Un “percorso” in verticale: lo spazio e le figure

Silvia Sbaragli
NRD, Bologna

Questo articolo è stato oggetto di pubblicazione in:
Autori Vari (2003). *Il curricolo di Matematica dalla scuola dell’infanzia alla secondaria superiore. Un’esperienza di ricerca-azione promossa dal CSA di Bologna, in collaborazione con il Nucleo di Ricerca in Didattica della Matematica, del Dipartimento di Matematica dell’Università di Bologna, realizzata da insegnanti di scuola dell’infanzia, elementare, media e superiore*. Bologna: Pitagora. 73-120.

In questo articolo si è pensato di considerare un particolare *nucleo fondante*, “Lo spazio e le figure”, per analizzarlo in dettaglio, con considerazioni ed esempi, a partire dalla scuola dell’infanzia fino alla scuola secondaria superiore.
Queste riflessioni derivano da anni di confronto con insegnanti di diversi livelli scolastici e da sperimentazioni realizzate in varie scuole d’Italia [Marghera (VE), Mirano (VE), Bologna, Ferrara,…], in particolare in numerosi Istituti Comprensivi [Corinaldo (AN), Morro D’Alba (AN), Rescaldina (MI), Terranova Bracciolini (Ar),…]; esperienze che sono state rianalizzate e ripensate in modo critico dal gruppo di insegnanti di Bologna che ha lavorato sulla geometria nei diversi livelli scolastici.

1. Considerazioni generali riguardanti la geometria relative ai diversi livelli scolastici.

1.1. La geometria nella scuola dell’infanzia

> *«La Geometria può essere significativa solo se esprime le sue relazioni con lo spazio dell’esperienza… essa è una delle migliori opportunità per matematizzare la realtà».*
> [Freudenthal cit. in Speranza (1988)]

In questi ultimi anni, ricercatori dell’NRD di Bologna si sono indirizzati verso la definizione di modalità adatte ad introdurre la geometria nella scuola dell’infanzia; nel cercare una significativa forma di presentazione di questa

tematica, si sono imbattuti in una impostazione consolidata e piuttosto diffusa soprattutto consistente nel proporre attività geometriche relative al piano. Di solito, cioè, gli insegnanti richiedono ai bambini prestazioni bidimensionali e, solo successivamente, e non sempre, propongono esperienze tridimensionali. Per meglio chiarire ciò che si intende, è bene spiegare in dettaglio che cosa si osserva usualmente.
Per prima cosa, le attività vengono inizialmente proposte nel reale, facendo vivere l'esperienza al bambino con il proprio corpo, realizzando percorsi o esperienze ludiche nelle sezioni o nei saloni; successivamente viene chiesto ai bambini di riprodurre l'attività sul piano, il "disegno", che sembra ormai essere diventata una clausola del contratto didattico (D'Amore, 1999) specifica per la scuola dell'infanzia (Baldisserri et al., 1993). Questa prassi sottovaluta le notevoli difficoltà che una richiesta di questo tipo comporta: difficoltà grafiche, manipolative, prospettiche etc.
Come secondo punto, notiamo che capita spesso di imbattersi in insegnanti che tentano di far riconoscere ai bambini, fin dai 4 anni, le diverse figure piane: triangoli, quadrati, rettangoli,… sottovalutando ancora una volta le difficoltà che può incontrare un bambino ad astrarre, fino ad immaginare, ad esempio, lo stesso oggetto, ma senza spessore.
Durante numerosi confronti con insegnanti di scuola dell'infanzia, questi con estrema sincerità hanno rilevato che conoscono e fanno uso con i bambini di un linguaggio specifico riguardante il bidimensionale, che viene però riferito in maniera confusa anche al tridimensionale.
Ad esempio un insegnante afferma: «*Io, questo* (indicando con un dito uno spigolo di un cubo) *lo chiamo lato* (termine specifico del piano)» e un altro: «*Io uso i termini specifici, infatti dico ai bambini: prendimi una circonferenza* (mostrando un modello di cilindro), *oppure prendimi un triangolo e il bambino mi porta questa scatola* (un modello di prisma a base triangolare)»; allo stesso tempo, molti insegnanti dichiarano di non conoscere e quindi di non fare uso di un linguaggio specifico riguardante lo spazio: «*La parola faccia non l'avevo mai sentita in matematica*», oppure «*Questo è lo spigolo? Io ho sempre detto che questa punta* (vertice) *era lo spigolo. In effetti dicevo… bambini state attenti a non sbattere nello spigolo*».
Sembra che l'importanza della geometria sia tutta racchiusa nel piano, sottovalutando invece l'importanza della geometria tridimensionale, più intuitiva per il bambino dato che gli oggetti che ci circondano sono esclusivamente tridimensionali. Per questo, è apparso da vari anni ai ricercatori del NRD di Bologna molto più "naturale" proporre ad un bambino modelli ed attività nella geometria a tre dimensioni, piuttosto che a due (con un modello di quadrato *reale*, *concreto*, si deve… far finta che lo spessore non esista).
A nostro parere le diverse esperienze nella scuola dell'infanzia dovrebbero passare, in linea di principio, da una prima fase corporea, una immersione nel

reale (che è tridimensionale), ad una fase intermedia sempre tridimensionale, ma in “formato ridotto” (costruzione del plastico), dove non è più il bambino che esegue l’attività con il proprio corpo, ma è lui che la gestisce, questa volta dall’“esterno”. Solo dopo essere passati dal tridimensionale si passa a richieste nel bidimensionale, il che comporta più abilità di gestione e di astrazione.
A partire dalle precedenti considerazioni, sono scaturite diverse proposte di attività ampiamente sperimentate che sono state valutate dagli insegnanti coinvolti come “vincenti” da diversi punti di vista: coinvolgenti, motivanti e di forte valenza formativa.
Di seguito si riportano 2 esempi di proposte che prevedono il passaggio dal tridimensionale al bidimensionale.

• I percorsi
Tipiche attività che vengono proposte nella scuola dell’infanzia riguardano i diversi tipi di percorsi: liberi, obbligati, di tappa in tappa, labirinti, gincane, cacce al tesoro… (D’Amore, 1981; D’Amore, Manini, 1985) che inizialmente vengono realizzati nel reale, ad esempio all’interno della sezione o in salone. È opportuno che le attività, iniziate nell’ambiente reale (tridimensionale), proseguano con la riproduzione dello stesso ambiente in piccole dimensioni (tridimensionale in “versione ridotta”) e solo successivamente giungano al bidimensionale (disegno del percorso). Come afferma Aglì: «*… qualsiasi esperienza ha sempre una struttura spazio-temporale e lo spazio si qualifica come “organizzatore pervasivo” della conoscenza della realtà e base su cui strutturare gli apprendimenti*» (Aglì, D’Amore, 1995) o ancora, più volte Speranza (1988) ha richiamato l’attenzione sulla necessità che nei primi anni di scolarità l’organicità vada ricercata più in profondità, “a livello di organizzazione dello spazio”, di interazione tra competenze spaziali e linguaggio, di avvicinamento del “saper fare” con il “sapere spaziale”. Quindi, dopo diverse esperienze nel reale vissute con il corpo, si può ipotizzare la costruzione di un plastico o di vari plastici (uno per ogni bambino) realizzati semplicemente con scatole da scarpe, della forma che ricorda quella della sezione. Nella costruzione collettiva o a piccoli gruppi del, o dei, plastici si sviluppano numerose capacità che rientrano tra le finalità degli Orientamenti del 1991: localizzazione e organizzazione spaziale, orientamento, progettazione e invenzione, padronanza di sistemi di rappresentazione, riconoscimento e descrizione di alcune delle principali relazioni spaziali come: sopra/sotto, davanti/dietro, destra/sinistra, vicino/lontano,… Inoltre questa attività permette di dare il via ad un primo approccio relativo alla misura. Già il notare che il pavimento della stanza ha una forma particolare con un lato più lungo e uno più corto è fare un’importante osservazione che rientra nel nucleo fondante relativo alla misura (che è considerato da noi come trasversale). Anche l’osservazione di Nicolò di 4 anni rientra in questo ambito: «*Le finestre non sono tutte attaccate di qua. Sono una qua, una qua e una qua*» (indicando

con il dito sul plastico la giusta posizione delle finestre ben distanziate nella parete e non riunite tutte da una parte come aveva invece disegnato Marco sul suo plastico).
La realizzazione del plastico consiste quindi nella localizzazione spaziale da parte dei bambini di tutti gli elementi principali della stanza come finestre, porte, tavoli… (rappresentati ad esempio da gomme o da scatoline vuote di fiammiferi), o ritenuti tali (capita spesso che la scelta degli elementi da rappresentare sia condizionata da forti fattori affettivi: addobbi di Natale, il proprio cassettone, …). La localizzazione da parte dei bambini dei vari elementi della stanza, avviene di solito dopo che l'insegnante ha fornito il primo punto di riferimento sul plastico, che può ad esempio essere la porta di entrata della sezione.
Una volta costruito il plastico e arricchito dai bambini a piacere, si possono realizzare una serie di esperienze come posizionare un oggetto in un particolare punto della sezione e chiedere ad un bambino di mostrare dove si trova nel plastico; realizzare un particolare percorso nel reale e chiedere ad un bambino che tiene in mano un pupazzetto di riprodurlo nel plastico così com'è avvenuto nel reale, o viceversa dal plastico al reale. Queste attività prevedono quindi il passaggio dal reale, al tridimensionale in "formato ridotto" e viceversa; solo successivamente si potrà proporre ai bambini di realizzare la mappa dell'aula avendo la possibilità di osservare attentamente il plastico dall'alto, quindi da un punto di vista diverso da quelli quotidianamente possibili per la propria sezione.
A nostro parere, il plastico rappresenta un anello di congiunzione tra l'esperienza vissuta con tutto il corpo e la rappresentazione con l'uso della sola matita in ambiente bidimensionale.
Operando in questo modo si avranno notevoli cambiamenti nelle realizzazioni bidimensionale dei bambini, che saranno più verosimili rispetto a quelle realizzate senza la mediazione del plastico; in effetti i bambini individueranno inizialmente i contorni della sagoma dell'aula vista dall'alto dentro i quali posizioneranno alcuni elementi considerati caratterizzanti e importanti della stanza (molto spesso nella giusta posizione rispetto al contorno dell'aula), mentre in assenza del plastico il bambino, di solito, non riesce ad ipotizzare il contorno e quindi rappresentano solo porte, finestre, giochi, tutti separati e non localizzati nello spazio.
Riportiamo due esempi di mappe della stessa sezione realizzati da bambini di 4 anni durante una sperimentazione in una scuola dell'infanzia di Bologna; il primo bambino faceva parte di un gruppo a cui era stata chiesta la prestazione bidimensionale dopo aver realizzato per quasi due anni innumerevoli esperienze nel reale, ma senza la mediazione del plastico; il secondo invece faceva parte di un gruppo di bambini la cui esperienza era passata dalla realizzazione del plastico. Le tipologie dei disegni dei due gruppi rientrano generalmente in queste, ossia per il primo gruppo non c'è consapevolezza

della possibilità di realizzare un contorno, mentre quasi tutti i bambini del secondo gruppo realizzano il contorno della stanza e localizzano gli oggetti che ne fanno parte.

Un'esperienza molto formativa consiste nel valutare tutti insieme ciascuna mappa realizzata, confrontando la sua correttezza con il reale. Da questa attività può scaturire la scelta della mappa da considerarsi ufficiale per tutta la classe, oppure può nascere la possibilità di realizzarne una, tutti insieme, più verosimile al reale.

Costruita la mappa, si possono attuare attività di localizzazione di un particolare oggetto o di percorsi prima nel reale, poi nel plastico e infine nel disegno bidimensionale.

Del forte disagio che si prova nel passare dal tridimensionale al bidimensionale, ce ne parla Alice di quasi 5 anni che dopo un percorso durato due anni effettuato in una scuola dell'infanzia di Marghera (VE), alla proposta di posizionare la foto di una topolina che si trovava appesa ad una colonna nel reale, prima nel plastico e poi nella mappa afferma:

«Dietro la mia Rosie (nome della topolina) *si vedeva il mobiletto con la radio e la porta che va in salone. Ho disegnato la colonna perché sulla mappa non c'era, ma la Rosie era sulla parte davanti a me, davanti alla porta del salone. Però non potevo attaccarla così perché se no dovevo girare la colonna, perché era attaccata al foglio la colonna e non posso girare sotto. Sul plastico potevo girare intorno alla colonna, ma sul foglio no. Sul foglio non posso girare dietro, allora l'ho attaccata così che dietro vedo la porta della classe azzurra ma sulla fotografia, vedo quella del salone di porta. Non è uguale, però non posso girare la Rosie dietro la colonna perché è attaccata sul foglio».*


foto reale


foto plastico


mappa bidimensionale

Alice non aveva avuto alcun disagio nel posizionare la fotografia sul plastico, ma quando si richiede la stessa prestazione nel piano, nascono le difficoltà derivanti dal non avere più a disposizione la parete nella quale era appesa la fotografia, che nel piano era diventata una linea.

Questa proposta può essere presentata con diverse finalità e diversi gradi di profondità in vari livelli scolastici.
In numerose sperimentazioni al primo anno di scuola elementare si è proposta la stessa esperienza (Pontecorvo et al., 1990), con tempi ovviamente diversi rispetto alla scuola dell'infanzia; attività che è sempre risultata molto motivante per i bambini, perché percepita come una sorta di coinvolgente accoglienza all'interno della nuova classe. In diverse occasioni si è quindi suggerito agli insegnanti di procurare una scatola da scarpe per ogni bambino, all'incirca della stessa forma dell'aula, sulla quale ciascuno realizzava la propria aula posizionando di volta in volta sempre più particolari. Le stesse attività che abbiamo presentato per la scuola dell'infanzia si possono riproporre nel nuovo ambiente con diverse finalità. Sicuramente queste esperienze avranno come contenuti essenziali: la costruzione di plastici e mappe; il collocare oggetti in un ambiente; il riprodurre e descrivere verbalmente prima nel reale poi nel plastico e infine nel piano, un semplice percorso; riconoscere nel mondo circostante e nel plastico alcune forme elementari tridimensionali (cubo, sfera, parallelepipedo, …) e solo successivamente bidimensionali (quadrato, rettangolo, triangolo, …); progettare oggetti o ambienti con forme funzionali all'uso; dare l'avvio alla misura: osservare oggetti individuando in essi grandezze che si possono misurare; compiere confronti diretti e indiretti in relazione alla grandezza individuata; effettuare le prime misure (con strumenti scelti dai bambini, anche convenzionali se viene proposto da loro); esprimere, rappresentare e interpretare i risultati di misure ricavate (in questo caso di lunghezza). In questa esperienza il "problema" della misura nasce spontaneamente fin dall'inizio dell'attività quando si osserva la forma del pavimento della stanza. Di solito a questo punto si nota l'importanza dello scegliere lo stesso campione di misura, perché se i bambini propongono di misurare un lato con i passi dell'insegnante e l'altro lato con il metro (come avvenne durante una sperimentazione a Bologna) non è possibile poi fare il confronto. Inoltre nella costruzione del plastico si noterà come già alcuni bambini tenteranno di tener conto delle proporzioni fra le distanze distribuendo ad esempio i cartelloni appesi in una parete dell'aula su una parete del plastico in proporzione rispetto al reale, mentre altri daranno solamente importanza al numero di cartelloni ma non alla distribuzione spaziale rispetto al reale. Queste abilità andranno sempre più rafforzate fino ad arrivare a proposte con le stesse finalità ma nel bidimensionale.

L'idea è quindi di avviare la geometria e alcune sue competenze specifiche partendo da attività che rientrano in situazioni considerate a-didattiche.

La stessa attività nella scuola media risulterà più mirata e profonda e avrà come obiettivi specifici:
- nel nucleo fondante relativo allo spazio e alle figure: usare la visualizzazione, il ragionamento spaziale e la modellizzazione geometrica per risolvere problemi; riconoscere grandezze proporzionali in situazioni problematiche; riprodurre in scala; calcolare lunghezze, aree, volumi.
- nel nucleo fondante relativo al numero: modellizzare e risolvere situazioni problematiche in diversi ambiti di esperienza con il ricorso alle proporzioni; conoscere e utilizzare correttamente vari ordini di grandezza; operare approssimazioni in numeri;
- nel nucleo fondante relativo alle relazioni: rappresentare e interpretare legami di proporzionalità; produrre ipotesi interpretative o revisionali;
- nel nucleo fondante relativo ai dati e alle previsioni: formulare domande, raccogliere i dati provenienti dal mondo esterno, reperire, organizzare e rappresentare i dati di misura raccolti;
- nel nucleo fondante trasversale relativo al misurare: osservare oggetti e fenomeni, individuando in essi le grandezze misurabili; scegliere le grandezze da misurare analizzando i dati e individuando relazioni tra essi; effettuare misure; esprimere, rappresentare e interpretare i risultati di misure; stimare misure.

L'ideale sarebbe realizzare questa esperienza in modo interdisciplinare insieme all'insegnante di Educazione Tecnica.

Immaginiamoci ora la stessa proposta realizzata in un istituto superiore ad indirizzo tecnico, dove l'insegnante di Matematica, insieme al docente di Disegno Tecnico, lavoreranno sullo stesso progetto, chiedendo ai ragazzi prima di effettuare il rilievo della propria aula (o scuola) e poi di realizzare il plastico in scala e successivamente la pianta, i prospetti e le sezioni dell'aula (o della scuola). Tale proposta si colloca coerentemente con i programmi di tale ordine di studi, infatti nei programmi Brocca per il biennio superiore si trova scritto nella parte relativa ai Commenti ai singoli temi, la seguente frase: «*Gli elementi di geometria dello spazio hanno lo scopo di alimentare e sviluppare l'intuizione spaziale*».

• La topologia

Molto conosciuta nella scuola dell'infanzia è l'attività topologica[1] realizzata con il foglio di gomma (D'Amore 1981, 1987, 1993; Calò Carducci, 1990;

[1] La topologia studia le proprietà invarianti delle figure rispetto a trasformazioni biunivoche e bicontinue. Concretamente si può prendere come modello un foglio elastico bidimensionale sul quale si disegna una figura che viene poi sottoposta ad alcune deformazioni dovute a stiramenti o a stringimenti della gomma (senza provocare lacerazioni, né sovrapposizioni)

Sbaragli 1997) che consiste nel prendere un foglio di materiale elastico (cuffia da piscina, foglio di caucciù,…), nel rappresentarci sopra una qualsiasi figura (si è quindi nel piano) e nel valutare quali proprietà variano per stiramento elastico e quali rimangono invarianti (queste ultime rientrano in ambito topologico). Gli obiettivi di questa attività sono contenuti tra le finalità esplicite della scuola dell'infanzia: *«Intorno ai tre anni, il bambino incomincia ad avvertire, esprimendole linguisticamente alcune collocazioni spaziali e a riconoscere alcune proprietà comuni degli oggetti. …è anche opportuno sviluppare la capacità di porre in relazione, come riconoscere invarianti...»*, (Orientamenti, 1991), ma sono presenti anche tra gli obiettivi del primo ciclo della scuola elementare: *«Va favorita un'attività geometrica ricca e variata, prendendo le mosse dalla manipolazione concreta di oggetti e dall'osservazione e descrizione delle loro trasformazioni...»* (Programmi, 1985).
Se si propone questa esperienza a bambini di 3 anni si nota una forte resistenza derivante dal tipo di proposta: questa attività richiede l'analisi di proprietà realizzate nel bidimensionale. Ma che cosa succederà se si presenta lo stesso tipo di proposta nel tridimensionale? I bambini di 3 anni avranno ancora le stesse difficoltà? Ed ecco che da queste domande è nata l'idea di realizzare un percorso topologico con bambini di 3 anni che sfruttasse come materiali: gommapiuma, spugna, antistress, pongo, palloncini pieni di farina, di aria e di acqua che consentisse di analizzare proprietà nel tridimensionale; esperienze risultate per i bambini motivante e base per significativi apprendimenti [(sperimentazione proposta in mostra al Convegno: "Incontri con la matematica n.16", Castel San Pietro Terme, 8-9-10 novembre 2002 e descritta brevemente in Donadel, Fabian (2002)]. Solo successivamente si è passati alla topologia nel bidimensionale sfruttando questa volta il foglio di gomma.

Questi sono solo due dei numerosi esempi di attività che si possono realizzare nella scuola dell'infanzia mantenendo sempre un iniziale approccio tridimensionale, per poi passare a quello bidimensionale. Questo fatto fa supporre che l'apprendimento per bambini di 3-6 anni non può essere lasciato solo ad attività spontanee, ma va indirizzato e programmato gradatamente per riuscire ad ottenere apprendimenti più significativi e profondi. Si può osservare che nuclei fondanti come: misurare, argomentare e congetturare risultano trasversali in queste proposte, inoltre si possono ritrovare agganci con altri nuclei fondanti tematici come ad esempio il numero.

---

dove si analizzano le proprietà prima e dopo gli stiramenti: le proprietà invarianti per trasformazioni "elastiche" fanno parte della topologia.

1.2. Una breve parentesi: mutamenti nei programmi di geometria

Riteniamo interessante ripensare rapidamente all'evoluzione dei programmi per quanto riguarda la geometria, per maggiori approfondimenti rimandiamo alla lettura di Furinghetti (1998) e Maracchia (1998).

Quando si parla di insegnamento della geometria, si fa talvolta ancora implicito riferimento agli *Elementi* di Euclide che sono considerati nella maggior parte dei casi come insuperabili testi didattici, anche se spesso travisati e da alcuni criticati. Storicamente, fino al XVII secolo (e anche oltre) possiamo ritenere che questo sia stato sostanzialmente l'unico modo di intendere la geometria; di questo è testimonianza il fiorire negli anni di trattati dedicati all'insegnamento dell'impianto euclideo con varie peculiarità specifiche per i diversi periodi. Gli *Elementi* di Euclide, assieme eventualmente a trattati di geometria pratica, rappresentano per secoli il punto centrale dell'insegnamento della geometria.

Non bisogna però credere che non vi siano state opposizioni, in sede pedagogica, al metodo di introduzione della geometria dal punto di vista euclideo. Queste sono sempre state presenti fin dall'Antichità; basti pensare ad Appollonio di Perga nel III-II sec. a.C. o ad Erone nel I sec. a.C.. Procedendo nel tempo, come riferisce Maracchia (1998), il francese Pierre de la Ramée nel XVI secolo contestò l'accettazione acritica di ogni autorità didattica in geometria, tra cui anche quella di Euclide.

Questa critica, anche se con motivazioni diverse, venne ripresa nel Settecento dove la concezione della matematica che poggia sulla sola ragione è messa in crisi dalla filosofia empirista ed emerge il carattere sperimentale della conoscenza scientifica.

In questo contesto culturale nascono gli *Éléments de Géométrie* (prima edizione 1741) di Clairaut che rappresenta un vero e proprio progetto didattico che cerca l'origine della geometria nella storia deducendo da questa che la matematica va intesa come processo, e non come prodotto. Clairaut, quindi, non segue l'ordine "logico" su cui si fonda il discorso matematico, ma segue l'ordine della scoperta che corrisponde alla pratica matematica. Di conseguenza, non dimostra proposizioni evidenti, rinuncia a dare un elenco di risultati, ma usa solo quelle proposizioni che sono uno strumento per risolvere un problema. La "filosofia didattica" del libro è illustrata nella prefazione, dove l'Autore fa delle interessanti considerazioni sulla difficoltà di insegnare la geometria quando si parte da definizioni, postulati, assiomi per poi passare alle varie proposizioni (Clairaut, 1771, pag. 2-7).

Questo testo, come è detto in Smith (1900), non fu capito nel suo spirito né in Francia, dove, peraltro, fu apprezzato, né in Italia. Malgrado questo, il progetto di Clairaut risulta estremamente attuale come riconoscono sia Barbin (1991) che Castelnuovo (1946, 1989). Le riflessioni di Clairaut influenzarono

parecchio alcuni articoli della *Enciclopédie*, come è chiarito, da un punto di vista didattico e storico in D'Amore (1999, pagg. 23-24).
In Italia, il testo considerato fondamentale fu *Éléments de Géométrie* di Legendre del 1794, che sembra ritornare ai pilastri della geometria euclidea nelle linee di base (definizioni, assiomi, teoremi, corollari) e nello spirito (purezza del procedimento deduttivo), anche se introduce sostanziali innovazioni come: riorganizzare la sequenza degli argomenti, selezionare solo quelle proposizioni che sono necessarie alla comprensione, aggiungere una parte sostanziosa di geometria solida, sostenere di essere favorevole all'uso dell'algebra per una più conveniente sistemazione della geometria, e altre ancora.
In questo periodo si svilupparono nuovi metodi più rapidi e più potenti per affrontare dal punto di vista scientifico problemi geometrici: la geometria analitica a cui si aggiungerà successivamente l'analisi. Anche in questo caso si ebbero opposizioni all'abbandono del metodo euclideo considerato più elegante e formativo; queste furono sostenute da Fergola nel XVIII secolo e dal suo discepolo Flauti.
Con l'Unità d'Italia e l'istituzione della scuola italiana, il ritorno a Euclide è sancito ufficialmente: fioriscono testi scolastici basati sull'opera di Euclide; per un'analisi di questi testi, si veda Furinghetti (1998).
Come riferisce Artom (1937) ogni volta che si presentava nell'insegnamento della geometria il ritorno dell'immortale opera di Euclide, si è sempre assistito ad un autentico risorgimento dell'interesse matematico. Nel 1867 alcuni illustri matematici italiani sancirono ufficialmente che il solo modo valido di trattare la Geometria era quello d'Euclide con una rigorosa sequenzialità; il risultato fu che, dopo aver riconosciuto che ciò non era proponibile alle scuole elementari, ne abolirono l'insegnamento a quel livello scolastico. Questo ritorno a Euclide coincise inoltre con una nuova edizione degli *Elementi* per opera dei matematici Betti e Brioschi (1868), edizione che si limitava però solo ai primi sei libri, ossia alla geometria piana. Anche una circolare ministeriale del 1870 ridusse l'uso degli *Elementi* ai primi sei libri, lasciando liberi gli insegnanti delle scuole secondarie sulla scelta di un trattato per la geometria solida che, poco più tardi, si rese non obbligatorio. Non mancarono certo voci discordanti che riguardarono proprio il rapporto tra geometria dello spazio e geometria del piano. Come riferisce Furinghetti (1998): «*… è l'impianto logico euclideo che richiede un ordine nelle dimostrazioni (le piane devono precedere quelle spaziali). Questo ordine logico è messo in causa dagli sviluppi della geometria: Gérard Desargues (1591-1661) dimostra proprietà del piano (sulle coniche) e il suo famoso teorema a partire da proprietà spaziali. Allo stesso modo Gaspard Monge (1746-1818) dimostra alcuni teoremi. Joseph Diaz Gergonne (1771-1859) studiando la dualità sottolinea il ruolo dello spazio nel trattare i problemi di geometria piana e Michel Chasles (1793-1880) mette in risalto questo ruolo nella proiettiva.*

L'opera di questi autori suggerisce che il metodo che sarà chiamato in Italia "fusionismo"[2]*, cioè lo studio contemporaneo di piano e spazio, non nasce solo da considerazioni di opportunità didattiche, ma anche da sviluppi specifici della ricerca (l'esplosione ottocentesca della geometria proiettiva) e da esigenze applicative (geometria descrittive e disegno)*». Questa diversa strutturazione della geometria, lontana dall'apparato euclideo, fu sostenuta in varie parti d'Europa, tra cui anche l'Italia (Facchini et al., 1996). Ma, come riferisce Maracchia (1998): *«Dopo molti dibattiti, contrasti, riunioni, varie proposte al Ministero e un sondaggio operato dalla Mathesis tra i professori di matematica che li vide quasi equamente suddivisi, il problema, nonostante la presenza del "fusionismo" anche nei programmi del ministro Gallo (1900), la cui scelta però non era obbligatoria, pian piano scomparve e l'insegnamento continuò nel modo tradizionale»*. Le ragioni di questo ritorno alla prassi consolidata sono da ricercarsi in considerazioni di tipo prettamente didattico: Hadamard (1898) afferma che la fusione è preferibile dal punto di vista logico, ma dal punto di vista pedagogico occorre dividere le difficoltà e "vedere nello spazio" è una di quelle da non aggiungere subito alle altre.
Un'altra trasgressione all'impostazione euclidea è la geometria che usa i "movimenti" (più in generale, le trasformazioni) per provare fatti o per fare costruzioni in geometria.
In Italia le voci discordanti degli insegnanti furono in un certo senso zittite dal mondo accademico (a differenza, per esempio, della Gran Bretagna dove una forte opposizione degli insegnanti alla geometria euclidea ne determinò la fine dell'esclusività nel 1903, a favore invece di una maggiore tolleranza verso modi diversi di concepire l'insegnamento della matematica). Il risultato negativo avuto in Italia è stato: *«nell'aver condizionato questi insegnanti nelle loro scelte professionali e, soprattutto, nell'aver indotto un unico orientamento nell'insegnamento (verso la purezza e il rigore), schermando quanto avveniva fuori dell'Italia in anni cruciali per la costruzione dei curricula matematici moderni»* (Furinghetti, 1998).
Nel secondo dopoguerra si ebbe una vera e propria "rivolta" nei confronti della geometria euclidea, sostenuta da Dieudonné, un celebre matematico francese che iniziava le sue conferenze di carattere didattico scrivendo sulla lavagna frasi del tipo: «À bas Euclide!», «À bas le triangle!»; l'impostazione da lui suggerita era sostanzialmente l'algebrizzazione completa della geometria (lui stesso però rivide nel tempo le sue estreme posizioni).

---

[2] Il fusionismo era stato inizialmente proposto da Bretschneider nel 1844, ma fu in Francia che ebbe la sua prima grande promozione con i lavori di Charles e Méray che lo usarono nel loro trattato del 1874. Fu invece il libro *Elementi di Geometria* di De Paolis (1884) a contribuire notevolmente alla diffusione di questo metodo nella scuola italiana. Le idee di De Paolis furono in seguito riprese da Bassani e Lazzeri (1891).

1.3. La geometria nella scuola elementare

«L’intuizione geometrica rimane il canale più potente per la comprensione della matematica, e dovrebbe essere incoraggiata e coltivata».

[Ariyah, cit. in Bernardi (1995)]

Come abbiamo già rilevato, un atteggiamento tipico degli insegnanti di scuola dell’infanzia, caratteristico anche degli insegnanti di scuola elementare, è quello di partire con il riconoscimento delle figure piane: triangolo, quadrato, rettangolo, cerchio… sfruttando spesso i cosiddetti “blocchi logici”, ma chiedendo ai bambini di astrarre immaginando questi oggetti senza spessore.
Ci siamo domandati: da dove deriva quest’ansia di voler far apprendere prima possibile il nome delle figure piane, spesso a discapito di quelle solide, come se in esse fosse raccolta l’intera essenza della geometria? Sicuramente da uno sviluppo più o meno consapevole di una “logica euclidea” che parte dal bidimensionale per poi passare al tridimensionale, dato che il bidimensionale richiede meno assiomi rispetto al tridimensionale. Ma una cosa è l’impostazione dei matematici e un’altra è come è meglio procedere dal punto di vista didattico. È sicuramente vero che la geometria dello spazio presenta, da un punto di vista adulto, maggiori difficoltà di sistemazione razionale rispetto alla geometria del piano; ne è la testimonianza il fatto che: *«Platone* [*Rep*. VII, 528] *scriveva che, mentre la geometria bidimensionale è una scienza, quella tridimensionale (ai suoi tempi) ancora non lo è, dato che, diremmo noi oggi, non ne ha ancora lo “statuto”»* (Fandiño, 2002, pag.68), ma l’idea di figura piana è certamente più sofisticata, da un punto di vista concettuale, di quella di figura solida; inoltre, tutto ciò che circonda il bambino ha tre dimensioni: i suoi giochi, l’arredamento della sua aula, la penna che tiene in mano. Ne abbiamo autorevoli conferme: *«La Geometria prende le mosse dall’esperienza spaziale, visiva e tattile (vedere e toccare gli oggetti), o anche motoria (noi ci muoviamo tra gli oggetti e li spostiamo). Il primo approccio alla Geometria è di tipo fisico; ma già fin dai primi momenti si formano le «immagini mentali» (che possono essere visioni mentali, o anche capacità di interagire con la realtà spaziale)»* (Speranza, 1988). Per questa ragione, acquista un forte significato didattico coinvolgere i bambini in attività che partono da figure solide fin dal primo anno di scuola elementare per poi passare, appena se ne sente la necessità, al piano. In quest’ottica è bene tener conto che i bambini all’ingresso nella scuola elementare avranno già numerose competenze “ingenue” anche relative al bidimensionale acquisite in ambiente scolastico o extrascolastico che non devono essere sottovalutare. In effetti pur partendo da figure solide ci si rende conto che i bambini fanno spontaneamente considerazioni sul piano; ad esempio, realizzando e parlando

di un cubo, alcuni bambini di prima elementare riconoscono che le facce sono di forma quadrata.
La nostra insistente tesi di iniziare la geometria nella scuola elementare da figure solide è stata sostenuta anche da Villani (1985).
Quello che andrebbe a nostro parere modificato è il tradizionale e rigido percorso che si attua per questo nucleo fondante nella scuola elementare e che vede per i primi anni uno studio esclusivo del piano per poi passare all'ultimo anno ad uno studio quasi totalmente esclusivo dello spazio.
Siamo a conoscenza di classi nelle quali addirittura la geometria non è stata ancora introdotta all'inizio della terza elementare. Perché?…. Forse perché di solito quando si inizia a fare geometria si parte da concetti (punto, retta, piano) che sono fondamentali per una trattazione razionale, ma che risultano più lontani di altri dall'esperienza e perché si tende ad iniziare da definizioni, difficili da essere comprese dai bambini (e spesso mal poste dal punto di vista matematico). Queste distorsioni derivano ancora dall'ingenuo tentativo di riprodurre un sunto dell'impostazione euclidea, che risulta difficile da trasporre da parte dell'insegnante e allo stesso tempo da essere appresa da parte dei bambini. Di fronte alle difficoltà legate a questo fraintendimento, spesso non si tenta un diverso approccio alla geometria, ipotizzando che sia quello euclideo l'unico possibile, ma si sceglie come unica via l'abbandono della geometria stessa.
Noi sosteniamo che per questo livello scolastico risulta più efficace partire dallo spazio (facendo se necessario, e se è un'esigenza degli allievi, dei rinvii al piano) per poi passare al piano fin dal primo anno di scuola elementare e continuare successivamente a… giocare con questo passaggio dallo spazio al piano, e viceversa, per tutti gli anni della scuola elementare. A partire dagli ultimi anni della scuola elementare si inizierà una sistemazione e razionalizzazione del sapere geometrico (ovviamente, adatta all'allievo) che proseguirà in maniera più critica nella scuola media [in quest'ottica è stata realizzata una sperimentazione in un Istituto Comprensivo di Corinaldo (AN) dalla scuola dell'infanzia alla scuola media che ha portato a notevoli risultati, con grande soddisfazione dei molti insegnanti coinvolti]. A nostro parere, risulta poco consona alle esigenze dell'allievo di scuola elementare sia un'impostazione rigida dal piano allo spazio sia ovviamente un'impostazione che prevede di trattare inizialmente solo lo spazio per poi passare a considerazioni esclusive del piano.
Attualmente i programmi vigenti per la scuola elementare sono quelli che risalgono al 1985 dove la geometria prevista è la geometria euclidea, arricchita da cambiamenti importanti rispetto all'impostazione più classica presente nei programmi del '55. Infatti, nel testo attuale si afferma che: *«Sarebbe oltremodo riduttivo limitare l'insegnamento della geometria alla semplice memorizzazione della nomenclatura tradizionale e delle formule per il calcolo dei perimetri, aree, volumi, di figure particolari. Va favorita invece un'attività*

geometrica ricca e variante, prendendo le mosse da una manipolazione concreta di oggetti e dall'osservazione e descrizione delle loro trasformazioni e posizioni reciproche» e tutto ciò è attuabile in questo "gioco" didattico che lega spazio e piano.
In questi programmi si assiste ad un notevole arricchimento di teorie rispetto ai programmi precedenti; la geometria diventa il campo di studio delle figure geometriche, viste nelle loro trasformazioni. In effetti, fin dalla scuola elementare, anzi a partire dalla scuola dell'infanzia (si veda l'esempio della topologia) è importante iniziare a pensare in termini di quello che cambia e di quello che resta invariato rispetto ad una determinata trasformazione. *«Per capire in modo adeguato la natura della Geometria occorre tenere presente tutti i suoi aspetti, da quelli più concreti a quelli astratti; e ogni insegnante deve sapere il quadro generale entro il quale si colloca il suo insegnamento… Invece troppo spesso l'insegnamento tradizionale si appiattisce in una acritica ripetizione di parti più o meno significative degli Elementi di Euclide*» (Speranza, 1987).
Per la nostra trattazione risulta interessante notare che in molti Curricoli della Scuola di Base di vari Paesi del mondo, le figure dello spazio e del piano sono presenti tra gli obiettivi già nei primi anni di scolarità, come contenuti essenziali, senza evidenti gerarchie tra piano e spazio. Inoltre, viene sottolineata l'importanza metodologica di una didattica che ritorni più volte sugli argomenti, tenendo presente che l'acquisizione dei concetti matematici non è lineare, ma può passare attraverso salti cognitivi.
Partendo da queste considerazioni, è possibile ipotizzare un modo per introdurre la geometria dallo spazio al piano e viceversa, a partire dal primo anno di scuola elementare; questo fatto rappresenta solo un esempio dei possibili percorsi attuabili in questo livello scolastico, dato che non abbiamo voluto appositamente entrare in dettagli sui contenuti, cosa che faremo in due esempi successivi.

• Un esempio di introduzione della geometria dallo spazio al piano
L'attività proposta parte dal tridimensionale per poi passare in un secondo momento al bidimensionale; nel presentare questa esperienza non si sottovaluta il fatto che ogni figura geometrica, sia piana che solida, è sempre frutto di un'astrazione per quanto concerne la matematica: nessuna figura geometrica esiste nella realtà, ma si tiene presente che concettualmente risulta più intuitivo trattare le figure solide, piuttosto che le piane.
Questa proposta contempla varie fasi per scoprire e analizzare le proprietà delle figure solide che parte dall'osservazione di scatole, contenitori, pezzi di costruzioni, con i quali i bambini possono giocare liberamente e possono fare le prime scoperte basate sulle diverse forme delle figure solide. Il cilindro ha qualcosa di diverso dal parallelepipedo: il primo rotola con facilità, il secondo lo fa con qualche difficoltà in più. Perché si verifica questo? I bambini

iniziano così a notare che c'è qualcosa che li caratterizza e al quale conviene dare un nome: sono gli *spigoli*. Ma in alcuni solidi vi sono anche delle punte, che sono dette *vertici*, e poligoni che formano la superficie del solido che si possono chiamare *facce*, dove è anche possibile disegnare. Per tutti i solidi a disposizione si cercano proprietà e si focalizza l'attenzione sui *poliedri* che sono caratterizzati dai vertici, dagli spigoli e dalle facce legati tra loro da particolari relazioni che si scopriranno con il tempo. Si può poi passare alla costruzione di solidi con stuzzicadenti di varie lunghezze e pongo (ovviamente le palline di pongo rappresentano i vertici, mentre gli stuzzicadenti costituiscono gli spigoli) seguendo varie fasi proposte in Sbaragli (2002) e che contemplano anche il passaggio al piano. Utilizzando sia gli stuzzicadenti che il pongo è possibile ottenere solamente i *poliedri*, mentre non si riescono a costruire coni, cilindri e sfere. Questi ultimi si possono però realizzare utilizzando unicamente il pongo; sono quei solidi che verranno detti *solidi di rotazione*.

Tra tutti i poliedri "scheletrati" così costruiti si potranno notare i cosiddetti *poliedri convessi*, cioè quelli che sono anche figure convesse (senza buchi, né rientranze): intuitivamente un poliedro è convesso quando si può appoggiare sul tavolo su una qualunque delle sue facce (come una scatola da scarpe), ma questo non vale per tutti i poliedri. Inizia così la caccia ai poliedri convessi più interessanti ed usuali; sono davvero tanti: prismi, parallelepipedi, piramidi, tronchi di piramidi… Questa attività fornisce l'occasione per osservare le differenze tra i vari poliedri, ad esempio si scopre che in un particolare parallelepipedo gli spigoli hanno lunghezze diverse (si sono utilizzati 4 stuzzicadenti da spiedino e 8 da tavolo, o addirittura tre lunghezze diverse degli stuzzicadenti), mentre nel cubo gli spigoli hanno tutti la stessa lunghezza. Sia il parallelepipedo che il cubo hanno lo stesso numero di vertici, di spigoli e di facce, ma la forma delle facce cambia a seconda degli stuzzicadenti che si usano. Facendo questa esperienza è anche possibile che si verifichi l'occasione di trattare le similitudini; in effetti se per realizzare ad esempio un cubo un bambino dispone di stuzzicadenti da spiedino, mentre il compagno di stuzzicadenti da tavolo, si otterranno due solidi simili, cioè aventi la stessa forma (il cubo), ma di dimensioni diverse. Questi "scheletrati" possono quindi essere guardati all'"interno", mettendo così in risalto il numero dei vertici e degli spigoli, e lasciando solo all'immaginazione il numero delle facce. Risulta, però, molto significativo affiancare a questi modelli "scheletrati" anche modelli "pieni" dove l'attenzione è concentrata sul numero di facce, mentre si dà meno risalto ai vertici e agli spigoli. Avendo entrambi i modelli a disposizione, risulta facile per i bambini individuare il numero di elementi che caratterizzano i diversi solidi.

Gli obiettivi di questa attività rientrano tra i seguenti:

- sviluppare la visione spaziale (l'osservazione di un modello concreto e la possibilità di osservare un diverso tipo di costruzione, permette un'apertura

che favorisce il saper vedere sempre più con "gli occhi della mente");
- favorire l'immaginazione spaziale (la costruzione di un oggetto comporta, almeno in parte, una preliminare rappresentazione mentale di ciò che si vuole costruire);
- migliorare la capacità di espressione linguistica (è bene che i bambini parlino di geometria in modo sempre più coerente, che tenga conto dell'uso corretto di molti termini della lingua naturale che troppo spesso sfuggono al controllo semantico);
- individuare i solidi e le loro proprietà (risulta più agevole focalizzare le proprietà dei singoli solidi se si riesce a cogliere anche la parte opposta alla posizione della propria visuale tramite "scheletrati"). Saperli inoltre riconoscere anche nella natura, nell'architettura, nella tecnica favorendo così valenze interdisciplinari.
- fare matematica divertendosi (questo rimane sempre uno dei più importanti obiettivi da raggiungere, risulta infatti indispensabile far amare questa disciplina troppo spesso presentata in modo arido e formale).

Come possiamo passare al piano? Basta fornire un solido ad ogni bambino a forma di cubo e dire di tagliare il minor numero possibile di spigoli in modo da riuscire a distenderlo sul piano. Si otterranno così alcuni sviluppi del cubo, ma per riuscire a trovarli tutti e 11 (Fandiño, Sbaragli, 2002) i bambini dovranno aspettare ancora qualche anno. La ricerca di una strategia per individuare gli sviluppi di un cubo e più in generale di parallelepipedi rettangoli proposta da Arpinati Barozzi, Pellegrino (1991) è possibile affrontarla nella scuola media o nella scuola secondaria superiore. È così possibile accorgersi che nello sviluppo non vi sono più tre dimensioni, ma solo due *(«Non possiamo più fare il gioco di nascondere delle cose»* Marco 6 anni). Con questi e altri sviluppi di solidi è possibile realizzare diverse attività riguardanti l'immagine mentale dalla prima alla quinta elementare e sicuramente anche oltre (Villani, 1985).
Bisogna far sì che i bambini riescano a passare dalle figure spaziali alle loro immagini (mentali) piane e viceversa, farli risalire dalle immagini piane alle figure solide rappresentate: *«È altrettanto significativo lo sforzo di "costruire nella mente" il solido di cui sia dato uno sviluppo piano»* (Villani, 1985). In quest'ottica risulta significativa l'attività di ricercare tra i diversi sviluppi piani quelli che danno origine ad un solido.
Un altro modo per passare al piano potrebbe essere proposto in terza o in quarta elementare: dopo aver introdotto di nuovo i solidi e aver contato per quelli che si hanno a disposizione il numero di facce, di vertici e di spigoli si trova la relazione di Eulero (Leonhard Euler, 1707-1783) per i poliedri convessi: Facce + Vertici – Spigoli = 2 (D'Amore, 1993; Fandiño, Sbaragli, 2002, pag.131-132; Sbaragli 2002). È poi possibile realizzare i solidi "scheletrati" con spigoli formati da molle che vengono successivamente

distesi completamente sul piano per far notare che quelle che erano facce nello spazio diventano regioni nel piano, quelli che erano spigoli nello spazio diventano tratti di confine nel piano e infine quelli che erano vertici diventano nodi. I bambini dopo aver contato il numero di regioni, di tratti di confine e di nodi, noteranno così che la relazione di Eulero rimane valida anche nel piano: Regioni + Nodi – Confini = 2 (Fandiño, Sbaragli, 2002, pag.132).
Ci rendiamo conto che queste proposte si potrebbero maggiormente puntualizzare e potrebbero continuare ancora a lungo (D'Amore, 2001), ma lasciamo al lettore il compito di interpretare le nostre considerazioni e di inventare contesti che partano da situazioni a-didattiche dal tridimensionale al bidimensionale e viceversa.

Le stesse attività, rielaborate con diversi gradi di profondità, possono essere presentate nella scuola secondaria inferiore. Durante una sperimentazione effettuata a Castelfidardo (AN) in una prima media, si è deciso di effettuare l'attività di costruire i solidi "scheletrati" come prova di ingresso per scoprire le competenze già possedute dagli allievi relative sia alla geometria solida che a quella piana; attività risultata molto interessante e ricca di spunti per le proposte successive. Questa esperienza rappresenta il punto di partenza delle attività sopra descritte che rientrano tra i seguenti obiettivi:
- nel nucleo fondante relativo allo spazio e le figure: riconoscere e descrivere le figure solide e successivamente quelle piane; usare la visualizzazione, il ragionamento spaziale e la modellizzazione geometrica per risolvere problemi; visualizzare oggetti tridimensionali a partire da una rappresentazione bidimensionale e viceversa; sviluppare argomenti e semplici concatenazioni di proposizioni in ambiente geometrico;
- nel nucleo fondante relativo al numero: utilizzare i numeri e le operazioni per risolvere problemi tratti dal mondo reale (che si raggiunge quando si cerca la relazione tra gli enti che costituiscono i poliedri);
- nel nucleo fondante relativo alle relazioni: in contesti vari, individuare, descrivere e costruire relazioni significative; riconoscere relazioni esistenti tra elementi; combinare in vario modo elementi di un insieme; utilizzare le lettere per esprimere in forma generale semplici proprietà e regolarità numeriche (basta pensare alla relazione di Eulero); costruire e interpretare formule (passare a modi diversi di scrivere le formule di Eulero nello spazio e nel piano); riconoscere relazioni fra grandezze;
- nel nucleo fondante relativo ai dati e previsioni: formulare domande, raccogliere informazioni quantitative, reperire, organizzare rappresentare i dati per i vari solidi.
- nel nucleo fondante trasversale relativo alla misura: effettuare misure; esprimere, rappresentare e interpretare i risultati di misure; stimare misure;
- nel nucleo fondante trasversale argomentare e congetturare: osservare, individuare e descrivere regolarità; produrre congetture; verificare le

congetture prodotte testandole su casi particolari; validare le congetture prodotte, sia empiricamente, sia mediante argomentazioni, sia ricorrendo ad eventuali controesempi; iniziare a comprendere il ruolo delle definizioni in matematica; giustificare le proprie idee durante una discussione matematica anche con semplici ragionamenti concatenati.

1.4. La geometria nella scuola secondaria inferiore

«… il difetto dello spirito matematico… è di non comprendere che un pensiero, il quale si appaghi di costruzioni astratte, senza la speranza, pur vaga, di cogliere in esse il quadro di una qualche realtà, sarebbe uno sterile istrumento dialettico».

[Enriques cit. in Speranza (1988)]

Nella scuola secondaria inferiore si continua a seguire il classico percorso euclideo dal piano allo spazio a partire dal primo anno; addirittura in alcuni casi si aspetta ad iniziare la geometria al secondo anno, perdendo così la continuità con la scuola elementare. La nostra idea di fondo è innanzitutto di collegare i vari ordini di studi senza che si avvertano fratture: lo studio della geometria non va interrotto in prima media, ma va continuato senza stacchi. Allo stesso tempo riteniamo che non si debbano creare sovrapposizioni di contenuti, ma si dovrebbe ipotizzare un percorso a spirale più intuitivo per gli allievi. Parlando di percorso a spirale, bisogna però cercare di evitare il pericolo di un appiattimento delle conoscenze, rilevato da Villani (1992) e da Howson e Wilson (1986); questi ultimi, a proposito dell'insegnamento a spirale, denunciano la possibilità "del collassamento della spirale in una circonferenza".

Nella tradizionale impostazione seguita, ancora una volta si tende a relegare la geometria solida alla fine delle terza media, sottovalutandone l'importanza e le potenzialità e creando così un'ulteriore frattura con la scuola elementare dato che, almeno in modo intuitivo, la geometria dello spazio è già stata presentata, mentre nelle Scuole Medie (seguendo l'iter consueto) non si ritrova per almeno due anni.

Un altro atteggiamento molto diffuso è quello di dare in questo livello scolastico scarso risalto alle trasformazioni geometriche, indispensabili per una visione completa e dinamica della geometria; si sottovalutano così le indicazioni degli stessi programmi ministeriali per questo livello scolastico: *«Lo studio della Geometria trarrà vantaggio da una presentazione non statica delle figure, che ne renda evidenti le proprietà dell'atto del loro modificarsi»* (ricordiamo che quando si parla di figure, non si intendono solo le figure piane ma anche quelle solide, anche se il pensiero va spontaneamente al piano

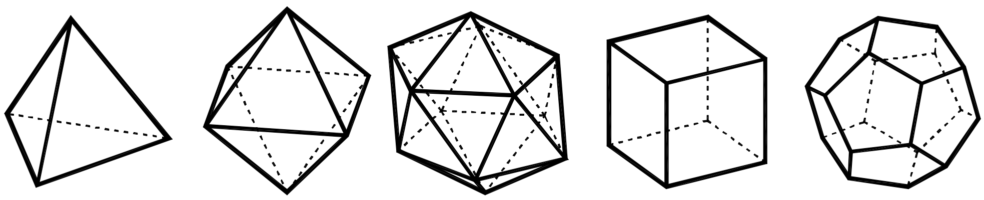
essendo ormai diventato il piano “sinonimo” di geometria). Infatti, gli Orientamenti per la “lettura” dei contenuti di questo livello scolastico continuano affermando: «*La geometria dello spazio non sarà limitata a considerazioni su singole figure, ma dovrà altresì educare alla visione spaziale. È in questa concezione dinamica che va inteso anche il tema delle trasformazioni geometriche*».
Per questo livello scolastico, riteniamo che si possa prendere seriamente in considerazione un’impostazione legata al “fusionismo” che consiste nell’insegnamento congiunto della geometria piana e di quella solida. Riteniamo infatti mal fondate le ragioni pedagogiche sostenute da Hadamard (1898) a discapito del “fusionismo”, basate sulla necessità di dividere le difficoltà e sulla convinzione che “vedere nello spazio” è una di quelle da non aggiungere subito alle altre; la nostra diffusa esperienza parte proprio dal “vedere nello spazio” e non nel piano, con ottimi risultati didattici.
La geometria che si può insegnare nella scuola secondaria inferiore è una geometria intuitiva, essendo opinione da tutti condivisa che uno studio razionale e consapevole a questa età non è possibile affrontarlo; scrive a questo proposito Vita (1993): «*Come gli Elementi di Euclide rappresentano il punto finale e conclusivo, in Grecia, di tre secoli di ricerche e di produzioni geometrica, così la sistemazione assiomatica della geometria euclidea dovrà essere il punto finale degli studi di geometria compiuti nella scuola secondaria*».
A questo punto vale la pena ipotizzare un percorso più intuitivo e più vicino alle esigenze della trasposizione didattica che, per questo livello scolastico, rientra a nostro parere nell’ottica del fusionismo; altrimenti si rischia, come avviene spesso, di creare un acritico sunto dell’impostazione euclidea, poco intuitivo e allo stesso tempo poco razionale, a volte non apprezzato né dagli insegnanti, né dagli allievi.
Con queste affermazioni non vogliamo mettere in discussione l’importanza e la bellezza dell’opera euclidea, anzi siamo concordi con Maracchia (1998) nel ritenere che: «*… la struttura logica che si trova negli Elementi come sistema ipotetico-deduttivo, il rigore e l’intuizione dosati così sapientemente, ma forse anche inconsapevolmente, hanno reso questa opera immortale e tale da essere presa in considerazione per l’insegnamento ancora oggi dopo duemilatrecento anni*»; noi vogliamo solo ripensare ad una più efficace impostazione didattica per questo livello scolastico dato che la struttura logica, il rigore, l’intuizione citati da Maracchia non possono essere capiti e apprezzati dalla generalità degli allievi di questa età.
Riteniamo infatti che un determinato tipo di approccio per una certa materia, pur essendo stato seguito per secoli, può ad un certo punto essere reinterpretato, modificato, ripensato alla luce dei cambiamenti storici della disciplina, delle concezioni della società, delle nuove esigenze, soprattutto di ordine didattico. Il Sapere non viene banalmente dispensato dall’insegnante

all’allievo, ma viene necessariamente reinterpretato per esigenze didattiche (D’Amore, 1999; Fandiño, 2002).
L’idea di fondo è di partire da motivanti situazioni a-didattiche che contemplino contemporaneamente piano e spazio, seguite da fasi di istituzionalizzazione della conoscenza nelle quali l’insegnante, oltre a rendere il sapere personale degli allievi, sapere istituzionalizzato, cercherà anche di giustificare e di collegare tra loro gli apprendimenti avvenuti, fino ad arrivare ad una vera e propria interpretazione algebrica dei fatti geometrici e viceversa, così da creare reti di ragionamento sempre più vaste che verranno poi organizzate in un unico sistema nella scuola superiore. L’obiettivo è quello di riuscire a graduare il rigore della geometria passando da osservazioni di carattere intuitivo nella scuola elementare ad un’astrazione sempre più rigorosa ma consapevole nella scuola superiore.
In questo livello scolastico, le attività geometriche possono essere notevolmente valorizzate e supportate dall’uso di programmi computerizzati di tipo DGS (Dynamical Geometry Systems) come: Cabri-Géomètre, The Geometer's Sketchpad, Cinderella, Dr. Genius, ecc.
Il problema sollevato da molti insegnanti riguarda il contenuto e le strategie metodologiche degli attuali libri di testo basati per la maggior parte dei casi su un acritico sunto dell’impostazione euclidea; si tratta di un gatto che si morde la coda: le Case Editrici producono quel che sanno che si potrà vendere; finché la richiesta sarà piatta ed usuale, tale sarà la produzione editoriale; varrebbe a nostro parere la pena pensare a nuovi libri, adeguati, scritti da insegnanti, che scaturiscano da sperimentazioni effettivamente realizzate sul campo.
Riportiamo di seguito due esempi di situazioni problematiche che contemplano lo studio contemporaneo dello spazio e del piano.

• I poliedri platonici

Un’attività che risulta molto formativa per il secondo o per il terzo anno di scuola media (questo dipende dal percorso scelto) è la ricerca dei *poliedri regolari*, ossia di quei poliedri convessi con le facce che sono poligoni regolari tutti uguali tra loro e con gli angoloidi tutti uguali. Per aggirare il problema del controllo degli angoloidi tutti uguali da parte dei ragazzi, si può stabilire che i poliedri regolari sono quei particolari poliedri limitati da facce che sono poligoni regolari tutti uguali tra loro e tali che in ogni vertice concorra lo stesso numero di facce. Quanti sono i poliedri regolari? Proviamo a cercarli… per riuscirci teniamo conto che da ogni vertice del poliedro devono partire almeno tre facce, e che la somma degli angoli delle facce che partono dal vertice, non può essere uguale o maggiore di 360°, altrimenti si avrebbe uno “schiacciamento” nel piano (si dovrà parlare di figura che tassella uniformemente il piano se si arriva esattamente a 360° o di sovrapposizione di figure piane se si supera i 360°, ma non più di solidi). Iniziamo considerando le facce a forma di triangolo equilatero, che è il poligono regolare con il minor

numero di lati, e immaginiamo di costruire un poliedro tale che da ogni vertice partano 3 facce. Dato che l'angolo del triangolo equilatero è di 60°, si avrà 60° × 3 (che sono le facce che partono dal vertice) che è uguale a 180° (minore di 360°); otteniamo così un poliedro regolare detto: tetraedro. Ora immaginiamo di costruire un poliedro costituito sempre da facce a forma di triangolo equilatero, ma tale che da ogni vertice partano 4 facce invece che 3; ancora una volta la somma degli angoli che concorrono in un vertice è minore di 360°; quindi si ottiene un altro poliedro regolare detto: ottaedro.
È anche possibile costruisce un poliedro regolare con facce a forma di triangoli equilateri e pensato in modo da avere 5 facce che partono da ogni vertici; si ottiene così l'icosaedro. Se ora si tenta di costruire un poliedro regolare con facce sempre a forma di triangoli equilateri e pensato in modo da avere 6 facce che partono da ogni vertice, ci si accorge che non è possibile riuscirci perché 60° × 6 fa 360°, cioè l'angolo giro, ossia si crea una tassellazione uniforme nel piano.
Continuando a considerare altri poligoni regolari costituenti le facce, si scopriranno solamente i seguenti cinque poliedri regolari: il tetraedro, l'ottaedro e l'icosaedro con facce a forma di triangolo equilatero; l'esaedro (o cubo) con facce a forma di quadrato; il dodecaedro con facce a forma di pentagono regolare.

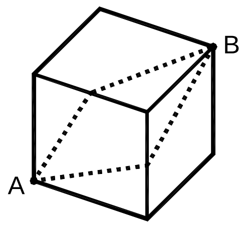


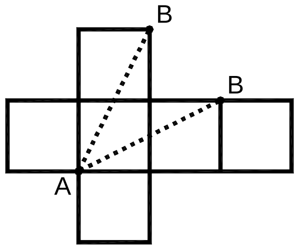
A differenza dei poligoni regolari, che sono infiniti, i poliedri regolari sono quindi solo cinque. Platone nel V-IV secolo a.C. li aveva già scoperti, ed è per questo che i poliedri regolari vengono anche detti *platonici*.
Data la perfezione e la bellezza dei poliedri regolari, molti famosi intellettuali e artisti ne subirono il fascino. Il tetraedro, il cubo e l'ottaedro erano già noti ai matematici orientali, il dodecaedro agli Etruschi. I Pitagorici scoprirono anche l'icosaedro e associarono, infine, ad ogni poliedro un elemento della simbologia cosmica (al tetraedro associarono il fuoco, al cubo la terra, all'ottaedro l'aria, al dodecaedro l'acqua e all'icosaedro l'universo).
Platone ce ne lascia una testimonianza nel *Timeo*, dove dice: «*Non accorderemo a nessuno che vi siano corpi visibili più belli di questi*».
Nel Rinascimento, in piena riscoperta della filosofia platonica, questi poliedri goderono di un altro periodo di grande popolarità. Gli artisti dell'epoca li riprodussero diffusamente, tanto è vero che da quel momento risulta difficile distinguere la storia artistica da quella scientifica dei poliedri. I più importanti

libri rinascimentali sulla teoria e pratica della prospettiva sono spesso delle sequenze di solidi nello spazio, visti sotto diverse angolature.
La regolarità e la bellezza dei solidi platonici non lasciò insensibile neanche il grande astronomo e matematico Keplero, che, oltre a ideare i solidi stellati, propose un modello del sistema solare basato sui solidi platonici.
Infine, ne furono attratti per la loro bellezza anche Leonardo da Vinci, Piero della Francesca, Albrecht Dürer e Paolo Uccello; recentemente, Maurits Cornelis Escher, Salvador Dalì e Lucio Saffaro.
Queste considerazioni permettono numerosi agganci interdisciplinari sia a livello di scuola secondaria inferiore che a livello di scuola superiore; in quest'ultimo questa esperienza potrebbe avere un notevole valore formativo coordinandola con la Storia dell'Arte, la Filosofia, l'Astronomia, la Fisica, il Disegno Tecnico, l'Italiano, …

• **Cammini minimi**

Un'attività che contempla l'uso contemporaneo dello spazio e del piano potrebbe riguardare, oltre agli sviluppi, anche la ricerca dei cammini minimi, della quale se ne propone un esempio. Il cammino minimo, cioè il segmento più corto che unisce due vertici opposti (che non appartengono quindi alla stessa faccia) di un solido "pieno" non è, di solito, immediatamente riconoscibile.
Consideriamo, per esempio, il cubo: se inizialmente si chiede di individuare il cammino minimo tra due vertici opposti in un cubo "scheletrato", risulta semplice e intuitivo. Un po' più complicato è trovare il numero totale di questi cammini minimi che vanno dallo stesso vertice al suo vertice opposto, dato che sono addirittura sei.
Poco intuitivo risulta invece individuare il cammino minimo da un vertice ad un vertice opposto in un cubo "pieno"; come prima risposta viene spontaneo sostenere che il percorso minimo è quello che segue la diagonale di una faccia più lo spigolo consecutivo che arriva fino al vertice opposto, eppure non è così. Per non essere indotti in errore, è consigliabile sfruttare il piano, passando allo sviluppo del cubo. Questo passaggio può essere fatto tagliando un cubo "pieno" in modo da crearne uno sviluppo o, viceversa, progettando direttamente uno sviluppo del cubo che poi sarà richiuso, o ancora facendolo solamente come gioco di immagine mentale, ossia cercando di vedere con gli "occhi della mente" dove fanno a finire i vertici del cubo nel suo sviluppo e quindi individuando di conseguenza il segmento che rappresenta il cammino minimo. Aiutandosi con il piano è ora semplice segnare il cammino minimo nello spazio; eccolo nel disegno.





Di questi cammini minimi è possibile chiederne anche la lunghezza, richiamando così applicazioni collegate al teorema di Pitagora, inoltre è possibile trasferire l'attività ad altri solidi: parallelepipedi rettangoli, ottaedri, … aiutandosi come sempre con il passaggio dallo spazio al piano e viceversa.
Queste situazioni problematiche possono essere trasformate in problemi geometrici di massimo e di minimo per la scuola secondaria superiore riguardanti lo spazio e il piano, che non sempre vengono sfruttati nell'insegnamento (esempi da massimo e minimo per la scuola superiore sono presenti in Negrini, Plazzi, 1992). La natura concreta e visuale di un problema di questo tipo può essere uno stimolo motivante verso la risoluzione del problema che può inoltre contribuire a favorire sempre più la percezione spaziale. Questi tipi di problemi vengono spesso proposti agli esami di maturità, ma dagli studenti poco risolti, soprattutto quelli riguardanti lo spazio, essendo ormai totalmente trascurati dall'insegnamento nella scuola secondaria superiore.
A questo proposito tra gli esempi di terze prove per il Nuovo Esame di Stato relative alla componente matematica redatto dall'Unione Matematica Italiana, C.I.I.M. (Commissione Italiana per l'Insegnamento della Matematica), viene proposto il seguente testo: *Una mosca parte dal vertice A di un cubo ABCDEFGH avente lo spigolo lungo 200 cm; seguendo sulla superficie del cubo la strada più breve, essa raggiunge il vertice opposto G alla velocità di 5 cm al secondo. Una formica parte contemporaneamente dal vertice B (adiacente ad A) e raggiunge G alla velocità di 3 cm al secondo, anch'essa per la via più breve. Quale dei due insetti arriva per primo? Dopo quanto tempo arriva il secondo?*

Gli esempi fino a qui proposti per i diversi livelli scolastici non devono far credere che si possano introdurre concetti semplicemente facendo uso di figure o di modelli concreti di varia natura; risulta a questo punto fondamentale riflettere sui *concetti figurali* introdotti da Fischbein fin dal lontano 1963.
In psicologia, concetti e immagini sono considerati due categorie distinte di entità mentali: i concetti sono rappresentazioni ideali di una classe di oggetti o di un fenomeno, mentre le immagini sono rappresentazioni sensoriali di un oggetto o di un fenomeno. Nei ragionamenti matematici, però, queste due entità non sono così indipendenti: in una dimostrazione di geometria, per esempio, si operano alcuni passaggi, come se gli oggetti fossero reali, pur

usando informazioni di natura concettuale. O ancora, afferma Fischbein (1993): *«(…) Una figura geometrica può essere descritta come avente intrinsecamente proprietà concettuali. Tuttavia una figura geometrica non è un puro concetto. È un'immagine, un'immagine visiva. Possiede una proprietà che i concetti usuali non possiedono, cioè include la rappresentazione mentale di proprietà spaziali. Tutte le figure geometriche rappresentano costruzioni mentali che possiedono simultaneamente, proprietà concettuali e figurali».*

Quando operiamo con enti geometrici, consideriamo le loro caratteristiche ideali, ma senza distinguerle dall'immagine concreta cui ci riferiamo. Si può concludere, quindi, che l'oggetto del ragionamento in geometria non è né un puro concetto, né una pura immagine, ma un concetto figurale, *«…entità mentali che riflettono proprietà spaziali (forma, posizione, grandezza) e, allo stesso tempo, possiedono qualità concettuali – come l'idealità, l'astrattezza, la generalità, la perfezione»* (Fischbein, 1993).

I concetti figurali includono la figura come proprietà intrinseca; la figura intesa come immagine interamente controllata dalla definizione, la rappresentazione mentale di una figura geometrica, interamente controllata dal concetto.

L'armonico rapporto tra aspetti figurali e concettuali è, però, una situazione ideale, che non sempre si realizza, tendente comunque a progredire con l'età e l'istruzione: *«… il processo di costruzione dei concetti figurali nella mente dello studente non dove essere considerato un effetto spontaneo degli usuali corsi di geometria. L'integrazione delle proprietà concettuali e figurali in strutture mentali unitarie, con la predominanza dei limiti concettuali rispetto a quelli figurali, non è un processo naturale. Ciò dovrebbe costituire una continua, sistematica e principale preoccupazione dell'insegnante»* (Fischbein, 1993).

Per questo Fischbein ha indicato nel suo articolo situazioni conflittuali da usare didatticamente per far emergere la natura dei concetti figurali e ha fornito indicazioni metodologiche didattiche che consistono nel far esercitare gli studenti in attività mentali, nelle quali sia necessaria la cooperazione tra l'aspetto concettuale e il figurale. Tramite queste attività, immagini e concetti mostrano chiaramente la loro natura, talvolta contraddittoria, rappresentando, così, un ottimo allenamento per la manipolazione di concetti figurali. Fischbein ha così aperto la strada allo studio del rapporto dinamico tra concetti e immagini in educazione geometrica.

Le stesse conclusioni cui giunse Fischbein, furono, in seguito, confermate anche da altre ricerche: Mariotti (1992) ha approfondito questo aspetto, attraverso lo studio delle risposte ottenute ad alcuni quesiti posti a studenti inoltre dall'indagine condotta nel 1993(a), sull'attività di conteggio di vertici, facce e spigoli dei poliedri, emerge chiaramente la dialettica tra immagini e concetti. Infatti, le strategie di conteggio messe in atto dagli studenti intervistati, indipendentemente dall'età, possono essere classificate in base a diversi livelli di concettualizzazione. Inoltre l'Autrice (1993b) ha messo in evidenza come per la geometria, che consiste di concetti figurali, l'educazione si situa nella zona di passaggio tra la visualizzazione intesa come elaborazione spontanea di immagini (richiamare alla mente immagini di oggetti e situazioni, per loro natura visibili, spaziali) e il pensiero visivo inteso come concettualizzazione di immagini (rappresentazione visiva di idee, di immagini che per loro natura non sono spaziali).

La teoria dei concetti figurali permise, quindi, di capire la natura di certi errori degli studenti in geometria. Infatti, è proprio la natura intrinseca degli errori che genera conflitti, contraddizioni e difficoltà: immagini e concetti rimangono relativamente dipendenti da due sistemi diversi, in quanto la loro completa fusione rappresenta solo la situazione ideale. Alcuni stimoli figurali possono essere così devianti per gli studenti da vincere sul controllo concettuale: la componente figurale tende a liberarsi dal controllo formale, a non dipendere più dalla definizione. *«Errori e difficoltà sono allora imputabili ad una interazione inadeguata, ad una disarmonia, dovuta al prevalere di un aspetto sull'altro»* (Mariotti, 1992). È proprio questo, che una corretta educazione matematica dovrebbe evitare, proponendo attività che facciano armonizzare i due aspetti, evitando l'insorgere di ambiguità, come lo stesso Fischbein aveva auspicato. Mariotti aggiunge che nell'educazione geometrica tutto il percorso deve tener bene presente questo obiettivo; la tradizione d'insegnamento usuale, invece, vuole che si proceda dal concreto all'astratto, relegando solo alla fine la concettualizzazione, a favore di un maggiore controllo degli aspetti figurali. Ma questo, come è stato ampiamente dimostrato, non agevola affatto l'armonizzazione degli aspetti figurali e concettuali. È necessario, fin dall'inizio, un maggiore controllo anche concettuale, soprattutto perché gli ausili proposti per la comprensione possono ostacolare l'astrazione.

Spesso, infatti, gli insegnanti per costruire i concetti utilizzano esclusivamente oggetti concreti, ma nessun modello può essere un rappresentante esaustivo del concetto (Fischbein, 1993; Maier, 1993, 1998). Ciascun oggetto deve essere elaborato mentalmente, in modo che le sue caratteristiche possano essere idealizzate e contestualizzate nello spazio geometrico. Inoltre, tutte le caratteristiche del modello devono essere trasmesse linguisticamente. Solo attraverso strumenti linguistici l'insegnante può far capire in che modo lui stesso interpreta i modelli e accertarsi che le idee degli allievi siano corrette. Quindi, *«…è necessario che l'allievo abbia l'occasione di presentare le proprie interpretazioni del modello e di discutere le proprie idee concettuali»* (Maier, 1998).

L'uso consapevole e critico di modelli potrebbe risultare insostituibile per dare senso e significato a un formalismo che risulterebbe altrimenti vuoto o incompreso, se lasciato solamente a vuote percezioni. Il ragionamento

deduttivo deve guidare l’osservazione e indicare perché è “vero ciò che si vede” (Maier, 1998); in questo modo, la percezione è un processo attivo di costruzione individuale. Ma il processo non si conclude qui: il modo con cui ciascun alunno interpreta il modello si costruisce nell’ambito della comunicazione linguistica. Infatti, non tutti i livelli di formalizzazione vengono introiettati dagli allievi, così come non tutti hanno le stesse visualizzazioni dei modelli. È solo attraverso l’esplicitazione e la comunicazione che si possono ridurre fraintendimenti.
D’altra parte, già in un articolo precedente (1989) Maier aveva messo in evidenza come la lingua sia fonte di incomprensioni nell’apprendimento della geometria, e siccome il linguaggio produce sviluppo cognitivo, l’uso adeguato della lingua rappresenta anche un mezzo potente di costruzione concettuale.

1.5. La geometria nella scuola secondaria superiore

«L’immagine spaziale è l’“anima” della geometria, anche se a volte ci capita di ignorare questo fatto»

[Fischbein cit. in Speranza (1988)]

Lo studio della geometria solida è in netta diminuzione nelle scuole secondarie inferiori ed è praticamente scomparsa dall’insegnamento superiore; eppure nei programmi ministeriali italiani è possibile leggere: *«L’obiettivo fondamentale della Geometria è quello di descrivere e studiare razionalmente uno spazio, prima ancora di classificare particolari figure….»*, obiettivo da molti sottovalutato o addirittura dimenticato. È sicuramente vero che nei programmi cosiddetti Brocca appare una maggiore attenzione allo studio delle figure in sé piuttosto che in relazione all’ambiente in cui si considerano immerse; la trattazione della geometria dello spazio viene limitata allo studio di esempi significativi di trasformazioni geometriche e di simmetrie in solidi particolari, ma nel commento ai contenuti si sottolinea la finalità di alimentare ed affinare l’intuizione spaziale.
In linea con il pensiero di Speranza (1995) riteniamo che: *«La geometria, a tutti i livelli, deve dare agli allievi una sensibilità spaziale, deve rafforzare la componente “visualizzazione”, del nostro modo di concepire il mondo, deve gettare un ponte fra sensibilità e razionalità…»*. La geometria solida dovrebbe a nostro parere trovare un ruolo importante nell’insegnamento secondario. Furinghetti (1996), parlando della scuola superiore, afferma: *«Vedo la geometria nello spazio non come un ulteriore ambito in cui introdurre i teoremi, ma proprio come l’ambito in cui determinati problemi si risolvono (uno degli obiettivi che sono stati rilevati per l’insegnamento della geometria). Quindi lo spazio è un ambiente da padroneggiare. Si è spesso*

osservato come ciò non avvenga, anzi, come proprio l'insegnamento geometrico tenda ad appiattire quello che di intuizione spaziale lo studente possiede».
Anche per questo livello scolastico si può, quindi, ipotizzare fin dal biennio un approccio alla geometria secondo i principi del "fusionismo", inteso come introduzione contemporanea di piano e spazio. Tale proposta si colloca coerentemente con i programmi Brocca per il biennio superiore, dato che nei Commenti ai singoli temi si trova scritto: «*Gli elementi di geometria dello spazio hanno lo scopo di alimentare e sviluppare l'intuizione spaziale. È in facoltà del docente presentare prima la geometria piana e poi quella dello spazio, oppure fondere, in relazione agli elementi comuni, le due esposizioni*».
Da questo punto di vista un approccio, riportato in Furinghetti (1996), potrebbe essere quello della geometria della sfera a cui si riferisce l'esperienza descritta in van der Brink (1995) effettuata con studenti di 16 anni. Sempre la sfera può essere usata nel triennio come ambiente per discutere aspetti della geometria non euclidea (tema previsto nell'attuale scuola secondaria superiore italiana, soprattutto atto a far riflettere sul senso che hanno le teorie in matematica).
Inoltre, ripensando alle trasformazioni, già citate nella parte relativa alla scuola inferiore, è possibile proporle anche dal punto di vista spaziale tentando un ulteriore avvicinamento ai problemi della rappresentazione e della gestione culturale e formale dello spazio a tre dimensioni. Si può presentare lo studio di proprietà nello spazio che si conservano o si perdono nelle trasformazioni, come la proiezione stereografica della sfera che rappresenta una trasformazione che si presta bene anche ad un trattamento analitico. In generale, le trasformazioni dovrebbero essere considerate come un saldo argomento di continuità tra i due ordini di scuola e non come un'eventuale appendice.
Per quanto riguarda la geometria analitica, si è spesso di fronte ad una frattura con il livello precedente, dato che essa è già stata iniziata alle scuole medie quando si trattano le coordinate e in alcuni casi non compare per qualche anno alle superiori; è comunque possibile prevedere la geometria analitica in tre dimensioni a partire dai suoi primi elementi o da situazioni coinvolgenti tipo il "filetto in 3D".
Siamo quindi concordi con Furinghetti (1996) nel ritenere che: «*La geometria nello spazio si può configurare realmente come un battello che permette di navigare nella geometria collegando varie problematiche*».

La presenza di tanti indirizzi diversi nella scuola secondaria superiore rende praticamente impossibile tracciare un unico itinerario didattico, specialmente per la geometria, ma è possibile effettuare alcune considerazioni di carattere generale. Spesso l'insegnamento, anche per questo livello scolastico, è dominato da "cattive" abitudini e da atteggiamenti acritici che forniscono una visione del sapere matematico in forma immutabile, invece di spingere gli studenti ad una visione panoramica globale delle diverse tradizioni e sviluppi. La matematica, ed in particolare la geometria, andrebbe invece presentata da diversi punti di vista, fornendo diversi approcci organici. Risulta impensabile oggigiorno dare un'unica sistemazione e interpretazione della geometria così come avvenne per l'impostazione euclidea, anche se, come riferisce Speranza (1995): «*Una tendenza diffusa e in un certo modo spiegabile vorrebbe portare, per una disciplina scientifica, a una esposizione unitaria: ma la geometria è per sua natura complessa e non riducibile a un percorso unitario*». Ribadiamo la massima della Castelnuovo riportata in Speranza (1988): «*il valore formativo della Geometria, e la sua utilità come strumento per altre discipline, vengono messi in risalto da una trattazione che tenga conto dei molteplici approcci possibili: se anche a livello elementare c'è l'esigenza d'una trattazione critica, a maggior ragione questo deve essere vero quando si studia la Geometria a livello avanzato*». Da un punto di vista didattico si pone il problema dei raccordi dei suoi diversi aspetti, è vero; tuttavia il maggior problema rimane il raccordo tra geometria come scienza descrittiva dello spazio in cui viviamo e quello più generale di geometria come sistema ipotetico-deduttivo.

Per quanto riguarda la scuola superiore, si assiste già da anni ad una "crisi" didattica della geometria euclidea, anche se questo cambiamento non è mai stato ufficializzato dai programmi ministeriali. È testimonianza di ciò la sua scomparsa da alcune scuole e la sua sostituzione totale con la geometria analitica. Questa crisi è forse derivata da un'inefficace impostazione seguita in quelle scuole superiori dove veniva, ed è tuttora, presentata nel biennio senza enfatizzare una sistemazione globale degli apprendimenti già avvenuti nei livelli precedenti, ma dando a volte solo particolare rilievo a singoli teoremi. Molto spesso il passaggio dalla scuola media, dove lo studio della geometria è essenzialmente di tipo operativo e basato sull'intuizione, alla scuola secondaria, dove lo studio si concentra sulle proprietà delle figure geometriche che si desumono per inferenza logica da un sistema di assiomi (o semplicemente da un insieme di proprietà elementari assunte come vere), viene presentato agli allievi in modo discontinuo, disorganico e a volte addirittura incoerente. Abbiamo rilevato come in questi due livelli scolastici si assiste ad atteggiamenti e a scelte diverse che spesso non sono spiegate e giustificate agli allievi. Un esempio: nella scuola elementare i relativi programmi raccomandano di non introdurre i concetti in modo scorretto e come esempio vengono forniti i concetti di quadrato e rettangolo proponendo di introdurre il quadrato come caso particolare di rettangolo, per evitare di far credere che un rettangolo sia tale solo se ha necessariamente lati consecutivi disuguali; questo tipo di approccio viene seguito nella maggior parte dei casi anche nella scuola media; spesso, però, proprio nella scuola superiore agli studenti viene proposta un'impostazione dove i quadrilateri non possono più essere considerati come casi particolari l'uno dell'altro e questa frattura con i livelli precedenti, derivante da particolari scelte prese dall'insegnante, non viene esplicitata o spiegata agli allievi ma data per scontata, creando così forti disagi cognitivi (il più delle volte impliciti e non palesi) negli studenti. Limitandoci a questo esempio, ma la generalizzazione sarebbe oltremodo semplice, si ritiene che lo studente della scuola superiore abbia la necessaria maturità per dominare il fatto che vi possono essere varie vie per giungere alla stessa nozione e che le definizioni non sono vincolanti, anzi esprimono quella che Speranza (1987) chiamava *la libertà della matematica*.

Tutti gli atteggiamenti che abbiamo evidenziato, sono in contrasto con le indicazioni contenute nei programmi Brocca, nei quali si trova scritto: «*Lo studio della geometria nel biennio ha la finalità principale di condurre progressivamente lo studente dalla intuizione e scoperta di proprietà geometriche alla loro descrizione razionale e rappresenta come tale una guida privilegiata alla consapevolezza argomentativa. A ciò il docente può pervenire adottando un metodo che, facendo leva sulle conoscenze intuitive apprese dallo studente nella scuola media, proceda allo sviluppo razionale di limitate catene di deduzioni; è tuttavia necessario che ogni ipotesi o ammissione cui si fa ricorso sia chiaramente riconosciuta e formulata in modo esplicito, quali che siano le ragioni che inducono ad assumerla tra i punti di partenza del ragionamento*».

In questa frase si può notare la citazione: «*A ciò il docente può pervenire adottando un metodo che, …, proceda allo sviluppo razionale di limitate catene di deduzioni*» che prevede un approccio graduale alla dimostrazione tenendo conto che non si può dare per scontata la competenza linguistico-logica degli studenti di 14 anni a prendere possesso dell'idea di dimostrazione, almeno in geometria, ma che è necessario considerare che tale idea necessita di una pratica didattica esplicita (non più certo a 14 anni, ma ben oltre) (Duval, 1991, 1992-93; Hoyles, 1997).

Più in generale la crisi dell'impostazione euclidea rappresenta il risultato delle revisioni critiche sviluppatesi nella seconda metà dell'ottocento che hanno messo in luce alcune sue lacune di tipo logico e il relativismo della "verità" matematica.

Inoltre, le geometrie non euclidee e successivamente lo sviluppo della concezione strutturalista della matematica ne hanno circoscritto l'importanza e hanno aperto la strada ad altre impostazioni per lo studio della geometria stessa che si riflettono oggi nell'insegnamento nelle superiori. Ad esempio negli indirizzi scientifico e scientifico tecnologico, dove i programmi sembrano orientati ad una trattazione assiomatica, è possibile fare un confronto tra il sistema euclideo e il sistema di assiomi dei libri di testo, discutere le scelte euclidee e metterne in risalto i punti deboli, tentare un approccio storico e fare considerazioni filosofiche per accogliere il suggerimento delle geometrie non euclidee. Un'impostazione assiomatica deve essere a nostro parere critica, nel senso che deve arrivare pian piano a far capire che cos'è e perché sia necessario un assioma (meglio sarebbe un sistema di assiomi), invece di dare a priori un'impostazione fortemente assiomatica, poco efficace didatticamente, presentata in modo astruso e complicato in nome di un maggior rigore, non sempre perseguibile e non sempre comprensibile da parte di un giovane studente (che tenderà a vederlo più come un vezzo personale dell'insegnante, piuttosto che come una necessità intrinseca alla geometria).

In generale, ciò che ci preme sostenere è che riteniamo fuori discussione l'importanza della geometria per la formazione dello studente a tutti i livelli scolastici, anche l'importanza della geometria solida, per questo parafrasando Speranza (1988) affermiamo: "*Salviamo la geometria solida*!".
Per gli esempi riguardanti questo livello scolastico rimandiamo per ora alla parte successiva relativa all'uso di strumenti informatici, sarà nostra intenzione futura elaborare nuovi percorsi da proporre in classe.

Bibliografia

Aglì F., D'Amore B. (1995). *L'educazione matematica nella scuola dell'infanzia. Lo spazio, l'ordine, la misura.* Milano: Juvenilia.

Arpinati Barozzi A. M., Pellegrino C. (1991). Alla ricerca di una strategia di classificazione degli sviluppi piani dei parallelepipedi rettangoli. *La matematica e la sua didattica.* Bologna: Pitagora. 4, 4-11.

Artom E. (1937). Proprietà elementari delle figure del piano e dello spazio. *Enciclopedia delle Matematiche Elementari.* Milano: Hoepli. II, I, XXII, 59.

Baldisserri F., D'Amore B., Fascinelli E., Fiori M., Guastaldelli B., Golinelli P. (1993). I palloncini di Greta. *La matematica e la sua didattica.* Bologna: Pitagora. 4, 444-449.

Barbin È. (1991). *Les Éléments de géométrie de Clairaut: une géométrie problématisée.* Repères-IREM. 4, 119-133.

Bassani A., Lazzeri G. (1891). *Elementi di geometria*. Livorno: Giusti.

Bernardi C. (1995). I matematici e l'indirizzo didattico. *L'educazione matematica.* 1, 33-49.

Betti E., Brioschi F. (1868). *Gli Elementi d'Euclide con note, aggiunte ed esercizi.*

Calò Carducci C. (1990). *Topologia.* Gruppo Editoriale Faenza Editrice S.p.A.

Castelnuovo E. (1946). Un metodo attivo nell'insegnamento della geometria intuitiva. *Periodico di matematiche*. IV, XXIV, 129-140.

Castelnuovo E. (1989). The teaching of geometry in Italian high schools during the last two centuries: some aspects related to society. In C. Keitel, P. Damerow, A. Bishop, P. Gerdes (editors). *Mathematics, education and*

society. Science and technology education. Document Series n. 35. Unesco, Paris. 51-52.
Clairaut, A. C. (1771). *Elementi di geometria*. Roma: V. Monaldini (II edizione).
D’Amore B. (1981). *Approcci matematici nella scuola dell’infanzia*. Firenze: La Nuova Italia.
D’Amore B. (a cura di). (1987). *Una mostra di matematica. Come rendere operativi i nuovi programmi della scuola elementare*. Teramo: Giunti e Lisciani.
D’Amore B. (1993). *Geometria*. Progetto Ma.S.E. Volume V. Milano: Franco Angeli.
D’Amore B. (1999). *Elementi di Didattica della Matematica*. Bologna: Pitagora.
D’Amore B. (2001). Nel segno della creatività. *La Vita Scolastica*. Firenze: Giunti.1. 41-44.
D’Amore B., Manini M. (1985). *Percorsi, Labirinti, Mappe. Esperienze protomatematiche nella scuola dell’infanzia*. Firenze: La Nuova Italia.
De Paolis R. (1884). *Elementi di Geometria*. Torino: E. Loesher.
Donadel A, Fabian E. (2002). Un mondo elastico a 3 anni. In: D’Amore B, Sbaragli S. (a cura di). *Sulla didattica della matematica e sulle sue applicazioni*. Atti del Convegno: Incontri con la matematica n. 16. Bologna: Pitagora.
Duval R. (1991). Structure du raisonnement deductif et apprentissage de la demonstration. *Educational studies in mathematics*. 22, 233-261. [Esiste una traduzione in lingua italiana: *La matematica e la sua didattica*. 4, 1996, 370-393].
Duval R. (1992-93). Argumenter, demontrer, expliquer: continuità ou rupture cognitive? *Petit x*. 31, 37-61. [Esiste una tradizione italiana: *La matematica e la sua didattica*. 2, 1996, 130-152; appare anche come Volume 1 nella Collana: Bologna-Querétaro (1998). Bologna: Pitagora].
Facchini V., Gialanella F., Trampetti A. (1996). Il dibattito sul fusionismo a cavallo tra il 1800 ed il 1900 nelle adunanze e nei congressi della Mathesis. In: Palma W., Bovi T., Maracchia S. (a cura di). *Cento anni di matematica*. Atti del Convegno: Mathesis Centenario 1895-1995. Una presenza nella cultura e nell’insegnamento. Roma: Fratelli Palombi. 140-155.
Fandiño Pinilla M.I., Sbaragli S. (2001). *Matematica di base per insegnanti in formazione*. Bologna: Pitagora.
Fandiño Pinilla M.I. (2002). *Curricolo e valutazione*. Bologna: Pitagora.
Fischbein E. (1963). *Conceptele figurale*. Bucuresti, Ed. Acad. Rep. Pop. Romine.
Fischbein E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational studies in mathematics*. 24, 139-162.

Furinghetti F. (1998). La tradizione italiana nell'insegnamento della geometria. *La matematica e la sua didattica.* 2, 176-197.
Furinghetti F. (1996). Insegnamento/apprendimento della geometria nella scuola secondaria superiore. Riflessioni su strumenti e prescrizioni a disposizione degli insegnanti. *L'insegnamento della geometria. Seminario di formazione per docenti Scuole Medie Superiori.* Quaderni 19/2. 15-69.
Hadamard J. (1898). *Leçons de géométrie élémentaire*. Paris: Colin.
Hoyles C. (1997). The curricolar shaping of student's approaches to proof. *For the learning of mathematics.* 17, 1, 7-15. [Esiste una traduzione in lingua italiana: *La matematica e la sua didattica.* 1998, 3, 248-270. Appare anche come Volume 5 nella Collana: Bologna-Querétaro (1998). Bologna: Pitagora].
Howson A.G., Wilson B. (1986). *School Mathematics in the 1990*s. ICMI Study series. Cambridge: Cambridge University Press.
Legendre A. M. (1818). *Elementi di geometria.* Firenze: Guglielmo Piatti.
Maier H. (1993). Problemi di lingua e di comunicazione durante le lezioni di matematica. *La matematica e la sua didattica*. 1, 69-80.
Maier H. (1989). Conflit entre langue mathématique et langue quotidienne pour les élèves. *Cahiers de didactique des mathématiques.* 3, 86-118. [Tad. It.: Il conflitto tra lingua matematica e lingua quotidiana per gli allievi. *La matematica e la sua didattica*. 3, 298-305].
Maier H. (1998). L'uso di mezzi visivi nelle lezioni di geometria. *La matematica e la sua didattica*. 3, 271-290.
Maracchia S. (1998). Sviluppi e mutamenti nei programmi della geometria in Italia. *La matematica e la sua didattica.* 1. Bologna: Pitagora.
Mariotti M. A. (1992). Immagini e concetti in geometria. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate.* 15, 9, 863-885.
Mariotti M. A. (1993a). Strategie di conteggio del numero delle facce, dei vertici e degli spigoli di un poliedro. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*. 16, 7, 591-608.
Mariotti M. A. (1993b). Il ruolo della visualizzazione in matematica. *Scuola Viva*. XXIX, 2, 2, 10-16.
Negrini P., Plazzi P. (1992). Problemi geometrici di massimo e minimo. *La matematica e la sua didattica*. Roma: Armando Editore. 4, 25-40.
Pontecorvo C., Tassinari G., Camaioni L. (1990). *Continuità dai quattro agli otto anni. Condizioni, metodi e strumenti per una ricerca sperimentale nella scuola.* Firenze: La Nuova Italia. 353-370.
Sbaragli S. (1997). Esperienze di geometria per la scuola dell'infanzia: giochi sul foglio di gomma. *Infanzia.* 5, 37-41.
Sbaragli S. (2002). Nel mondo quotidiano dei poliedri. La Vita Scolastica. Area Matematica. 15, 44-48.
Smith, D. E. (1900). *The teaching of elementary mathematics*. London: Macmillan.

Speranza F.. (1987). La geometria dalle cose alla logica. In: D'Amore B. (a cura di). (1987). *La matematica e la sua didattica*. Atti dell'omonimo Convegno Nazionale, Castel San Pietro Terme. Roma: Armando. 106.

Speranza F. (1988). Salviamo la geometria! *La matematica e la sua didattica.* Roma: Armando Editore. 2, 6-14.

Speranza, F. (1995). Per il dibattito sulla geometria. *Lettera PRISTE*M. 16, 31-32.

van der Brink, J. (1995). Geometry education in the midst of theories. *For the learning of mathematic*s. 15, 1, 21-28.

Villani V. (1985). *La geometria: dallo spazio al piano.* Quaderno n. 2. Seminario didattico. Dipartimento di Matematica. Università di Pisa. Consiglio Nazionale delle Ricerche. Roma.

Villani V. (1992). Vecchio e Nuovo nell'insegnamento della Matematica. *Annali della Pubblica Istruzion*e. XXXVIII, 5/6, 568-577.

Vita V. (1993). La geometria delle trasformazioni nell'insegnamento secondario superiore. *Archimede*. 2, 76-83.