

D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., Iori, M., & Matteuzzi, M. (2015). Antecedentes ilustres de la paradoja cognitiva de Duval. In B. D'Amore & M. I. Fandiño Pinilla (Eds.), *Didáctica de la matemática: Una mirada internacional, empírica y teórica*. Textos completos de las conferencias dictadas por lo conferencistas invitados al Congreso Internacional: *Didáctica de la matemática. Una mirada epistemológica y empírica*, Santa Marta (Colombia), 9-11 septiembre 2015 (pp. 133-158). Chia (Colombia): Ediciones Universidad De La Sabana, 2015. ISBN: 978-958-12-0371-0. [Este artículo es un resumen de: D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., Iori, M., & Matteuzzi, M. (2015). Análisis de los antecedentes histórico-filosóficos de la “paradoja cognitiva de Duval”. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 18(2), 177-212. ISSN: 1665-2436. <http://www.clame.org.mx/relime.htm>. doi: 10.12802/relime.13.1822].

## Antecedentes ilustres de la paradoja cognitiva de Duval.

Significant antecedents of cognitive paradox of Duval.

Bruno D'Amore<sup>a,b</sup> – Martha Isabel Fandiño Pinilla<sup>b</sup> – Maura Iori<sup>b</sup> – Maurizio Matteuzzi<sup>c</sup>

<sup>a</sup> Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia

<sup>b</sup> NRD Bologna (Departamento de Matemática, Universidad de Bologna, Italia)

<sup>c</sup> Departamento de Filosofía y Comunicación, Universidad de Bologna, Italia

**Abstract.** In a famous article published in 1993, Raymond Duval highlighted a simple fact: the student may confuse the mathematical object  $O$  he is trying to build cognitively with one of its semiotic representations  $R(O)$ . Duval explained that this confusion was due to a sort of inevitable paradox: only someone who has already built  $O$ , can recognize  $R(O)$  as a representation of  $O$  and not as an object in itself. Thereafter, this thought has been extremely influential for researchers. However, even if in different terms, many scholars of semiotics have emphasized the same phenomenon. In this paper we propose to remind some of them.

**Keywords:** Duval's cognitive paradox, semiosis and noesis, cognitive construction of mathematical objects, semiotic representations of a mathematical object.

**Resumen.** En un famoso artículo publicado en 1993, Raymond Duval evidenciaba el siguiente hecho: el estudiante puede confundir el objeto matemático  $O$ , que está tratando de construir cognitivamente, con una determinada representación semiótica  $R(O)$  de dicho objeto; y explicaba que esta confusión se debía a una especie de paradoja inevitable: sólo quien ha construido el objeto  $O$ , puede reconocer  $R(O)$  como representación de  $O$  y no como objeto en sí. Esta reflexión tuvo una gran influencia en los investigadores en los años sucesivos. Pero, varios estudiosos de semiótica, si bien es cierto no lo dicen con estas mismas palabras, ya habían evidenciado el fenómeno; en este escrito nos proponemos recordar algunos.

**Palabras claves:** paradoja de Duval, semiosis y noesis, construcción cognitiva del objeto matemático, representación semiótica de un objeto matemático.

### 1. Premisa

Los estudios de Raymond Duval abrieron, indudablemente, una nueva línea de investigación internacional en didáctica de la matemática, tanto teórica como práctica; reconocer que uno de los mayores obstáculos en el aprendizaje de la matemática está relacionado con las características específicas del único instrumento posible de su denotación, los sistemas semióticos, ha abierto caminos hasta hace algunos tiempos inexplorados. A partir de los '90, un gran número de estudiosos de todo el mundo, siempre con mayor profundidad, están afrontando el tema. Afirmamos que en la actualidad este es uno de los argumentos de mayor difusión en el mundo, en ámbito investigativo.

Precisamente por el hecho de que hoy es considerado un tema clásico, nos sentimos autorizados a abrir otra línea de investigación en esta misma temática, la línea histórico-epistemológico-filosófico-crítica, para encontrar una ascendencia consolidada e ilustre de las reflexiones del querido amigo y maestro Raymond.

Como sucede siempre, un “instrumento matemático”, una vez consolidado, se hace “objeto matemático” de conocimiento e inicia, por tanto, una caracterización histórica que lo teoriza

al interior de un sistema que tiene como representantes diversos estudiosos, generalmente no especialistas del ámbito, en nuestro caso no necesariamente didácticos, sino filósofos principalmente. Es esto lo que sucede con todos los “instrumentos matemáticos”, una vez que se convierten en objetos de la matemática (Douady, 1986; Sfard, 1991).

Recordaremos brevemente en 2. la temática introducida por Duval bajo forma de paradoja cognitiva e intentaremos mostrar y comentar, brevemente, sin ninguna intención de exhaustividad, algunos precedentes Autores que han sostenido sustancialmente la misma tesis de este estudioso, en diversos ámbitos, todos filosóficamente relevantes.

Debemos hacer notar que citaremos explícitamente Autores contemporáneos que publicaron realmente alguna frase análoga a la de Duval, no quienes, de alguna forma, afrontaron temas similares.

Nuestro objetivo no es delinear una posición específicamente teórica relacionada con el tema que aparece en el título; nuestro objetivo sólo es el de evidenciar cómo, en repetidas ocasiones, o tal vez siempre, las ideas brillantes que cambian el curso de los estudios relativos a una disciplina o a una teoría, tuvieron precedentes ilustres que es necesario tomar en consideración para entender mejor y con mayor profundidad dichas ideas. Un estudio histórico-filosófico de este tipo nos parece que reviste cierto interés en quien se ocupa profesionalmente de los temas en cuestión, en este caso de la didáctica de la matemática en relación con el uso de registros semióticos para el acceso a los objetos matemáticos y proponerlos para el aprendizaje de los estudiantes.

Nosotros aceptamos la existencia de la paradoja cognitiva de Duval de la forma como él la presentó hace 20 años aunque, es evidente, que con el pasar del tiempo, los estudios de dicho Autor, de otros, incluso nuestros, llevaron a reflexiones cada vez más profundas y críticas.

En este texto se acepta y se examina la paradoja como se presentó históricamente en 1993, no se proponen análisis críticos, reenviando para esto a otros trabajos.

El nuestro no quiere ser un análisis crítico, pero histórico; el cual puede en futuro transformarse en la base por un más amplio análisis crítico. Por esto, no expresaremos ninguna consecuencia didáctica de este estudio histórico, dado que no es este el objetivo que nos llevó a este análisis. No excluimos que este pueda constituir el tema de artículos futuros, nuestros o de otros. En el curso del texto, de tanto en tanto, haremos mínimas referencias a la praxis didáctica de enseñanza-aprendizaje, pero sin entrar en detalles, reenviándolos a otras ocasiones.

Este texto es el resumen de un artículo mucho más completo:

D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., Iori, M., & Matteuzzi, M. (2015). Análisis de los antecedentes histórico-filosóficos de la “paradoja cognitiva de Duval”. *Relime*, aceptado, en impresión. ISSN: 1665-2436.

## **2. Raymond Duval**

Veamos cómo Raymond Duval enunciaba hace 20 años su famosa *paradoja cognitiva del pensamiento matemático*, la cual tuvo una fuerte repercusión:

(...) de un parte, el aprendizaje de los objetos matemáticos sólo puede ser un aprendizaje conceptual y, de otra parte, es sólo a través de representaciones semióticas que es posible una actividad sobre los objetos matemáticos. Esta paradoja puede constituir un verdadero círculo vicioso para el aprendizaje. ¿Cómo, sujetos en fase de aprendizaje, podrían no confundir los objetos matemáticos con sus representaciones semióticas si ellos únicamente pueden tener relación con las representaciones semióticas? La imposibilidad de un acceso directo a los objetos matemáticos, más allá de cualquier representación semiótica, hace la confusión casi inevitable. Y, por el contrario, ¿cómo pueden los estudiantes adquirir el dominio de los tratamientos matemáticos, necesariamente ligados a las representación semióticas, si no tienen el domino conceptual de los objetos representados? Esta paradoja es aún más fuerte si se identifica actividad matemática con actividad conceptual y si se consideran las representaciones semióticas como secundarias

o extrínsecas. (Duval, 1993, p. 38; la traducción es nuestra).

En las últimas líneas del texto de Duval ya se explica cómo debe entenderse la paradoja cognitiva: el docente propone al estudiante representaciones semióticas de un objeto matemático con la intención que el estudiante lo construya cognitivamente; pero lo único que puede hacer es proponerles representaciones semióticas dado que no existe forma alguna de mostrar, indicar (en el sentido etimológico de la palabra) dicho objeto; el estudiante entra, por tanto, concretamente en contacto con representaciones, no con el objeto, aprende a hacer referencia a dichas representaciones, no al objeto, y a manipularlas. Parecería un itinerario destinado al fracaso cognitivo. Y, por el contrario, el estudiante, al final, aprende, construye, hace propio el objeto, en una situación que tiene mucho de paradójica y que es de gran interés estudiar siempre más en profundidad.

En la sistematización teórica de Duval, las representaciones semióticas de un objeto matemático deben ser interpretadas como una operación explícita de designación, distintas del objeto matemático (abstracto, ideal, que constituye un invariante de ellas) a la cual hacen referencia, del cual son, precisamente, representaciones.

Si se le pide a un niño pequeño: ¿qué es “el número tres”? , él mostrará tres dedos, alzando la mano derecha; la pregunta tiene que ver con el objeto matemático “tres” pero tiene como respuesta una representación semiótica de dicho objeto, normalmente sólo una.

Si se le plantea la misma pregunta a un niño que está terminando la escuela primaria, él seguramente escribirá con un lápiz en una hoja de papel la cifra 3; cambió la representación, pero el problema de la diferencia entre objeto matemático y su representación permanece.

Obvio, la pregunta va más allá de la capacidad de los sujetos: una pregunta con esta carga epistemológica no puede tener respuesta por parte de jóvenes; pero las cosas no cambian con el pasar del tiempo.

Si se pide a un joven de quince años: ¿qué es una recta?, podemos tener como respuesta el dibujo de una mancha de grafito, derecha, más o menos larga y delgada; o una ecuación lineal del tipo  $ax+by+c=0$  escrita con un lápiz sobre una hoja de papel; en los dos casos las respuestas son representaciones semióticas del objeto matemático pedido, no es el objeto matemático al cual se hace referencia.

Si se pide a un estudiante de los últimos años de la secundaria: ¿qué es una derivada?, él escribirá  $f'(x)$ , ofreciéndonos una representación semiótica, cuando la pregunta hacía referencia al objeto matemático “derivada”.

Y esta historia prosigue en la universidad, sin muchos cambios.

Sólo un experto intentaría dar respuesta epistemológicamente significativa a la pregunta planteada sobre un objeto matemático mostrando dos (o más) representaciones semióticas de este, reconociendo que una única representación semiótica de un objeto matemático no permite agolpar todos los componentes conceptuales del objeto, o aquellos más idóneos a la situación (D'Amore, Fandiño Pinilla, & Iori, 2013). En otras palabras, no permite transformación alguna (tratamiento o conversión) de la representación, por tanto, no permite *objetivación* alguna, que se tiene que entender aquí como toma de conciencia de este (del objeto) del cual no se era consciente antes de producir (por sí mismos) una representación (Duval, 1995).

De otra parte, demasiadas representaciones tienden a confundir al aprendiz, puede ser que no todas sean relevantes conceptualmente hablando, y, por tanto, no favorecer la construcción cognitiva del objeto (D'Amore et al., 2013). La multiplicidad de las representaciones y de sus transformaciones debe ser estudiada, monitoreada y calibrada con atención en todo contexto o situación. Esto requiere por parte del docente una formación específica, que no se adquiere espontáneamente ni tan sólo con la “experiencia”. Una formación que no se centre sólo en los contenidos matemáticos específicos de enseñar, en las actividades a desarrollar, en las situaciones o en los problemas de proponer para introducir un determinado contenido y para

afrontar un determinado examen, sino también, y básicamente, sobre la dimensión epistemológica (que traduce la exigencia, transversal a todos los conocimientos, de no confundir los objetos con sus representaciones, y que se encuentra también en Platón *Republica*, VI, 509d–510b) y sobre la dimensión semiótica y cognitiva peculiar de la matemática (para profundizar tales aspectos véase: Duval, 2009b, 2011, 2012).

La caracterización semio-cognitiva de los objetos matemáticos que Duval (1995, 1998a, 1998b, 2006, 2009a, 2009b, 2011, 2012) propone tiene como objetivo el de ofrecer diversos instrumentos para intervenir eficazmente en las dificultades que los estudiantes encuentran en la gestión de las representaciones semióticas de los objetos matemáticos. Un objeto matemático no es otra cosa que el invariante (operatorio o lógico-discursivo) de una multiplicidad de representaciones semióticas posibles (Duval, 1995, 2009b, 2011).

Dicha caracterización no requiere hipótesis alguna sobre “existencia” o “pre-existencia”, “construcción dentro de sí” o “comprensión en sí” del objeto matemático; en otras palabras, ninguna interpretación filosófica (de tipo realista o idealista, constructivista o platónica) puede ser deducida de la caracterización semio-cognitiva que Duval da de los objetos matemáticos. El objeto de conocimiento emerge del reconocimiento que dos o más representaciones semióticas son representaciones de un “mismo objeto”, aunque si sus contenidos no tienen nada en común. Sin embargo, como ya lo hemos enunciado, el objeto matemático se distingue de los objetos de las otras disciplinas científicas por la modalidad de acceso, meramente semiótico, no perceptivo (directo o instrumental); en otras palabras, el objeto matemático emerge meramente de la actividad específica de producción y de transformación (tratamientos y conversiones) de signos oportunos (representaciones semióticas) dentro o entre particulares sistemas semióticos (registros de representación). La falta de un doble acceso, semiótico o perceptivo (directo o instrumental), a los objetos matemáticos lleva casi inevitablemente a confundir una cierta representación de un determinado objeto matemático,  $R(O)$ , con el mismo objeto  $O$  (Duval, 1993), obstaculizando la construcción cognitiva del objeto, es decir la gestión de las representaciones semióticas de las cuales el objeto matemático emerge como invariante.

Para la comprensión de los procesos de aprendizaje de la matemática, la cuestión relevante que Duval afronta no es si los objetos matemáticos vienen antes o después de la actividad matemática, antes o después de las prácticas institucionales o personales, o antes o después de las representaciones semióticas, sino que es la siguiente: “¿Cómo no confundir un objeto matemático con una representación semiótica del objeto en cuestión si no es posible acceder al objeto matemático sin producir (implícitamente o explícitamente) una representación semiótica?” (Duval, 2006, p. 69).

Esta cuestión es ignorada por numerosos estudios de los aspectos semióticos y cognitivos de los procesos de aprendizaje, de todos aquellos que asumen implícitamente que los procesos cognitivos de aprendizaje sean idénticos en todo los campos del conocimiento, en matemática como en biología, física o química etc.; el enfoque pragmatista de tradición peirceana y el enfoque constructivista de tradición piagetiana constituyen dos ejemplos.

Para la enseñanza-aprendizaje de la matemática, por tanto, la cuestión de cómo se puede acceder a los objetos matemáticos se vuelve crucial, y es relacionada estrechamente con aquella de los procesos semio-cognitivos, específicamente aquellos movilizados en matemática es decir con la producción o con la elección de representaciones semióticas al interno de oportunos registros y su movilización (implícita o explícita) en dos tipos de transformaciones: tratamiento (transformación de una representación a otra del mismo tipo, es decir en el mismo registro semiótico, del mismo objeto) y de conversión (transformación de una representación semiótica en otra de tipo diferente, es decir en otro registro, del mismo objeto). Está en esto, precisamente, la construcción cognitiva del objeto matemático (D’Amore et al., 2013). De aquí la necesidad de tomar conciencia del fenómeno para poder

reconocer, interpretar y afrontar las dificultades de comprensión que el aprendizaje de la matemática inevitablemente evidencia en todos los niveles escolares.

Raymond Duval tenía razón cuando perentoriamente afirmaba: *no existe noética sin semiótica* (1993); nosotros hoy sabemos que debemos pasar a través de varias representaciones semióticas para alcanzar la gradual y consciente construcción cognitiva del objeto, es decir lograr que el aprendiz se dé cuenta de que, frente a un objeto O, existen varias representaciones semióticas  $R_i(O)$  de O ( $i = 1, 2, 3, \dots$ ). El día en el cual dominará dichas representaciones, las sabrá usar en contextos oportunos y las podrá transformar las unas en las otras, entonces podremos decir que el estudiante ha construido cognitivamente O (esta es la propuesta filosófica-didáctica de D'Amore, 2003).

Pero, como lo hemos ya dicho, la posición de Duval tiene análogas, ilustres, precedentes enunciaciones que nos gustaría mostrar y explorar para evidenciar el hecho de que su posición no es un *unicum* en la historia de lo que podemos llamar *semiótica en el aprendizaje*. En otras palabras, una posición cercana a aquella de Duval se encuentra en varios pensadores antecedentes y contemporáneos, no necesariamente estudiosos de didáctica.

### 3. Algunos antecedentes filosóficos o semióticos

La relación entre conocimiento, lenguaje, mundo, nos lleva a un problema semántico milenario, es decir a la problemática de explicar qué es el *significado*, es decir disponer de un marco teórico que muestre las relaciones entre palabras, ideas y cosas, problema que se inserta directamente en la teoría del conocimiento, o gnoseología, y en aquella del ser, u ontología. De hecho, estamos en el punto de apoyo de toda teosis filosófica. Aquí deberíamos, como consecuencia, describir todo el desarrollo del pensamiento humano.

Esta *captatio benevolentiae* inicial es el intento de evadir la fácil acusación de la cual seremos objeto en cuanto que lo que diremos en las siguientes líneas es incompleto, falta de exhaustividad (es más, es de mucha pobreza); lo que nos gusta asumir explícitamente *ab initio*.

#### Agustín de Hipona

Agustín de Tagaste o de Hipona (354 – 430), según se elija la ciudad de su nacimiento o la ciudad de su muerte para completar su topónimo, es indudablemente uno de los más brillantes e interesantes personajes de inicios del Medioevo. Muy bien conocido como teólogo, un poco menos como matemático (pero ciertamente no faltan citas o estudios en dicha dirección: Carruccio, 1964; D'Amore & Matteuzzi, 1976; Bagni, 2012), es desde tiempo citado en los estudios sobre la semiótica (basamos las consideraciones que siguen en: D'Amore et al., 2013).

Fue él a unificar dos teorías precedentes y en contraposición, aquella del lenguaje y aquella del signo. El signo es un dato sensorial:

Signum est enim res, praeter speciem quam ingerit sensibus, aliud aliquid ex se faciens in cogitationem venire; sicut vestigio viso, transisse animal cuius vestigium est, cogitamus; et fumo viso, ignem subesse cognoscimus; et voce animantis audita, affectionem animi eius advertimus, et tuba sonante milites vel progredi se vel regredi, et si quid aliud pugna postulat, oportere noverunt (Un signo es algo que, más allá de su aspecto sensible, trae a la mente algo diferente de sí, como la huella que deja un animal, el humo del cual se infiere la presencia del fuego, el lamento que indica dolor, o la trompeta que comunica órdenes a los soldados). (Agustín, *De doctrina cristiana*, II, 1.1)

Pero eso, para la mente de quien lo percibe, indica siempre alguna cosa. Existen por tanto un vehículo del signo (algo) y un referente (otro algo); el intérprete, a veces no mencionado, es presupuesto en todo modelo de signo; no constituye por tanto un ulterior, tercer elemento de la relación entre signos, en la tradición que distingue sistemáticamente sentido y referente,

como lo plantearon en su hipótesis los Estoicos (Nöth, 1995).

Agustín proporciona una definición de signo: “Dicimus enim et signa universaliter omnia quae significant aliquid, ubi etiam verba esse invenimus. (Se definen genéricamente signos todas las cosas que significan algo, y entre estos se encuentran también las palabras)” (Agustín, *De Magistro*, I, 4.9).

La inclusión de las palabras dentro de los signos es una novedad y es necesario buscar otra definición en otro texto: “(Verbum est) uniuscuiusque rei signum, quod ab audiente possit intellegi, a loquente prolatum. [(Palabra es) un signo de algo que puede ser comprendido por quien escucha cuando es pronunciado por quien habla]” (Agustín, *De dialéctica*, cap. V).

En este mismo texto, Agustín distingue cuatro componentes de la palabra: (1) el *verbum*, la palabra dicha, el significante; (2) la *dictio*, es decir la palabra dicha por alguien para significar algo, por tanto una combinación de significante y significado; (3) el *dicibile*, lo que de la palabra se entiende y es contenido en la mente; (4) la *res (cosa)*, lo al cual la palabra se refiere a través de los sentidos o del intelecto, o que no es accesible a los sentidos.

Para Agustín, no se pasa del signo al significado, sino de un signo a otro signo, dado que un signo no puede, por su naturaleza, hacer evidente un significado. Aún más esto vale en la relación entre signo S y objeto O: es necesario conocer el objeto O para poder reconocer que aquel determinado signo S es signo de un determinado objeto S(O). El conocimiento de O permite reconocer S como S(O), pero S, por sí sólo, sin el previo conocimiento de O, no permite entender que S es signo de O.

Esto trae como consecuencia una jerarquía de importancia en el aprendizaje: primero se aprenden las cosas y sólo después los signos de las cosas.

Cum enim mihi signum datur, si nescientem me invenit cuius rei signum sit, docere me nihil potest: si vero scientem, quid disco per signum? (Cuando, de hecho, me han dado un signo, si me encuentro en que no tengo conocimiento de la cosa de la cual es signo, no puede enseñarme nada; pero, si ya lo conozco, entonces ¿qué estoy aprendiendo mediante el signo?). (Agustín, *De Magistro*, 10, 115)

El signo puede indicarnos donde debemos dirigirnos para poder ver (función deíctica o ostensiva) y, por tanto, para aprender (función cognitiva), o puede tener una función evocativa, es decir traer a la mente un concepto, un significado, o una imagen (Agustín, *De Magistro*, 10, 168); esto tiene entonces en origen como primaria una función ostensiva. El signo es por tanto utilizado en función del objeto.

Pensamos que Agustín constituya un precedente ilustre, más aún, un explícito precedente para nuestra ‘paradoja cognitiva’, sobre el cual debemos obligatoriamente reflexionar.

La teoría de Agustín resulta comparable con la constatación de Duval: el signo no es en sí portador de un objeto, y no puede por tanto sostener algún evento transactivo. Yo en cuanto maestro, puedo al máximo alcanzar al estudiante el signo o, para decirlo utilizando las palabras de Duval, puedo ofrecerle la representación semiótica del objeto; pero no puedo consignarle el objeto.

Agustín desarrolla esta tesis en función platónica, en apoyo de la teoría del anamnesis; Duval, menos estrechamente adherente a la tesis platónica, sostiene sin embargo, igualmente, que sólo quien ha ya construido el objeto, o de cualquier forma está en grado de construirlo dentro de sí, está en grado de decodificar el signo recibido, en cuanto que *capta* aquel al cual el signo mismo alude.

Con el signo de raíz cuadrada yo no enseño nada a quien no sepa comprender que es la raíz cuadrada. El signo de por sí es un objeto concreto, o un acontecimiento físico que está en el mundo, una mancha de tinta sobre un papel, o una onda acústica en el espacio: si nos limitamos a esta evidencia física, no hay diferencia alguna con cualquier otro objeto. Su convertirse plenamente *signo* se da en el momento en el cual se reconoce lo que representa, en su aludir a otro, diferente de sí. Pero si el receptor no posee el elemento destinación, el

*quid* al cual el signo se dirige, entonces él no tendrá a disposición realmente un signo, sino una presencia física que se evidencia en una cosa, simple contenido perceptivo; y no podrá obtener de esto ningún incremento de conocimiento. En este sentido, la teoría agustiniana nos manifiesta como uno de los antecedentes que mejor se puede comparar con la paradoja cognitiva de Duval.

### **Ludwig Wittgenstein**

En el ámbito de la filosofía del lenguaje del siglo pasado, sin duda Wittgenstein representa un punto de imprescindible discontinuidad.

Imprescindible, porque cada una de las sucesivas tomas de posición sobre el problema semántico, y por tanto, en cierta medida, sobre el argumento que nos interesa, nos lleva inevitablemente a Wittgenstein; pero, de otra parte, punto de discontinuidad porque el Autor en cuestión no se deja enmarcar en ninguna corriente de pensamiento canónica.

A aumentar la complejidad, es a esta altura un hecho historiográficamente establecido, desde el punto de vista de la filosofía, que existe una brecha muy sensible entre un primero y un segundo Wittgenstein, o, como se dice, entre el Wittgenstein del *Tractatus* y el Wittgenstein de las *Investigaciones filosóficas*.

Y, aún, coexisten tanto sobre el primero como sobre el segundo, interpretaciones muy diferentes. Pero nosotros no tendremos la absurda pretensión de presentar o comentar su obra en pocas páginas, sino la de mostrar como ciertas posiciones de Wittgenstein puedan ser interpretadas en la dirección que caracteriza nuestro trabajo.

Es bien conocido que las *Investigaciones filosóficas* de Ludwig Wittgenstein inician con la refutación de una propuesta que Agustín hace en las *Confesiones* a propósito de como un niño aprende el lenguaje. Wittgenstein acepta la idea agustiniana según la cual, al inicio, las primeras aproximaciones al lenguaje objeto de aprendizaje son de tipo ostensivo (de parte del adulto que enseña) – imitativo (de parte del niño que aprende), basando los primeros parciales éxitos del niño en una imagen de lenguaje que Agustín intenta proponer, haciendo presión en las palabras que el adulto usa en sentido ostensivo.

En estas palabras encontramos, así lo considero, una determinada imagen de la naturaleza del lenguaje humano. Y precisamente esta: las palabras del lenguaje denominan objetos – las proposiciones son conexiones de dichas denominaciones. – En esta imagen del lenguaje encontramos la raíz de la idea: toda palabra tiene un significado. Este significado es asociado a la palabra. Es el objeto por el cual la palabra está. (PI §1 [PI = *Philosophical Investigations* (Wittgenstein, 1953)]).

Por tanto, Wittgenstein evidencia y arroja luz a dos puntos en la tesis de Agustín, haciéndola propia por ahora y rediscutiéndola con palabras propias: las palabras denominan objetos; las proposiciones son conexiones de dichas denominaciones.

Por tanto, las palabras son entonces por ahora nombres que indican objetos concretos; las proposiciones sirven para mostrar relaciones entre cosas, por tanto entre nombres (y es lógicamente posible, sobre la base de la referencia a los “hechos” reales, inferir cuales proposiciones son verdaderas y cuales son falsas).

El niño pareciera que aprende a causa de la ostensión hecha por el adulto, asociando un nombre a una cosa concreta, por imitación, repitiendo el sonido de la voz que escuchó.

Aquí inicia la crítica a la posición de Agustín:

De una diferencia entre tipos de palabras Agustín no habla. Quien describe de esta forma el aprendizaje del lenguaje piensa, creo, básicamente a sustantivos como “mesa”, “silla”, “pan”, y a nombres de persona, y sólo en un segundo momento a los nombres de ciertas actividades y propiedades; y piensa a los restantes tipos de palabras como algo que se ajustarán por sí mismo. (PI §1)

Para Agustín, la esencia del lenguaje está en la nominalización inicial referida a objetos

concretos, el resto vendrá por sí mismo espontáneamente (Spinicci, 2002), tesis que Wittgenstein considera, explícitamente, demasiado apresurada e, implícitamente, nos parece, ingenua.

A este punto, Wittgenstein proporciona algunos ejemplos muy bien conocidos con los cuales quiere mostrar que el lenguaje es algo más (el famoso ejemplo de “mando uno a hacer el mercado”, puro experimento mental, en el cual Wittgenstein muestra que el lenguaje es en gran medida comunicativo y que la reacción a cada una de las palabras contenidas en un mensaje provoca reacciones diversas por parte de quien las transmite (quien las propone y quien las recibe, interpretándolas: “manzanas”, “rojas”, “cinco”).

Para Agustín, por tanto, el lenguaje es hecho de nombres, cada uno de los cuales ilustra una realidad, mejor aún, cada objeto de dicha realidad; pero esta tesis no se sostiene en el momentos de pruebas empíricas de la experiencia o en el uso concreto de los signos (orales, escritos), dado que es la pareja “palabra – uso de dicha palabra en un cierto contexto” lo que determina el significado (que no es el significado banal ostensivo de denominación).

Para Wittgenstein el lenguaje es parte de un actuar, y puede ser entendido sólo si se acoge en su valencia instrumental. Gracias al lenguaje hacemos muchas cosas diferentes, y esta diversidad caracteriza también las formas lingüísticas incluso si permanece encubierta por debajo de la relativa igualdad exterior de las palabras. (Spinicci, 2002, p. 13)

Wittgenstein prosigue con otros ejemplos – experimentos mentales (que ciertos Autores criticaron después); lo que desea llegar a evidenciar es que el “sentido” de las palabras de un lenguaje se define, es individuado, es compartido no sólo por el nombre en sí, sino también por el uso que se hace.

“El significado de una palabra está en el uso que se hace de esta en el lenguaje” (PI §43).

“El significado de una palabra es el papel que dicha palabra juega en el cálculo del lenguaje” (PG §67) [PG = *Philosophische Grammatik* (Wittgenstein, 1913)].

Pero en todo esto es importante no confundir “el portador de un nombre con el significado del nombre” (PI §40; PG §§63–64). En las palabras de Duval: una representación con lo que representa, un signo con lo al que el signo reenvía.

En el ámbito de esta aparente teoría del aprendizaje del lenguaje por parte de un niño, es necesario hacer referencia a la idea de “juego lingüístico” (PI §7; Wittgenstein, 1958, pero recordemos que este 1958 significa 1933-1934).

Algunos de los estudiosos que hacen referencia a esta noción la banalizan y otros la sobreestiman, según nuestra opinión. Un “juego lingüístico” no es otra cosa que una modalidad de uso de los signos que sea la más banal, elemental y primitiva posible, ejemplificable en la de los niños que están iniciando a hacer uso de un lenguaje basado en la pareja de modalidades ostensiva-imitativa de la cual se ha hablado.

En otras palabras, incluso el signo más simple (como un nombre) es un signo (un nombre) sólo en un juego lingüístico; el significado de un signo es precisamente el papel que ese tiene en un tal juego (PI §49; PI §261; PG §130). Y aquí Wittgenstein cita a Frege: “Esto es también lo que Frege quiso decir cuando dice que la palabra tiene significado sólo como parte de una frase” (PI §49). Wittgenstein (1958, p. 5) afirma además que comprender una frase significa comprender un lenguaje, el sistema de signos al cual pertenece el lenguaje. En particular, comprendemos una frase cuando somos capaces de sustituirla con otra frase que expresa la misma cosa en el mismo lenguaje o en un lenguaje diferente; o cuando podemos traducir una palabra en un gesto o un gesto en una palabra (PG §§40–42).

Esto nos lleva inevitablemente a Duval (quien cita tanto a Frege como a de Saussure): una representación semiótica de un objeto matemático se produce siempre al interior de un registro de representación, y no es concebible fuera de este, así como un signo funciona como signo sólo al interior de un sistema semiótico, en oposición a otros signos,



independientemente de cualquier referencia al objeto. La comprensión, es decir, la construcción cognitiva de un objeto matemático, es inseparable de la producción o elección de representaciones semióticas adecuadas y de sus transformaciones mediante tratamientos o conversiones, por tanto es inseparable del reconocimiento de la correspondencia entre representaciones diferentes de un mismo objeto en el mismo registro o en registros diferentes. En un juego lingüístico, como dice el mismo Wittgenstein, se trata de reflexionar sobre una forma de lenguaje primitivo; cuando nos preocupamos de verdad y falsedad de las proposiciones, de concordancia de estas con la realidad que nos circunda, es importante hacerlo en este tipo de situaciones, antes que aparezcan complicados procesos de pensamiento que modifican el escenario en el cual estas proposiciones toman sentido, antes que aparezcan las nieblas mentales que oscurecen el uso del lenguaje; las formas complicadas de lenguaje se construirán después precisamente a partir de aquellas formas primitivas (Wittgenstein, 1958, p. 17).

Y aquí Wittgenstein se lanza en consideraciones sobre juegos específicos que creemos poder interpretar en la dirección que estamos persiguiendo y que resumimos así: sería necesario conocer las reglas para poder jugar, es decir, para poder aprender, sería necesario que alguien se las explicara al discente; una vez conocidas las reglas del juego, se juega, es decir se aprende; pero si ninguno explica las reglas, se corre el riesgo de jugar a un juego con reglas diversas, por tanto de aprender cosas diferentes de aquellas que se auspician.

¿Cómo adviene el aprendizaje, si no por ostensión e imitación, siguiendo reglas la mayor parte de las veces no declaradas de un juego? Aquí, Wittgenstein se lanza a examinar en profundidad el sentido de las “definiciones ostensivas” que para él están a la base pero que no regulan y que no son suficientes para regular el aprendizaje (PI §§28–32).

La definición del número dos: “Esto se llama ‘dos’ ” “– y así diciendo se indican dos nueces – es perfectamente exacta. - ¿Pero cómo es posible definir el dos de esta forma? A quien se le da la definición no sabe que se quiere denominar con ‘dos’; supondrá que ¡tu denominas *este* grupo de nueces! – Puede suponerlo, pero tal vez no lo supone. Por el contrario, se queremos atribuir un nombre a este grupo de nueces, el otro podría pensarlo como un numeral. Y, de la misma, manera, a quien yo le doy una definición ostensiva del nombre de una persona podría interpretarlo como el nombre de un color, como la designación de una raza incluso con el nombre de un punto cardinal. Esto quiere decir es que la definición ostensiva puede en *cualquier* caso ser interpretada en esta o en otras formas posibles. (PI §28)

La definición ostensiva explica el uso – el significado – de la palabra cuando el papel total de la palabra en el lenguaje es ya claro. (PI §30)

Quien llega a una tierra extranjera en ocasiones aprende el idioma de los nativos del lugar mediante las definiciones ostensivas que ellos les dan; y generalmente deberá adivinar cómo se deben interpretar estas definiciones y en ocasiones su adivinación es correcta, en otras no. (PI §32)

La definición ostensiva a la cual hace referencia Wittgenstein está basada en primera instancia en un gesto, aquel hecho por quien enseña dirigiéndose a quien está aprendiendo, indicando un objeto; la definición ostensiva puede servir para hacer aprender algo alrededor a la cosa concreta (nuez) o a algo abstracto (dos), como en nuestro caso. Estamos frente a una versión de la paradoja cognitiva. Lo cual nos vuelve a enviar, a nosotros y a Wittgenstein, a Agustín: “Agustín describe el aprendizaje del lenguaje humano igual que si el niño arribase en tierra extranjera y no comprendiese el idioma del país; en otras palabras: como si poseyese ya una lengua, pero no dicha lengua” (PI §32).

Pero Wittgenstein es aún más radical dado que llega a afirmar que no se trata sólo de la situación paradójica del aprender, sino que también involucra el enseñar: podemos significativamente indicar algo a alguien sólo al interior de un juego lingüístico, sólo con reglas compartidas; ni siquiera la frase banal “Esto es ...” se puede decir dando un sentido a

lo dicho, muchas cosas deberían ser ya conocidas y concordadas (PI §31). En otras palabras, la enseñanza ostensiva presupone un lenguaje que el aprendiz no conoce; de otra parte, el éxito de la definición ostensiva exige el dominio individual de un lenguaje (Williams, 1999): “Se debe ya conocer (o ser capaces de hacer) algo para ser capaces de pedir el nombre de una cosa” (PI §30).

Para Wittgenstein la enseñanza ostensiva debe por tanto estar acompañada de una enseñanza sobre el uso del signo. Pero, el uso del signo está determinado por la práctica en la cual el signo está inmerso, por tanto presupone un contexto de dominio de un lenguaje (Williams, 1999).

### 3. Conclusión

La teoría y la práctica se funden en una admirable visión única y múltiple, cuando se inspiran la una en la otra. Colaboran, una para proponer problemas a la otra, la otra para pedir organizaciones y definiciones que no pueden depender de toda la gama posible de casos posibles.

Estamos asombrados de lo sucedido a una docente del pre-escolar que, habiendo presentado a sus estudiantes un objeto de madera, pintado de rojo con la forma de un cubo, denominándolo “cubo” (por tanto: una representación ostensiva y lingüística, una doble representación semiótica), se encontró frente a risitas de niños que consideraban que la maestra les estaba tomando del pelo cuando, al día siguiente, les mostró *otro* objeto de metal gris, brillante, con mayor volumen siempre en forma de cubo, llamándolo de nuevo ‘cubo’. Para los niños, *cubo* era la denominación de aquel objeto, “el objeto de ayer, rojo y de madera”.

¿Cómo ‘limpiar’ un significado de todas las componentes indéxales desviantes que todo objeto de la realidad concreta lleva consigo? ¿De qué sabor es una pirámide? ¿Qué olor tiene una recta? ¿Pesa más un ángulo o un número primo? Lejos de ser preguntas ligeras, estas son preguntas embarazosas de cierto espesor.

Sabemos que la equivalencia semántica o aquella semiótica son conquistas que, enunciadas por Platón, sólo ahora se inician a entender, pero estas equivalencias constituyen la base de la matemática.

El estudiante indefenso, que tiene todo el derecho de ser *ignorante* en sentido etimológico, que debe construir cognitivamente los objetos de la matemática, se ve obligado a confundir el objeto con su representación semiótica, no es por mala voluntad, nos lo dicen excelentes investigaciones filosóficas. Una contribución más al conocimiento y, sobre todo, a la construcción del conocimiento.

Kant toca el problema pero no lo estudia en profundidad; para él el ser humano que construye conocimiento es un adulto culto que sabe y que desea construir conocimiento, un adulto culto que sabe y que desea saber más, no examina el caso del joven, inmerso en una institución, que parte de bases muy diferentes. Pero nosotros hoy sabemos que el bagaje de conocimiento que se construye está constituido por el objeto que el docente (o la institución) propone y pretende que se conozca y se construya, con toda la complicación semiótica que todo esto trae con sí, el lenguaje típico de la disciplina que juega un papel importante entre las teorías y las prácticas.

Una buena dosis de referencias filosóficas que ilustran la problemática, lejos de ser un ejercicio estéril de estilo analítico, es, por el contrario, una base sólida para fundamentar la cuestión.

De otra parte, no somos los primeros a establecer relaciones entre lo que se conoce y lo que no se conoce: esta relación es posible sólo cuando lo que se ignora tenga al menos algo que ver con lo que constituye lo conocido; esta es una de las bases de la *Doctae Ignorantiae* de Nicola Cusano (1401 – 1464) (tomada en préstamo de Agustín, en realidad). En nuestra paradoja, si el objeto matemático es desconocido y de este se nos presenta una representación

semiótica en un determinado registro, lo que vemos, escuchamos, tocamos, olemos, probamos, es el objeto-representación no el objeto matemático en sí. Porque, precisamente, tenemos a disposición otras representaciones semióticas que constituyen aquello que para Cusano sería lo que tiene “al menos algo que ver con lo que constituye lo conocido”.

Y, dado que Husserl nos ha enseñado a valorizar la intención comunicativa, todo esto se relaciona con ciertas consideraciones famosas de Lev Semënovich Vygotsky (1896 – 1934) para quien el desarrollo en general y el desarrollo cognitivo del joven son netamente influenciados por el ambiente social, es decir, por las interacciones semióticas entre seres humanos (entre las cuales el lenguaje es privilegiado) al interno del ambiente con funciones y resultados muy diversos entre las interacciones adulto-joven y entre coetáneos. El desarrollo cognitivo se describe en términos de interacciones sociales, actividades mediadas e interiorizadas por formas culturales; el signo (lingüístico) ejerce aquí como mediador entre el individuo y su contexto, además que hace de contenedor de significado; en particular, es un medio de transformación de las función psíquicas del individuo; es esto precisamente lo que permite el pasaje de los objetos de conocimiento del plano social al plano individual. La producción semiótica remane sin embargo limitada al lenguaje.

En resumen, y para cerrar esta presentación, la paradoja resta tal porque no puede ser de otra forma; porque es ésta misma parte de la realidad cognitiva.

## Referencias

- Bagni, G. T. (2012). S. Agostino e la matematica. Ultima lezione di Giorgio T. Bagni nell'Ateneo di Treviso (15 mayo 2009). *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 35A-B(3), 217–227.
- Carruccio, E. (1964). Il valore ascetico della matematica nel pensiero di S. Agostino. *Studium*, 60, 868–870.
- D'Amore, B. (2000). “Concetti” e “oggetti” in matematica. *Rivista di matematica dell'Università di Parma*, 3(6), 143–151.
- D'Amore, B. (2001). Un contributo al dibattito su concetti e oggetti matematici: La posizione “ingenua” in una teoria “realista” vs il modello “antropologico” in una teoria “pragmatica”. *La matematica e la sua didattica*, 1, 4–30.
- D'Amore, B. (2003). *Le basi filosofiche, pedagogiche, epistemologiche e concettuali della didattica della matematica*. Prefacio de Guy Brousseau. Bologna: Pitagora. [Versión en idioma español: D'Amore, B. (2005). *Bases filosóficas, pedagógicas, epistemológicas y conceptuales de la didáctica de la matemática*. Prefacio de Guy Brousseau. Prefacio a la edición en idioma español de Ricardo Cantoral. México DF, México: Reverté-Relime].
- D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2001). Concepts et objets mathématiques. En A. Gagatsis (Ed.), *Learning in mathematics and science and educational technology*. Proceedings of the third intensive programme Socrates-Erasmus (pp. 111–130). Nicosia (Chipre): Intercollege.
- D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2012). Su alcune D in didattica della matematica: designazione, denotazione, denominazione, descrizione, definizione, dimostrazione. Riflessioni matematiche e didattiche che possono portare lontano. *Bollettino dei docenti di matematica*, 64, 33–46.
- D'Amore, B., & Matteuzzi, M. (1976). *Gli interessi matematici*. Venezia: Marsilio.
- D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., & Iori, M. (2013). *Primi elementi di semiótica. La sua presenza e la sua importanza nel processo di insegnamento-apprendimento della matematica*. Prefacios de Raymond Duval y Luis Radford. Bologna: Pitagora. [Edición en idioma español: D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., & Iori, M. (2013). *La semiótica en la didáctica de la matemática*, con prefacio a la edición española de

- Carlos Eduardo Vasco. Bogotá: Magisterio].
- Douady, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en didactique des mathématiques*, 7(2), 5–31.
- Duval, R. (1993). Registres de représentations sémiotiques et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Science Cognitives*, 5, 37–65.
- Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Berne: Peter Lang.
- Duval, R. (1998a). Signe et objet (I): Trois grandes étapes dans la problématique des rapports entre représentations et objet. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 6, 139–163.
- Duval, R. (1998b). Signe et objet (II): Questions relatives à l'analyse de la connaissance. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 6, 165–196.
- Duval, R. (2006). Quelle sémiotique pour l'analyse de l'activité et des productions mathématiques? En L. Radford & B. D'Amore (Eds.), *Semiotics, Culture and Mathematical Thinking* [Special Issue]. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 9(1), 45–81. Obtenido de <http://www.clame.org.mx/relime.htm>
- Duval, R. (2009a). «Objet»: un mot pour quatre ordres de réalité irréductibles? En J. Baillé (Ed.), *Du mot au concept: Objet* (pp. 79–108). Grenoble: PUG.
- Duval, R. (2009b). Sémiosis, pensée humaine et activité mathématique. *Amazônia-Revista de educação em ciências e matemáticas*, 6(11), 126–143. Obtenido de <http://www.periodicos.ufpa.br/index.php/revistaamazonia/index>
- Duval, R. (2011). *Ver e ensinar a matemática de outra forma: entrar no modo matemático de pensar: os registros de representações semióticas*. São Paulo: Proem.
- Duval, R. (2012). Quelles théories et quelles méthodes pour les recherches sur l'enseignement des mathématiques? *Práxis educativa*, 7(2), 305–330. doi: 10.5212/PraxEduc.v.7i2.0001
- Eco, U. (1984). *Semiotica e filosofia del linguaggio*. Torino: Einaudi.
- Eco, U. (1986). Sign. En T. A. Sebeok (Ed.), *Encyclopedic dictionary of semiotics*. Berlin: Mouton de Gruyter.
- Nöth, W. (1995). *Handbook of semiotics*. Bloomington, IN: Indiana University Press.
- Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflection on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational studies in mathematics*, 22, 1–36.
- Spinicci, P. (2002). *Lezioni sulle Ricerche filosofiche di Ludwig Wittgenstein*. Milano: CUEM.
- Williams, M. (1999). *Wittgenstein, Mind and Meaning: Toward a social conception of mind*. London and New York: Routledge.
- Wittgenstein, L. (1913). *Philosophische Grammatik*. Oxford: Basil Blackwell.
- Wittgenstein, L. (1922). *Tractatus Logico-Philosophicus* (F. P. Ramsey & C. K. Ogden, Eds.). London: Routledge & Kegan Paul. (Trabajo original publicado 1921).
- Wittgenstein, L. (1953). *Philosophische Untersuchungen* (G. E. M. Anscombe & R. Rhees, Eds.). Oxford: Blackwell.
- Wittgenstein, L. (1958). *The Blue and Brown Books*. Oxford: Blackwell.