

140. D'Amore B., Fandiño Pinilla M.I. (2007). Leonhard Euler, maestro di epistemologia e linguaggio. *Bollettino dei docenti di matematica*. 55, 9-14. ISSN: 88-86486-55-3.

Leonhard Euler, maestro di epistemologia e linguaggio

**A 300 anni dalla nascita di Leonhard Euler, a 246 anni dalle
*Lettere***

Per i 70 anni di Carlos Eduardo Vasco

Bruno D'Amore – Martha Isabel Fandiño Pinilla

NRD, Dipartimento di Matematica, Università di Bologna (Italia);
Università di Bolzano (Italia);
Alta Scuola Pedagogica di Locarno (Svizzera);
Mescud, Università Distrital di Bogotà (Colombia).
damore@dm.unibo.it - www.dm.unibo.it/rsddm

Sunto. In questo breve articolo si vuol mostrare, ricorrendo a citazioni tratte da tre delle famose Lettres di Euler indirizzate a una principessa tedesca, come il genio matematico svizzero avesse un forte interesse per questioni connesse a quella che oggi si chiama epistemologia ed alla teoria dei linguaggi; e come il suo atteggiamento a questi propositi non sia del tutto classico, come si usa solitamente suggerire.

Summary. In this short paper we want show, by means of three of the famous Lettres of Euler addressed to a ... princess, as the swuiss mathematic genius ha... a stornng interest about questions connected to that we now name epistemology and to languages thoery; and as actitude of him abous this kinds aren't completely classic, us is normally suggest.

1. Euler

Abbiamo provato a stilare un elenco di tutte le discipline che, in senso moderno, costituiscono la matematica, allo scopo di trovarne una nella quale Euler non si sia mai cimentato, non abbia dato contributi; non l'abbiamo

trovata. Tra quelle, poche, nelle quali la sua opera è minima, pesa il ricordo dei numerosissimi manoscritti, ancora non consegnati al tipografo, finiti in cenere nel famoso incendio di S. Pietroburgo del 1771 che vide, tra le vittime, la casa del Nostro.

Abbiamo allora provato a stilare un elenco delle principali discipline non matematiche che costituivano la cultura più elevata di quel secolo XVIII che potremmo definire la “seconda fucina delle idee”, dopo il Rinascimento: lingue, teologia, filosofia, fisica, astronomia, idraulica, chimica, linguaggi, scienze naturali, ..., allo scopo di trovarne una nella quale Euler non si sia mai cimentato, o non abbia saputo, con la sua superba intuizione, apportare qualche contributo di novità; non l’abbiamo trovata.

Se tutto il mondo è d’accordo da oltre 2 secoli e mezzo che Euler sia stato uno dei più grandi creatori di tutti i tempi della matematica intesa in senso moderno, è anche vero che il suo spirito curioso, indagatore, sottile e penetrante riuscì ad essere speso a tutto campo, come si suol dire: a 360 gradi.

Ora, tutti sanno della sua enorme produzione matematica, ma una delle sue opere di maggior successo editoriale, non è altro che una raccolta di lettere, forse la più famosa raccolta di lettere del mondo.

Siamo ben consci che si tratta di qualche cosa di secondario, rispetto alle titaniche imprese creatrici che l’hanno visto protagonista assoluto; sappiamo anche che tale opera è ben nota a tutti e che è stata esplorata, chiosata, studiata, da mille ed uno critici di tutto il mondo; ma, tuttavia, è su questa e su alcune sue peculiarità che abbiamo l’ardire di voler ancora indagare, noi, modesti studiosi del 2000, per vedere se qualche cosa che non s’è mostrata finora, si possa rivelare ora, con la capacità di analisi che ogni giorno cresce e si rinnova.

2. Lettres

Si tratta delle *Lettres à une princesse d’Allemagne sur divers sujets de Physique & de Philosophie*, una raccolta cronologicamente ordinata di ben 234 lettere tutte datate, scritte da Berlino tra il 1760 ed il 1762 alla giovane figlia del margravio regnante di Brandeburgo-Schwedt, Sophie Friederike Charlotte Leopoldine (che sarebbe poi diventata principessa di Anhalt-Dessau) allo scopo di istruirla in francese, fisica, filosofia, matematica, scienze naturali, astronomia, logica, ...

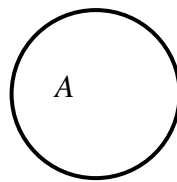
Queste straordinarie lettere, brevi ma sempre molto dense, a parte l’essere uno spettacolo di chiarezza e concisione, toccano tutti i principali problemi scientifici dell’epoca, ma in modo che, realmente, un giovane interessato possa trarne giovamento.

Esse ebbero, dal punto di vista editoriale, una fortuna straordinaria; pubblicate una prima volta nel 1768, lo furono a più riprese in varie lingue e la loro

fortuna ancora non si è spenta tanto che, in questo 2007, se ne rinnovano le edizioni e le analisi critiche in tante lingue (anche in italiano: Euler, 1768-2007).

Può essere didatticamente interessante e curioso sapere che in una di esse, la 102, per spiegare alla giovane nobile allieva i sillogismi di Aristotele, per la prima volta in assoluto, stando almeno ai documenti finora noti, Euler usò quelli che oggi si chiamano “diagrammi di Euler-Venn”, cioè inserì dentro cerchi tracciati direttamente a penna sui fogli manoscritti dei simboli per indicare raccolte o insiemi come si trattasse di un tutto unico.

Per esempio, Euler indica esplicitamente con:



l'insieme di tutti gli uomini. (Diagrammi per alcuni versi simili erano stati utilizzati da G. G. Leibniz, ma sono stati resi pubblici solo all'inizio del XX secolo). Su questo aspetto, si veda Bagni (2007).

Queste lettere rappresentano ancora oggi un esempio straordinario di scrittura scientifica per un lettore non specialista; le scelte stilistiche adottate rivelano una perizia non comune ed un'attenzione davvero notevole per il lettore.

Noi fissiamo brevemente la nostra attenzione solo su due temi, dato che essi sono estremamente dibattuti nella ricerca critica contemporanea, specie nel campo a noi più caro, la didattica della matematica; intendiamo dire: epistemologia e linguaggio.

L'opera citata di Euler è così ricca di suggestioni epistemologiche e linguistiche che lo spazio occorrente per una esauriente analisi richiederebbe ben altro spazio che questo. Dunque, ci limiteremo qui solo ad una minima analisi di tre lettere, scritte *nell'arco di una stessa settimana*, per dare almeno l'idea della complessità dei temi trattati, della accentuazione della loro trattazione (non squisitamente classica, come di solito si ritiene) e della incredibile semplicità linguistica ed efficacia dell'esposizione.

3. Epistemologia

Dalla *Lettera* n. 100, 7 febbraio 1761:

«I sensi ci rappresentano solo oggetti che esistono attualmente fuori di noi, e le idee sensibili si riferiscono tutte a questi oggetti; ma da queste idee sensibili l'anima si forma un gran numero di altre idee che, pur traendo la loro origine dalle prime, non rappresentano però delle cose che esistono realmente. Per esempio, quando vedo la luna piena, se fisso la mia attenzione esclusivamente sul suo contorno, mi formo l'idea della circolarità, ma non potrei dire che la circolarità esiste di per se stessa. La luna è sì rotonda, ma tale forma non esiste separatamente dalla luna. Lo stesso vale per tutte le altre figure (...). Le idee dei numeri hanno un'origine del tutto simile: avendo visto due o tre persone o altri oggetti, l'anima se ne forma l'idea del due o del tre, che non è più legata a quelle persone (...). E per ritornare alle figure, Vostra Altezza può ben formarsi l'idea di un poligono, per esempio, di 1761 lati, quantunque non abbia mai visto un oggetto reale con una simile figura [forma]; e può persino darsi che un oggetto simile non sia mai esistito (...).»

La differenza tra gli oggetti concreti, reali, esistenti al di fuori di noi che cadono sotto i nostri sensi e quelli ottenibili dalla nostra ragione, ricorda molto da vicino la duplice verità parmenidea che distingue doxa da aletheia, verità sensibile e verità di ragione. Questa distinzione è la base stessa della matematica e della sua specifica realtà. La rotondità della luna non le è specifica e dunque non caratterizza l'oggetto sensibile "luna", ma a sua volta è un'idea di pensiero del quale la nostra ragione si appropria e lo fa diventare oggetto a sua volta, anche se non più sensibile.

Ora, il platonismo classico ha avuto bisogno di creare un universo apposito per questi oggetti di secondo tipo, mentre nel realismo non ingenuo di Euler di questo non v'è traccia. Si può pensare ad una dualità assai più moderna che distingue gli oggetti della matematica opponendoli agli oggetti della realtà, ma in senso molto sofisticato, più di quello platonico. Infatti, gli oggetti matematici esemplificati, come la circolarità ed il due, sono tratti da oggetti concreti nella loro sensibilità evidente, mentre il poligono di 1761 lati è una creazione autonoma del mondo matematico che non ha bisogno dello stesso processo. O, meglio, una volta avviato il processo di reificazione degli oggetti matematici, nato come detto, dal passaggio tra doxa e aletheia, tale processo può proseguire da solo, senza più bisogno dell'appoggio ingenuo del sensibile. Esiste un oggetto reale (nel realismo ingenuo) che ha 1761 lati? Non lo sappiamo, forse no. Ma esso è ugualmente concepibile dalla nostra ragione nel mondo degli oggetti matematici, dunque in tale mondo *esiste*.

Il dibattito attuale su che cosa intendere con "oggetto matematico" è oggi acceso ed ha fatto passi avanti da gigante; in una visione pragmatista delle teorie filosofiche al riguardo: «Gli oggetti matematici devono essere considerati come simboli di unità culturali, emergenti da un sistema di usi legati alle attività matematiche che realizzano gruppi di persone e che dunque evolvono con il trascorrere del tempo» (D'Amore, Godino, 2006), dove per

oggetto matematico va inteso tutto ciò che è indicato, segnalato, nominato quando si costruisce, si comunica o si apprende matematica [l'idea è tratta da Blumer (1969)].

Ora, Euler cita spesso l'anima come quel "luogo" al quale fare riferimento quando si esce dalla sensibilità; noi diciamo ragione, intelletto, o facciamo ricorso ad altri "luoghi". Su questo ci sarebbe ancora parecchio da dire.

Seguito della stessa *Lettera*:

«(...) L'anima dispiega in ciò una nuova facoltà, chiamata *astrazione*, che si ha quando l'anima fissa la propria attenzione esclusivamente su una quantità o qualità dell'oggetto da cui la separa, considerandola come se non fosse più unita ad esso. (...) Se vedo un abito rosso e fisso la mia attenzione unicamente sul colore, mi formo allora l'idea del rosso, separata dall'abito (...) Tali idee, acquisite per astrazione, sono chiamate *nozioni* per distinguerle dalle idee sensibili che ci rappresentano cose realmente esistenti. (...) Ma vi è ancora un'altra specie di nozioni, che si formano per astrazione e che forniscono all'anima i più importanti soggetti per dispiegarvi le sue forze: sono le idee dei *generi* e delle *specie*. Quando vedo un pero, un ciliegio, un melo, una quercia, un abete eccetera, ho una serie di idee diverse le une dalle altre; tuttavia vi noto molte cose che sono loro comuni, come il tronco, i rami e le radici; io mi soffermo unicamente a quelle cose che le differenti idee hanno in comune e chiamo *albero* l'oggetto a cui queste qualità convergono. (...)»

Ci sono vari commenti possibili, ma ne faremo due soli.

Il primo. *Astrazione* ha tanti significati, nel linguaggio quotidiano ed in matematica; quello usato da Euler sembra essere vicino al linguaggio quotidiano: vediamo una cosa che ha varie proprietà, un cubo di legno rosso di 10 cm di lato, e ci si dice: Questo è un cubo. Abbiamo tutto il diritto, da principianti, di capire che con quella parola, "cubo", si intende denominare tutte le cose rosse. Di per sé, "cubo" non indica questa o quella proprietà, la forma il colore, la misura, il materiale; per astrarre, da questo punto di vista, abbiamo bisogno di più ricorsi all'ostensione, alla deittica; ci si deve mostrare un nuovo cubo, di ferro, nero, con lato di 20 cm e ci si deve autoritariamente dire nuovamente: Questo è un cubo. A questo punto possiamo creare l'idea astratta di "cubo", indipendente dal colore eccetera. Ma se abbiamo già l'idea di vestito e vediamo un vestito rosso, allora sì... Insomma, la cosa non è così semplice come la delinea Euler perché l'astrazione si presenta sotto diverse forme.

Altro commento riguarda la distinzione tra "idee sensibili", che fanno riferimento agli oggetti che cadono sotto i sensi, e "nozioni", ottenute per astrazione. Possono anche avere lo stesso nome: "rosso" come aggettivo qualificativo riferito ad un oggetto che la visione ci permette di vedere come rosso; "rosso" come nome astratto comune che ci permette di aggregare in

un'unica raccolta gli oggetti di colore rosso, restituendoci però una nozione, la nozione di "rosso" che non è rossa. Sono questi ultimi usi che danno luogo a generi e specie, che Euler considera quasi sinonimi.

In matematica, questi due aspetti sono importantissimi per comprendere l'apprendimento concettuale; da un punto di vista attuale, il dibattito sulla costruzione concettuale è oggi violentissimo. Come spunto di partenza, si veda D'Amore (1999) e D'Amore e Fandiño Pinilla (2001, 2007).

4. Linguaggio

Dalla *Lettera* n. 101, 10 febbraio 1761 (tre giorni dopo):

«(...) nelle lingue non abbiamo quasi assolutamente parole il cui significato sia legato a qualche oggetto individuale. Se tutti i ciliegi che si trovano in una contrada avessero ciascuno il proprio nome, e così tutti i peri, e in generale tutti gli altri alberi, qual mostruoso linguaggio non ne verrebbe fuori? (...) Gli uomini hanno originariamente imposto a tutti gli oggetti individuali certi nomi per servirsene come segni; le parole di una lingua significano nozioni generali e solo raramente se ne troverà uno che indichi un solo individuo. Il nome di *Alessandro il Grande* conviene a una sola persona, ma è un nome composto. Vi sono mille Alessandri e l'attributo *grande* si riferisce a un'infinità di cose (...). Gli oggetti dei nostri pensieri non sono tanto le cose stesse, quanto le parole con cui queste cose sono indicate nella lingua. Questo contribuisce molto a facilitare la nostra capacità di pensare. Difatti qual è l'idea che si connette per esempio a queste parole, *virtù, libertà, bontà* eccetera? Non è certamente un'immagine sensibile; ma l'anima, una volta formatasi le nozioni astratte che corrispondono a queste parole, sostituisce in seguito nei propri pensieri queste parole alle cose che ne sono indicate. (...) Vostra Altezza giudichi ora di quale utilità ci sia la lingua per condurre i nostri propri pensieri: senza una lingua noi stessi non saremmo quasi in grado di pensare».

Solo una piccola chiosa; "triangolo" è un nome generico che indica il carattere comune delle forme triangolari che cadono sotto i nostri sensi, ma diventa nome proprio ottenuto facendo astrazione e facendo riferimento ad uno specifico oggetto della matematica. In questo senso è nome proprio, dato che indica, tra i poligoni, quelli che hanno 3 lati. Ma se desideriamo specificare di quale triangolo stiamo parlando, lo dobbiamo identificare, per esempio dando tre nomi ai vertici: ABC. Il triangolo ABC così determinato è un oggetto specifico, un individuo, o a sua volta un elemento generico? Su questo dibattito si veda Speranza (1997).

Dalla *Lettera* n. 102, 14 febbraio 1761 (quattro giorni dopo, dunque a una settimana dalla n. 100):

«Vostra Altezza ha visto quanto il linguaggio sia necessario agli uomini, non solo per comunicarsi le loro opinioni e i loro pensieri, ma anche per coltivare il loro proprio spirito, e estendere le loro conoscenze. Se Adamo fosse stato lasciato solo nel Paradiso, sarebbe rimasto nella più profonda ignoranza senza il soccorso di una lingua. Il linguaggio gli sarebbe stato necessario, non tanto per indicare con certi segni gli oggetti individuali che avessero colpito i suoi sensi, ma soprattutto per indicare le nozioni generali che ne avrebbe formato per astrazione, affinché tali segni sostituissero nel suo spirito quelle stesse nozioni. (...) Da ciò Vostra Altezza comprende come una lingua possa essere più perfetta di un'altra: una lingua è sempre più perfetta quando è in grado di esprimere un maggior numero di nozioni generali, formate per astrazione. (...)»

Se Adamo fosse stato solo nell'Eden e non avesse avuto bisogno di comunicare con alcun altro essere umano, avrebbe potuto assegnare segni a ciascun oggetto nominabile, senza bisogno di astrazione. Ad ogni oggetto un segno e viceversa in una sorta di nominalizzazione univoca che non prevede raggruppamenti. Perché dire "albero" di fronte ad un pino e ad un ciliegio? A chi comunicare l'idea collettiva ottenuta per astrazione? E che cosa intendere per "segno"? Non certo una parola, né alcun altro oggetto linguistico. Forse solo un toponimo distintivo: questo qua e quello là. Una lingua perfetta, se di lingua abbiamo il coraggio di parlare.

Tutto comincia quando sorge una comunità, anche solo due individui (vogliamo proseguire l'esempio iniziato da Euler e dire: Eva?), e comincia l'avventura comunicativa.

Esisterebbe la matematica senza comunicazione, dunque senza linguaggio comunicativo?

Per i realisti sì, per i pragmatisti no (D'Amore, Fandiño Pinilla, 2001; D'Amore, Godino, 2006).

Sembra, diciamo *sembra*, che anche Euler adottò una visione pragmatista il che, per essere nel pieno del XVIII secolo, sarebbe una posizione assai prematura... Ma forse questa interpretazione ricade in quelle che, per benevolenza verso gli Autori del passato che amiamo e stimiamo, noi moderni forziamo un po', per dare più autorità alle nostre stesse posizioni.

Bibliografia

Bagni G.T. (1996). *Storia della matematica*. Vol. 2. Bologna: Pitagora.

- Bagni G.T. (2007). I diagrammi di Eulero: riflessioni didattiche sulla rappresentazione degli insiemi. *Bollettino dei docenti di matematica*. In questo stesso numero 55.
- Bagni G.T., D'Amore B. (2007). A trecento anni dalla nascita di Leonhard Euler. *Scuola Ticinese*. In corso di stampa.
- Bell E.T. (1990). *I grandi matematici*. Firenze: Sansoni. (Prima edizione: 1950).
- Blumer H. (1969). *Symbolic interactionism. Perspective and method*. Englewood Cliffs NJ: Prentice Hall. Usiamo l'ed. del 1982.
- D'Amore B., Fandiño Pinilla MI. (2001). Concepts et objets mathématiques. In: Gagatsis A. (ed) (2001). *Learning in Mathematics and Science and Educational Technology*. Atti del Third Intensive Programme Socrates-Erasmus, Nicosia, Università di Cipro, 22 giugno --6 luglio 2001. Nicosia (Cipro): Intercollege. 111-130.
- D'Amore B., Fandiño Pinilla M.I. (2007). How the sense of mathematical objects changes when their semiotic representations undergo treatment and conversion. *La matematica e la sua didattica*. Vol. 21, n. 1, pagg. 87-92. Atti del: Joint Meeting of UMI-SIMAI/SMAI-SMF: *Mathematics and its Applications*. Panel on Didactics of Mathematics. Dipartimento di Matematica, Università di Torino. 6 luglio 2006. ISSN: 1120-9968.
- D'Amore B., Godino D.J. (2006). Punti di vista antropologico ed ontosemiotico in Didattica della Matematica. *La matematica e la sua didattica*. 1, 9-38.
- D'Amore B., Matteuzzi M. (1975). *Dal numero alla struttura*. Bologna: Zanichelli.
- Euler L. (1768-2007). *Lettere a una principessa tedesca*. Torino: Bollati Boringhieri. 2 volumi. Traduzione condotta su: Euler L. (1769). *Lettres à une princesse d'Allemagne sur divers sujets de Physique & de Philosophie*. Lipsia: Mietau et Leipsic, presso Steidel et C. Volumi 1 e 2. Il vol. 3 apparve nel 1773. La I edizione in assoluto delle *Lettres* avvenne (in francese) a cura della Accademia imperiale delle Scienze di Pietroburgo, i primi due volumi del 1768, il terzo nel 1772. Le diverse edizioni, dunque, si incrociarono, ma quella della Accademia russa né oramai introvabile. La I edizione italiana è del 1787 (Napoli: Ferres, a cura dell'abate Oronzo Carnevale).
- Speranza F. (1997). *Scritti di epistemologia matematica*. Bologna: Pitagora.