249. D'Amore B., Fandiño Pinilla M. I. (2015). La Matemática en las Aulas de Primera Infancia. In: AA.VV. (2015). *Actuando para reposicionar capacidades en la primera infancia*. Actas del 18° Congreso Internacional De Educación Inicial homónimo, Neiva (Huila), 30 abril – 1er mayo 2015. Conain – Confederación Nacional por la Infancia de Colombia. Volume in DVD. 16-30.

XVIII Congreso Internacional de Educación Inicial, 30 04 – 2 05-2015, Neiva, Colombia

La Matemática en las aulas de Primera Infancia

Bruno D'Amore (1) y Martha Isabel Fandiño Pinilla (2)

(1) PhD en Mathematics Educacion, PhD honoris causa en Social Sciences and Education (University of Chyprus); DIE, Doctorado Interistitucional in Educacion (Enfasis Matematica), Universidad Distrital "Francisco José de Caldas", Bogotà, Colombia.
(2) PhD en Mathematics Education; Dipartimento di Matematica, Università di Bologna, Italia.

bruno.damore@unibo.it
www.dm.unibo.it/rsddm
www.incontriconlamatematica.net/sitoufficialebm/index.php

Palabras clave: aprendizaje espontaneo, competencias matemáticas en el preescolar, modelos mentales de matemática, estrategias ingenuas en el *hacer* matemática.

Aprendizaje espontáneo de la matemática

A la palabra "matemática" muchas personas asocian estereotipos académicos: expresiones, fórmulas, figuras, teoremas de aprendizaje memorístico, ecuaciones en las cuales se debe encontrar el valor de la incógnita, cálculos,… En estas condiciones, si se nombran conjuntamente los términos "matemáticas" y "preescolar", la reacción más típica es de estupor o de desdeño.

Una confirmación de este comportamiento podría, al parecer, estar ligada con los parámetros de los precedentes lineamientos en los cuales los campos de experiencia o dimensiones de desarrollo infantil y de competencias en la primera infancia.

reflejan las disciplinas académicas, pero sin nombrarlas.

Esto podría interpretarse de dos maneras diametralmente opuestas:

aquellas disciplinas que aparecen delineadas en estos niveles de edad sí es matemática, pero es mejor no decirlo;

aquello todavía no es matemática.

Nos parece bien: la elección de las dimensiones de desarrollo infantil y de competencias en la primera infancia es óptima, nada más adecuado, no sólo para un alumno tan joven, sino en general, para un discípulo; no obstante, nos parece excesivo llegar a no nombrar nunca la disciplina que acompaña tale desarrollo, como si se quisiera huir de ella.

Los estudios de didáctica de la matemática de los últimos treinta años han puesto en evidencia la delicadísima función mediadora que tiene el profesor de matemática en la historia cognitiva de un individuo. Pero tales estudios solamente hacen referencia a la escuela primaria o a la escuela secundaria, en ocasiones a la universidad. Es realmente difícil encontrar estudios significativos donde el objeto de estudio sean los niños que cursan el preescolar.

Esto nos obliga a precisar mejor nuestra posición.

Es ya una actividad común de todos los maestros de primer grado de primaria hacer un reconocimiento de las competencias matemáticas que poseen los niños en el momento de su ingreso. Y no sólo eso: en el tema "aritmética" del primer grado de primaria se insiste justamente en

el hecho de que los niños ya poseen diversas competencias en relación con los números, las cuales no deben considerarse nulas, y sobre las cuales debe fundamentarse la didáctica sucesiva. Mirando más de cerca, los niños poseen ya numerosas intuiciones sobre el número como ordinal, como cardinal, también como valor numérico del dinero, en el uso relativo al tiempo, como expresión de una medida, incluso tienen una imagen del número visto como un hecho recursivo (por ejemplo +1,+1, +1, …), pero ciertamente la intuición de mayor presencia (aquella que surge de modo espontáneo) es la del llamado número-etiqueta.
Es verdad, las actividades inteligentes que se proponen en preescolar (rimas infantiles con números, juegos oportunos, incluso con juegos libres, cantos,…) *refuerzan y estimulan* pero no *crean* una imagen del número, porque esta ya existe.
Por ejemplo, ¿qué imagen se hacen los niños del número o, mejor aún, de particulares números?, ¿qué imágenes se hacen de los predicados ligados al número? En síntesis, ¿qué significa, por ejemplo, que un número sea "grande"?
En una experiencia llevada a cabo en una escuela de infancia de Ozzano Emilia (Bolonia), jugué con niños de cinco años, entrevistándolos colectivamente. Las respuestas, como ocurre siempre, parecían a primera vista poco coherentes en relación a las preguntas formuladas. Pero, consciente de esta posibilidad, dispuse previamente una grabación con videocasete, que analicé luego con calma y atención. Se puso entonces de manifiesto, claramente, que para muchos niños, un número es grande si su nombre en lengua es largo y rico de consonantes (mejor aún: una mezcla no bien definida entre las dos cosas), al menos desde un cierto punto. En conclusión, del 1 hasta el 20, me pareció que los niños dominaban un orden natural correcto; luego pasábamos a cientos, miles y luego a números… "fonéticamente ricos", como doscientos treinta y siete, cuatrocientos veintidós,…
En otras investigaciones (D'Amore, 2008; D'Amore, Fandiño Pinilla, 2012) demostramos que los niños son totalmente conscientes incluso del hecho de que si un número se construye con muchos ceros es un número grande (no siempre a propósito).
De cualquier manera, hay una influencia de la conciencia adulta, aprendida por experiencia o por imitación (los dos principios base del aprendizaje espontáneo), luego surgen modelos construidos de manera autónoma, impuestos por algunos (los líderes) y que otros niños toman como propios.
Queremos decir: puede suceder que el modelo para los números de un niño A llegue sólo hasta el número 20 (tomo este número como ejemplo significativo porque me pareció recurrente) y que más allá de ese límite, lo que existe es el caos. Esto no sería del todo increíble, especialmente si examináramos las competencias numéricas formales de muchísimas civilizaciones, incluso hoy en día. Si pensamos que en francés "mucho" se puede decir *très*, que evidentemente tiene la misma raíz de *trois*, se entiende de inmediato que no nos debe sorprender que hubiese pueblos que tenían nombres para los números uno y dos, pero expresaban lingüísticamente el tres como "multitud". Pueblos más evolucionados dieron nombres a otros números significativos y distintos, llegando algunos hasta el cuatro, otros hasta el diez, otros hasta cien.
Ese niño A que llega a dominar lingüísticamente y mediante modelos mentales adecuados hasta el número veinte, luego, quizá, para otros números como veintiuno o cuarenta y cinco, tal vez el nombre que mayor se adapta sea "multitud". Después de cierto punto, puede ser que el modelo mental ya no ayude. Pero esto no significa en absoluto que el niño no tenga a su disposición nombres de números mayores al veinte. Tendrá una imagen (al menos lingüística) del número ciento veinte, si, por ejemplo, juega acumulando puntos; o bien la imagen del número sesenta y tres si está jugando bingo, o escaleras y serpientes (o escaleras y toboganes). De otra parte, también el miembro de la tribu que cuenta sólo hasta diez y luego, para los números del once en adelante siempre dice "muchos", no es verdad que no tenga algún tipo de experiencia numérica: sabrá distinguir bien, por ejemplo, dos racimos de banano, uno de once y otro de veinticinco frutos.
Pero si un niño B impone el modelo lingüístico fonético según el cual mientras más largo y rico en consonantes sea el nombre de un número, más grande es, entonces el niño A puede estar convencido de lo mismo, justamente porque, en ese momento, no tiene otro modelo más adecuado.

De esta manera, A aprendió algo de matemática: el orden de los números naturales. Lo ha aprendido de un modo espontáneo, aceptando simplemente una sugerencia implícita en la respuesta de un compañero de clase en el cual confía. Y resulta absolutamente evidente que los niños aprenden más de sus coetáneos más capaces que de nosotros los adultos.
Así también pueden nacer modelos mentales. Sería de gran importancia conocerlos, para desarrollar una didáctica más eficaz y circunstancial de la matemática; pero esto es increíblemente difícil.
Las entrevistas hechas a los niños pueden crear una mayor conciencia en este campo, si se conducen magistralmente y si el entrevistador tiene presente que el sujeto responderá no a la pregunta que se le hace, sino a la pregunta que él (el sujeto mismo) ha inferido, extraído, o creado para sí mismo, en todo caso motivado por la pregunta del entrevistador: por asociación, por la evocación de una imagen o quizá por un recuerdo. El no tener en cuenta esta realidad puede ocasionar errores de interpretación ridículos o incluso graves. El niño *siempre* interpreta aquello que le dicen, la pregunta que le hacen, también en matemática.
Desde hace algunos años, mientras los requerimientos didácticos propuestos por el grupo de Bolonia en los años anteriores prosiguen su lenta difusión autónoma, nosotros estamos trabajando en una nueva empresa, que quizá, podría llevar a conclusiones didácticas diversas. Estamos estudiando básicamente el aprendizaje espontáneo de la matemática, para el cual se adapta mejor el término “ingenuo”. Esto es válido tanto para los niveles de escuela superior, media o primaria, como para el preescolar.
Por ejemplo: si se le da a un niño de cuatro años el texto de un problema aritmético de primer grado de primaria para que lo resuelva, ¿cómo reacciona el niño espontáneamente? El docente de primaria da por descontado que su alumno centrará toda su actividad en la resolución del problema propuesto. Pero esto sucede porque, de un modo más o menos implícito, hay ya una norma social definida de interrelación alumno-docente de la cual todo parte: existe ya un *contrato didáctico* vigente. En el preescolar, entendido en su sentido más genuino, aunque haya muchos contratos (sobre todo ligados a la socialización), no existe todavía uno ligado a la resolución de problemas. Es por tanto curioso el comportamiento de los niños que en realidad difiere de lo esperado; algunos intentarán resolverlo (con una modalidad espontánea, no configurada previamente por el docente), y habrá otros muchos que no sienten el texto como estímulo, como un requerimiento para dar una respuesta, sino como una narración, y actúan de acuerdo con esa interpretación.
Como lo habrá ya notado el lector, muchos de los términos que hemos usado hasta aquí, son términos muy precisos que necesitarían o bien de una definición explícita o de una referencia bibliográfica adecuada (D’Amore, 2006).
Algunos de los estudios llevados a cabo en preescolar resultaron muy útiles para el análisis de los problemas que proponemos para el primer ciclo de la escuela primaria.

Modelos mentales que se forman espontáneamente
El mundo de la matemática escolar con frecuencia está lleno de estereotipos. Los estudiantes perciben la mayoría de las actividades (en cualquier nivel escolar) como una masa de mecanismos aparentemente inútiles que pareciera que no tienen ni pies ni cabeza. El por qué en los primeros años de la escuela superior, por ejemplo, los alumnos y los profesores (y por ende la sociedad) deben perder tiempo (y por lo tanto dinero público) en efectuar cálculos inútiles y repetitivos de expresiones inútilmente complejas, es para muchos un gran misterio.
El estereotipo se encuentra en cualquier parte:
en los modos de decir
en los modos de hacer (y esto lo hemos denunciado nosotros una y otra vez, junto a otros estudiosos de didáctica de la matemática del mundo entero)
y, lo que es peor: en los modos de pensar.
Un juego banal y en apariencia desorientador, nos resulta útil. Se trata de un ejercicio simple que invitamos al lector a resolver:

Un autobús parte del terminal con 3 pasajeros a bordo. En la primera parada suben otros 3 pasajeros. En la siguiente se baja 1 pasajero y suben 4. Luego, en la siguiente parada se bajan 2 pasajeros y suben 3. En la siguiente no se baja ninguno y suben 4.
¿Cuántas paradas hizo el autobús?
Si el juego se presenta de forma oral, el 100% de los presentes admitirá haber contado los pasajeros y haber ignorado el número de paradas. ¿Por qué? Es obvio: cuando hay números, hay que calcular.
Es también conocido el resultado que muchos niños de primaria dan al siguiente problema:
Un campesino tiene 12 ovejas y 6 cabras. ¿Cuántos años tiene el campesino?
La respuesta de muchos niños es: 18 (que corresponde a la suma de los datos numéricos presentes en el texto).
Este tipo de actitud ha sido ampliamente estudiada por psicólogos y por matemáticos interesados en las dificultades que tienen los estudiantes cuando intentan resolver problemas matemáticos y por tanto es ampliamente conocido. Se le conoce con el nombre de "contrato didáctico" (D'Amore, 2006).
Ahora bien, la actividad matemática es exactamente lo contrario de los estereotipos. ¿Por qué, entonces, se le da una imagen similar? ¿Cuándo inicia? ¿Por qué? La respuesta a la última pregunta es la más fácil: el por qué debe buscarse en la idea que el mismo profesor tiene de la matemática.
Quien enseña, con frecuencia se limita a repetir, a imponer, a sugerir estereotipos, no a crear ni a aceptar creaciones que luego no sabría cómo manejar; en el caso de la matemática, tiende a re-proponer más o menos aquello que recuerda de sí mismo como alumno, con frecuencia de un modo desfigurado, con mínimas reinterpretaciones personales. Debería trabajarse en situaciones a-didácticas, pero casi siempre se trabaja en situaciones didácticas (D'Amore, 2006).
En cuanto al "cuándo se inicia", posiblemente se inicia desde el preescolar, con actitudes demasiado formales; el/la docente, cuando debe enseñar matemática, asume una actitud y un modo de comportarse nada natural, a veces antipático, aburrido, estéril (el/la misma docente, en cambio, cuando enseña otra materia, es brillante, creativa, inteligente, animada, simpática,…).
En cuanto al "por qué" se da una imagen similar, la causa creemos nosotros sea la falta crónica de una preparación adecuada en matemática; más conoces a la matemática, más te sientes tranquilo y creativo ensenándola, no necesitas ser demasiado formal.
Dicho esto, volvemos al título de este párrafo.
Es necesario prestar atención: mientras muchas otras materias académicas se aprenden en familia, por la calle, por casualidad, como la lengua madre o un idioma extranjero, la geografía o partes de ella, la historia o partes de ella, en el caso de la matemática es bastante raro que algo así suceda, ya que la gran mayoría de la matemática se aprende, desafortunadamente, sólo en el aula de clase.
No es que la calle no enseñe matemática, todo lo contrario. Sin embargo, mientras el idioma que se aprende en la calle o en la familia el alumno lo lleva al aula, porque ese es su equipaje y así se usa, la matemática que se aprenden en la casa o por la calle parece estar fuera de lugar o incluso oponerse a aquella académica.
Por todo esto se forman dos aprendizajes:
uno profundo, al cual contribuyen todos los ambientes;
uno epidérmico que con frecuencia tiene como fuente la escuela.
En lo profundo, el alumno se hace modelos personales de las cosas y de la cultura, por lo tanto también de la matemática; y estos modelos profundos son creados o bien por la escuela o bien por los ambientes externos a la escuela. Pero luego él aprende a usar, por el tiempo estrictamente necesario, otros modelos, aquellos epidérmicos, que no son profundamente suyos, sino que están pegados de un pelo y listos para caerse.
Por lo tanto hay modelos formados en lo profundo de cada uno, son los que cuentan en verdad, y modelos epidérmicos que no inciden sobre la cultura real, ni sobre la capacidad real, mientras no se vuelvan profundos.
Queremos exponer un ejemplo famoso.

En el primer grado de primaria, el maestro hace que los niños se apropien de la adición entre números naturales. Normalmente logra tener cierto éxito, especialmente cuando por "adición" se entiende la formalización matemática del concepto intuitivo de juntar dos cantidades diferentes:
En torno a una mesa hay 3 chicos y 4 chicas, ¿cuántos son en total?
Es un ejemplo clásico justo por introducir uno de los modelos intuitivo que tiene la adicción, al alcance también de niños de preescolar.
Visto el éxito, el maestro les propone a los niños la multiplicación.
¿Qué quiere decir 4×3? Simple, quiere decir $4 + 4 + 4$, es decir una adición repetida, en la cual el sumando 4 aparece 3 veces. Una buena imagen gráfica es la que los maestros de hoy llaman la "formación en línea": cuatro puntos (que pueden representar automóviles, caramelos, soldados de plomo) repetidos tres veces, es decir tres filas de cuatro soldaditos de plomo cada una.
Y bien. ¿Dónde está el error? No hay error, es más, la imagen propuesta como modelo es óptima, funciona y logra convencer. Y no sólo eso, sino que se le refuerza al niño con otros ejemplos: 2×7 son dos cerezas que se recogen siete veces, o siete filas de dos cerezas; 6×8 son ocho filas de seis soldaditos de plomo; y así por el estilo.
El problema con esta imagen es que es tan simple y perfecta, tantas veces reforzada, que llega a convertirse demasiado pronto en *un modelo estable*, tanto que de ahí en adelante condiciona al alumno cada vez que se habla de multiplicación. Es tal su influencia que induce la formación de una idea no dicha por el maestro y es aquella de que el producto siempre es mayor que los dos factores.
Pero luego, cuando llega al tercer grado de primaria y debe tratar el argumento del Sistema Métrico Decimal, entonces se vuelve un problema. Porque $100 \times 0{,}1$ ya no se adapta al modelo; ¿qué significa 0,1 filas de 100 soldaditos? La espontaneidad del modelo choca duramente contra el formalismo de acuerdo con el cual $100 \times 0{,}1$ es igual a 10. Además, como un sub-modelo inducido, el resultado debería ser mayor a 100 y no lo es. Un trauma cognitivo.
Estamos de acuerdo en que aprender quiere decir ser capaz de cumplir un proceso de asimilación y acomodación. Pero este proceso requiere ayuda, no obstáculos. Justo en aquellos niños en quienes la conciencia del modelo de la formación en línea es más fuerte, se da un rechazo; se crea una ruptura que podría incluso ser irreparable (hemos encontrado alumnos universitario de 19 años convencidos del hecho que, sin hacer el cálculo, 18×0.25 es mayor que $18\div0.25$, pues en el primer cálculo aparece el $\times$).
A veces, en matemática, además de la imposibilidad de adaptar el propio modelo, formado a causa de una nueva y extraña situación, surgen otras mil dificultades; por ejemplo, la multiplicación que hasta ahora se hacía era con cantidades discretas, caramelos, soldaditos de plomo, carros; de repente se pasa a multiplicar dos magnitudes continuas como cuando se multiplican las dos longitudes de un rectángulo para obtener un área.
El lector nos perdonará por el hecho de que tomamos nuestros ejemplos sólo de los primeros años de la escuela primaria y prácticamente ninguno de los grados de preescolar. Lo cierto es que mientras abundan los ejemplos para la franja de 6-11 años, hay poquísimos estudios para la franja de 3-6. En cambio, en nuestra opinión, justamente es en el preescolar donde inician a formarse modelos espontáneamente, bien sea con base en las actividades escolares, o bien a partir del contacto con la vida cotidiana fuera del aula.
El niño debe organizar lógicamente en sus propios modelos todo aquello que lo circunda y le sucede: por lo tanto, los modelos que en buena parte tienen que ver con el mundo de la matemática se forman espontáneamente.

Conocimientos a la base de las estrategias ingenuas que se establecen al hacer matemática
Aunque en otros espacios hemos buscado definir de manera precisa (hasta donde es posible en este campo) el adjetivo "ingenuo" en relación con las "estrategias", aquí usaremos el mismo adjetivo de modo… ingenuo, es decir, entendiendo lo que este término sugiere intuitivamente.
Sobre la base de su propio conocimiento, poco o nada formal, las estrategias puestas en práctica por los niños de 3 a 6 años al hacer matemática sólo pueden ser ingenuas; y persistirán en esto hasta

tanto no tengan la consciencia de lo que hablamos en el apartado anterior. Después de esto, el adjetivo “ingenuo” no calza más, aunque no se desarrolle inmediatamente un aparato formal (sería interesante, sin embargo, discutir sobre lo que significa “formal”).
Propondremos ahora algunos ejemplos sobre las capacidades que posee el niño de 3-7 años en el campo matemático, y que por lo tanto constituyen la reserva que usa al elaborar sus propias estrategias.

Ejemplo 1: El niño sabe contar.
Entendámonos bien sobre el sentido de este verbo; podemos sostener que “contar” significa un conjunto de tres cosas:
tener consciencia de que existe un primer número (por lo general: “uno”);
que después del uno viene el dos y que podemos siempre continuar: después de un número hay otro (y sólo uno) que le sigue, en un proceso que continúa (¿sin un fin?);
conoce los nombres de los números que se suceden en el conteo; vale la pena profundizar sobre este punto.
En las lenguas modernas, comúnmente hay once nombres distintos para los números del 0 al 10 y luego se construyen los nombres de los números sucesivos utilizando los nombres anteriores, combinados de varias formas; en español el once es una reducción del uno-diez, doce del dos-diez, trece del tres-diez, catorce del cuatro-diez; quince del cinco-diez… Después hay una ruptura en la regla; ya que dieciséis del diez-seis, diecisiete es diez-siete, dieciocho es diez-ocho, diecinueve es diez-nueve con la inversión de los dos nombres. Finalmente con el veinte inicia una regla fácil que se arrastra hacia adelante sin grandes cambios. Construir los nombres de los números no es algo banal. Ahora bien, a la luz de cuánto hemos dicho, nos parece que podemos afirmar que un niño que cuente en voz alta, de este modo: *«uno-dos-tres-cuatro-siete-nueve-seis-…»*, no es que *no sepa contar*, porque demuestra en las dos primeras partes haber entendido lo que significa contar, lo que *no sabe es el nombre de algún número*. O mejor, los nombres los sabe, pero todavía no tiene la consciencia sobre dónde poner esos nombres, en qué punto de la secuencia. Por lo tanto, sostenemos que el niño, comúnmente, sabe contar, aunque presente alguna incertidumbre lingüística (y no matemática, en un sentido estricto).

Ejemplo 2: El niño sabe que los números tienen varias y diversas funciones.
El número puede servir para contar, para indicar una cantidad, una medida, para indicar una u otra posición. No se sorprende por esta variedad de usos, es más, lo percibe como algo natural. Lo que sucede, en todo caso, es una variedad de modalidades de uso, que van de acuerdo con la función. Gérard Vergnaud (1991) señala cómo un niño que cuenta no sólo por contar, sino para indicar una cantidad, cuando llega al último natural-ordinal, con el cual indica la cardinalidad del conjunto contado, pone un énfasis diverso al pronunciar ese último número, o bien porque lo repite (1, 2, 3, 4, 5, … 5!), o bien porque lo pronuncia de una manera diferente (1, 2, 3, 4, **5**). En esta actitud (y en otras formas análogas) se ve bien cómo el niño tiene consciencia de los diversos usos del número. Ningún niño dirá que una página de un álbum que mide 4 lápices viene después de un carro que mide 3 lápices. Aunque en forma inconsciente, él entiende que “ese” 4 no es el subsiguiente de 3, al menos no en ese contexto. Ningún niño se sorprende por el hecho de que el puesto n. 2 al teatro sea para una sola persona y no para dos, etcétera.

Ejemplo 3: El niño sabe organizar estrategias
En Pinerolo (Turín), Francesco Aglì y Aurelia Martini (1989, 1995), por muchos años, han recogido, en un voluminoso dossier, documentos relativos a los juegos de estrategia hechos por los niños, con protocolos auténticos. Un tesoro oculto. Es verdad, jugar ajedrez para un niño de tres años significa poner las piezas-soldado de pie y luego hacerlas caer con una pelota. Pero un niño de 5 años es capaz, perfectamente, de jugar Vendaval, o Triqui, o Canicas,… y de explicar lo qué está haciendo.

Ejemplo 4: El niño sabe representar situaciones
A algunos niños de Bolonia, de Valeggio sul Mincio (Verona) y de Imola (Bolonia), les propusimos una ejercicio de aritmética tomado de un cuaderno de matemática de los cursos sucesivos.
Uno de los textos era:
Pedrito va al mercado y compra 6 huevos. En el camino de regreso a casa rompe 2. ¿Cuántos le entrega a la mamá?
Las respuestas fueron muy variadas. Hubo quien escribió 4 en todos los modos posibles. Hubo quien dibujo a una mamá con una "manota", dispuesta a castigarle por el descuido. Hubo quien dibujo una piedra, como causa del tropiezo que le costó a Pedrito los dos huevos. Hubo quien dibujó huevos, quien dibujó una casa con el Sol, quien intentó transcribir el texto a su manera.
La serie de casos parece enorme; pero los podemos resumir así:
respuestas inherentes, de algún modo, al contexto del problema;
respuestas formales o que se presumen como tal;
respuestas figurativas;
respuestas que no están relacionadas con el contexto.
Sin embargo, debemos estar atentos: las diferencias no son triviales o evidentes. La respuesta del niño que dibujó la piedra, sin una entrevista personal, podría clasificarse entre las respuestas no relacionadas con el contexto, y sin embargo debe clasificarse entre las respuestas que son inherentes al contexto, figurativas. Por lo tanto, cada respuesta debe ser analizada cuidadosamente y debe ir acompañada de un diálogo directo e inmediato con el autor.
De hecho, el mismo problema, propuesto a finales del primer grado de primaria, produce resultados muy diferentes: aunque se encuentren aún respuestas inherentes al contexto, figurativas (estas se siguen presentando en algunos grados sucesivos, tal como los investigadores han observado en muchas experiencias), las respuestas no relacionadas con el contexto desaparecen. La gran mayoría de las respuestas son ahora formales (o se presumen como tal: 6-2=4). Demasiado pronto. Los niños no tienen aún la capacidad para dominar este tipo de simbolismo y el aparato formal que los profesores introducen de inmediato, termina con agregar una pesada carga de formalismos inútiles a algo que podría darse de forma natural, perdiendo de vista el lado conceptual.
Por ejemplo, se ocasiona un daño terrible al sustituir la resolución espontánea de un problema con el uso de unas herramientas inútiles y pesantes, por ejemplo los así llamados "diagramas de flujo"; de modo más general, resulta destructivo para el pensamiento matemático dejar de usar comportamientos intuitivos, sustituyéndolos por mecanismos engorrosos e inútiles (Brousseau, D'Amore, 2008).

Ejemplo 5: El niño tiene varias ideas sobre la medida y sobre los procesos de medición, en varios contextos.
El niño normalmente demuestra un conocimiento bastante bueno sobre el uso del dinero, o al menos de su significado, desde un punto de vista matemático, aunque si en ocasiones tiende a dar mayor valor a las monedas más grandes o a los grupos más numerosos de monedas. Tiene ideas más o menos buenas sobre la medición de lo largo, de lo ancho o de la profundidad. Poca o ninguna familiaridad con el concepto de área, pero tiene una idea bastante bien fundada sobre áreas iguales (en especial si ha jugado con el tangram o si ha yuxtapuesto azulejos, o ha plegado hojas de papel en un juego de simetría). Vale la pena subrayar que el niño adquiere alguna experiencia con el metro, el litro, el kilo,…; sin embargo, toda la idea didáctica de la "pre-medida" (según la cual, antes de pasar a las medidas "adultas", el niño debería usar otras) ha estado alejada del mundo del preescolar o, por lo menos, hoy por hoy es algo en lo que se hace muy poco énfasis. Estamos todos de acuerdo en que se puede operar con todas las unidades de medida difusa, sobre las cuáles el niño oye hablar ya desde pequeño.

Ejemplo 6: El niño tiene una discreta habilidad sobre varias cuestiones de naturaleza topológica.

Ejemplo 7: El niño tiene una discreta habilidad sobre el hecho de que hay reglas para la formación de frases y de palabras.
Esto lo lleva a construcciones sintéticas de frases.

Es obvio que podríamos continuar, con muchos ejemplos más, o quizá refinar considerablemente los ejemplos precedentes (los ejemplos 5 y 6 pueden proporcionar ideas para la investigación). No se puede no tener en cuenta estas habilidades básicas ya adquiridas, ni en la didáctica dentro de los niveles de preescolar, ni en el momento de pasar a la escuela primaria.
La estupidez absurda de pensar que el niño que ingresa a la primaria es una tabla rasa, está muerta y enterrada. Así como parece haber sido anulada la tendencia a evaluar fases o estadios sobre aquello que Pedrito no sabe hacer: Pedrito sabe y sabe hacer mucho. Y es mucho más productivo, para los futuros procesos de enseñanza-aprendizaje, que el educador sepa reconocer y aprovechar, en positivo, las habilidades de Pedrito en lugar de evaluar su estadio mental o cognitivo según lo que *no* sabe hacer.

Uso de estrategias ingenuas en el *hacer* matemática

¿Qué hacen los niños de preescolar cuando se disponen a hacer matemática? El contrato didáctico, tan fuertemente presente en las actitudes usuales en la primaria, tiene quizá menos influencia en esta fase, porque en el preescolar no hay todavía una verdadera expectativa social o una homologación de los comportamientos que se les piden a los alumnos. En síntesis, e muchos países no hay una evaluación normativa de los resultados de los estudiantes, por ejemplo no hay evaluación.
Lo cual explica, en nuestra opinión, el porqué de la variedad de respuestas señaladas en el numeral anterior, en el caso del ejemplo 4 y de la subsiguiente uniformidad ya en los primeros días del primer grado de primaria; el contrato didáctico se dispara: ya no puedes ser espontáneo, debes responder según ciertas reglas que la escuela, poco a poco, te impone, con frecuencia, implícitamente. Entre estos: a los problemas de carácter matemático se responden formalmente, no intuitivamente, son necesario cálculos, siempre. Pero, como lo mencioné antes, educando el estudiante a romper los contratos, es posible que los chicos exhiben modelos externos no formales que representan más la situación real que la situación lógica; por ejemplo, en un problema sobre la velocidad de un automóvil, como respuesta o antes de hallar la respuesta, varios estudiantes de secundaria dibujaron un carro como un “punto de apoyo” concreto a la situación abstracta.
Podríamos casi decir (aunque la afirmación es ciertamente exagerada) que se da una batalla entre el aparato formal que se está construyendo y adquiriendo (impuesto prematuramente) y la tentación de actuar ingenuamente; entre la descripción lógica del procedimiento adoptado por hallar la solución (a veces inconscientemente o casi, porque está del todo vinculada al modelo interno) y la ingenua.
Prueba real de esta lucha son, en nuestra opinión, los numerosos niños, reportados por varios profesores de primaria, que dan la respuesta justa a un problema, pero no saben cómo la han hallado: no es por desafiar, ni por maldad, de verdad no lo saben, porque saber es conocer. Además, con frecuencia esta incapacidad es la expresión de un aprendizaje específico fallido dado que faltó por parte del profesor poner en evidencia, entre los intereses de los aprendizaje de la matemática: la comunicación en matemática (Fandiño Pinilla, 2010).
Y bien, ya en el preescolar se manifiestan todos estos casos. En la experiencia de “*Pedrito va a comprar 6 huevos, etc…*”, descrita en el numeral anterior, antes de hacer el dibujo adecuado para describir la situación problemática, algunos niños respondieron oralmente a la maestra: “cuatro”. Por lo tanto, habían entendido muy bien cuál era la pregunta del problema y cuál era la respuesta que debía darse. Pero, en el momento de dar una producción no oral de la respuesta, naturalmente, representaron la escena, de diversos modos, tal como la veían (un niño comprando huevos, un niño con huevos que caen, la casa de este niño, etc.), y no buscaron una representación formal del aspecto lógico del problema.

Aquí parece haber un primer punto crucial: una brecha entre solución y representación, una brecha que, en nuestra opinión, se arrastra en los años sucesivos, incluso en la escuela media, y más allá…
Para complicar aún más las cosas en la relación que hay entre la tendencia ingenua y el dar una solución, está lo que el docente espera sobre la interpretación lógica del problema y aquella que, en su lugar, el estudiante da, con base en su propia experiencia.
Un ejemplo válido para todos. En muchas clases de segundo ciclo de primaria dimos el siguiente texto, luego de haberlo discutido con los profesores:
Juan trabaja de las 9 pm del martes hasta las 6 am del miércoles. ¿Cuántas horas trabaja?
Antonio viaja de las 9 pm del martes hasta las 6 am del jueves. ¿Cuántas horas viaja?
¿Qué diferencia hay entre los dos problemas?
Es obvio que la atención de los profesores se concentró sobre la diferencia entre el miércoles y el jueves entre los dos problemas y por lo tanto sobre el +24 que caracteriza la solución del segundo problema con respecto al primero. Aparte de las respuestas numéricas que dieron los estudiantes, que examinamos en otro momento, lo que más nos interesa son las respuestas que dieron los chicos a la tercera pregunta: «*Que Juan trabaja y Antonio viaja*», con total y genuino desinterés por el aspecto lógico, pero en cambio, con un total y genuino interés por el aspecto narrativo.
¿Qué significa todo esto? En nuestra opinión, significa que la actitud "ingenua" tiene sus raíces no sólo en el niño de 3 a 6 años, ya que él está desprovisto de aparatos formales; la actitud "ingenua" está radicada profundamente en cada uno de quienes resuelven problemas, aunque sea de manera diversa, sin importar la edad. Hace parte del espíritu de la resolución de problemas, del hacer matemática.
Es necesario conocerlo y respetarlo.
Ciertamente, un niño de 3 a 6 años tenderá más fuertemente a hacer matemática de modo ingenuo, basando su actividad ya sea en las *habilidades matemática ingenuas* (en el numeral anterior ya dimos algunos ejemplos), como en las *estrategias ingenuas*.
Pero este adjetivo, *ingenuo*, no es negativo. Es más, dada la persistencia, esta actitud debe educarse. Podríamos llegar casi a decir que es más productivo educar esa actitud que no los aparatos epidérmicos (por ejemplo, los formales) los cuales con dificultad "penetran" en lo cognitivo más profundo.
En la práctica educativa matemática, ya difundida en el preescolar, hay actividades y juegos muy significativos en relación con esto, tales como el tangram, los teselados, juegos de lógica, juegos de números, recorridos, lecturas de mapas, construcciones de laberintos (no dibujados, sino verdaderos laberintos), simetrías (obtenidas con punzón, con marcador o con tijeras),… actividades que ya hemos explorado en el pasado y las hemos experimentado por varios años.
Pero no tenemos por qué olvidar que, a través de cada narración, cada diálogo, cada dibujo, cada esquema, cada entrevista, cada actividad, pasa o puede pasar un contenido matemático de primer orden, a condición que sea organizativo, racional o estructurante.
El lenguaje natural, con todas sus peculiares riquezas, es el perno del aprendizaje. Su aparato lógico es más que suficiente para los objetivos del preescolar y del primer ciclo de primaria, y también de otros.
Pero la actividad matemática del niño también puede ser específica. Pueden rastrearse ejemplos explícitos en los numerosos artículos y libros producidos por los miembros del Núcleo de Investigación de Bolonia (NRD).
El mensaje que debe llegar es que la matemática no se hace sólo… haciendo matemática; hacer matemática es asumir una cierta actitud al hacer otras cosas. Es un cierto modo de "ver" el mundo, de "leer" la realidad, de interpretar los acontecimientos. Todo eso está ya, potencialmente, en las actitudes ingenuas que muestran los niños. Es necesario prestar atención para no bloquearlas en favor de actitudes demasiado formales y, en cualquier caso, no espontaneas (este punto es de extraordinaria importancia en lo que concierne al debate sobre las *competencias*; puede verse, en particular, la contribución de Fandiño Pinilla, en D'Amore, Godino, Fandiño Pinilla, 2008).

Sugerimos también a los maestros, en el campo de la Investigación-Acción, que las experiencias que se repiten o que integren aquellas descritas en este numeral, estén bajo control de los Grupos de Investigación Didáctica, allí donde los haya.
Si el niño acepta la actividad, la matemática que surge espontáneamente es mucha. Se verá que los niños ya pueden dominar una gran variedad de tipos de problemas, o de situaciones, o de hechos o fenómenos de la realidad con habilidades que no dudamos en llamar "matemáticas". Y que caben, en buena medida, dentro de los ejemplos desarrollados en el apartado anterior.
Es por todo esto que la actividad matemática se expanden y se expande amplìan???. De "describe un juego" a "inventa un juego". De "resuelve un problema" a "inventa un problema". De "representa una situación" a "inventa una historia". Todo esto, naturalmente, en contextos adecuados y con el leguaje adecuado.
La correspondencia entre las situaciones que se crean, por ejemplo, y la coherencia entre las partes individuales que la constituyen, suministrará muchas indicaciones sobre la habilidad para elaborar estrategias (Fandiño Pinilla, 2010).
Sobresale aquí la palabra mágica "coherencia", pero con un significado distinto de lo que esta significa hoy en la práctica matemática de los matemáticos. En torno al concepto de coherencia se ha organizado una fuerte renovación de la matemática en los últimos 100 años, tanto que se ha sustituido el término "verdad" con la palabra "coherencia".
Nosotros entenderemos coherencia sólo como la no contradicción entre las partes individuales y entre cada parte y el todo; o bien como congruencia entre las propuestas que el niño hace y sus invenciones.
Pero no queremos, y lo decimos de explícitamente, que la coherencia venga identificada *trivialmente* como "correspondencia con lo real", esto porque además no creemos que este sea un criterio significativo para los niños de 3 a 6 años, edad en la cual la frontera entre el mundo real y el mundo fantástico es muy tenue, como es justo y natural que sea y que lo siga siendo.
Por ejemplo, estamos dispuestos a admitir que hay una coherencia dentro de ciertas fábulas, aunque contrasten con lo real: no existen gatos con botas pero, si admitimos que existen, ¿por qué no admitir entonces que quien las use puede cubrir siete leguas de un sólo paso? Lo llamaremos coherencia local y debe estudiarse caso por caso.
Alguien tendrá que asumir la responsabilidad de transformar en aplicaciones concretas, en indicaciones operativas, estas reflexiones que, sin embargo, están inspiradas en actividades efectuadas realmente en las clases y con experimentos probados en varias ciudades de diferentes países.
Nos parece necesario reiterar que este tipo de atención al niño, protagonista de la construcción del propio saber matemático, está caracterizando la didáctica de los últimos decenios luego de que, por mucho tiempo, se puso el acento básicamente en el proceso de enseñanza. Esto conlleva un mayor respeto del sujeto que aprende y una mayor consciencia de las dificultades y de los límites en la adquisición de la cultura y del método.

Bibliografía

D'Amore B. et al. (2015). *La matemática. Del preescolar a la escuela primaria*. Chia: Editorial Universidad de la Sabana.

Referencias

Aglì F., Martini A. (1989). *Spazio Tempo Eventi.* Roma: Armando.
Aglì F., Martini A. (1995). Rappresentazione e notazione della quanitità in età prescolare. *Età evolutiva*. 51, 30-44.

Brousseau G., D'Amore B. (2008). I tentativi di trasformare analisi di carattere meta in attività didattica. Dall'empirico al didattico. En: D'Amore B., Sbaragli F. (editores) (2008). *Didattica della matematica e azioni d'aula.* Actas del XXII Congreso Nacional: Incontri con la matematica. Castel San Pietro Terme, 7-8-9 noviembre 2008. Bolonia: Pitagora. 3-14.

D'Amore B. (2000). *La escolarización del saber y de las relaciones: los efectos sobre el aprendizaje de las matemáticas*. *Relime*. 3, 3, 2000, 321-338].

D'Amore B. (2006). *Didáctica de la Matemática*. Bogotá: Editorial Magisterio.

D'Amore B. (2008). El cero, de obstáculo epistemológico a obstáculo didáctico. *Boletín de la Sociedad «Puig Adam» de profesores de Matemáticas*. 78, 10-37.

D'Amore B. (2014). *Il problema di matematica nella pratica didattica*. Prefazioni di Gérard Vergnaud e di Silvia Sbaragli. Modena: Digital Index. [Versión en papel y versión e-book].

D'Amore B., Fandiño Pinilla M.I. (2012). *El número cero. Aspectos historícos, epistemológicos, filosóficos,conceptuales y didácticos del número más misterioso*. Bogotá: Magisterio.

D'Amore B., Fandiño Pinilla M. I., Iori M. (2013). La semiótica en la didáctica de la matemática. Prefacios de Raymond Duval, Luis Radford. Prólogo a la edición en idioma español de Carlos Eduardo Vasco. Bogotá: Magisterio.

D'Amore B., Fandiño Pinilla M.I., Marazzani I., Sbaragli S. (2010). *La didáctica y la dificultad en matemática*. Bogotà: Magisterio.

D'Amore B., Godino J., Fandiño Pinilla M.I. (2008). *Competencias y matemática*. Bogotà: Magisterio.

Fandiño Pinilla M.I. (2006). *Currículo, evaluación y formación docente en matemática*. Bogotá: Magisterio.

Fandiño Pinilla M.I. (2010). *Múltiples aspectos del aprendizaje de la matemática*. Prólogo de Giorgio Bolondi. Bogotá: Magisterio.

Vergnaud G. (1991). *El niño, las matemáticas y la realidad*. México: Trillas