203. D’Amore B., Fandiño Pinilla M. I. (2012). Su alcune D in didattica della matematica: designazione, denotazione, denominazione, descrizione, definizione, dimostrazione. Riflessioni matematiche e didattiche che possono portare lontano. *Bollettino dei docenti di matematica*. [Bellinzona, Svizzera]. 64, 33-46. ISSN: 978-88-86486-85-9.

Su alcune D in didattica della matematica: designazione, denotazione, denominazione, descrizione, definizione, dimostrazione.

Riflessioni matematiche e didattiche che possono portare lontano

Bruno D’Amore - Martha Isabel Fandiño Pinilla

NRD, Dipartimento di Matematica, Università di Bologna, Italia
MESCUD, Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia

Sunto. *Nella normale azione d’aula, vi sono momenti delicati ai quali non si fa attenzione per mancanza di competenza; per esempio non si fa caso alle azioni di designazione, di denotazione (e connotazione), di denominazione e di descrizione; mentre le operazioni di definizione e di dimostrazione sono tenute assai di più sotto osservazione. In questo breve testo si vuole richiamare l’attenzione su tutti questi momenti matematici di grande rilevanza.*

Abstract. *In the habitual classroom actions there are delicate moments to which one doesn’t pay attention due to a lack of competence; for example, one doesn’t pay attention to the actions of designation or denotation (and connotation), denomination and description; while operations of definition and demonstration are much more kept under observation. In this short text, we want to draw attention on all these mathematical moments of great significance.*

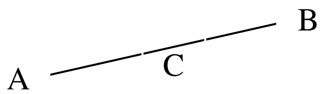
1. Introduzione

La maggior parte di noi esseri umani confonde tra loro operazioni che i linguisti ed i filosofi studiano come non sinonime; lo fa nella vita quotidiana, lo fa nella pratica discorsiva, nella comunicazione … E lo fa quando insegna matematica. Siccome sempre più ci si accorge che eventuali insuccessi apprenditivi in matematica non sono necessariamente relazionati alla mancata comprensione della disciplina ma del linguaggio, dei linguaggi, delle azioni semiotiche, delle consuetudini implicite etc., che le ruotano attorno, ci è sembrato potesse rivestire un certo interesse distinguere ed evidenziare le operazioni di designazione, denotazione (e connotazione), di denominazione e di descrizione degli oggetti matematici, visto che ciascuna di esse ha una sua precisa funzione. Abbiamo anche voluto notare come questi termini richiamino attività legate alle pratiche del definire e del dimostrare, le cui difficoltà di apprendimento sono già state oggetto di moltissime ricerche specifiche.
En passant, abbiamo voluto far notare ancora una volta come questo genere di riflessioni, anche non troppo profonde, mostrino che l’atteggiamento pragmatista realizza e modellizza meglio di quello realista la nostra disciplina, la didattica della matematica. Per questo ci siamo serviti delle riflessioni di John Stuart Mill, economista e filosofo in grande auge negli anni ’60, ma troppo presto dimenticato.

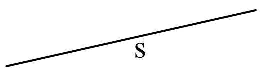
2. Designazione, denotazione (e connotazione), denominazione, descrizione e definizione.

2.1. Designazione

Designare ha vari significati: stabilire o fissare qualcosa (una data, un luogo per un appuntamento, persone cui affidare qualcosa …); ma anche indicare qualcosa con un termine opportuno; o scegliere qualcuno per un incarico, proporre un candidato.
Nella sua accezione più vicina alla matematica, designare indica la scelta opportuna per indicare qualche cosa.
Per esempio, sembra opportuno indicare un segmento con due lettere maiuscole che indicano i suoi (punti) estremi (AB) [che qualcuno stupidamente scrive $\overline{AB}$, confondendo il segmento con la sua misura]; mentre non sarebbe opportuno o necessario, per quanto non vietato, indicare un segmento con tre lettere maiuscole (ACB, basta che C appartenga ad AB…).



Ovviamente, nella situazione giusta, è altrettanto opportuno indicare un segmento con una lettera minuscola: il segmento s.



Naturalmente, la designazione è un fatto relativo e non assoluto; per esempio, nell'insieme di tutti i segmenti di un dato piano α, non è designazione significativa indicare un segmento dando la sua lunghezza (per es. 3m) dato che esistono infiniti segmenti che risponderebbero a quella designazione; ma in un insieme di segmenti dato, nel quale esiste un solo segmento lungo 3m, quella designazione sarebbe corretta.
La designazione non sempre è matematicamente ineccepibile, se fa uso di termini non matematicamente corretti; se, per esempio, lungo il corso di una pagina, appaiono due quadrati, uno dei quali alcune righe (tipografiche) dopo dell'altro, la designazione "il quadrato di sopra", sebbene nella lingua comune sia accettabile perché appunto designa uno dei due quadrati, non è ineccepibile sul piano squisitamente matematico se, per esempio, si volesse far riferimento a due quadrati complanari.
La designazione ha poco a che fare con la matematica; designare un oggetto matematico è un espediente comunicativo utile per poter far sì che emittente e ricevente si intendano. Eppure, spesso, nella pratica didattica l'emittente-insegnante s'intestardisce su questioni aventi a che fare con la designazione più che con la matematica, facendo credere al ricevente-allievo che il quid essenziale della matematica consista nelle designazioni. Per esempio, è inutile il simbolo di accento circonflesso che si mette sulla lettera B quando si vuol indicare l'angolo ABC, se appare esplicitamente la frase "il triangolo"; cioè, la scrittura: "l'angolo $A\hat{B}C$" è inutilmente ridondante, pedante. Ma di esempi così, nel linguaggio scolastico matematico, se ne posso fare parecchi.

2.2. Denotazione (e connotazione)

Dato un termine, per esempio l'aggettivo "coniglio", la denotazione è una frase che lo descrive, lo caratterizza, per esempio "roditore che…", tipica dei dizionari o delle enciclopedie.
Non è raro trovare dizionari sui quali si denota in modo tale da creare un circolo vizioso:

Circonferenza: curva che racchiude un cerchio;
Cerchio: parte di piano racchiusa da una circonferenza.

Ma ogni termine del linguaggio porta con sé caratteristiche, spesso legate più ai sensi figurati che al vero e proprio significato, cioè significati che accompagnano quello basilare, attributi stilistici, affettivi o rinvii ad aspetti letterari (con sfumature migliorative o peggiorative o eufemistiche); per esempio "coniglio" comporta connotati di vigliaccheria o di mancanza di coraggio; si parla allora di connotazione.
Per esempio, la parola "retta" ha una sua denotazione: linea che può essere percorsa senza cambiare direzione (questa non è una definizione, ma solo una denotazione); ma comporta connotazioni dovute all'uso popolare e eufemistico: corretto, senza sbavature, onesto, che segue le regole etc.
Allo studio della connotazione si è dedicato il filosofo ed economista britannico John Stuart Mill (1806 – 1873) che distingue tra termini (puramente) denotativi (per esempio i nomi propri) e termini connotativi (attributi e nomi comuni che, oltre a denotare, connotano). Stuart Mill applicò questa distinzione alla sua particolare logica, pensata come vero e proprio strumento di pensiero, produttore di idee.
Distingue ancora tra:
proposizioni verbali caratterizzate dal fatto che il predicato esprime un concetto già contenuto nel soggetto (gli uomini sono razionali: la razionalità è tipica dell'essere umano e dunque lo denota e lo connota) dunque di fatto prive di informazioni;
proposizioni reali, quando il predicato esprime un concetto non contenuto nel soggetto.
Questo gli permette di aggiungere alla logica, considerata come deduttiva (deduzione: inferenza che va dal generale al particolare), o induttiva (induzione: inferenza che va dal particolare al generale), un terzo aspetto che pone a fondamento degli altri, la realtà basata su fatti empirici. A suo avviso, nei sillogismi la premessa maggiore (tutti gli uomini sono mortali) non è altro che una espressione generale che rappresenta un insieme di osservazioni particolari (qualsiasi essere umano che noi evidenziamo, è mortale). A suo avviso la conoscenza è dunque un dato empirico e le generalizzazioni sono null'altro se non elenchi compressi di casi particolari. Anche la matematica rientrerebbe per Stuart Mill in questa accezione: si parte da oggetti empirici sui quali si fa astrazione relativamente a certe proprietà (Stuart Mill, 1843).

2.3. Denominazione

Si tratta dell'attribuzione che viene data a un nome che serve a identificare o specificare l'oggetto o la persona o l'ente in questione. Nell'analisi logica propedeutica al latino, si parlava di complemento di denominazione come di quello che introduce una informazione che specifica qualcosa di significativo relativamente al termine cui si riferisce. «La città di Bogotá»: "di Bogotá" è il complemento di denominazione (in realtà in latino non c'è bisogno di tale complemento).

2.4. Descrizione

L'etimologia di questo termine è semplice ma problematica: viene dal latino "de" che indica compimento di azione e "scribere", scrivere. Ma sta ad indicare una cosa complessa che è quella di fare sì che un emittente faccia riferimento a fatto, persona, luogo, … e ne tracci con verosimiglianza una riproduzione in un qualche sistema descrittivo (per esempio semiotico) teso a far sì che il ricevente se ne possa fare un'immagine, un'idea, … figurale, o schematica, o foto-grafica che sostituisca l'originale.
In matematica non s'usa descrivere una figura geometrica, per esempio, ma si sostituisce questa attività con un'immagine visuale diretta o con una definizione. Ancora meno si descrivono altri oggetti matematici ma non geometrici, come una relazione binaria, o una funzione, o un'operazione aritmetica.

Ma la descrizione è a volte necessaria perché mette in rilievo proprietà degli oggetti che non saranno tutti elencati nella laconicità della definizione; per esempio, in geometria elementare, ecco una descrizione del quadrato:
quadrato è un rombo che ha tutti gli angoli della stessa ampiezza, le diagonali della stessa lunghezza, altri due assi di simmetria oltre alle diagonali…
Tale descrizione è in un certo senso sovrabbondante; infatti si può dimostrare che se un rombo ha tutti gli angoli della stessa ampiezza allora ha anche le diagonali della stessa lunghezza o si può dimostrare che ha altri due assi di simmetria oltre alle diagonali; e viceversa.
La descrizione dunque non è la definizione; per definire un quadrato, basta una sola di queste proprietà, dato che da essa assunta come ipotesi si deducono come tesi le altre.

2.5. Definizione
Consideriamo come esempio le due seguenti definizioni:
un numero naturale si dice primo quando ha esattamente due divisori;
un quadrilatero si dice trapezio quando ha almeno una coppia di lati paralleli.
Una definizione serve a identificare, a circoscrivere, a indicare, a scegliere, a designare, a denominare, a denotare, perfino a connotare.
Per esempio, 8 è o no un numero primo? Andiamo a vedere quali divisori ha: 1, 2, 4, 8; ben quattro divisori, dunque non è primo. Viceversa, 5 ha come divisori solo 1 e 5, esattamente due, dunque 5 è primo.
Uno potrebbe dire: ma se invece di definire noi elencassimo? Certo, è una soluzione; allora i numeri primi sono quelli dell'elenco seguente: 2, 3, 5, 7, 11, 13,… Bene: e che cosa viene dopo la virgola? Per esempio: 17777890564734442109707 è o no nell'elenco? La difficoltà di dare una risposta a questa domanda mostra come la compattezza della definizione fornisca uno strumento, laddove un elenco completo è o impossibile (come nel caso dei numeri primi che sono notoriamente infiniti) o troppo complesso quando l'elenco sarebbe improponibile (Carlo Eduardo Vasco Uribe è maggiorenne? Rientra nell'elenco completo mondiale di tutti i maggiorenni? Chi potrebbe mai stilare un simile elenco? Molto meglio chiedergli direttamente se ha già compiuto 18 anni, sfruttando la definizione).
L'uso di definizioni, come abbiamo appena visto, non è peculiare della matematica; rivediamo un esempio tratto dalla vita di tutti i giorni cui abbiamo fatto cenno poche righe fa: Maggiorenne è ogni essere umano che ha già compiuto 18 anni.
Lo stesso discorso fatto per l'elenco dei maggiorenni vale per l'esempio dei trapezi; se uno dovesse disegnare tutti i quadrilateri e poi designare, la faccenda sarebbe impossibile: Ecco, questi e questi sono i trapezi. Invece, con una definizione, si raccoglie tutto in poche parole.
Vediamo bene com'è fatta una definizione.
Maggiorenne è ogni essere umano che ha già compiuto 18 anni.
Si divide in due parti:
"maggiorenne" è il termine che si deve definire, che potrebbe essere per ora ignoto: si chiama definiendum;
"ogni essere umano che ha già compiuto 18 anni" è il predicato, tanto designazione quando denominazione, un insieme di parole retto dalla copula "è", che serve a definire, cioè il definiens.
Ora, se nel definiens ci sono parole sconosciute, la definizione serve a poco.
Torniamo ai due esempi matematici:
Un numero primo è un numero naturale che ha esattamente due divisori;
un trapezio è un quadrilatero che ha almeno una coppia di lati paralleli.
Primo definiendum: numero primo; primo definiens: numero naturale che ha esattamente due divisori; se chi legge non sa che cosa è un numero naturale, che cosa vuol dire divisore, allora non può capire la definizione. Cioè: se la designazione non designa, è inutile.
Secondo definiendum: trapezio; secondo definiens: quadrilatero che ha almeno una coppia di lati paralleli; se chi legge non sa che cosa è un quadrilatero, che cosa vuol dire lati, oppure paralleli, allora non può capire la definizione.

Dunque? Dunque ci devono essere delle definizioni precedenti che definiscono i singoli termini di cui si fa uso nel definiens: nel primo caso, definizione di numero naturale, definizione di divisore; nel secondo caso, definizione di quadrilatero, definizione di lato, definizione di paralleli.
Limitiamoci al solo secondo caso, perché nel primo ci troveremmo subito nei guai con la definizione di numero naturale che ha una storia lunga e controversa nel panorama della storia della matematica.
Allora, quadrilatero, che faceva parte del definiens, ora deve diventare definiendum; ecco fatto:
Quadrilatero è un poligono che ha 4 lati.
Siamo daccapo: chi legge deve sapere che cosa significano le parole che appaiono nel definiens: poligono, 4, lati.
Bene, provvediamo subito:
Poligono è una figura piana che ha come contorno una linea spezzata chiusa semplice.
Questo processo non può andare avanti all'infinito, come potrebbe apparire a prima vista; semplicemente perché il numero di parole del vocabolario a disposizione, cioè il numero di designazioni possibili, per quanto ampio, è finito; dunque, a un certo punto, il processo si deve fermare e l'autore, il creatore di teorie, il matematico deve decidere da quali partire, assumendole, accettandole senza definizione.
Queste parole si chiamano "termini primitivi".
Sono designazioni pure, legate all'esperienza concreta, come asserisce Stuart Mill.
Ora ci sono varie questioni legate a questo fatto, a queste scelte, ai termini primitivi, posizioni epistemologiche diverse:
queste parole si assumono come termini primitivi perché sono talmente semplici e "intuitive" che non vale la pena definirle; sono designazioni spontanee, basate su cultura precedente;
si accettano senza definizione, perché è la loro presenza nelle circostanze descritte dagli assiomi che ne determina il significato;
si introducono come puri termini e poi la teoria che man mano si sviluppa ne dà accezioni d'uso e/o definizioni implicite.
Le soluzioni filosofiche a questo proposito sono tante, e anche la scelta dei termini primitivi è molto variabile; per esempio, la parola "punto" pare sia stata scelta da Euclide come il termine primitivo per eccellenza (ma ci sarebbe tanto da dire: σημείο era davvero "punto" o era "segno"?).
Poiché molti credono, in maniera ingenua, che in matematica tutto si definisce [e, ancor più ingenuo: e tutto si dimostra, ma lo vedremo poi], quanto detto finora a proposito delle definizioni potrebbe essere un fiero colpo alle credulità popolari.
Avvisiamo che ci limitiamo qui alla definizione in puro senso aristotelico (per genere prossimo e differenza specifica), caratteristica della cosiddetta "matematica elementare"; e nemmeno prendiamo in esame le definizioni per astrazione che pure fanno parte ampiamente del vasto patrimonio della matematica.
La definizione ha una lunga storia all'interno dell'epistemologia matematica; ma anche le stesse singole definizioni si evolvono, come per esempio quella di angolo (D'Amore, 1985) e quella di insieme infinito (Arrigo, D'Amore, Sbaragli, 2010). Nell'apprendimento, la sofisticata idea di definizione ha lunghi tempi di maturazione; la nostra esperienza di ricerca mostra come spesso neppure studenti evoluti sappiano distinguere tra denominazione, descrizione e definizione. E molti insegnanti non fanno proprio il senso di quel "genere prossimo" nella definizione in senso aristotelico; ci viene proposto: Quadrato è una figura che… , al posto di: Quadrato è un rombo che…

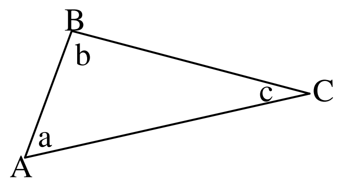
2.6. Nota

Designazione, denotazione, denominazione, descrizione ruotano attorno al complesso e controverso mondo delle definizioni, connotandolo in forma assai problematica.
Questo ci ha permesso di mostrare una visione non realista, ma pragmatista, della definizione in matematica che trae spunto da una posizione filosofica opportuna.

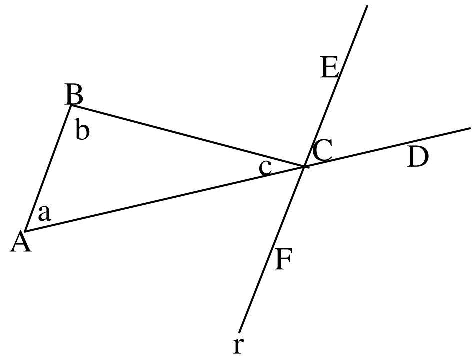
3. Dimostrazione

Per molte persone, la matematica è una disciplina di certezze, mentre la filosofia è disciplina di possibilità; per cui, la matematica si occupa del vero, la filosofia delle possibili verità.
La domanda banale che ne deriva è: che cosa è questo "vero"?
Ciò che assicura le verità delle asserzioni della matematica si chiama "dimostrazione".
Vediamo un esempio che discuteremo; non è tanto l'esempio in sé che si deve ora esaminare, ma quel che ne diremo poi.

Consideriamo un triangolo ABC ed i suoi angoli interni a, b e c.



Per un qualche scopo, o anche solo per curiosità, ci si chiede: quanto misura la somma delle ampiezze dei tre angoli interni di ABC? In maniera impropria ma diffusa, indicheremo tale somma di ampiezze con: $a+b+c$.
Si possono misurare le tre ampiezze con un goniometro e poi addizionarle, come farebbe ingenuamente un bambino piccolo; ma noi sappiamo che nell'azione stessa del misurare è contenuto un errore intrinseco che invalida, dal punto di vista matematico, il risultato: farlo, sarebbe confondere l'ingegneria con la matematica, la verità sensibile (dóxa) con la verità di ragione (alétheia), il concreto con il concetto, l'empirico con l'astratto.
Dunque? Dunque dobbiamo "dimostrare" e non misurare, cioè fare un ragionamento convincente che non dipenda dal particolare triangolo, dalla particolare situazione, dalle misure, ma che sia generale.
Un esempio di dimostrazione è il seguente.
Riprendiamo il disegno di prima; esso non è il triangolo, è solo una rappresentazione semiotica che ci aiuta nel seguire il ragionamento. Denotiamo il triangolo astratto con le tre lettere ABC, lo rappresentiamo semioticamente nel registro figurale, lavoriamo sulla rappresentazione, ma sempre facendo mentalmente riferimento all'oggetto triangolo della geometria, astratto, quello denotato dalle tre lettere.



Prolunghiamo il lato AC oltre C, fino ad un punto D scelto a piacere; consideriamo la retta r passante per C parallela ad AB. Su di essa prendiamo due punti E ed F, in semirette opposte rispetto a C, che ci permetteranno di designare degli angoli in modo opportuno.
Ebbene: l'angolo BCE è uguale (sovrapponibile, congruente, ha la stessa misura… si può dire in tanti modi) all'angolo b per un teorema già dimostrato in precedenza, in quanto si tratta di angoli alterni interni, cioè formati da due parallele (AB ed r) tagliate da una trasversale BC.
L'angolo DCE è uguale all'angolo a perché sono angoli corrispondenti in una situazione analoga.
Ma la somma di c, più BCE, più DCE forma l'angolo ACD che è piatto; dunque la somma degli angoli interni del triangolo ABC è un angolo piatto (c'è chi dice metà di un giro, c'è chi dice 180°, c'è chi dice due retti).
E la dimostrazione è finita.
Ma…
Ma ci sono varie questioni sottili di carattere filosofico, semiotico e linguistico nascoste in questo ragionamento.

La prima.
Abbiamo fatto riferimento a "teoremi precedenti", i quali faranno a loro volta riferimento a teoremi precedenti, e così via. Ma questo andare a ritroso non può essere infinito, è ovvio. Prima o poi, per poter partire, si avranno affermazioni che vanno prese per vere, senza dimostrazione, come base di tutto. Di ciò si accorsero i grandi matematici dell'antica Ellade, è troppo ovvio. Cosicché si decise di partire da alcune affermazioni che vengono prese per vere senza dimostrazione. Per esempio, a un certo punto abbiamo prolungato il segmento AC fino a un punto D; dovremmo allora dare una dimostrazione precedente del tipo:
Dato un segmento, è sempre possibile prolungarlo da una delle due parti.
Ma, appunto, questo è un esempio di affermazione che viene presa per vera, senza una precedente dimostrazione. Si chiama assioma. (In verità, i matematici greci distinguevano due categorie di affermazioni vere senza dimostrazione, i postulati e gli assiomi, ma su questo ci sia permesso di sorvolare).
Dunque, contrariamente a quel che la gente crede, in matematica non si dimostra tutto, ma si accettano come vere alcune affermazioni senza dimostrarle.
Il che è filosoficamente rilevante: che cosa le rende vere? Perché proprio quelle? L'evidenza? L'aderenza alla realtà? Ma come … Abbiamo tanto insistito sulla differenza tra dóxa e alétheia …

La seconda.
Abbiamo appena dimostrato che un certo triangolo ABC, del quale abbiamo dato una bella figura poco sopra, ha la somma degli angoli interni che misura 180°. Bene. Ora prendiamo un altro triangolo, e facciamo la stessa dimostrazione per vedere quanto misura la sua somma degli angoli interni. E poi ne prenderemo un altro e poi un altro ancora e così via. Quando avremo esaurito *tutti* i

triangoli a disposizione, allora … Si vede bene l'assurdità di questa situazione: fare prove su tutti i triangoli è impossibile.
Ma se uno riflette bene, si accorge che nella precedente dimostrazione mai e poi mai abbiamo preso in esame le proprietà di *quel* triangolo ABC che abbiamo disegnato e designato, bensì: abbiamo fatto il ragionamento in generale, sul triangolo qualsiasi, non su un triangolo ma sull'idea stessa di triangolo, sull'oggetto matematico triangolo.
È questo che rende interessante e rilevante e definitiva la dimostrazione.
Noi ora, dopo questa dimostrazione, sappiamo che tutti i triangoli del mondo (nella geometria euclidea, come vedremo) hanno la somma degli angoli interni che misura 180°, non importa la forma, non importa la dimensione.
Una piccola curiosità didattica: i bambini di scuola primaria talvolta credono che più i lati del triangolo sono grandi, maggiore è la somma degli angoli interni. Per convincere i bambini piccoli, la dimostrazione precedente è sproporzionata, neppure potrebbero capire il senso della nostra proposta, per cui si ricorre a procedimenti empirici; si disegna un triangolo su un cartoncino, si tagliano le "punte" del triangolo disegnato concreto, e le si riaccosta in modo opportuno per mostrare che i lati estremi stanno sulla stessa retta, cioè che i tre angoli formano un angolo piatto. Per un bambino di scuola primaria l'esperimento concreto è assai convincente. Ma, evidentemente, è un processo empirico, non è una dimostrazione. Cioè: matematicamente è irrilevante. Ma la sua dose di convincimento basta e avanza a quel livello scolare.
Torniamo dunque daccapo.
Se in matematica un'affermazione è dimostrata, è assurdo, inutile, è una perdita di tempo, tentare di dimostrare il contrario. Per esempio: non esistono equazioni algebriche che hanno π come radice. La cosa è stata *dimostrata*. Eppure esistono persone che cercano ancora una equazione di questo tipo. Tempo perso. Altro esempio: il cerchio non si può quadrare con riga e compasso. La cosa è stata *dimostrata*. Eppure c'è gente che cerca ancora questa costruzione. Inutile fare commenti.

La terza.
Come abbiamo visto in questa stessa dimostrazione, abbiamo nominato, poi designato, poi rappresentato semioticamente, poi abbiamo fatto azioni (disegni) sull'immagine, concreta; queste ci hanno permesso di descrivere; queste descrizioni ci hanno permesso di denotare, giungendo ad affermazioni che non erano più fatte sulle rappresentazioni semiotiche ma sull'oggetto matematico in sé. Questo gioco di rinvii semiotici, linguistici, filosofici che diamo per scontati in un realismo ingenuo, sono pragmaticamente assai complessi. Fino a che punto ci serviamo dell'esperienza concreta nel realizzarli?

C'è un'interessante differenza tra il matematico e il matematico dilettante; un matematico non perderebbe certo tempo in ricerche su questioni già dimostrate, perché sa bene che cosa vuol dire "vero" in matematica.
Già, "vero"; ma abbiamo detto che la verità si basa su assiomi; dunque, se cambiamo gli assiomi cambia tutto. Certo. Questa affermazione getta più d'uno nello sconforto, tranne i matematici professionisti. Cerchiamo dunque di capirla bene.
Faremo un esempio ma senza figure, per non confondere quanto tra poco asseriremo con l'immagine che si potrebbe produrre.
Consideriamo una retta r e un punto P fuori di essa. Tracciamo rette passanti per P parallele a r. Quante sono tali parallele?
Una, nessuna, due, mille, infinite?
La geometria degli *Elementi* di Euclide, la più classica delle classiche, quella che chiunque ha studiato a scuola, si basa tutta sulla prima risposta: è unica la retta che passa per P, parallela a r.
(Anche se, in realtà, la storia sarebbe un po' più complicata da raccontare, dato che fin dai tempi di Euclide e anche prima era in corso un dibattito su questa questione).
L'unicità della parallela caratterizza la geometria di Euclide; ma non è una *verità*

dimostrata, si tratta di un assioma. Se fosse dimostrata, non ci sarebbe più nulla da dire, la parallela è una e basta; ma se è un assioma, chiunque di noi lo può cambiare come crede e, appunto, sostituirlo con altri assiomi.

Esiste, ed è lecita, la geometria che accetta come assioma quello che afferma che le parallele sono zero; per cui l'affermazione, cioè il nuovo assioma, diventa: data una retta r e un punto esterno P, non ci sono affatto rette per P parallele a r. Ne nasce una geometria molto interessante, molto comoda per certe applicazioni: spesso la si chiama "geometria di Riemann" dal nome del matematico tedesco Bernhard Riemann, o geometria ellittica, ma non staremo certo qui a tentare di spiegare il perché.

Esiste ed è lecita la geometra in cui le parallele per P a una retta r sono più di una, cioè 2 [o infinite]; ne nasce una bella geometria molto importante, già usata per applicazioni concrete; spesso la si chiama geometria di Lobačevskij dal nome del matematico russo Nikolaj Ivanovich Lobačevskij o geometria iperbolica.

Che cosa vuol dire, dunque, "vero" in matematica?

Ricordiamo la famosa "definizione" di Bertrand Russell: «La matematica è quella disciplina in cui non si sa di che cosa si parla né si sa se quel che si dice è vero o falso».

Nella prima parte, si afferma che, in un realismo ingenuo, gli oggetti della matematica non esistono; dunque, ogni loro denotazione è a vuoto. Ma veniamo alla seconda parte. Per molte persone vero e falso sono aggettivi aventi a che fare con la realtà empirica, concreta; vero è ciò che trova riscontro nel reale (se butto un uovo dal balcone del quarto piano, arrivando a terra si sfracellerà), falso è ciò che non trova riscontro nel reale (lo stesso uovo che, nelle stesse condizioni, si invola accelerando verso l'alto).

Per la matematica, questi parametri non esistono, perché nulla di essa potremo verificare nel reale concreto.

Abbiamo un tavolo da cucina; prendiamo un suo bordo e lo consideriamo come se fosse una retta, poi prendiamo un punto sul bordo opposto. Quanti lati paralleli possiamo tracciare da quel punto al primo bordo del tavolo? La realtà empirica ci dice: uno; ma ora sappiamo che in matematica la risposta può essere, è, assai diversa. La risposta è: dipende dalla geometria in cui ci si pone; e poi, le cose concrete ben poco servono a dar ragione delle verità della matematica.

Allora? Allora in matematica "vero" non significa quel che significa nella realtà empirica; "vero" significa: dimostrato a partire da assiomi scelti, dunque all'interno di una certa teoria, e se cambiamo gli assiomi, cambia tutto.

"Vero", "falso", pur essendo termini che si usano in matematica per comodità, sono, di fatto, relativi. Invece di dire che la tale affermazione è vera, si dovrebbe dire che è coerente rispetto agli assiomi scelti; la mira del matematico non è la verità, come ingenuamente si potrebbe credere, ma la coerenza di quel che dimostra nella teoria in cui si è posto.

La somma degli angoli interni di un triangolo misura 180°, lo abbiamo dimostrato; sì, ma lo abbiamo dimostrato in una geometria di Euclide, tanto è vero che, a un certo momento, abbiamo condotto *la* retta passante per un punto parallela a una retta data; quel *la* è fortemente condizionante. Se si cambiano gli assiomi, cambia tutto; tanto è vero che si può [facilmente] dimostrare che nella geometria di Riemann la somma degli angoli interni di un triangolo è superiore a 180°, mentre in quella di Lobačevskij è minore. I risultati sembrano tra loro contraddittori e dunque, ingenuamente, vien da pensare che uno solo di essi possa essere vero. Ma non è così; i risultati delle dimostrazioni, che qui evitiamo, sono coerenti rispetto alla teoria, rispetto agli assiomi scelti.

Non sarebbe finita qui, perché nulla abbiamo detto della "logica" che si usa nelle dimostrazioni; abbiamo dato per scontato che la logica, almeno quella, sia unica e da tutti riconosciuta e accettata; *ma non è così*.

Abbiamo ampiamente visto come, nel corso di una dimostrazione, entrano in gioco in maniera assai pesante fatti aventi a che fare con designazione, denotazione, denominazione, descrizione, definizione, semiotica, linguistica e filosofia.
Tanto è vero che in culture diverse, sono messi in campo altri modi dimostrativi, a volte anche assi diversi tra loro (D'Amore, 2005); eppure, la nostra esperienza di ricerca mostra che per molti insegnanti *LA* modalità dimostrativa sia unica ed è quella aristotelica - euclidea. Tanto è vero che spesso vengono messi in campo lunghi ed inutili tentativi di trattare la logica simbolica elementare del primo ordine con studenti non ancora cognitivamente in grado di farne uso.

4. La riflessione didattica e gli strumenti analitici

Il dibattito filosofico su definizione e dimostrazione è sempre stato vivissimo e non staremo qui a ricordare i contributi degli antichi e dei moderni; tra questi ultimi citiamo solo Giuseppe Peano (1858 – 1932), David Hilbert (1862 – 1943) e Federigo Enriques (1871 – 1946).
Che la definizione sia in fondo una frase e che la dimostrazione sia un discorso, è stato tema di analisi da parte di linguisti non matematici; anche se essi non sempre colgono la finezza che nascondono entrambe queste pratiche così come sono condivise nelle nostre comunità di matematici.
Sì è chiaramente visto, però, negli anni, nei decenni, come la riflessione sugli strumenti, dei quali noi "esperti" ci serviamo mentre i "novizi" fanno pratica e apprendono, sia importante per la gestione stessa dei saperi, nelle due direzioni: cautela nell'uso e correttezza nell'insegnamento, strumento per l'analisi di eventuali fallimenti.
Ora, ben diverso è designare rispetto al descrivere o al definire; altra cosa è denotare e tutt'altra definire; abbiamo visto come tutto ciò si mescola a vari livelli nell'azione concreta del dimostrare, quando ciò diventa oggetto di comunicazione, per esempio nell'aula scolastica.
Noi crediamo fermamente che la riflessione sempre più analitica delle componenti che entrano in gioco nella prassi didattica ci aiuti a capire il fenomeno dell'insegnamento-apprendimento, con le sue sottili e spesso nascoste complicazioni.
Indicare, come dice la parola stessa, può esser fatto con il dito indice; si osserva una figura, la si "indica" e si dice: Quella figura. Qualsiasi studente è portato a farlo in modo spontaneo; molti insegnanti non sono disposti ad ammettere quella indicazione, in cambio di un'altra o in cambio di altre, che si chiamano denominazione e designazione. Ma la base linguistico – comunicativa - filosofica è la stessa. Ed *è una base empirica*, come abbiamo visto; ci si riferisce all'oggetto concreto, il quale evoca un oggetto mentale, con un'azione concreta. Ma se lo facciamo, davvero, si rischia che qualcuno interpreti tutto ciò con parametri rigidi e decida che non possono essere accettati.
Assomiglia molto al tentativo tutto astratto di usare nella pratica matematica d'aula solo connettivi logici, mentre il novizio, in modo del tutto analogo a quel che accade nella pratica matematica tra esperti, tenderebbe ad usare anche connettivi epistemici.
Una saggia attività che riteniamo utile nella formazione iniziale degli insegnanti di matematica è quella di riflessione attorno a tutti i termini qui introdotti.

Bibliografia

Arrigo G., D'Amore B., Sbaragli S, (2010). *Infiniti infiniti. Aspetti concettuali e didattici concernenti l'infinito matematico*. Trento: Erickson.
Bagni G. T. (2006). *Linguaggio, storia e didattica della matematica*. Bologna: Pitagora.

Bottazzini U., Freguglia P., Toti Rigatelli L. (1992). *Fonti per la storia della matematica*. Firenze: Sansoni.

Boyer C.B. (1968). *A History of Mathematics*. New York: John Wiley and Sons.

Carruccio E. (1971a). *Mondi della logica*. Bologna: Zanichelli.

Carruccio E. (1971b). *Matematiche elementari da un punto di vista superiore*. Bologna: Pitagora.

Courant R., Robbins H. (1941). *What is Mathematics*. New York: Oxford Univ. Press.

D'Amore B. (1985). L'idea di 'angolo' nell'antichità e sua evoluzione. *La matematica, le scienze e il loro insegnamento*. 1, 6-18.

D'Amore B. (2005). La argumentación matemática de jóvenes alumnos y la lógica hindú (*nyaya*). *Uno*. [Barcellona, Spagna]. 38, 83-99. D'Amore B. (2005). Secondary school students' mathematical argumentation and Indian logic (nyaya). *For the learning of mathematics*. 25, 2, 26-32. D'Amore B. (2005). L'argomentazione matematica di allievi di scuola secondaria e la logica indiana (nyaya). *La matematica e la sua didattica*. 4, 481-500.

D'Amore B. (1999). *Elementi di didattica della matematica*. Bologna: Pitagora.

D'Amore B. (2010). *Matematica, stupore e poesia*. Firenze: Giunti.

D'Amore B., Fandiño Pinilla M.I. (2009). La formazione degli insegnanti di matematica, problema pedagogico, didattico e culturale. *La matematica e la sua didattica*. 23, 3, 261-298.

D'Amore B., Matteuzzi M. (1975). *Dal numero alla struttura*. Bologna: Zanichelli.

D'Amore B., Matteuzzi M. (1976). *Gli interessi matematici*. Venezia: Marsilio.

Dummett A. A. E. (1975). ¿Qué es una teoría del significado? In: Valdés L. M. (ed.) (1991). *La búsqueda del significado*. Madrid: Tecnos.

Giusti E. (1999). *Ipotesi sulla natura degli oggetti matematici*. Torino: Bollati Boringhieri.

Godino J., Batanero C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 14, 3, 325-355.

Kline M. (1972). *Mathematical thought from ancient to modern times*. New York: Oxford University Press).

Kutschera F. von (1979). *Filosofia del lenguaje*. Madrid: Gredos.

Maier H. (1993). Problemi di lingua e di comunicazione durante le lezioni di matematica. *La matematica e la sua didattica*. 1, 69-80.

Radford L. (1997). On psychology, historical epistemology and the teaching of mathematics: towards a socio-cultural history of mathematics. *For the Learning of mathematics*. 17, 1, 26-33.

Speranza F. (1997). *Scritti di Epistemologia della Matematica*. Bologna: Pitagora.

Stuart Mill J. (1843). *A System of Logic*. London: J. W. Parker.