Castel San Pietro Terme, 8 novembre 2008

Le storie della matematica per comprendere la matematica… giocando

Giochi e modelli matematici da Pacioli a Nash

UNIVERSITAS STUDIORUM UTINENSIS

Giorgio T. Bagni

Dipartimento di Matematica e Informatica

Università di Udine

bagni@dimi.uniud.it

www.syllogismos.it

Cominciamo dalla storia (o storie?) Una presenza per molte questioni

- **La storia è importante nella didattica. Ma:**
- è corretto concepire la storia come un percorso che, attraverso tentativi e rivisitazioni critiche, porti **alla sistemazione moderna**?
- Possiamo cioè riferire l'intera evoluzione storica della matematica alle nostre attuali concezioni?
- Quale ruolo va attribuito ai **fattori culturali e sociali**?
- Le fasi che consideriamo come momenti di passaggio verso la formazione della matematica "compiuta" (la nostra), costituivano **la matematica "compiuta" dell'epoca, in base a concezioni culturali precise**.

Le matematiche (soprattutto i giochi!) sono prodotti delle singole culture

- La storia della matematica **può non essere vista come "scoperta" di contenuti pre-esistenti, ma come elemento della evoluzione sociale e culturale.**
- La storia deve dunque essere abbinata alla **geografia.**
- Spesso "vediamo" il mondo in una prospettiva eurocentrica…

Sommario

Storia e giochi

Da Luca Pacioli a John Nash

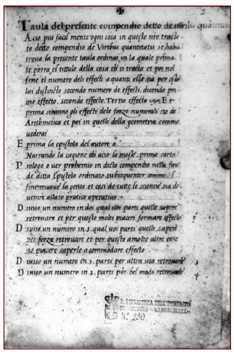
- **Introduzione**
  tra il XV e il XVI secolo
- **I quadrati magici**
  una storia antichissima
- **Moltiplicazioni**
  con risultati sorprendenti
- **Un gioco**
  di divinazione binaria
- **La Teoria dei Giochi**
  Von Neumann e Nash

Luca Pacioli

- Il francescano **Luca Pacioli** (1445-1514) è una figura primaria della matematica del XV–XVI secolo.
- Pacioli si ricorda per l'introduzione della "partita doppia"…
- … e per molti giochi matematici che oggi ispirano le nostre gare!

Un'opera manoscritta di Pacioli *De Viribus Quantitatis*

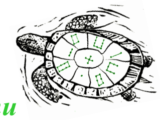
- Alla storia dei giochi matematici si collega ***De Viribus Quantitatis***, scritta presumibilmente tra il 1496 e il 1508.
- Una copia manoscritta, proveniente dalla biblioteca bolognese di G.G. Amadei, morto nel 1768, si trova presso la Biblioteca Universitaria di Bologna, codice 250.



Sommario
Storia e giochi
Da Luca Pacioli a John Nash

- **Introduzione**
  tra il XV e il XVI secolo
- **I quadrati magici**
  una storia antichissima
- **Moltiplicazioni**
  con risultati sorprendenti
- **Un gioco**
  di divinazione binaria
- **La Teoria dei Giochi**
  Von Neumann e Nash

I "quadrati magici"… partendo dalla Cina, VI sec. a.C.



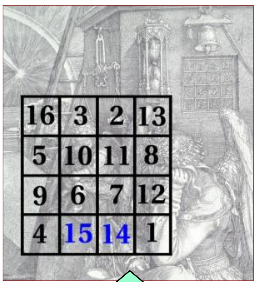
Lo Shu

4 e **2** sono le spalle
8 e **6** sono i piedi
un **3** sulla sinistra
un **7** sulla destra
porta un **9** sulla testa
è calzato con un **1**
mentre un **5** sta nel mezzo

15			
15	4	9	2
15	3	5	7
15	8	1	6
15	15	15	15

I "quadrati magici"… partendo dalla Cina, VI sec. a.C.

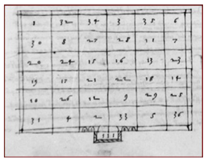
- **Il più antico quadrato magico** è il cinese *Lo Shu*, l'unico quadrato magico classico di ordine 3 (a parte i simmetrici etc.)
- L'interesse per questi "giochi" si diffuse in Occidente con *Malinconia* di **A. Dürer** (1514).
- **B. Frenicle de Bessy** (1605–1675) trovò 880 quadrati magici di ordine 4.

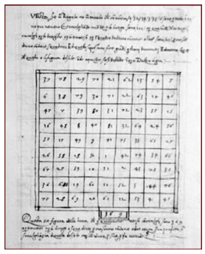


16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

un "quadrato magico"

Quadrati magici nel XIV secolo





- L'introduzione dei quadrati magici in Europa è stata attribuita a **M. Moschopulos** intorno al 1415-1420, ma ci sono manoscritti precedenti (i quadrati di quello bolognese del 1339 sono in Pacioli).
- Alcuni dei quadrati (da 3×3 a 9×9) di Pacioli si ritrovano nel *De occulta philosophia libri tres* di Cornelio Agrippa (Anversa, 1531).

Il misterioso quadrato di Mercurio

- Di questo quadrato magico, di ordine 8, Pacioli fornisce soltanto le prime due righe (e la costante magica, 260):

4	7	59	60	61	62	2	5
49	15	54	12	53	51	10	16

- Esso è dunque incompleto e, come negli altri casi, non è illustrato dal disegno (e non è riportato da Cornelio Agrippa), ma tra i quadrati magici costruiti nel mondo arabo tra il XI e il XII secolo e conosciuti poi in Europa compare il seguente:

Il misterioso quadrato di Mercurio

8+1 = 9 come in C. Agrippa; nel testo paciolìano è: 4+5

8	7	59	60	61	62	2	1
49	15	54	12	53	51	10	16
41	42	22	21	20	19	47	48
32	34	35	29	28	38	39	25
40	26	27	37	36	30	31	33
17	18	46	45	44	43	23	24
9	55	14	52	13	11	50	56
64	63	3	4	5	6	58	57

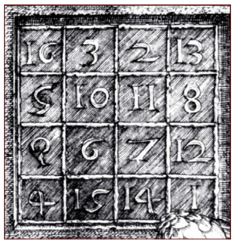
Ma occupiamoci ora di un'esperienza riferibile ai quadrati magici molto più vicina noi: Goethe e il *Faust*…

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Devi comprendere!
Di Un fai Dieci,
getta via il Due,
uguaglia il Tre,
e sarai ricco.
Crepi il Quattro!
Di Cinque e Sei,
dice la strega,
fai Sette e Otto.
È tutto fatto.
Se Nove è Uno,
Dieci è nessuno.
Questa è la tabellina della strega!

I quadrati magici
oggi

- La matematica da Frenicle ha realizzato molti risultati a proposito dei quadrati magici. Importante è…
- … l'ordine n del quadrato da costruire: esso può essere **dispari** (come per il quadrato *Lo Shu*, $n = 3$) o **pari** (come per quello di Dürer: $n = 4$).
- Presenteremo una regola per costruire un quadrato magico classico di ordine n dispari (vedremo ad esempio **il caso:** $n = 5$).



I quadrati magici
oggi

- Ricordiamo che un quadrato magico di ordine n si dice **classico** se coinvolge i numeri da 1 a n^2.
- Per **trovare la costante magica** di un q. m. cl. di ord. n si sommano i numeri da 1 a n^2 ("piccolo Gauss") e si divide per n:
- $$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & \dots & n^2-1 & n^2 \\ n^2 & n^2-1 & \dots & 2 & 1 \\ \hline n^2+1 & n^2+1 & \dots & n^2+1 & n^2+1 \end{array} \quad \text{(2 volte)}$$
- Quindi c. m. del q. m. cl. ord. $n = \mathbf{n^2(n^2+1)/2n}$
  $= \mathbf{n(n^2+1)/2}$

I quadrati magici
oggi

- Iniziamo a porre **1 nella casella al centro della prima riga.**
- Poi collochiamo gli altri numeri, **in ordine, secondo una "diagonale ascendente",** rispettando alcune regole.

		1		

I quadrati magici
oggi

- **Regole per le "diagonali":**
- si va alla colonna successiva in caso di fine colonna;
- si va alla riga precedente in caso di fine riga;
- si va alla casella inferiore in caso di casella occupata.

17	24	1	8	15
23	5	7	14	16
4	6	13	20	22
10	12	19	21	3
11	18	25	2	9

E infine… *verifichiamo!*

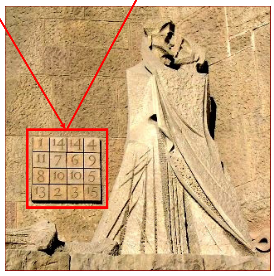
- Troviamo la costante magica:
- somma dei numeri da 1 a 25: 25×26:2 = 325
- 325:5 = **65**

	65					
65	17	24	1	8	15	
65	23	5	7	14	16	
65	4	6	13	20	22	
65	10	12	19	21	3	
65	11	18	25	2	9	
65	65	65	65	65	65	

La Sagrada Familia…

1	**14**	**14**	**4**
11	**7**	**6**	**9**
8	**10**	**10**	**5**
13	**2**	**3**	**15**

- **C'è un particolare interessante** nella splendida "facciata della Passione" di Josep Maria Subirachs...
- … un quadrato magico non classico di ordine 4 avente la costante magica **33** (mentre quella del quadrato di Dürer era **34**).



La Sagrada Familia…

- Il passaggio dal quadrato magico classico di ordine 4 a uno come quello della Sagrada Familia può non essere del tutto banale.
- Iniziamo col quadrato magico di **Dürer** (*c.m.* 34): simmetrizziamolo rispetto all'asse orizzontale, quindi simmetrizziamolo rispetto all'asse verticale.

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

4	15	14	1
9	6	7	12
5	10	11	8
16	3	2	13

1	14	15	4
12	7	6	9
8	11	10	5
13	2	3	16

Per ogni elemento d'angolo ci sono due possibilità, quelle illustrate nelle figure: Ang+Int e Ang+Lat

- Per "abbassare" la costante magica di 1 (da 34 a 33) quanti elementi dobbiamo ridurre (di un'unità)? **Quattro: uno (e uno solo) per ogni riga,** in modo tale che ne risulti uno (e uno solo) per ogni colonna e uno (e uno solo) per ogni diagonale.
- Di questi quattro elementi uno (uno solo) deve essere **"in un angolo"** (anche partendo da un elemento di lato si viene a considerarne uno d'angolo).

11	12	13	14
21	22	23	24
31	32	33	34
41	42	43	44

11	12	13	14
21	22	23	24
31	32	33	34
41	42	43	44

Per ogni elemento d'angolo ci sono due possibilità, quelle illustrate nelle figure: Ang+Int e Ang+Lat

- Dobbiamo individuare gli elementi da ridurre di 1.
- Si può iniziare dal primo elemento in alto a sinistra: con la soluzione Ang+Int, oppure con la soluzione Ang+Lat.
- **Non** è stata però questa la soluzione dei costruttori della Sagrada Familia: se si operasse con questi elementi si otterrebbe 0 in angolo…

1	14	15	4
12	7	6	9
8	11	10	5
13	2	3	16

1	14	15	4
12	7	6	9
8	11	10	5
13	2	3	16

La Sagrada Familia…

1	14	14	4
11	7	6	9
8	10	10	5
13	2	3	15

1	14	14	4
11	7	6	9
8	10	10	5
13	2	3	15

1	14	14	4
11	7	6	9
8	10	10	5
13	2	3	15

- Si può allora iniziare dal primo elemento in alto a destra (con le soluzioni Ang+Int o Ang+Lat), dal primo in basso a sinistra (con entrambe le soluzioni) o **dal primo in basso a destra.** Provate voi!
- **Quest'ultima, con la soluzione Ang+Int,** è la scelta operata per il quadrato magico della Sagrada Familia.
- Si noti che la costante magica (**33**) viene individuata in moltissimi modi diversi!

1	14	15	4
12	7	6	9
8	11	10	5
13	2	3	16

1	**14**	**14**	**4**
11	**7**	**6**	**9**
8	**10**	**10**	**5**
13	**2**	**3**	**15**

Sommario
Storia e giochi
Da Luca Pacioli a John Nash

- **Introduzione**
  tra il XV e il XVI secolo
- **I quadrati magici**
  una storia antichissima
- **Moltiplicazioni**
  con risultati sorprendenti
- **Un gioco**
  di divinazione binaria
- **La Teoria dei Giochi**
  Von Neumann e Nash

Torniamo a Pacioli: moltiplicazioni con risultati sorprendenti

- Il "XXXII effecto" è introdotto dalla dicitura **"De doi numeri che, multiplicato l'uno in l'altro, sempre farà la summa del producto le figure che voli"**. Non appare chiaro, sulla base del titolo, l'intendimento dell'Autore: si tratta di trovare dei fattori che portino a prodotti, in forma posizionale decimale, espressi da numeri costituiti da una stessa cifra ripetuta.
- Pacioli considera il caso di sei cifre e si propone di ottenere: **111111, 222222, 333333, 444444, 555555, 666666, 777777, 888888, 999999**
- Egli si basa inizialmente sul prodotto:

  777 × 143 = 111111

Torniamo a Pacioli: moltiplicazioni con risultati sorprendenti

- Moltiplicando un fattore (Pacioli opera sul secondo, 143) per 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 (e dunque scegliendo come secondi fattori quelli riportati in grassetto nella tabella) si otterranno i prodotti sopra elencati:
- 777 × (143×2) = 777 × **286** = 111111 × 2 = 222222
  777 × (143×3) = 777 × **429** = 111111 × 3 = 333333
  777 × (143×4) = 777 × **572** = 111111 × 4 = 444444
  777 × (143×5) = 777 × **715** = 111111 × 5 = 555555
  777 × (143×6) = 777 × **858** = 111111 × 6 = 666666
  777 × (143×7) = 777 × **1001** = 111111 × 7 = 777777
  777 × (143×8) = 777 × **1144** = 111111 × 8 = 888888
  777 × (143×9) = 777 × **1287** = 111111 × 9 = 999999

Torniamo a Pacioli: moltiplicazioni con risultati sorprendenti

- Successivamente Pacioli propone un secondo modo di realizzare lo stesso "effecto", basato sul prodotto:

  481 × 231 = 111111
- Le due soluzioni di Pacioli esauriscono o meno quelle possibili per il problema di ottenere prodotti di sei cifre uguali?
- La risposta è **no.**
- **Esercizio.** Quante sono le soluzioni possibili per l'esercizio paciolano?
- [Risposta: 15, si ricordi la scomposizione in fattori primi e un po' di calcolo combinatorio…]

Torniamo a Pacioli: moltiplicazioni con risultati sorprendenti

- Perché Pacioli ha considerato proprio **111111?** L'"effecto" può essere proposto anche per prodotti costituiti da un numero di cifre ripetute **diverso da 6**.
- Si voglia ottenere un numero di tre, quattro etc. cifre uguali (il caso di due cifre è banale: 11 è un primo). Consideriamo le scomposizioni in fattori primi:

  111 = 3×37 1111 = 11×101

  11111 = 41×271 1111111 = 239×4649
- Per un numero di cifre minore di 8 le scomposizioni sono, a parte quella impiegata da Pacioli, costituite da **due soli fattori primi e ciò impedisce di proporre più soluzioni.**

Torniamo a Pacioli: moltiplicazioni con risultati sorprendenti

- La seconda parte del "XXXII effecto" è dedicata ai **numeri "tramezzati"**, cioè espressi in notazione posizionale decimale da espressioni come:

  121212, 232323, 343434 etc.
- L'Autore suggerisce che per ottenere un numero "tramezzato" (ad esempio 121212, costituito dalla "ripetizione" delle cifre 1 e 2, ovvero di 12), si può:
- considerare un numero di decine pari al doppio del numero che si vuole veder ripetuto (ad esempio 12)
- aggiungere a ciò tale numero (dunque: 12×10×2+12)
- moltiplicare il risultato per il numero fisso 481.

Torniamo a Pacioli: moltiplicazioni con risultati sorprendenti

- Il procedimento paciolano equivale a moltiplicare il numero di due cifre considerato per

  (2×10+1)×481 = 10101
- e ciò porta, evidentemente, ad ottenere numeri "tramezzati":

  12 × 10101 = 121212

  23 × 10101 = 232323

  34 × 10101 = 343434

  58 × 10101 = 585858

  etc.

Sommario
Storia e giochi
Da Luca Pacioli a John Nash

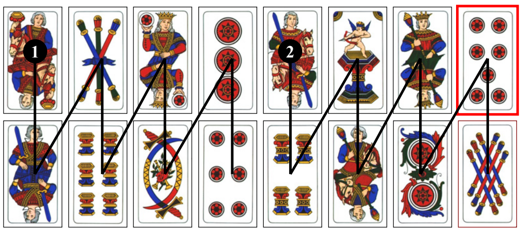
- **Introduzione**
  tra il XV e il XVI secolo
- **I quadrati magici**
  una storia antichissima
- **Moltiplicazioni**
  con risultati sorprendenti
- **Un gioco**
  di divinazione binaria
- **La Teoria dei Giochi**
  Von Neumann e Nash

Un gioco di divinazione binaria

- Disponiamo sedici carte da gioco nel modo seguente e chiediamo al partecipante di individuarne una senza indicarla (*De Viribus Quantitatis*, Capitolo LXIX).
- Inquadriamo in rosso la carta scelta **(il *settebello*):**

Un gioco di divinazione binaria

- Alla **prima** domanda ("in che riga sta la carta?") il partecipante indica la prima riga.
- Dopo lo spostamento (le linee 1, 2 diventano le nuove righe), la carta sta in una delle posizioni indicate:



Un gioco di divinazione binaria

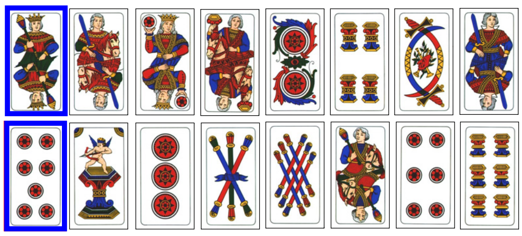
Così facendo la carta "pensata" verrà ad essere posizionata in un posto di ordine $k \equiv 1 \bmod 2$, cioè di posto dispari

Un gioco di divinazione binaria

Ripetendo la procedura la carta "pensata" verrà ad essere posizionata in un posto di ordine $k \equiv 1 \bmod 4$, cioè di posto 1, 5, 9 o 13

Un gioco di divinazione binaria

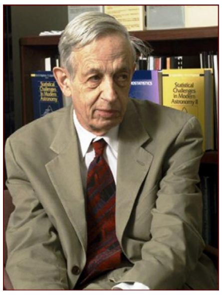
Ripetendo ancora la carta sarà in un posto di ordine $k \equiv 1 \bmod 8$, 1 o 9. Alla quarta domanda si indicherà la riga e la carta sarà individuata!



Sommario
Storia e giochi
Da Luca Pacioli a John Nash

- **Introduzione**
  tra il XV e il XVI secolo
- **I quadrati magici**
  una storia antichissima
- **Moltiplicazioni**
  con risultati sorprendenti
- **Un gioco**
  di divinazione binaria
- **La Teoria dei Giochi**
  Von Neumann e Nash

Teoria dei Giochi
Beautiful minds



- Ma i giochi matematici sono davvero soltanto “giochi”?
- Per gli studi sui giochi matematici a **John Nash** (1928) è stato conferito nel 1994 il **Premio Nobel** per l’economia.
- La storia di Nash, la sua genialità abbinata alla schizofrenia, ha interessato e commosso milioni di persone…
- …ma Nash non è certo l’unico matematico che, dopo Pacioli, si è impegnato nella **Teoria dei Giochi.**

Teoria dei Giochi
Beautiful minds

- János (John von) **Neumann** (1903–1957) fu una figura chiave della Game Theory.
- E non si deve dimenticare il grande Ennio **De Giorgi** (1928–1996), uno dei più importanti matematici del XX secolo: uno dei risultati per i quali è noto Nash riguarda la regolarità hölderiana delle soluzioni delle equazioni ellittiche del secondo ordine e **oggi viene chiamato Teorema di De Giorgi–Nash** (De Giorgi lo provò nel 1957).

Teoria dei Giochi
Beautiful minds

- La Teoria dei Giochi si occupa di situazioni in cui **più agenti sono chiamati a prendere alcune decisioni.**
- Gli agenti capiscono la situazione in cui si trovano e sono in grado di fare ragionamenti logici anche complessi (sono “intelligenti”); hanno l’obiettivo di massimizzare le loro preferenze (sono “razionali”).
- Un gioco si dice **non cooperativo** quando l’adozione di strategie riguarda i singoli giocatori sulla base di ragionamenti individuali (se n’è occupato Nash).
- Un gioco si dice **a somma nulla** se la somma delle vincite è zero (ad esempio quando una squadra vince e l’altra perde).

Teoria dei Giochi
Beautiful minds

- Von Neumann e Morgenstern dimostrarono (1944) che qualunque gioco a n soggetti e somma non zero si riduce a un gioco a n+1 soggetti e somma zero, e che la trattazione di questi ultimi giochi si collega a quella del gioco a due persone e somma zero.
- Pertanto **i giochi a due persone e a somma zero svolgono un ruolo fondamentale nella teoria dei giochi.**
- Una strategia è detta ***minimax*** quando **minimizza la massima perdita possibile**.
- Una strategia è detta ***maximin*** quando **massimizza la minima vincita possibile**.

Notiamo subito che non ci sono strategie *dominate* da altre (in tale caso potrebbero essere trascurate!)

- Consideriamo ad esempio la seguente matrice (per A):

B / *A*	**Mossa B–1**	**Mossa B–2**	**Mossa B–3**	**MIN**
Mossa A–1	3	2	1	1
Mossa A–2	–1	3	0	–1
Mossa A–3	5	–7	–1	–7
MAX	5	3	1	

Teoria dei Giochi
Beautiful minds

- Il caso visto è particolare: i giocatori A e B non hanno alcun interesse a scegliere mosse diverse da A–1 e da B–3 (strategie **pure**, che saranno certamente adottate).
- Ma non è detto che esista sempre un punto di sella corrispondente a strategie pure.
- Il **teorema di minimax** di Von Neumann afferma che **esiste sempre un punto di sella,** ma **non è detto che esso si trovi nell'ambito di strategie pure.** Bisogna considerare anche le **strategie miste.**
- Una strategia si dice mista se è rappresentata da una definita **probabilità** di scegliere una mossa o un'altra tra quelle a disposizione.

Teoria dei Giochi
Beautiful minds

- Consideriamo un esempio di gioco che porterà all'adozione di una strategia mista.
- **Non c'è punto di sella:** cosa faranno i giocatori?

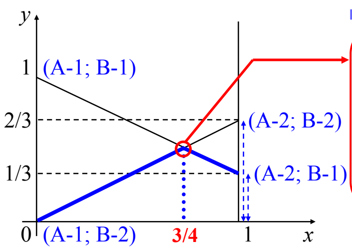
B / *A*	Mossa B–1	Mossa B–2	MIN
Mossa A–1	1	0	0
Mossa A–2	1/3	2/3	1/3
MAX	1	2/3	

valore inferiore del gioco

valore superiore del gioco

Teoria dei Giochi
Beautiful minds

- Per stabilire il **comportamento ottimale per A,** in un grafico si costruiscono le linee che rappresentano gli effetti delle mosse di A rispetto alle reazioni di B.



- La strategia

Il punto che rende massimi i minimi guadagni (ovvero minime le massime perdite) è "spostato" verso la strategia A–2

probabilità 3/4.

Teoria dei Giochi
Beautiful minds

- L'**equilibrio di Nash** (1949, Nash era studente a Princeton) riguarda giochi non cooperativi:
sotto certe condizioni, **esiste un punto di equilibrio** che si ottiene quando ciascun partecipante sceglie la propria mossa strategica in modo da massimizzare la sua funzione di retribuzione
- **supponendo che gli altri competitori non varino i propri comportamenti a motivo della sua scelta.**
- I soggetti possono operare una scelta dalla quale **tutti traggono un guadagno** ovvero limitano la perdita al minimo.

Teoria dei Giochi
Beautiful minds

Il Dilemma del Prigioniero
(Albert W. Tucker)

- Ciascuno dei due giocatori, i prigionieri A e B, ha due possibili scelte: **confessare o non confessare.**
- Se **uno solo dei due confessa,** viene perdonato e l'altro viene condannato a 8 anni di carcere.
- Se **entrambi confessano,** i prigionieri vengono entrambi condannati a 6 anni di carcere.
- Se **nessuno dei due confessa,** vengono condannati entrambi a 2 anni di carcere.
- È un gioco a somma non nulla e i giocatori scelgono la propria strategia simultaneamente, senza conoscere l'azione scelta dall'altro (**"non si parlano"**).

Teoria dei Giochi
Beautiful minds

Questa soluzione minimizza gli anni "complessivi" di prigione!

- L'esito (in anni di prigione) è così sintetizzato:

Prigioniero B / Prigioniero A	*confessa*	*non confessa*
confessa	A=6, B=6	A=0, B=8
non confessa	A=8, B=0	A=2, B=2

- Riassumendo, ciascuno: ***minimax***
se *confessa* rischia da 0 a 6 anni di carcere
se *non confessa* rischia da 2 a 8 anni di carcere

Teoria dei Giochi
Beautiful minds

… e "non si fidano" l'uno dell'altro!

- La conclusione, paradossale, porta a…

Prigioniero B / Prigioniero A	*confessa*	*non confessa*
confessa	A=6, B=6	A=0, B=8
non confessa	A=8, B=0	A=2, B=2

…un esito **non** soddisfacente per nessun giocatore **(6 anni a testa),** visto che **con due "non confessioni" l'esito sarebbe stato di soli 2 anni a testa!**

Lo stesso guaio: le superpotenze… "non si parlano"!

- Diamo infine un'occhiata a questo "gioco", dove gli esiti quantificano i problemi di spesa e di sicurezza:

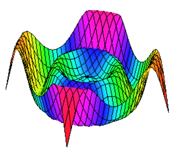
Superpotenza B / Superpotenza A	*si dota di armi nucleari*	*non si dota di armi nucleari*
si dota di armi nucleari	A=6, B=6	A=0, B=8
non si dota di armi nucleari	A=8, B=0	A=2, B=2

- Dunque, ragionando in termini "freddi", le due Superpotenze in gioco continueranno ad armarsi…
- **Ma questo, purtroppo, non è un gioco.**

Chiudiamo con *De Viribus Quantitatis*
Uno spunto attuale

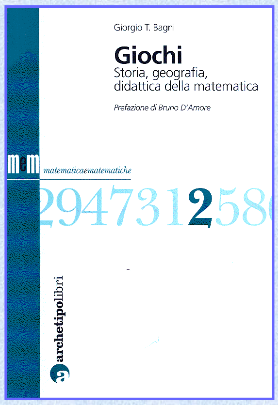
- Nell'antico lavoro di Pacioli c'è un suggerimento: l'indicazione di una strada forse lontana dalla didattica ufficiale, colta, ma talvolta fredda di quel tempo (dei giorni nostri?), ma ricca e stimolante: **una lettura che, dopo mezzo millennio, non ha ancora esaurito la propria vitalità…**

…per le beautiful minds!



E per finire, qualche ringraziamento

- **a Bruno D'Amore** che ha accolto un mio libretto sui giochi matematici in una splendida collana da lui diretta per la Gedit, "Matematica e Matematiche"
- **a Furio Honsell** (ex) Magnifico Rettore dell'Università di Udine



Grazie a tutti dell'attenzione