Iori, M. (2014). Matemática y semiótica en el aula: un punto de vista necesario. In C. J. Mosquera Suárez (Ed.), *Miradas contemporáneas en educación: Algunos puntos clave para el debate* (pp. 27-44). Chia (Colombia): Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Capítulo 2

Matemática y semiótica en el aula: un punto de vista necesario

Maura Iori
NRD Bologna y Doctorado Universidad de Palermo

Resumen

La semiótica en aula, en las horas de matemática, está siempre presente, pero muchas veces descuidada, olvidada o ignorada; a menudo el estudiante encuentra dificultad en la matemática solamente porque la gestión de las representaciones semióticas, que el docente o la institución de referencia requieren, es muy compleja y problemática. En este artículo analizaremos este hecho mediante dos enfoques combinados entre sí para la didáctica de la matemática: el enfoque semiótico-interpretativo peirceano y el enfoque semiótico-cognitivo de Duval.

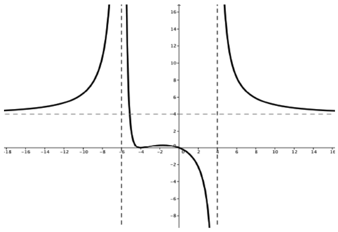
En el parágrafo 1 daremos algunos ejemplos que tienen la intención de ilustrar esta presencia y propondremos algunas preguntas, a las cuales responderemos en los parágrafos siguientes, después de haber profundizado en el discurso, también desde un punto de vista teórico haciendo referencia, en buena medida, a D'Amore, Fandiño Pinilla, Iori (2013), al que remitimos al lector interesado en estas cuestiones.

Palabras clave: componentes icónicas indexical y simbólicas, construcción cognitiva de un objeto matemático, enfoque semiótico cognitivo e interpretativo, objeto matemático, representaciones semióticas, semiosis, transformaciones de representaciones.

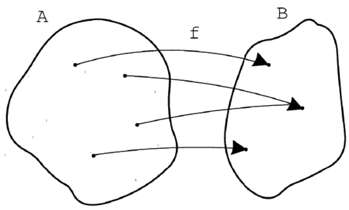
La presencia de la semiótica en el aula es explícita

Si se le pregunta a un estudiante de escuela secundaria: ¿Qué es una función?, podemos obtener como respuesta:

- un dibujo, por ejemplo:



- un símbolo, por ejemplo: «f (x)»
- una definición
- un diagrama, por ejemplo:

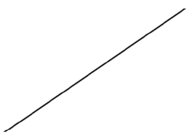


- una frase interlocutoria: «No sé»
- ...

En los cuatro primeros casos «las respuestas son representaciones semióticas del objeto pedido, no son el objeto al cual se hace referencia» (D'Amore, Fandiño Pinilla, Iori, Matteuzzi, 2013).

Del mismo modo, ante la pregunta: ¿Qué es una recta?, podemos obtener como respuesta:

- un dibujo, por ejemplo:



- una ecuación lineal del tipo: $ax + by + c = 0$
- una tentativa de explicación: «un ente primitivo»
- una frase interlocutoria: «No sé»
- ...

También en este caso, las primeras tres respuestas son representaciones semióticas del objeto pedido en diversos registros semióticos, no son el objeto al cual se hace referencia.

Después, si se le pide al estudiante determinar si dos rectas dadas son paralelas, entonces es necesario el uso de representaciones semióticas específicas, que también son diagramas en el sentido de Peirce, y de transformaciones de dichas representaciones.

Y así podríamos seguir.

El hecho es que los objetos matemáticos no son accesibles perceptiva o instrumentalmente, pero sí a través de los signos, o mejor, de los sistemas semióticos de representación. No son «cosas», en el sentido de Aristóteles.

De ahí la necesidad de hacer uso de la semiótica en el aula, desde un punto de vista semiótico en la didáctica de la matemática. También para responder a las siguientes preguntas:

- ¿Qué significa decir que un estudiante ha aprendido o ha construido cognitivamente un objeto matemático?
- ¿Cómo puede el docente distinguir el aprendizaje de un objeto matemático desde el aprendizaje de simples reglas de tratamiento de las representaciones del objeto en cuestión, en un registro semiótico dado?
- ¿Qué aspectos de las representaciones semióticas son más problemáticos en el proceso de aprendizaje de los estudiantes?

Pero estas preguntas conllevan otras más generales:

- ¿Qué es un objeto matemático?
- ¿Qué es una representación semiótica de un objeto matemático?
- ¿Qué es un signo?

Enfoque semiótico-interpretativo peirceano

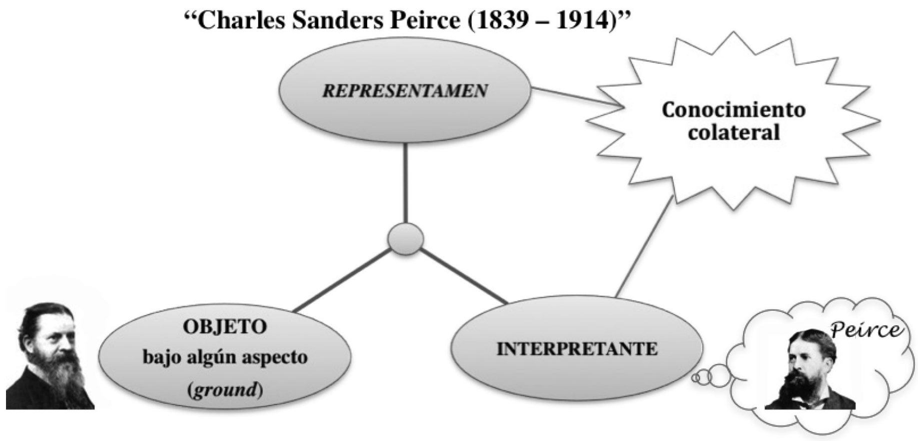
Charles Sanders Peirce (1839-1914) proporciona la siguiente respuesta (entre otras muchas):

> *«Un signo, o representamen, es algo que para alguien está por algo bajo algún aspecto o capacidad. Se dirige a alguien, esto es, crea en la mente de esa persona un signo equivalente, o tal vez un signo más desarrollado. Ese signo que crea lo llamo interpretante del primer signo. El signo está por algo, su objeto. Está por ese objeto no bajo todos los aspectos, sino con referencia a una cierta idea, que a veces he llamado ground del representamen» (CP 2.228, 1897).*[1]

De esta definición emerge una relación fundamental que involucra tres elementos:

- un *representamen*: el vehículo, la parte «material», del signo;
- un *objeto*: a lo que el *representamen* reenvía;
- un *interpretante*: lo que deriva o viene generado de la relación entre *representamen* y el *objeto*.

Para Peirce, la interpretación de un signo exige además un cierto *conocimiento colateral* del signo o del sistema de signos, es decir, un tipo de conocimiento obtenido de otras experiencias precedentes con lo que el signo denota y una cierta familiaridad con el sistema de signos.



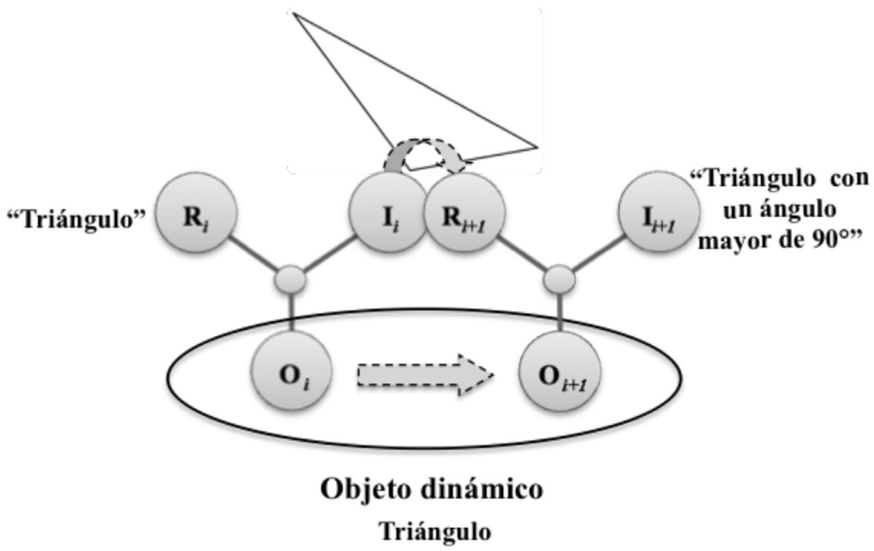
1 CP x.xxx (volumen.parágrafo) = *Collected Papers of Charles Sanders Peirce*.

El *objeto,* es decir, a lo cual el signo/*representamen* reenvía, tiene una naturaleza un poco más complicada que la que pueda parecer a primera vista. El objeto puede ser de dos tipos:

- *inmediato*, es decir, el objeto así como es representado por el signo;
- *dinámico,* es decir, el objeto realmente eficiente, pero no inmediatamente presente, lo que guía la producción del signo, y de lo cual el *objeto inmediato* representa únicamente un aspecto particular.

Por ejemplo, cuando se quiere hacer referencia a un triángulo genérico, por lo general se diseña una línea poligonal cerrada constituida por tres segmentos que reenvía inmediatamente a un triángulo escaleno. En términos semióticos, el triángulo dibujado es una interpretante del *representamen* «triángulo» (en lenguaje natural), cuyo *objeto inmediato* es el objeto matemático «triángulo escaleno», pero su *objeto dinámico* es el objeto matemático «triángulo» (los dos objetos, recordémoslo, son inaccesibles a los sentidos); su eventual reconocimiento depende del conocimiento colateral en juego.

El interpretante de un signo puede, en cualquier caso, volverse a su vez en el *representamen* de un nuevo signo que reenvía al mismo *objeto dinámico* (bajo algún aspecto) a través de un nuevo *objeto inmediato* y de un nuevo interpretante, y así sucesivamente, como en la siguiente figura:



Peirce sugiere aquí un proceso de *semiosis potencialmente* infinito, pero que, de alguna forma, las exigencias de la vida práctica inevitablemente interrumpen.

El interpretante puede ser, en particular, de tres tipos:

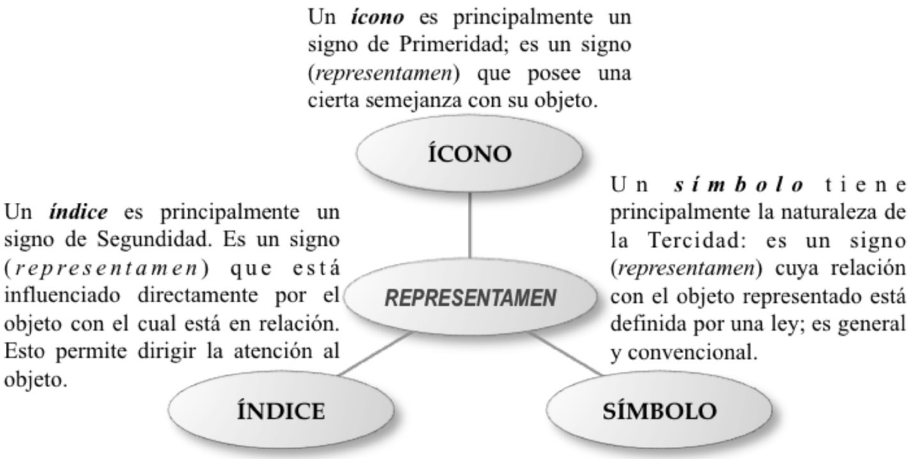
- *inmediato*, es decir, el primer efecto que un signo puede producir sobre su intérprete, una potencialidad semántica (por ejemplo, cuando el docente indica con el índice de la mano derecha el tablero, el efecto que se produce puede ser el de mirar al tablero y ver precisamente el dibujo del triángulo escaleno [obtusángulo o acutángulo] al cual el docente está señalando con el dedo);
- *dinámico*, es decir, el efecto producido realmente sobre un intérprete (por ejemplo, mirar el tablero en general, en respuesta al señalamiento del dedo);
- *final*, es decir, el resultado interpretativo al cual todo interpretante llega si el signo es suficientemente considerado (por ejemplo, mirar el dibujo del triángulo escaleno [obtusángulo o acutángulo] al cual el docente está indicando con el dedo y reconocer en él un triángulo genérico, o mejor aún, el objeto matemático «triángulo»).

Los tres polos de la relación de signos (*representamen*, objeto, interpretante) reenvían respectivamente a las tres categorías sobre las cuales Peirce funda su *faneroscopía*[2] o fenomenología:

- *Firstness* (Primeridad): cualidad pura, sensación, idea, posibilidad de existencia, vaguedad; pura posibilidad de signo;
- *Secondness* (Segundidad): reacción, resistencia, hecho, realización, singularidad, experiencia; mero hecho de signo;
- *Thirdness* (Terceridad): representación, mediación, hábito, ley, generalidad; ley de signos.

Sobre la base de estas tres categorías y de las relaciones que el *representamen* de un signo tiene con el objeto (dinámico) al cual hace referencia, Peirce distingue tres tipos fundamentales de signo/*representamen*: icono, índice y símbolo.

2 «La faneroscopía es la descripción del *phaneron*; y por *phaneron* yo entiendo el total colectivo de todo lo que está, de cualquier forma o sentido, presente en la mente, independientemente de su corresponder o no a algo real» (CP 1.284, 1905).



Un *representamen* icónico puede ser, en particular, de tres tipos:

- *imagen*: cuando la semejanza al objeto es puramente cualitativa,
- *diagrama*: cuando la semejanza al objeto es de tipo estructural o relacional,
- *metáfora*: cuando la semejanza al objeto es dada por la representación de un paralelismo con alguna otra cosa.

Tanto las fórmulas algebraicas como las figuras geométricas son diagramas en cuanto representan relaciones particulares. Por ejemplo, la expresión $(a + b)\ (a - b)$ es un diagrama que puede ser considerado un interpretante del *representamen* «producto de la suma de dos números por su diferencia» (en lengua natural). Existe, sin embargo, una diferencia fundamental entre los diagramas y los otros tipos de íconos: los diagramas están construidos según reglas y convenciones que definen un determinado sistema de representación:

> *«Un diagrama es un signo (representamen) que de manera predominante es un ícono de relaciones y al que [ciertas] convenciones ayudan a serlo. [En esto] también se usan índices, en mayor o menor medida. [El diagrama] debería realizarse sobre un sistema de representación perfectamente consistente, fundado en una idea básica simple y fácilmente inteligible» (CP 4.418, 1903 aprox.).*

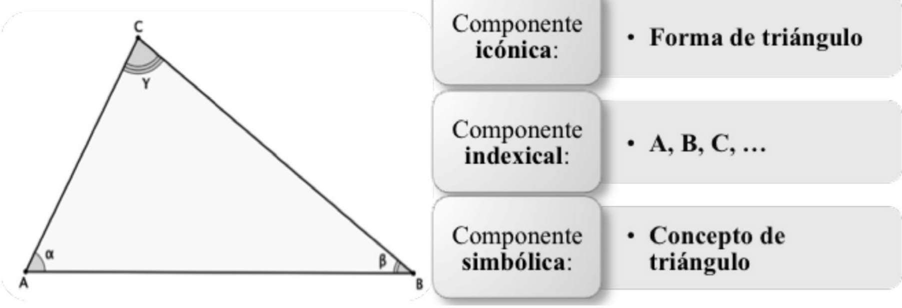
También el uso de las metáforas es generalizado e inevitable en matemática. Peirce usa el término *metáfora* para indicar una relación de semejanza entre un *representamen* y un objeto que deriva de un paralelismo con alguna otra cosa

(CP 2.277, aprox. 1902). En particular, el paralelismo entre las propiedades de los objetos concretos (accesibles a los sentidos) y las propiedades de los objetos matemáticos (no accesibles a los sentidos) es necesario e inevitable para comunicar y construir instrumentos de pensamiento verdaderamente eficaces. Por ejemplo, para describir el uso del signo "=" como relación binaria de equivalencia (no como signo de procedimiento) se recurre con frecuencia, al menos inicialmente, a la metáfora del equilibrio o de la balanza; solo en un segundo momento, en los primeros años de la escuela secundaria, en 7° u 8° grado, se comienza a considerar la relación de igualdad como una relación binaria particular, es decir, como un particular subconjunto del producto cartesiano del conjunto en el cual está definida la igualdad por sí mismo.

Entonces, podemos decir que un signo (*representamen*) tiene con su objeto una *relación*:

- *icónica*, si el signo representa el objeto por medio de una semejanza *simplemente cualitativa* (imagen) o *estructural* (diagrama), o por medio de una semejanza entre dos objetos o situaciones de naturaleza diferente (metáfora);
- *indexical* (de indicación), si el signo permite dirigir la atención al objeto, o si existe una conexión física (natural, artificial o puramente mental) entre el signo (*representamen*) y el objeto;
- *simbólica*, si dicha relación con el objeto representado es establecida por una convención.

Sin embargo, como el mismo Peirce evidencia, puros símbolos, puros íconos y puros índices, no existen. Un signo (*representamen*), y por tanto una representación semiótica de un objeto matemático, posee siempre una componente icónica, una componente indexical y una componente simbólica; pero siempre en relación con el intérprete y con su conocimiento colateral. Un ejemplo:



Además Peirce, en el intento por explicar nuestra capacidad de comprender y justificar los razonamientos, en particular los razonamientos científicos, focaliza gran parte de su atención en una forma particular de inferencia (distinta de la deducción y de la inducción). Se trata de la *abducción*, que define como el proceso que lleva a la formación de una hipótesis explicativa, una hipótesis en grado de explicar un hecho sorprendente o inesperado (CP 5.171-172, 1903). La abducción, para Peirce, puede explicar no solo el razonamiento científico, sino también la percepción, precisamente en la medida en la que se forma una hipótesis explicativa relacionada con lo que se observa. De hecho una abducción consiste en suponer un caso a partir de un resultado y de una regla; es decir, en suponer que un dato observado sea el resultado de una regla.

Se puede esquematizar, siguiendo el famoso ejemplo de los frijoles blancos de Peirce, de la siguiente forma:

Resultado:	*Estos frijoles son blancos*
Regla:	*Aquel saco contiene solamente frijoles blancos*
Caso:	*Estos frijoles provienen de aquel saco.*

O de la siguiente forma:

Resultado:	*x tiene la propiedad T*
Regla:	*Todo x del tipo H tiene la propiedad T*
Caso:	*x es del tipo H*

Es decir:

T	[Resultado]
$H \rightarrow T$	[Regla]
---------	-----------
H	[Caso]

En esta forma de razonamiento, una conclusión (no cierta, solo plausible) es aceptada porque explica los datos disponibles, convirtiéndose en una hipótesis explicativa.

Por ejemplo, para convencer a los estudiantes de los primeros años de secundaria de la validez, en la geometría euclidiana, del enunciado: *la suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo es igual a la medida de un ángulo llano*, se puede pensar en recortar un triángulo dibujado en una cartulina y doblar o cortar las extremidades (las «puntas») del triángulo de cartón, de forma tal que estas proporcionen un ángulo llano. En esta construcción suplementaria se manifiesta un pasaje de orden abductivo. La abducción, en tal caso, puede ser descrita de la siguiente forma:

Resultado: *El ángulo suma de los tres ángulos internos de un triángulo de cartón tiene como lados dos semirrectas que pertenecen a la misma recta*.

Regla: *Los lados de un* ángulo llano pertenecen a la misma recta.

Caso: *La suma de los ángulos internos del triángulo de cartón es un ángulo llano*.

¿Pero quién o qué garantiza la universalidad de la conclusión? Es decir, ¿qué garantiza que el dato observado (un diagrama individual) sea generalizable a todos los triángulos? Ciertamente podemos repetir la construcción con otros triángulos de cartón, pero la generalización aparece de todas formas muy problemática. Como bien lo saben los docentes (y como los estudiantes, antes o después, descubrirán en su recorrido escolar), un diagrama individual, diseñado o construido de alguna forma, no constituye una demostración (interpretante simbólico) de un enunciado (*representamen* simbólico).

El diagrama, es decir el momento icónico, constituye una fase transitoria (pero de la máxima importancia desde un punto de vista didáctico) entre dos momentos simbólicos (Bagni, 2009). En cada caso, su elección no es didácticamente neutra; no es desprovisto de efectos a corto o largo plazo, sobre todo en la construcción cognitiva de objetos matemáticos con propiedades de carácter figural o conceptual.

Enfoque semiótico-cognitivo de Duval

En el camino trazado por Raymond Duval, para la construcción cognitiva de un objeto matemático, lo que asume carácter prioritario es la noción de representación semiótica. Cada representación semiótica proporciona un contenido (sentido o modo de presentación) diferente, según el registro semiótico utilizado para su producción, mientras que el objeto representado se vuelve el invariante de un conjunto de representaciones. Duval (2008) evidencia la estructura, esencialmente diádica, de una representación semiótica de la siguiente forma:

{{*contenido* de la representación, registro semiótico utilizado},
objeto representado}.

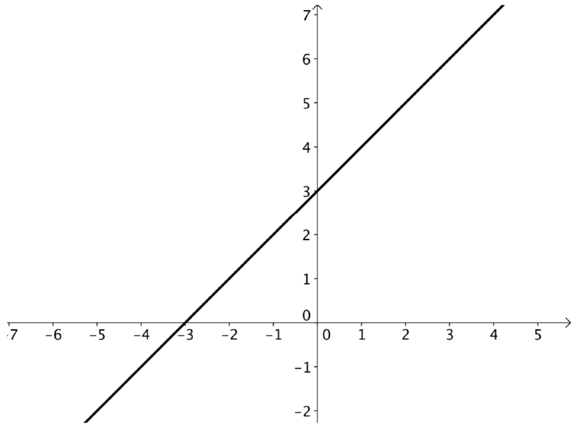
A menudo se tiende a no distinguir una representación semiótica de su contenido, o a no explicitar el registro semiótico que produce dicha representación; en tal caso, debe prestarse atención.

Por ejemplo, véase el caso del contenido de la representación semiótica (*representamen*) del objeto matemático «igualdad» (=), que generalmente no cambia en los diferentes registros semióticos en los cuales puede ser utilizado (registro de la escritura aritmética, registro de la escritura algebraica, registro de las notaciones vectoriales…); el contenido de la representación semiótica no cambia, el registro sí, entonces la representación semiótica del objeto matemático «igualdad» cambia.

De otra parte, el *representamen* "=" puede producir interpretantes (en el sentido de Peirce) diferentes, no solo en registros diferentes, sino también en el mismo registro: una relación binaria de equivalencia o un signo de procedimiento (da, es, resulta…), por ejemplo, en el registro de la escritura algebraica, según el *conocimiento colateral* en juego. Pero si el contenido ("=") de la representación semiótica y el registro no cambian, entonces la representación semiótica del objeto matemático «igualdad» no cambia.

Duval (1996) define un *registro semiótico* como un sistema específico de producción de representaciones semióticas, precisamente como un *sistema semiótico* (un conjunto de elementos y reglas organizativas para combinar o reagrupar los elementos en unidades significativas) que responde no solo a una función de comunicación o de objetivación, sino también a una función de *tratamiento*, es decir de trasformación de una representación de un objeto en otra (del mismo objeto) al interior del mismo sistema semiótico. Por ejemplo, cuando se pasa de $x - y + 3 = 0$ a $y = x + 3$, la representación cambia, pero el registro semiótico (el registro de la escritura algebraica) no.

Se habla de *conversión* cuando se pasa de una representación de un objeto en un registro semiótico determinado a una representación del mismo objeto en otro registro semiótico; por ejemplo, cuando se pasa de $y = x + 3$ (en el registro de la escritura algebraica) a la su representación sobre el plano cartesiano (en el registro grafico):

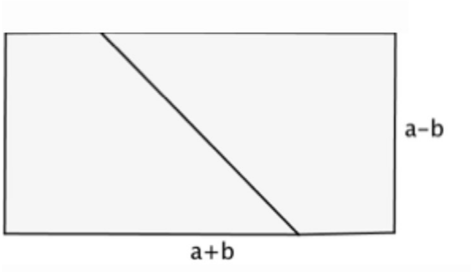


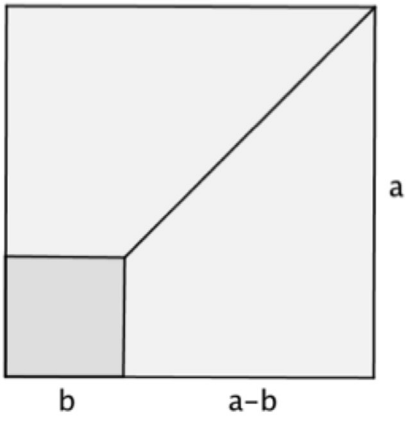
se trata de una transformación de representación que determina un cambio de registro sin modificar el objeto denotado.

Análogamente, los *representamen*:

$(a + b)\ (a - b)$

$a^2 - b^2$





(para $a > b > 0$)

siguiendo las reglas y las convenciones de los correspondientes sistemas de representación (registro de la escritura algebraica y registro de las figuras geométricas codificadas con símbolos que denotan propiedades de las unidades figúrales representadas), constituyen interpretantes del *representamen* «el producto de la suma de dos números por su diferencia», que reenvían al mismo objeto dinámico (objeto matemático), bajo algún aspecto, a través objetos inmediatos diferentes entre sí.

Cada representación hace emerger diferentes componentes (icónicas, indexicales y simbólicas), diferentes aspectos de un objeto, por tanto la elección de partida no es neutra ni indiferente; la elección puede ser determinante para la eficacia de la comunicación y de la construcción cognitiva de un objeto matemático.

Esta elección constituye una de las características semióticas de la actividad matemática, que se pueden resumir de la siguiente manera:

1. la elección del registro de representación y la elección de la representación en dicho registro;

2. las transformaciones de las representaciones, es decir, el pasaje de una representación semiótica a otra, a través de los tratamientos o de las conversiones.

Todo esto, teniendo en cuenta lo que se desea hacer emerger de la actividad o de la situación didáctica en la cual se encuentra.

Enfoque semiótico cognitivo e interpretativo

De acuerdo con el enfoque semiótico cognitivo e interpretativo, obtenido combinando el enfoque semiótico-interpretativo peirceano y el enfoque semiótico-cognitivo de Duval, los objetos matemáticos pueden ser concebidos como unidades culturales, emergentes de los sistemas de prácticas compartidas o de los procesos de *semiosis*, objetivados mediante signos (en el sentido de Peirce) o representaciones semióticas (en el sentido de Duval).

Dicho enfoque nos permite proporcionar respuestas específicas a las preguntas anteriores.

¿Qué significa decir que un estudiante ha aprendido o ha construido cognitivamente un objeto matemático?

Un objeto matemático se considera cognitivamente construido cuando el estudiante está en posibilidad de:

- elegir un registro de representación y una representación del objeto en dicho registro, para destacar propiedades específicas del objeto en una situación dada, y

- transformar dicha representación en el mismo registro (tratamiento) y en otro (conversión) de forma adecuada, reconociendo el mismo objeto (dinámico) en las representaciones transformadas del objeto dado (objeto inmediato en el sentido de Peirce).

En cualquier caso, el estudiante debe ser capaz de reconocer las situaciones apropiadas para elecciones apropiadas del registro. (Para profundizar estas cuestiones, véase D'Amore, Fandiño Pinilla, Iori, 2013.

¿Cómo puede el docente distinguir el aprendizaje de un objeto matemático desde el aprendizaje de reglas de tratamiento de las representaciones del objeto en cuestión en un registro semiótico dado?

Desde un punto de vista semiótico cognitivo e interpretativo, las modalidades de aprendizaje de un objeto matemático pueden ser de tipo:

- icónico
    a. *cualitativo*: la capacidad para usar *representamen* icónicos de tipo *imagen*, es decir, semejanzas o aspectos puramente superficiales, relacionados con la forma de las representaciones semióticas;
    b. *estructural*: la capacidad para usar (tratar y convertir) *representamen* icónicos de tipo *diagrama*, es decir, características o estructuras relacionales de las representaciones semióticas;
    c. *a través de metáforas*: la capacidad para usar *representamen* icónicos de tipo *metáfora*, es decir, paralelismos entre dos objetos (uno real, accesible a los sentidos, y el otro matemático, no accesible a los sentidos) o situaciones diferentes;
- *indexical*: la capacidad para usar *representamen* de tipo *índice,* gestos, deícticos lingüísticos;
- *simbólico*: saber utilizar (tratar y convertir) los aspectos convencionales de los signos o *representamen* de tipo *símbolo*, incluidas las definiciones y expresiones que denotan propiedades de los objetos matemáticos.

Estas tres modalidades de aprendizaje hacen posible destacar diferentes formas de construcción cognitiva de un objeto matemático y sus diferentes aspectos, en particular que los componentes conceptual, algorítmico, estratégico, comunicativo y semiótico de aprendizaje (Fandiño Pinilla, 2008) sean profundamente entrelazados entre sí por medio de las trasformaciones de tratamiento y conversión.

¿Qué aspectos de las representaciones semióticas son más problemáticos en el proceso de aprendizaje de los estudiantes?

Como nuestra investigación[3] ha demostrado, los aspectos de las representaciones semióticas más problemáticos en el proceso de aprendizaje de los estudiantes son aquellos de tipo icónico cualitativos e indexicales en la escuela primaria, y de tipo icónico-estructurales y simbólicos en la escuela secundaria, relacionados con transformaciones de tratamiento o de conversión. (Para profundizar estos temas, véase también D'Amore, 2006a, b, c, d; 2007a, b; Davis y McGowen, 2001; Otte, 2001; Presmeg, 2008; Radford, 2003; Sáenz-Ludlow, 2006; Sáenz-Ludlow y Presmeg, 2006; para nombrar unos pocos).

Además, los estudiantes (y no solo ellos) tienden a confundir el objeto matemático (no accesible perceptivamente o instrumentalmente) con la representación semiótica utilizada (accesible perceptivamente o instrumentalmente) o con sus componentes icónicas, indexicales y simbólicas (Iori, 2010; 2011); lo que implica, a menudo, cambios inesperados de interpretantes (significados) asociados a los signos (*representamen*) utilizados sino también en los tratamientos, no solo en las conversiones (D'Amore, 2006a, b, c, d; 2007a, b).

Conclusiones

La presencia de la semiótica en el aula es explícita, precisamente porque es necesaria. Muchos estudiantes encuentran dificultad en matemática, solamente porque la gestión de las representaciones semióticas, que el docente o la institución de referencia requieren en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática, es muy compleja y problemática. La complejidad se debe al hecho de que un signo (*representamen*) o el contenido de una representación semiótica puede tener diferentes sentidos (interpretantes) según el objeto matemático que se está considerando (véase los ejemplos proporcionados anteriormente); la problematicidad se debe al hecho de que los objetos matemáticos están en continua construcción; en otras palabras, la construcción cognitiva de un objeto matemático es un proceso muy lento.

Desde aquí la necesidad, por parte del docente, de dominar los instrumentos que la semiótica nos proporciona, junto con aquellos que la investigación en didáctica de la matemática ha construido y continúa construyendo.

3 Tema de una tesis doctoral de la Universidad de Palermo, Italia, que se encuentra actualmente en una etapa avanzada y que será publicada pronto.

Referencias

Bagni, G. T. (2009). *Interpretare la matematica. Introduzione all'ermeneutica dell'apprendimento*. Bologna: Archetipolibri.

D'Amore, B. (2006a). Oggetti matematici e senso. Le trasformazioni semiotiche cambiano il senso degli oggetti matematici. *La matematica e la sua didattica*. 4, pp. 557-583.

D'Amore, B. (2006b). Oggetti matematici, trasformazioni semiotiche e senso. En: B. D'Amore y S. Sbaragli (Eds.). (2006). *Il convegno del ventennale*. Atti del Convegno Nazionale "Incontri con la Matematica" n. 20, pp. 15-22. Castel San Pietro Terme, 3-4-5 novembre 2006. Bologna: Pitagora.

D'Amore, B. (2006c). Objetos, significados, representaciones semióticas y sentido. En: L. Radford y B. D'Amore (Eds.). (2006). *Semiotics, Culture and Mathematical Thinking*. Numero speciale della rivista *Relime* (Cinvestav, México DF., México) pp. 177-196. Disponible en: http://laurentian.ca/educ/lradford/Relime_semiotic_06.pdf

D'Amore, B. (2006d). *Concepts, objects, semiotic and meaning. Investigacions of the concept's construction in mathematical learning*. Tesi di dottorato di ricerca, Università Costantino Filosofo, Nitra, Slovacchia. Pubblicata sulla rivista GRIM (Gruppo di Ricerca sull'Insegnamento delle Matematiche) [Università di Palermo, Italia]. Disponible en: http://math.unipa.it/~grim/tesi_it.htm

D'Amore, B. (2007a). How the treatment or conversion changes the sense of mathematical objects [Invited speaker article]. En: E. P. Avgerinos y A. Gagatsis (Eds.). (2007). *Current trends in Mathematics Education*. Proceedings of 5th MEDCONF2007 (Mediterranean Conference on Mathematics Education), pp. 77-82. 13-15 april 2007, Rhodes, Greece. Athens: New Technologies Publications.

D'Amore, B. (2007b). Mathematical objects and sense: how semiotic transformations change the sense of mathematical objects. *Acta Didactica Universitatis Comenianae*, 7, pp. 23-45.

D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I. y Iori, M. (2013). *Primi elementi di semiotica: La sua presenza e la sua importanza nel processo di insegnamento-apprendimento della matematica*. Prefazioni di Raymond Duval e Luis Radford. Bologna: Pitagora.

D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., Iori, M. y Matteuzzi, M. (2013). Alcune riflessioni storico-critiche sul cosiddetto "paradosso di Duval". *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 36B(3), pp. 207-236.

Davis, G. E. y McGowen, M. A. (2001). *Embodied objects and the signs of mathematics.* A discussion paper prepared for the PME 25 discussion group "Symbolic Cognition in Advanced Mathematics". July 2001. Ütrecht, The Netherlands: Freudenthal Institute, University of Ütrecht.

Duval, R. (1996). Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques? *Recherche en Didactique des Mathématiques,* 16(3), pp. 349-382.

Duval, R. (2006a). Trasformazioni di rappresentazioni semiotiche e prassi di pensiero in matematica. *La matematica e la sua didattica*, 4, pp. 585-619.

Duval, R. (2006b). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61(1-2), pp. 103-131.

Duval, R. (2008). Eight problems for a semiotic approach in mathematics education. En: L. Radford, G. Schubring y F. Seeger (Eds.). (2008). *Semiotics in mathematics education: epistemology, history, classroom, and culture,* pp. 39-61. Rotterdam: Sense Publishers.

Fandiño Pinilla, M. I. (2008). *Molteplici aspetti dell'apprendimento della matematica. Valutare e intervenire in modo mirato e specifico*. Trento: Erickson. [Versión en idioma español: 2010, Bogotá: Magisterio].

Iori, M. (2010). Componenti iconiche, indicali e simboliche nelle rappresentazioni semiotiche. En: B. D'Amore y S. Sbaragli (Eds.). (2010). *Matematica ed esperienze didattiche.* Atti del Convegno Nazionale: *Incontri con la matematica,* n. 24, pp. 147-148. 5-6-7 novembre 2010, Castel San Pietro Terme. Bologna: Pitagora.

Iori, M. (2011). Il senso *semiotico-interpretativo* delle rappresentazioni degli oggetti matematici e delle loro trasformazioni. En: S. Sbaragli (Ed.). (2011). *La Matematica e la sua didattica, quarant'anni di impegno. Mathematics and its didactics, forty years of commitment. In occasion of the 65 years of Bruno D'Amore*, pp. 125-127. Bologna: Pitagora.

Otte, M. (2001). Mathematical epistemology from a semiotic point of view. *Proceedings of the PME 25 Conference*. Ütrecht.

Peirce, C. S. (CP). (1931-1958). *Collected Papers. I-VIII.* Cambridge: Harvard University Press.

Presmeg, N. (2008). *An overarching theory for research in visualization in mathematics education.* Paper presented at the 11th International Congress in Mathematical Education (ICME 11). Monterrey, Mexico.

Radford, L. (2003). Gestures, speech, and the sprouting of signs: A semiotic-cultural approach to students' types of generalization. *Mathematical Thinking and Learning*, 5(1), pp. 37-70.

Sáenz-Ludlow, A. (2006). Learning Mathematics: Increasing the value of initial mathematical wealth. En: L. Radford y B. D'Amore (Eds.). (2006). *Semiotics, Culture and Mathematical Thinking*. Numero speciale della rivista *Relime* (*Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*) pp. 225-245.

Sáenz-Ludlow, A. y Presmeg, N. (2006). Guest editorial: Semiotic perspectives on learning mathematics and communicating mathematically. *Educational Studies in Mathematics*. 61, pp. 1-10.