e poi come tenti di conciliare le due: «Le idee semplici possono ridursi a due specie: le une sono delle idee astratte (...) la seconda specie di idee semplici è racchiusa nelle idee primitive che noi acquisiamo attraverso le nostre sensazioni».
Ma: gli elementi che gli studenti che si avvicinano per la prima volta allo studio delle scienze sono in grado di comprendere, sono o no gli elementi delle scienze? O: sono almeno della stessa natura?
Se si risponde di sì, allora il metodo didattico è una ristrutturazione, una sistemazione, una messa in scena progressiva degli elementi delle scienze, del sapere degli scienziati (Kintzler, 1989);

se si risponde di no, come si passa dalle competenze infantili, dagli elementi cognitivi in possesso di uno studente alle prime armi, al sapere scientificamente inteso?
In ogni caso, che legame c'è tra gli elementi primi acquisibili dallo studente e gli elementi primi delle scienze accademicamente intese (Sapere o *Savoir savant*)?
A mio avviso, a partire da questo dibattito, si comincia finalmente a delineare una terna di contenuti:
i contenuti della disciplina *d*, stabiliti da essa stessa, dalla sua storia;
i contenuti della didattica di quella disciplina: $D_d$; essa ha come oggetto di studio la sistemazione (nell'ottica: insegnamento $\rightarrow$ apprendimento efficace) degli elementi della disciplina *d*, ma i contenuti specifici di $D_d$ non sono più meramente i contenuti della disciplina *d*, sono nuovi rispetto a *d*;
i contenuti di un'altra teoria, più generale, che si potrebbe identificare in quella che pone il problema di come passare, al di là del caso specifico, dai contenuti di *d* ai contenuti di $D_d$, qualunque sia la disciplina *d*; si potrebbe allora cominciare a pensare ad una sorta di didattica generale, intesa in questo senso.
È grazie ad una relazione tra riflessioni epistemologiche e didattiche sulla matematica che si arriva al dibattito sugli *elementi primi*, per capire come non ci sia coincidenza tra elementi primi per uno studente alle prime armi e termini primitivi in matematica. Senza questa possibilità di riflessione critica, l'insegnante sarebbe portato a pensare che vi sia coincidenza.

*Le "frazioni", i razionali, il passaggio ai reali, la densità, la continuità*
Senza una forte preparazione in epistemologia della matematica, tutti i temi citati nel titolo di questo paragrafo potrebbero essere fonte di equivoco: l'insegnante trasmette un sapere agli allievi, dopo una trasposizione didattica che egli giudica idonea. Ma, in caso di insuccesso, al non costruire conoscenza (né ovviamente tanto meno competenza) da parte degli studenti, non ha alternative se non il pensare che gli studenti non siano idonei a questo genere di questioni, non all'altezza. O, peggio, pensa di non essere adeguato lui alla professione docente.
Proprio le competenze epistemologiche rivelano, invece, le incredibili insidie che si nascondo dietro questi temi. In Fandiño Pinilla (2002), per esempio, si studia proprio il caso esemplare del dibattito didattico / epistemologico tra "frazioni" (oggetto scolastico) e "razionali" (oggetto del Sapere).
Le incredibili convinzioni che hanno anche studenti maturi (fine Secondaria Superiore, anche dopo corsi di Analisi) su densità e continuità, proposti in aula come puri oggetti matematici da apprendere, senza alcuna attenzione epistemologica cautelativa, sono evidenziate da infiniti autori in ricerche didattiche su campo.

*Fattori "meta", determinanti per la didattica*
Oltre al problema delineato in 3.1. su che cosa siano i termini primitivi, vi sono altri fattori che chiamo metamatematici; per esempio: che cosa sono le definizioni, che cosa sono le dimostrazioni.
Sull'interpretazione di questi due termini, molto ci sarebbe da dire; senza una profonda competenza epistemologica, si corre il rischio di fraintendere grossolanamente il *senso* di queste due fondamentali componenti della matematica. Quante volte ho sentito studenti, anche maturi, confondere questi due termini tra loro, a conferma della mancanza di *senso*. Purtroppo, in varie occasioni, ho sentito insegnanti correggere l'enunciato di una definizione dato da uno studente con frasi del tipo: «Non si dice così, devi dire così»; e pensare che, proprio a proposito delle definizioni, sentii per la prima volta Francesco Speranza parlare di "libertà della matematica" (il che mi spinse ad intervenire didatticamente su questo tema: D'Amore, 1986). E che dire delle dimostrazioni recitate a memoria? Quanti tra noi docenti universitari hanno sentito pronunciare da uno studente la micidiale frase: «Questa dimostrazione non me la ricordo»? Anche questa è segnale di un fraintendimento di base sul *senso* della dimostrazione (e dunque, più in generale, della matematica e della conoscenza matematica).

Come si causano queste deleterie convinzioni presso gli studenti? Non certo per generazione spontanea: esse sono il frutto o di diretti insegnamenti fallaci o di interpretazioni indotte da comportamenti ripetuti e forse causati dal contratto didattico.
Solo una forte preparazione dei docenti in epistemologia della matematica (e in didattica della matematica) può, da un lato fortificare le convinzioni positive degli insegnanti su questi temi, dall'altro renderli didatticamente vigili.
Sia nelle definizioni sia nelle dimostrazioni vi deve essere un ampio "grado di libertà", favorito dal docente, conquistato dallo studente; è questo che ci insegna l'epistemologia.
A proposito di dimostrazioni, vorrei segnalare il fatto che fraintendimenti negativi portano a casi aberranti, come quello da me segnalato in D'Amore (1999b) alle pagine 358-360, relativo al comportamento dimostrativo di fatto assurdo di uno studente di III superiore che metteva sequele di frasi in successione senza legame logico tra loro, eppure sintatticamente corrette, ricche di gerundi, di connettori causali, con un formalismo preciso ed assillante. Intervenire in questi casi è quasi impossibile, ma prevenire sì; per prevenire, però, occorre competenza sia in epistemologia sia in didattica della matematica, non solo in matematica.

*Fattori "trasversali"*
Tra le tante altre conquiste culturali forti che sono permesse e favorite dalla cultura epistemologica, porrei l'accento anche sulle seguenti tre riflessioni su:
come è fatto il linguaggio della matematica
come si apprende la matematica
i legami forti che esistono tra semiotica e noetica.
Mi limiterò a brevi considerazioni.

Ci sono molti fraintendimenti sul linguaggio che usiamo in matematica; e tante convinzioni che determinano misconcezioni. Su questo tema ho lavorato a lungo (D'Amore, 1993; 1996; 2000b; per esempio). Se la convinzione (debole) dell'insegnante è che il linguaggio che si usa in matematica sia univocamente ed eternamente determinato a priori dalla comunità scientifica, non potrà che pretendere dall'allievo un cieco uso di esso, senza vie personali; il che porta spesso ad una sorta di tentativo di imitazione acritica da parte dello studente, una sorta di vuota e sterile malacopia del linguaggio che costituisce per la classe un miraggio inarrivabile; in D'Amore (1993) ho chiamato "matematichese" questa lingua d'aula, dando varie prove della sua esistenza e dei suoi caratteri negativi.

"Come" si apprende la matematica non è solo problema psicologico, pedagogico o didattico, come potrebbe ingenuamente apparire; poiché il "come" è strettamente legato al "che cosa", l'apprendimento matematico è anche fatto concernente l'epistemologia; per esempio, c'è chi crede che l'apprendimento della nostra disciplina possa ridursi a mero calcolo (a vari livelli), come se questo fosse il *senso* della matematica; questa caratteristica fortemente strumentale intrinseca è molto più diffusa di quanto non si creda: come si può pensare che un giovane arrivi a *costruirsi* conoscenze matematiche? In una visione epistemologica *realista*, questa posizione potrebbe anche trovare posto, dato che i concetti matematici sono punto d'arrivo ideale; mentre in una visione *pragmatista* il concetto è quella costruzione personale mano a mano raggiunta (D'Amore, Fandiño Pinilla, 2001; D'Amore, 2003a), nel passaggio da un rapporto personale al sapere, verso un rapporto istituzionale, in una visione antropologica (Chevallard, 1992).

Che l'apprendimento matematico sia fortemente legato alla noetica, intesa come apprendimento concettuale, è fuor di dubbio; è sotto gli occhi di tutti e confermato da vari Autori (Duval, 1993; 1995). Proprio sotto la spinta di Duval, negli ultimi anni ho dedicato molte delle mie energie di ricerca a questo tema; mi limito ad indicare D'Amore (2003a, b). Che la matematica sia costretta a servirsi di rappresentazioni all'interno di registri semiotici è pure fatto oramai accettato, anzi considerato ovvio, dopo gli studi pionieristici di Duval. Che vi sia un paradosso cognitivo nel fatto che uno studente debba costruire conoscenza concettuale attraverso rappresentazioni semiotiche (il "paradosso di Duval") (nelle loro tre caratteristiche essenziali: rappresentazione, trasformazione di trattamento, trasformazione di conversione) (Duval, 1993, 1995; D'Amore, 2003a, b) è pure idea ampiamente condivisa, tanto che in D'Amore (2003a) ho iniziato un'operazione di ricucitura tra le teorie didattiche di Brousseau e le osservazioni di Duval, mostrando come elementi dell'una siano spiegabili attraverso quelli dell'altra; in particolare, ho mostrato come a volte non abbia successo una situazione a-didattica a causa del fallimento della devoluzione proprio a causa dell'incapacità dello studente di giungere alla noetica grazie all'azione sulla semiotica. Da tutto ciò si evince con la massima evidenza che un insegnante non può fingere di ignorare la questione, confondendo, come spesso capita, noetica con semiotica: lui, adulto, colto, esperto, *insegnante*, appunto, crede di operare didatticamente sui concetti, mentre lo studente, giovane, non colto, sta operando su rappresentazioni semiotiche (al più su sistemi di rappresentazioni semiotiche). Ignorare questo *fatto* comporta uno iato tra le due azioni (quella dell'insegnare e quella dell'apprendere) che non può non produrre fallimento.

Esistono a mio avviso molti altri fattori che sono di tipo "trasversale" e che hanno in comune la necessità dello studio dell'epistemologia della matematica; qui volevo solo mostrarne alcuni a mo' di esempio.

**Domanda 4.**
Avevi parlato di motivazioni culturali, ma anche professionali, come se un docente di scuola secondaria potesse trarre dalla conoscenza epistemologica un vero e proprio strumento. Se davvero così fosse, la cosa sarebbe di estremo interesse concreto... Che cosa intendevi?

**Risposta 4.**
Ho già messo in evidenza perché sia necessaria la competenza in epistemologia della matematica per preparare futuri docenti di matematica, facendo cenno sia a motivi culturali sia a motivi didattici (o professionali). Ora affronterò con più dettagli proprio questa ultima motivazione. Mi riserverò una (specie di) appendice che svilupperà ulteriormente queste considerazioni, ma senza creare discontinuità con quanto affermato in precedenza.

*Ostacoli epistemologici*
Tutti i ricercatori in didattica della matematica conoscono la fondamentale "teoria degli ostacoli" di Guy Brousseau (1983, 1986, 1989; si veda anche D'Amore, 1999a, per una trattazione all'interno di una teoria complessa che coinvolge tutta la didattica della matematica). Per quanti distinguo si possano fare, resta fondamentale, per la gestione della vita di classe e per l'analisi degli errori (con tutto quel che ciò comporta nel campo della valutazione), la distinzione in tre tipologie di ostacoli:
ontogenetici
didattici
epistemologici.
Se prendiamo il "triangolo della didattica" (Chevallard, 1985) come modello della situazione d'aula (soprattutto per evidenziare la sua complessità sistemica) (D'Amore, Fandiño Pinilla, 2002), allora si può azzardare come prima approssimazione che gli ostacoli:
ontogenetici sono ascrivibili al vertice "allievo"
didattici sono ascrivibili al vertice "insegnante"
epistemologici sono ascrivibili al vertice "Sapere".
Questo modo di vedere le cose dà unitarietà alla didattica come teoria e chiarifica dei legami altrimenti sfuggenti. In tal caso, però, risulta ovvio che questo strumento potenzialmente eccezionale produce risultati positivi nelle mani dell'insegnante se e solo se egli ne ha consapevolezza (raggiunta grazie agli studi di didattica); ma, per quanto concerne il terzo punto,

egli ha bisogno di una conoscenza in più, quella di epistemologia, appunto, per poter almeno riconoscere, tra gli inevitabili fallimenti dei propri studenti, quelli ascrivibili proprio ad ostacoli epistemologici. In questo caso, la didattica da sola non ce la fa e chiede aiuto alle competenze epistemologiche.

*Cambi di convinzioni*

Sappiamo oggi molto bene che le competenze maturate da insegnanti di matematica in formazione producono in essi cambi di convinzioni ed addirittura di concezioni.[4] Siccome su questo tema la bibliografia è impressionante, rinviamo qui solo a D'Amore, Fandiño Pinilla (2004), nel quale la bibliografia è fortemente selezionata. In questo lavoro si narra di una ricerca tesa ad evidenziare proprio i cambi di convinzioni e di concezioni su matematica, didattica della matematica e ruolo del docente di matematica, da parte di insegnanti di scuola secondaria in formazione iniziale, a seguito di 4 semestri di SSIS a Bologna.[5] La cosa ha particolare interesse, qui, perché, pur essendoci a Bologna 2 corsi specifici di epistemologia/storia della matematica, i 2 corsi di didattica della matematica sono a forte contenuto problematico ed epistemologico, seguono la cosiddetta "scuola francese" e pongono molte questioni fondazionali (i corsi contemplano lo studio di vario materiale, tra cui D'Amore, 1999a, che viene discusso oralmente in lavori di gruppo, per 2 semestri). Rinvio ancora al testo D'Amore, Fandiño Pinilla (2004) per i dettagli, ma risulta interessante quanto gli stessi specializzandi dichiarano a proposito dei propri notevoli cambi: sempre sono mescolate motivazioni didattiche con motivazioni epistemologiche, segno del fatto che gli studenti, proprio perché futuri professionisti della scuola, tendono a valutare le proprie nuove competenze epistemologiche in seno all'azione didattica.

Tra i cambi di convinzione che maggiormente stupiscono gli stessi insegnanti in formazione, emerge una differenza tra una precedente indisponibilità ad un uso improprio del linguaggio matematico ed una nuova disponibilità all'ascolto dell'allievo impegnato in una comunicazione a soggetto matematico. Su questo punto, grande influenza hanno le prove di tirocinio effettuate concretamente nelle aule; gli specializzandi cambiano radicalmente di convinzione sul *senso* da dare al contenuto matematico espresso dagli studenti in base principalmente a due fattori che hanno imparato a riconoscere nei corsi SSIS:

sebbene la comunicazione dallo studente A allo studente B sia (dal punto di vista adulto) scorretta, B ne capisce il senso

spesso l'uso del linguaggio è improprio (rispetto alle attese adulte) non per lacune matematiche ma per incomprensioni a monte.

Un esempio di questo secondo punto è dato dal comportamento di uno studente che, alla richiesta di definire il parallelogrammo risponde: «Un parallelogrammo è un quadrilatero con i lati a due a due». Si ha uno scollamento totale delle attese: da una parte l'insegnante avverte la mancanza di un aggettivo che "chiuda" la frase altrimenti senza senso; dall'altra parte lo studente ritiene che aver detto 12 parole esatte su 13 sia una buona performance. È vero che gioca molto il contratto didattico

---

[4] La distinzione tra questi due termini, a prima vista sinonimi, è oggi abbastanza condivisa in ambiente di ricerca; si usa fare una differenza più o meno esplicitabile come segue (D'Amore, Fandiño Pinilla, 2004):

*convinzione* (belief) (o credenza): opinione, insieme di giudizi/attese, quel che si pensa a proposito di qualcosa;

l'insieme delle convinzioni di qualcuno (A) su qualcosa (T) dà la *concezione* (K) di A relativamente a T; se A appartiene ad un gruppo sociale (S) e condivide con gli altri appartenenti ad S quell'insieme di convinzioni relativamente a T, allora K è la concezione di S relativamente a T.

Spesso, in luogo di "concezione di A relativamente a T" si parla di "immagine che A ha di T".

[5] Approfitto per asserire che a malincuore ho visto naufragare la metodologia ssis che, nelle università dove funzionava, si è rivelata una metodologia perfetta. Invece di azzerare tutto, era meglio studiare il modello delle ssis che funzionavano, esportandolo e diffondendolo.

e la diversa concezione di matematica che hanno i due attori della storia, ma è anche vero che ci sono attese epistemologiche diverse per quanto concerne l'uso del linguaggio in matematica.

*Curricolo e centralità dell'allievo*

Le osservazioni precedenti non possono non avere notevoli ripercussioni sul senso del curricolo; da pesante fardello da rispettare, il curricolo diventa strumento da plasmare e da sfruttare nella situazione vera d'aula, motivo conduttore della storia di classe. Da elenco più o meno commentato che viene calato in aula e condiziona tutto, il curricolo si trasforma in arma adatta a far sì che ogni studente sia messo, anche in base alle proprie capacità, nelle migliori condizioni per costruire competenze matematiche; da un curricolo normativo si passa proprio ad un curricolo che riflette punti di vista epistemologici (Fandiño Pinilla, 2002, pag. 36 e segg.: «il punto di vista epistemologico nella costruzione del curricolo»).

Ciò dà centralità alla figura dell'allievo, piuttosto che a quella della sequenza curricolare ed ai meri contenuti. E questo significa interpretare alla rovescia quella che in D'Amore (1999b) ho chiamato "epistemologia dell'apprendimento della matematica": il problema reale di chi si occupa di didattica della matematica, come ricerca o come professione, è di capire i processi di apprendimento della matematica, non limitarsi a creare ideali insegnamenti.

Un esempio solo per chiarire questo punto di vista.

Da millenni fa parte dei compiti di uno studente di matematica l'apprendere a dimostrare teoremi; il Sapere ha deciso che il paradigma da rispettare universalmente per quanto concerne tale attività siano la logica megarico-stoica e quella aristotelica; per cui, molti considerano *preliminare* all'attività del dimostrare l'apprendimento della logica, come capitolo della matematica. È così che gli studenti imparano le tavole di verità semantiche, i connettivi, in particolare l'implicazione materiale. Fatto ciò, spesso si confonde la deduzione (metalinguistica) con l'implicazione (linguistica) e si passa alla struttura dei teoremi e delle loro dimostrazioni. Se lo studente fallisce, lo si considera come inadatto o non in grado di dimostrare. Ma se si fa attenzione alle proposte dimostrative degli studenti, capovolgendo il senso di tutta l'esperienza, si possono avere sorprese interessanti. Ho avuto indizi del fatto che gli studenti che fallivano semplicemente non sapessero gestire lo strumento metalogico proposto ed ho pensato che esso poteva non essere adeguato. Ho allora ascoltato gli studenti che fallivano per capire quali tipi di errori commettevano. Ho così scoperto che molti di essi facevano continuamente riferimenti ad esempi impropri, enunciando la tesi come fosse una ipotesi, cercando di ancorare l'implicazione materiale ad esempi concreti. Ed ho allora ricordato la logica nyaya, sviluppatasi millenni fa in India, nella quale uno schema di ragionamento tipico è concepito in modo ben diverso da quello aristotelico. Per dettagli su questo lungo studio, circostanziato e corroborato da esempi tratti dall'aula, rinvio a D'Amore (2004).

Mi limito qui ad un esempio, il più tipico nyaya (esattamente come il sillogismo di Socrate è considerato come prototipo della logica aristotelica):

1. l'oggetto A si muove (asserzione)
2. perché gli è stata applicata una forza (ragione)
3. ogni volta che si applica una forza ad un oggetto, esso si muove (proposizione generale); per esempio: se si attaccano buoi a un carro, esso si muove (esempio)
4. all'oggetto A è stata applicata una forza (applicazione)

*dunque*

5. l'oggetto A si muove (conclusione).

È abbastanza facile mettere in forma moderna questo ragionamento. Prima di procedere a dare una formulazione in linguaggio moderno dell'esempio precedente, introduciamo un opportuno simbolismo; siano:

A, B oggetti dati, X un oggetto generico;

P(X): l'enunciato predicativo aperto "X si muove"

F(X): l'enunciato predicativo aperto "a X è applicata una forza".
L'enunciato aperto F(X) è vero ogni volta che, sostituita al posto della variabile X una costante A, F(A) è sperimentalmente verificabile (nel senso: la sua verità cade sotto i sensi) (questa, almeno, è l'interpretazione empirista nyaya; da notare anche che per i logici nyaya, i sensi sono sei).
Il ragionamento nyaya si può allora formalmente interpretare come segue:

| | | | |
|---|---|---|---|
| Asserzione: | 1. | P(A) | asserzione (non ancora provata) |
| Ragione: | 2. | F(A) | causa che si asserisce di P(A) |
| Tesi: | 3. | $(\forall X)\ [F(X) \rightarrow P(X)]$ | proposizione generale |
| | | per esempio: $F(B) \rightarrow P(B)$ | esempio |
| Applicazione: | 4. | F(A) | dal caso generale si torna al caso in esame: una forza esercita un'azione su A |

---

| | | | |
|---|---|---|---|
| Conclusione: | 5. | P(A) | A si muove |

Ebbene, alcuni degli studenti intervistati e indicati come non in grado di condurre dimostrazioni in aula, di fatto, effettuavano dimostrazioni secondo la logica nyaya e non secondo la logica aristotelica o megarico-stoica. Senza informazioni a carattere epistemologico, non avrei avuto strumenti per rendermi conto di ciò, come ricercatore. Analogamente, senza strumenti epistemologici adeguati, l'insegnante è senza armi. In questo caso, ho suggerito all'insegnante di confrontare questi due strumenti dimostrativi in aula, cercandone analogie e differenze.
È ovvio l'importanza che ha in tutto ciò una visione epistemologica del curricolo che fornisce una visione centrale dell'allievo in aula.

*Influenza sulla valutazione*
Specie dagli ultimi paragrafi, emerge qui una visione complessa della valutazione come processo e non come fine, dunque come strumento didattico. In Fandiño Pinilla (2002, pag. 75 e segg.) si propone una valutazione con vari scopi: valutazione del curricolo, autovalutazione dell'efficacia del processo di insegnamento, valutazione per dare informazioni su quel che conta, valutazione per prendere decisioni, valutazione per giudicare un allievo… Quanto poi agli scopi ed alle tecniche di ciascuna di queste accezioni, la cosa è complicata proprio perché spesso, per prendere decisioni, occorre far precedere scelte a carattere epistemologico (si veda l'evoluzione storico-sociale dell'idea di valutazione negli ultimi 100 anni, alle pagg. 94-96 del testo citato poche righe fa; e l'elenco delle funzioni e delle caratteristiche della valutazione nei vari Autori, a seconda delle scelte epistemologiche, alle pagg. 97-98). Una innovazione nella valutazione comporta scelte di criteri ed è per questo che si chiama "valutazione criteriale". A frenare queste specifiche spinte innovative (che, in altri Paesi, sono addirittura diventate norme di legge nella Scuola), stanno certo le convinzioni degli insegnanti e molte delle loro concezioni su scuola, senso dell'istruzione etc., in generale, e su matematica, senso dell'apprendimento matematico etc., in modo più specifico.
Ma abbiamo visto come le convinzioni epistemologiche, anche quando mancano o sembrano mancare (Speranza le chiama: *implicite*, 1997), influenzino decisamente tutte le altre, così che il cerchio si chiude…

Tra le scelte, non sempre implicite, emergono con una certa percentuale, quegli atteggiamenti che, più o meno, rispecchiano modi di interpretare la matematica e che si rifanno a scuole epistemologiche:
formalismo
platonismo
logicismo
empirismo
intuizionismo alla Poincaré
intuizionismo come costruzione di atti del pensiero
…
ed oggi, più in generale, ascrivibili a due grandi gruppi (Speranza, 1997; D'Amore, 1987)[6]:
realismo
pragmatismo
che li riassumono (D'Amore, 2003b).

Ma l'uso delle convinzioni maturate con gli studi epistemologici deve fare coppia con la competenza forte in didattica della matematica perché solo così contribuisce a formare quella *ferramenta*, quegli strumenti pratici e teorici così utili nella professione docente, per capire l'evoluzione delle situazioni d'aula. A ciò giova certo l'enorme contributo di Guy Brousseau che, lungi dall'essere solo pionieristico e limitato ai primi passi della didattica della matematica, fornisce ancora oggi, a mio avviso, materiale sul quale riflettere, in costante evoluzione ed approfondimento. Idee come il contratto didattico, la teoria degli ostacoli, la teoria delle situazioni,… ma anche le spietate analisi che hanno portato alla scomparsa di precedenti modi di interpretare la didattica, sono ancora tutte da analizzare e potenzialmente vi sono ancora misteri da chiarire.

**Domanda 5.**
Avevi accennato a una specie di appendice...

**Risposta 5.**
Sì,vorrei concretamente delineare una specie di raccordo a tutto campo tra epistemologia e storia della matematica; la storia come chiave di volta per capire l'epistemologia; uso della storia nella didattica della matematica. Lo faccio per punti.

*Epistemologia e storia della matemática*
«La filosofia senza la storia è vuota, la storia senza la filosofia è cieca», asseriva a ragione Kant (per esempio: Speranza, 1997, pag. 145). Circostanziava Lakatos: «La filosofia della scienza senza la storia è vuota, la storia della scienza senza la filosofia della scienza è cieca» (Lakatos, 1971, pag. 102).
Accettata la presa di posizione di tali giganti, ogni commento è superfluo. Va da sé che, se più volte ho detto che l'epistemologia studia l'evoluzione dei concetti, non è pensabile scindere gli studi di epistemologia della e da quelli di storia della matematica. Ciò giustifica la scelta di chiamare i corsi della SSIS con il nome attuale di epistemologia / storia della matematica.

*La storia per capire l'epistemologia*
Così, appare ovvio pensare alla storia come al riferimento paradigmatico per eccellenza per capire l'evoluzione delle idee e le necessità di adeguamento del pensiero. Per esempio, se nulla si sapesse

[6] Questo lavoro del 1987 è (più o meno) il testo di una comunicazione tenuta a Valencia nello stesso anno; anche questo viaggio fu una grande occasione di confronto con Francesco Speranza su temi epistemologici molto forti; io cercavo di trovare delle radici autorevoli, delle "basi epistemologiche" a scelte che, in quel momento, stavano dettando nuovi programmi per la Scuola italiana e, naturalmente, mi era di grande conforto la discussione ed il confronto con un tale Maestro.

delle origini aristoteliche della geometria euclidea, né delle geometrie non euclidee con la loro portata di rivoluzione sul concetto di veritàs, né della necessità di un nuovo rigore che desse ai termini primitivi ed agli assiomi un *senso* moderno, non si potrebbe capire il perché David Hilbert abbia dovuto scrivere dei nuovi elementi di Geometria 22 secoli dopo quelli di Euclide. Vedo dunque la storia della matematica come il riscontro oggettivo per capire l'epistemologia.

*Uso della storia nella didattica*
Sebbene entrambi i punti precedenti siano di eccezionale rilevanza, tali da dare ragione a chi impone corsi di epistemologia agli insegnanti in formazione, c'è un punto emergente con grande forza negli ultimi 30 anni, un punto al quale Francesco Speranza ed io abbiamo dato corpo curando le edizioni di 3 libri che raccolgono esperienze vere di insegnanti a diversi livelli scolastici, quando ciò ancora non era diffuso affatto (D'Amore, Speranza, 1989, 1992, 1995); si tratta dell'uso della storia della matematica come strumento didattico a vario titolo nei corsi di matematica.
Siccome questo punto è strettamente intrecciato con le questioni epistemologiche, mi pare corretto parlarne qui.[7] D'altra parte, se si vuol usare la storia della matematica in aula, bisogna conoscere la storia della matematica; dunque ha senso il problema di porsi anche la questione della preparazione in storia dei docenti in formazione.

*La storia della matematica nella formazione dei futuri insegnanti di matematica*
Secondo Freudenthal, imparare la matematica significa "reinventarla" (si descrive un processo denominato "mathematising") (Freudenthal, 1973): dunque il ruolo della componente storica nell'insegnamento merita un approfondimento specifico. La considerazione di un concetto matematico attraverso la sua evoluzione storica richiede però l'assunzione di posizioni epistemologiche impegnative: la stessa selezione dei dati storici non è neutra (Radford, 1997) e problemi notevoli sono inoltre connessi alla loro interpretazione, inevitabilmente condotta alla luce dei nostri attuali paradigmi culturali, mediante i quali si pongono in contatto culture "diverse ma non incommensurabili" (Radford, Boero, Vasco, 2000, pag. 165).
Abbiamo già insistito molto sul fatto che l'insegnamento sia influenzato dalle concezioni dei docenti a proposito della natura della conoscenza scientifica e della sua evoluzione. Appare dunque fondamentale che un insegnante si confronti direttamente con la storia della disciplina e che giunga a saper impiegare i riferimenti storici consapevolmente e coerentemente con le proprie concezioni epistemologiche (Thompson, 1992; Moreno, Waldegg, 1993; Speranza, Grugnetti, 1996).
In generale, la storia della matematica offre alla didattica alcune importanti possibilità (Furinghetti, Somaglia, 1997):
innanzitutto quella di un approccio aneddotico che, pur essendo talvolta considerato superficiale, può rinforzare in termini apprezzabili la motivazione dei discenti (D'Amore, Speranza, 1989, 1992, 1995; Radford, 1997; D'Amore, 1999a);
la possibilità di una riflessione metacognitiva;
la possibilità di una conoscenza organica di un periodo storico e della comprensione delle situazioni culturali che hanno influenzato la nascita o la diffusione di un'idea matematica.
Riferendoci a quel vertice del triangolo della didattiche che abbiamo chiamato Sapere (Chevallard, 1985), chiameremo "conoscenza istituzionalizzata" l'ultima versione, dal punto di vista cronologico, del sapere considerato, dunque la sua più recente forma accettata dalla comunità scientifica: da ciò segue che l'istituzionalizzazione alla quale facciamo riferimento viene ad essere fortemente contestualizzata dal punto di vista storico; e tale contestualizzazione è connessa ai diversi ambienti socio-culturali (Bagni, 2004b). A questo punto entra però in gioco la componente storica: è infatti rarissimo (o forse impossibile) che una conoscenza matematica nasca da un'idea assolutamente nuova, priva di connessioni con l'esperienza del passato: per molti versi una

[7] Ringrazio l'amico e collega prof. Giorgio Bagni (Università di Roma "La Sapienza") per il materiale ed i consigli che mi ha generosamente fornito per quanto segue in questo paragrafo.

conoscenza incorpora in sé stessa le proprie radici storiche. Quale rapporto collega la conoscenza istituzionalizzata alla propria storia?
Tale problematica ci spinge ad un'indagine più approfondita della struttura storica di una conoscenza matematica che, come vedremo, potrà influenzare notevolmente la didattica. Seguendo D'Amore (2001a), potremmo ad esempio chiederci: il progressivo incremento del sapere può essere assimilato ad un processo di affiancamento (accumulazione quantitativa) o di sovrapposizione (qualitativa)? Ovvero: la reimpostazione di un oggetto matematico si affianca alle vecchie versioni o le rimpiazza? (D'Amore 2001b).
L'adozione di modelli di (puro) affiancamento o di (pura) sovrapposizione comporterebbe problemi teorici: tali modelli risentirebbero di un'impostazione decontestualizzata. La concezione dell'evoluzione del sapere K che preveda l'affiancamento di una conoscenza K($m$+1) alla K($m$) non tiene conto che la K($m$) aveva senso nel suo originale contesto C($m$), mentre la K($m$+1) risente del nuovo contesto socio-culturale C($m$+1) venutosi a creare (in Bagni, 2004a è esaminato, a mo' di esempio, il caso dei procedimenti infinitesimali). D'altro canto, la sovrapposizione dei concetti porterebbe ad una continua rifondazione ex novo, mentre la (progressiva) variazione dell'ambiente socio-culturale fa pensare a progressivi reinquadramenti.
In un momento storico (ad esempio, nel momento attuale) ed in un contesto socio-culturale C($n$) determinato, possiamo pensare a processi in cui le versioni "storiche" della conoscenza considerata vengono a far parte del Sapere in relazione ai contesti socio-culturali in cui si sono sviluppate; per questo motivo, il processo va inteso come una continua evoluzione cronologica, in continuo divenire.
Torniamo ora all'aspetto didattico: descritto il Sapere specifico della conoscenza K, è necessario procedere alla sua trasposizione didattica, cioè in sapere insegnato. Abbiamo già visto che importanza riveste, in questa trasformazione, l'epistemologia; ed ora ci chiediamo: che ruolo si riconosce, in questa fase, alla storia di K? In particolare, come si differenziano le modalità della trasposizione della conoscenza K($n$) (istituzionalizzata al momento in cui si considera il processo di insegnamento-apprendimento) da quelle della trasposizione dei riferimenti che costituiscono la "storia di K"? Il punto cruciale è costituito dalla trasposizione della "storia di K" (Gadamer, 1975).
Indichiamo due scelte possibili:
la trasposizione di K(1), K(2), ..., K($n$–1) con riferimento al contesto C($n$) (*attualizzazione*);
la trasposizione di K(1), ..., K($n$–1) con riferimento ai rispettivi contesti C(1) C(2), ..., C($n$–1) (*contestualizzazione storica dei riferimenti*).
Ciascuna opzione si basa evidentemente su assunzioni epistemologiche impegnative e presenta, dal punto di vista didattico, aspetti delicati:
un'evoluzione storica *proposta didatticamente* dall'unico punto di vista moderno non sarebbe forse radicalmente inaccettabile (mentre un'interpretazione platonista della storia in senso assoluto lascia oggi scettici e perplessi); una tale concezione permette, ad esempio, di presentare agli allievi gli ostacoli epistemologici principali e di chiarire alcune posizioni storiche la cui debolezza si è rivelata successivamente (Sfard, 1991);
ma un'impostazione che pretenda di far seguire allo sviluppo cognitivo un percorso modellato sull'evoluzione storica (Piaget, Garcia, 1983) incontrerebbe difficoltà teoriche e qualche dubbio fondazionale.
La presentazione di elementi storici con riferimento al proprio contesto socio-culturale (Radford, 2003) offre la possibilità di un organico approfondimento e induce riflessioni fondamentali sulla genesi di un concetto (Radford, Boero, Vasco, 2000). La scelta di una storia "interna", di uno sviluppo isolato della matematica, appare problematica (Grugnetti, Rogers, 2000, pag. 40) e difficilmente sostenibile dal punto di vista epistemologico.

Questo, solo per tracciare un panorama ridotto della complessità della gestione della storia ad uso didattico; sta bene tentare un approccio aneddotico per motivare, ma non è questa la vera e propria sfida cognitiva vincente. Non appena si tenta qualche cosa di più significativo, ecco sorgere problemi e sfide di grande interesse che possono e devono essere affrontate dal docente di matematica con profonda consapevolezza.

In ogni caso, storia ed epistemologia sono strettamente intrecciate tra loro ed il loro sistema lo è con la didattica della matematica. Tanto che si potrebbe seguire la via aperta da Kant e caldeggiata da Lakatos, coniando un ulteriore motto:
*La didattica della matematica senza relazioni con la epistemologia e la storia è come uno strumento agile e potente che nessuno sa usare a pieno; la epistemologia e la storia sono mezzi culturali forti astratti e profondi che la didattica della matematica rende concreti ed utili al progresso dell'umanità, alla costruzione di competenze, alla consapevolezza del proprio sapere.*

**Bibliografia**


Bachelard G. (1951). *L'activité rationaliste de la physique contemporaine*. Paris: PUF.

Bagni G.T. (2004a). Historical roots of limit notion. Development of its representative registers and cognitive development. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*. In corso di stampa.

Bagni G.T. (2004b). Storia della matematica in classe: scelte epistemologiche e didattiche. *La matematica e la sua didattica*. In corso di stampa.

Brousseau G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes in mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 4, 2, 165-198.

Brousseau G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 7, 2, 33-115.

Brousseau. G. (1989). Les obstacles épistémologiques et la didactique des mathématiques. In: Bednarz N., Garnier C. (eds.) (1989). *Constructions des savoirs, obstacles et conflits*. 41-64. Montreal: Agence d'Arc.

Chevallard Y. (1985). *La transposition didactique, du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble: La Penseé Sauvage.

Chevallard Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche antropologique. *Recherches en didactique des mathématiques*. 12, 1, 73-112.

D'Amore B. (1986). Il ruolo della definizione nella didattica della matematica. *Insegnare*. 6, 9-13.

D'Amore B. (1987). Motivazioni epistemologiche che stanno alla base delle scelte didattiche operate nelle attività educative in Italia dalla scuola dell'infanzia al biennio superiore. In: Atti del "II Congreso Internacional sobre investigación en la didáctica de las Ciencias y de la Matematica". Valencia 1987, 323-324.

D'Amore B. (1993). Esporre la matematica appresa: un problema didattico e linguistico. *La matematica e la sua didattica*. 3, 289-301.

D'Amore B. (1996). Schülersprache beim Lösen mathematischer Probleme. *Journal für Mathematik Didaktik*. 17, 2, 81-97.

D'Amore B. (1999a). Il ruolo essenziale ed insostituibile delle didattiche disciplinari nella costruzione della conoscenza nell'educazione. *Pitagora Notizie*. 4, 2.

D'Amore B. (1999b). *Elementi di didattica della matematica*. Bologna: Pitagora.

D'Amore B. (2000a). La didáctica de la matemática a la vuelta del milenio: raíces, vínculos e intereses. *Educación Matematica*. México D.F., México. 12, 1, 239-50.

D'Amore B. (2000b). Lingua, Matematica e Didattica. *La matematica e la sua didattica*. 1, 28-47.

D'Amore, B. (2001a). Un contributo al dibattito su concetti e oggetti matematici: la posizione "ingenua" in una teoria "realista" vs il modello "antropologico" in una teoria "pragmatica", *La matematica e la sua didattica*. 1, 4-30.

D'Amore, B. (2001b). Une contribution au débat sur les concepts et les objets mathématiques. *Scientia Paedagogica Experimentalis*. Gent, Belgio. XXXVIII, 1, 17-46.
D'Amore B. (2003a). La complexité de la noétique en mathématiques ou les raisons de la dévolution manquée. *For the learning of mathematics*. 23, 1, 47-51.
D'Amore B. (2003b). *Le basi filosofiche, pedagogiche, epistemologiche e concettuali della Didattica della Matematica*. Bologna: Pitagora.
D'Amore B. (2004). Young pupils' mathematical argumentation and Indian logic (Nyaya). Proposto per la stampa.
D'Amore B., Fandiño Pinilla M.I. (2001). Concepts et objects mathématiques. In: Gagatsis A. (ed.) (2001). *Learning in Mathematics and Science and Educational Technology*. Nicosia (Cipro): Intercollege Press Ed. Atti del "Third Intensive Programme Socrates-Erasmus, Nicosia, Università di Cipro, 22 giugno - 6 luglio 2001. 111-130.
D'Amore B., Fandiño Pinilla M.I. (2002). Un acercamiento analitico al "triángulo de la didáctica". *Educación Matematica*. México DF, México. 14, 1, 48-61.
D'Amore B., Fandiño Pinilla M.I. (2004). Cambi di convinzioni in insegnanti di matematica di scuola secondaria superiore in formazione iniziale. *La matematica e la sua didattica*. 2.
D'Amore B., Godino D.J., Arrigo G., Fandiño Pinilla M.I. (2003). *Competenze in matematica*. Bologna: Pitagora.
D'Amore B., Plazzi P. (1990). Intuizione e rigore nella pratica e nei fondamenti della Matematica. *La matematica e la sua didattica*. 3,18-24.
D'Amore B., Speranza B. (eds.) (1989). *Lo sviluppo storico della matematica - Spunti didattici*. Volume primo. Roma: A. Armando.
D'Amore B., Speranza F. (eds.) (1992). *Lo sviluppo storico della matematica - Spunti didattici*. Volume secondo. Roma: A. Armando.
D'Amore B., Speranza F. (eds.) (1995). *La matematica e la sua storia. Alcuni esempi per spunti didattici*. Milano: Angeli ed.
Duval R. (1993). Registres de répresentations sémiotiques et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de didactique et de sciences cognitives*. 5, 37-65.
Duval R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine: régistres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Berne: Peter Lang.
Fandiño Pinilla M.I. (2002). *Curricolo e valutazione in matematica*. Bologna: Pitagora.
Freudenthal H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dodrecht: Riedel.
Furinghetti F., Radford L. (2002). Historical conceptual developments and the teaching of mathematics: from philogenesis and ontogenesis theory to classroom practice. In: English L. (ed.) (2002). *Handbook of International Research in Mathematics Education*. Hillsdale: Erlbaum. 631-654.
Furinghetti F., Somaglia A. (1997). Storia della matematica in classe. *L'educazione matematica*. XVIII, V, 2, 1.
Gadamer H.G. (1975). *Truth and Method*. New York: Crossroad (2nd ed.: 1989).
Grugnetti L., Rogers L. (2000). Philosophical, multicultural and interdisciplinary issues. In: Fauvel, J., van Maanen J. (eds.). *History in Mathematics Education*. Dodrecht: Kluwer. 39-62.
Kintzler C. (1989). Éléments. In: AA. VV. (eds.) (1989). *Écrits de Condorcet*. Paris, Edilig.
Lakatos I. (1971). *History of science and its rational reconstructions*. Cambridge: Cambridge U.P.
Loria G. (1933). Commission internationale de l'enseignement mathématique. La préparation théorique et pratique des professeurs de mathématiques de l'enseignement secondaire dans les diverses pays. I. Rapport général. L'enseignement mathématique. XXXII, 5-20.
Moreno L., Waldegg G. (1993). Costructivism and mathematical education. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*. 24, 5, 653-661.
Piaget J., Garcia R. (1983). *Psychogenèse et histoire des sciences*. Paris: Flammarion.

Radford L. (1997). On Psychology, Historical Epistemology and the Teaching of Mathematics: Towards a Socio-Cultural History of Mathematics. *For the Learning of Mathematics*. 17, 1, 26-33.

Radford L. (2003). On Culture and Mind. A post-Vygotskian Semiotic Perspective, with an Example from Greek Mathematical Thought. In: Anderson M. et Al. (eds.). *Educational Perspectives on Mathematics as Semiosis: From Thinking to Interpreting to Knowing*. Ottawa: Legas. 49-79.

Radford L., Boero P., Vasco C. (2000). Epistemological assumptions framing interpretations of students understanding of mathematics. In: Fauvel J., van Maanen J. (eds.) (2000). *History in Mathematics Education*. Dordrecht: Kluwer. 162-167.

Sfard A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coins. *Educational Studies in Mathematics*. 22, 1-36.

Speranza F. (1997). *Scritti di Epistemologia della Matematica*. Bologna: Pitagora.

Speranza F., Grugnetti L. (1996). History and epistemology in didactics of mathematics. In: Malara N.A., Menghini M., Reggiani M. (eds.) (1996). *Italian research in mathematics education*, Roma: CNR. 126-135.

Thompson A.G. (1992). Teachers' beliefs and conceptions: a synthesis of the research. *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. London: D.A.N.Y. McMillan, 127-208.

Vailati G. (1896). Sull'importanza delle ricerche relative alla storia della scienza. In: Vailati G. (1911). *Scritti*. Firenze – Leipzig: Seeber-Barth.

Watzlawick W., Beavin J.H., Jackson D.D. (1967). *Pragmatic of the human communication*. New York: W.W. Norton & C. [Trad. it.: Roma, Astrolabio, 1971].