

SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
DELL'UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Anno Accademico 2007-08

Nicola Arcozzi

LO SPAZIO DI DRURY-ARVESON: TRA ANALISI COMPLESSA,
TEORIA DEGLI OPERATORI E GEOMETRIA
SUBRIEMANNIANA.

3 aprile 2008

ABSTRACT

In this seminar we try to explain why the Drury-Arveson space is important in operator theory, why it is interesting from the viewpoint of several complex variables, how it is related to the sub-Riemannian geometry of the Heisenberg group. We do this by following the thread of recent work in collaboration with R. Rochberg and E. Sawyer.

The *Drury-Arveson space* DA contains those functions f which are holomorphic in the unit ball \mathbb{B} of \mathbb{C}^N and such that

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^N} |a(n)|^2 \frac{n!}{|n|!} < \infty, \text{ where } f(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}^N} a(n)z^n.$$

A measure μ on \mathbb{B} is *Carleson* for DA if DA embeds boundedly in $L^2(\mu)$,

$$\iota : DA \rightarrow L^2(\mu) \text{ is bounded.}$$

We give a characterization of the Carleson measures for DA and discuss an application to multivariable operator theory.

For z in \mathbb{B} , let $B_z = \{w \in \mathbb{B} : |1 - \frac{z}{|z|} \cdot \bar{w}| \leq 2(1 - |z|)\}$ be the corresponding *Koranyi region* in \mathbb{B} .

Theorem. *A measure μ on \mathbb{B} is Carleson for DA if and only if it satisfies, for ζ in \mathbb{B} ,*

$$\mu(B) \leq C(\mu)(1 - |\zeta|),$$

and

$$\frac{1}{\mu(B_\zeta)} \int_{B_\zeta} \int_{B_\zeta} \operatorname{Re} \left(\frac{1}{1 - z \cdot \bar{w}} \right) d\mu(w) d\mu(z) \leq C(\mu),$$

With $C(\mu)$ dependent on μ only.

Our proof relies on an analysis of the geometric features of the kernel $\operatorname{Re} \left(\frac{1}{1 - z \cdot \bar{w}} \right)$.

1. INTRODUZIONE

In questo seminario cercherò di spiegare perché lo spazio di Drury-Arveson è un oggetto importante in teoria degli operatori, in che senso sia interessante dal punto di vista dell'analisi complessa in più variabili e come sia intrecciato a dei concetti di geometria subriemanniana. Farò questo seguendo il filo di un recente lavoro in collaborazione con R. Rochberg e E. Sawyer [5], ma la stessa storia potrebbe essere narrata da punti di vista differenti.

Notazione. L'espressione $C(\mu)$ denoterà una costante positiva generica dipendente da μ e dalla dimensione dello spazio preso in considerazione. Valori diversi di $C(\mu)$ differiscono per costanti moltiplicative che dipendono dalla sola dimensione.

2. MOTIVAZIONE: LO SPAZIO DI DRURY-ARVESON E LA DISUGUAGLIANZA DI VON NEUMANN MULTIVARIABILE

Supponiamo di avere uno spazio di Hilbert \mathcal{H} su \mathbb{C} , un operatore A limitato su \mathcal{H} e un polinomio $p = p(z)$ a coefficienti complessi.

Qual'è la miglior stima che possiamo dare di $\|p(A)\|$?

Riscaldiamo A a una contrazione, $\|A\| \leq 1$. Nel 1951 von Neumann [21] mostrò che

$$(1) \quad \|p(A)\| \leq \|p\|_{H^\infty} = \sup_{|z| < 1} |p(z)|$$

e che la stima è ottimale. Quest'ultima affermazione segue da un esempio che è, sotto molti aspetti, canonico. Consideriamo $\mathcal{H} = H^2(\mathbb{D})$, lo spazio di Hardy complesso: la funzione $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$, $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, appartiene ad $H^2(\mathbb{D})$ se è olomorfa e se

$$\|f\|_{H^2}^2 := \sup_{0 \leq r < 1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{it})|^2 dt < \infty.$$

Consideriamo ora l'operatore di moltiplicazione per z , $M_z : f \mapsto zf$, che è chiaramente una contrazione di $H^2(\mathbb{D})$. Allora, $p(M_z) = M_{p(z)}$ è l'operatore di moltiplicazione per il polinomio p ,

$$p(M_z) : f \mapsto p \cdot f.$$

È evidente che $\|p(M_z)\| \leq \|p\|_{H^\infty}$ e non è difficile mostrare la disuguaglianza opposta. La disuguaglianza (1) non è dunque migliorabile.

Sia $H^\infty(\mathbb{D})$ lo spazio delle funzioni olomorfe che sono limitate in \mathbb{D} . La considerazione appena fatta ci dice, precisamente, che $H^\infty(\mathbb{D})$ è lo spazio dei *moltiplicatori* di $H^2(\mathbb{D})$, cioè di quelle funzioni m con la proprietà che l'operatore $f \mapsto m \cdot f$ è limitata su $H^2(\mathbb{D})$. In generale, dato uno spazio di Banach X

di funzioni, possiamo definire lo spazio dei suoi moltiplicatori, $\mathcal{M}(X)$, come lo spazio delle funzioni che moltiplicano X in sè. Abbiamo dunque che $H^\infty(\mathbb{D}) = \mathcal{M}(H^2(\mathbb{D}))$.

Uno sviluppo naturale della disuguaglianza di von Neumann è la sua estensione al caso “multi-operatore”: invece di una singola contrazione A , si considera una contrazione-vettore

$$A = (A_1, \dots, A_N) : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}^N, \quad \sum_{j=1}^N |A_j h|^2 \leq |h|^2 \quad \forall h \in \mathcal{H},$$

e al posto del polinomio di una variabile se ne considera uno di N variabili complesse:

$$p(z) = p(z_1, \dots, z_n).$$

Facciamo l'ulteriore ipotesi che le componenti di A commutino tra loro, $[A_j, A_k] = 0$ per $j, k = 1, \dots, n$. Sotto queste ipotesi, S. W. Drury¹ ha dimostrato un'estensione della disuguaglianza di von Neumann. Sia $\mathbb{B} = \{z \in \mathbb{C}^n : |z| < 1\}$ la palla unitaria di \mathbb{C}^n e definiamo lo spazio di Drury-Arveson DA_N come lo spazio delle funzioni

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}^N} a_n z^n, \quad z \in \mathbb{B},$$

holomorfe e normate da

$$\|f\|_{DA}^2 = \sum_{n \in \mathbb{N}^N} \frac{n!}{|n|!} |a_n|^2.$$

Allora, mostrò Drury, vale la stima

$$(2) \quad \|p(A)\| \leq \|p\|_{\mathcal{M}(DA)}.$$

Di più, la disuguaglianza è ottimale. Il caso di uguaglianza vale se $\mathcal{H} = DA$ e $A = M_z$, $M_z f = (z_1 f, \dots, z_N f)$, ma M_z non è una contrazione di DA .

Si noti che, se $N = 1$, $DA = H^2(\mathbb{D})$, quindi la disuguaglianza di von Neumann è un caso particolare di quella di Drury. D'altra parte, in dimensione superiore lo spazio di Drury è strettamente contenuto in quello che è stato definito lo spazio di Hardy $H^2(\mathbb{B})$:

$$\|f\|_{H^2}^2 = \sup_{0 \leq r < 1} \int_{|z|=r} |f(z)|^2 d\sigma(z),$$

dove σ è la misura di superficie.

Se $N \geq 2$, la disuguaglianza (2) ci pone il seguente problema.

*Dato un polinomio p in più variabili complesse,
come possiamo stimarne la norma in $\mathcal{M}(DA)$?*

¹Il teorema di Drury venne ridimostrato e il suo contesto arricchito in [8].

²Usiamo qui l'usuale notazione a multi-indici. Se $n = (n_1, \dots, n_N) \in \mathbb{N}^N$, allora $|n| = n_1 + \dots + n_N$; $z^n = z_1^{n_1} \dots z_N^{n_N}$; $n! = n_1! \dots n_N!$.

Nel caso $N = 1$ avevamo la semplice, elegante e ottimale stima geometrica $\|p\|_{\mathcal{M}(H^2(\mathbb{D}))} = \|p\|_{H^\infty(\mathbb{D})}$. In questo seminario vedremo una stima geometrica per $\|p\|_{\mathcal{M}(DA)}$, ottimale a meno di una costante moltiplicativa dipendente dal solo N .

3. MOLTIPLICATORI E MISURE DI CARLESON PER DA

Lo spazio DA può essere pensato, per ogni N fissato, come uno spazio di Dirichlet pesato in più variabili. La caratterizzazione dei moltiplicatori per DA , allora, rientra nella classe più generale di problemi, che ha una lunga storia alle spalle, aventi a che fare con i moltiplicatori per spazi di Dirichlet pesati (l'inizio della storia è l'articolo [17]).

Se m è un intero fissato in modo che $2m + 1 - (N + 1) > -1$, allora vale la seguente equivalenza di norme, con costanti dipendenti da N e m :

$$(3) \quad \|f\|_{DA}^2 \approx \int_{\mathbb{B}} |(1 - |z|^2)^{m+1/2} f^{(m)}(z)|^2 \frac{dA(z)}{(1 - |z|^2)^{N+1}} + \sum_{j=0}^{m-1} |f^{(j)}(0)|^2.$$

Nell'equivalenza (3), $|f^{(j)}|$ è una qualsiasi ragionevole "norma della derivata complessa j -esima" della funzione f . Per esempio, $f^{(j)}$ potrebbe essere il tensore di tutte le derivate parziali j -esime. In maniera del tutto standard, se ne deduce il seguente:

Lemma 3.1. *La funzione g , olomorfa in \mathbb{B} , è un moltiplicatore di DA se e solo se g è limitata e se, la misura $d\mu_g$ su \mathbb{B} , definita da*

$$(4) \quad d\mu_g(z) = |(1 - |z|^2)^{m+1/2} f^{(m)}(z)|^2 \frac{dA(z)}{(1 - |z|^2)^{N+1}},$$

rende vera la disuguaglianza di Sobolev pesata

$$\int_{\mathbb{B}} |f|^2 d\mu_g \leq C(\mu_g)^2 \|f\|_{DA}^2.$$

Inoltre, $\|g\|_{\mathcal{M}(DA)} \approx C(\mu_g)$, dove $C(\mu_g)$ è la miglior costante per cui (4) vale.

Una misura positiva μ su \mathbb{B} è una *misura di Carleson* per DA se vale la disuguaglianza

$$(5) \quad \int_{\mathbb{B}} |f|^2 d\mu \leq C(\mu)^2 \|f\|_{DA}^2.$$

Il problema dei moltiplicatori è ricondotto alla caratterizzazione delle misure di Carleson per DA .

Digressione I. La caratterizzazione delle misure di Carleson per gli spazi di Dirichlet pesati ha, a sua volta, una lunga storia, che qui riporto in breve sintesi. Per $N \geq 1$ e $s \geq 0$, consideriamo lo spazio di Hilbert $\mathcal{D}_{N,s}$ delle funzioni f olomorfe in \mathbb{B} per cui è finita la norma

$$\|f\|_{\mathcal{D}_{N,s}}^2 = \int_{\mathbb{B}} |(1 - |z|^2)^{m+s} f^{(m)}(z)|^2 \frac{dA(z)}{(1 - |z|^2)^{N+1}} + \sum_{j=0}^{m-1} |f^{(j)}(0)|^2.$$

Le misure di Carleson per $\mathcal{D}_{N,s}$ hanno caratterizzazioni assai diverse per $s \geq \frac{N}{2}$ ($s = \frac{N}{2}$ corrisponde allo spazio di Hardy) e per $0 \leq s < \frac{1}{2}$. Nel primo caso, $\mathcal{D}_{N,s}$ è uno spazio di Hardy o di Bergman, e la caratterizzazione delle misure di Carleson ricalca quella ottenuta in origine da L. Carleson [9] per $H^2(\mathbb{D}) = \mathcal{D}_{1,1/2}$, che coinvolge una semplice condizione “a una scatola”. Nel secondo caso, il cui prototipo è [17], che analizzò lo spazio di Dirichlet classico $\mathcal{D}_{1,0}$, condizioni di questo tipo sono necessarie, ma non sufficienti. Occorre considerare condizioni più complicate, che possono essere espresse in termini di capacità o di condizioni di tipo Kerman-Sawyer.

Nel caso di frontiera $DA_N = \mathcal{D}_{N,1/2}$, $N \geq 2$, è risaputo da tempo che le condizioni di tipo Carleson sono troppo deboli, mentre quelle capacitarie (o di tipo Kerman-Sawyer) sono troppo forti. Sono state anche studiate classi particolari di misure per cui una o l'altra condizione sono necessarie e sufficienti: in genere misure aventi supporto su sottovarietà di \mathbb{B} con diverse proprietà dal punto di vista della geometria complessa.

A tempo debito preciserò i vaghi termini di questa breve digressione.

4. IL NUCLEO RIPRODUCENTE E LE MISURE DI CARLESON

Lo spazio DA è dotato di un *nucleo riprodotte*: per ogni ζ in \mathbb{B} esiste $K_\zeta(z) = K(\zeta, z)$ tale che

$$\langle f, K_\zeta \rangle = f(\zeta)$$

ogniqualevolta f sta in DA . Gli spazi di Hilbert di funzioni con nucleo riprodotte sono una famiglia vasta e importante, il cui studio sistematico risale almeno [7]. Una proprietà equivalente all'esistenza di tale nucleo è la limitatezza dei funzionali di valutazione: $\eta_\zeta : f \mapsto f(\zeta)$. Nel caso dello spazio DA , il nucleo è

$$K(\zeta, z) = \frac{1}{1 - z\bar{\zeta}}.$$

L'analisi dello spazio DA dal punto di vista del suo nucleo riprodotte è condotta in dettaglio in [1] e [2]. Noi utilizzeremo qui il nucleo per ridurre il problema delle misure di Carleson a una disuguaglianza di analisi reale.

Lemma 4.1. *Definiamo l'operatore integrale T agente su funzioni misurabili in \mathbb{B} :*

$$(6) \quad Tg(\zeta) = \int_{\mathbb{B}} \Re K(\zeta, z)g(z)d\mu(z) = \int_{\mathbb{B}} \Re \left(\frac{1}{1 - \zeta \cdot \bar{z}} \right) g(z)d\mu(z).$$

Una misura μ su \mathbb{B} è di Carleson per DA se e solo se la disuguaglianza

$$\int_{\mathbb{B}} g Tg d\mu \leq C(\mu)^2 \int_{\mathbb{B}} g^2 d\mu$$

vale per ogni funzione non negativa g .

Dimostrazione. La misura μ è di Carleson se e solo se l'operatore identità,

$$Id : DA \rightarrow L^2(\mu),$$

è limitato da DA a $L^2(\mu)$. Ciò equivale a chiedere che Id^* , l'aggiunto di Id , sia limitato: $Id^* : L^2(\mu) \rightarrow DA$. Calcoliamo ora Id^*g esplicitamente, con g in $L^2(\mu)$ a valori complessi:

$$\begin{aligned} Id^*g(\zeta) &= \langle Id^*g, K_\zeta \rangle_{DA} = \langle g, K_\zeta \rangle_{L^2(\mu)} \\ &= \int_{\mathbb{B}} K(\zeta, z)g(z)d\mu(z). \end{aligned}$$

È elementare che Id^* sia limitato da $L^2(\mu)$ a DA se e solo se è limitato sulle funzioni g a valori reali se e solo se lo è su quelle a valori non negativi. La disuguaglianza equivalente alla condizione che μ sia di Carleson, quindi, diventa ³

$$\begin{aligned} C(\mu)^2 \|g\|_{L^2(\mu)}^2 &\geq \left\langle \int_{\mathbb{B}} K(\cdot, z)g(z)d\mu(z), \int_{\mathbb{B}} K(\cdot, w)g(w)d\mu(w) \right\rangle_{DA} \\ &= \int_{\mathbb{B}} \int_{\mathbb{B}} g(z)\overline{g(w)} \langle K_w, K_z \rangle_{DA} d\mu(z)d\mu(w) \\ &= \int_{\mathbb{B}} \int_{\mathbb{B}} g(z)\overline{g(w)} K(w, z) d\mu(z)d\mu(w) \\ &= \int_{\mathbb{B}} \int_{\mathbb{B}} g(z)\overline{g(w)} \Re K(w, z) d\mu(z)d\mu(w) \\ &= \int_{\mathbb{B}} g Tg d\mu, \end{aligned}$$

poiché g ha valori positivi, a maggior ragione reali. □

³Utilizzeremo due proprietà elementari dei nuclei riproducenti: $\langle K_w, K_z \rangle = K(w, z)$ e $K(w, z) = \overline{K(z, w)}$.

5. IL TEOREMA DI CARATTERIZZAZIONE.

Per ogni z ion \mathbb{B} , siano $z^* = \frac{z}{|z|} \in \partial\mathbb{B}$ e $B_z = \{w \in \mathbb{B} : |1 - z \cdot \bar{w}| \leq 2(1 - |z|)\}$. Chiamiamo tutti gli insiemi del tipo B_z , $z \in \mathbb{B}$, *regioni di Carleson*. Se $B = B_z$, scriviamo anche $z = z(B)$.

Teorema 5.1. *Una misura μ è di Carleson per DA se e solo se per ogni regione di Carleson B si hanno le condizioni:*

$$(7) \quad \mu(B) \leq C(\mu)^2(1 - |z(B)|)$$

e

$$(8) \quad \frac{1}{\mu(B)} \int_B \int_B \Re \left(\frac{1}{1 - z \cdot \bar{w}} \right) d\mu(w) d\mu(z) = \frac{1}{\mu(B)} \int_B T(\chi_B) d\mu \leq C(\mu)^2.$$

La condizione (8) si ottiene sostituendo $g = \chi_B$ nel Lemma 6. La condizione (7) è una condizione ‘di tipo Carleson’.

Digressione II. Riconsideriamo gli spazi $\mathcal{D}_{N,s}$. È noto da tempo che, per $s \geq \frac{N}{2}$, le misure di Carleson sono caratterizzate dal semplice analogo di (7):

$$(9) \quad \mu(B) \leq C(\mu)^2(1 - |z(B)|)^{2s}.$$

Il capostipite dei risultati di questo tipo è il classico articolo di Carleson [9], da cui trae origine la terminologia. Nel caso in cui $\frac{1}{2} < s < \frac{N}{2}$, la caratterizzazione delle misure di Carleson è un problema tuttora aperto. Per $0 \leq s < \frac{1}{2}$, la condizione (9), pur necessaria, non è più sufficiente. Le misure di Carleson, per tali valori di s , possono essere caratterizzate da condizioni capacitarie (il prototipo è [17]), ovvero da condizioni di tipo Kerman-Sawyer (vedi, per esempio, [5] e la sua bibliografia):

$$(10) \quad \frac{1}{\mu(B)} \int_B \mu(B_z)^2 (1 - |z|^2)^{-2s} \frac{dA(z)}{(1 - |z|^2)^{N+1}} \leq C(\mu)^2.$$

Una comparazione diretta delle condizioni capacitarie e di quelle del tipo (10) è in [6].

È noto da tempo che né (10) (troppo forte), né (7) (troppo debole) caratterizzano le misure di Carleson per $DA = \mathcal{D}_{N,1/2}$ [3]. In diversi lavori, alcune particolari sottofamiglie di misure di Carleson per DA sono state caratterizzate [4] [11][16].

In parte basandosi su risultati preliminari di [5], ma utilizzando dei metodi del tutto diversi, E. Tchoundja [20] è giunto alla sorprendente conclusione che una condizione in spirito simile a (8), in congiunzione con la condizione di tipo Carleson (9), caratterizza le misure di Carleson per $s \in [0, 1/2]$, includendo quindi lo spazio DA . La condizione di Tchoundja è

$$(11) \quad \frac{1}{\mu(B)} \int_B \left[\int_{B_z} \Re \left(\frac{1}{(1 - z \cdot \bar{w})^{2s}} d\mu(w) \right) d\mu(w) \right]^p d\mu(z) \leq C_p(\mu)^2.$$

Inoltre, la condizione (11), con diversi valori di $C_p(\mu)$, è indipendente da $p \in (1, \infty)$ (per la disuguaglianza di Jensen, ci aspetteremmo che diventi più restrittiva al crescere di p).

È anche interessante notare come, per $p = 1$ e $s = 1/2$, la condizione (11) si riduca a (8). La "disuguaglianza di Hölder rovesciata" implicita nell'equivalenza di tutte queste condizioni è interessante in sé e dovrebbe contenere informazione utile sulle misure μ e sulla loro struttura.

6. IL PROBLEMA APPIATTITO E DISCRETIZZATO

Uno spazio di funzioni con nucleo riprodotto può essere introdotto ogni volta che abbiamo una funzione definita positiva su uno spazio X di punti. Ricordo che una funzione $K : X \times X \rightarrow \mathbb{C}$ è definita positiva se, per ogni scelta di x_1, \dots, x_n in X e c_1, \dots, c_n in \mathbb{C} , si ha

$$\sum_{l,m} c_l K(x_l, x_m) \overline{c_m} \geq 0,$$

con uguaglianza se e solo se $c_1 = \dots = c_n = 0$. Il nucleo riprodotto diventa allora $K_\zeta = K(\zeta, \cdot)$, e lo spazio di Hilbert è la chiusura di quello linearmente generato dalle funzioni K_x rispetto alla norma hilbertiana

$$\left\| \sum_j c_j K_{x_j} \right\|^2 = \sum_{l,m} c_l K(x_l, x_m) \overline{c_m}.$$

6.1. Il dominio di Siegel... Per meglio comprendere lo spazio DA , che è definito su \mathbb{B} , lo sposteremo sul *dominio di Siegel* \mathcal{U} . Procederò quindi a discretizzare \mathcal{U} , DA e il problema delle misure di Carleson. Per semplicità, porremo d'ora in poi $N = 2$. Seguiremo, con le necessarie modifiche, l'esposizione nel capitolo XII di [18].

Sia

$$\mathcal{U} = \{z = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : \text{Im} z_2 > |z_1|^2\}$$

il *dominio di Siegel* in \mathbb{C}^2 , che è biolomorfo alla palla \mathbb{B} mediante $\gamma : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{B}$, $\gamma(z) = w$,

$$\begin{cases} w_2 = \frac{i - z_2}{i + z_2} \\ w_1 = \frac{2iz_1}{1 + z_2}. \end{cases}$$

Definiamo ora uno spazio $DA(\mathcal{U})$ su \mathcal{U} , utilizzando come nucleo riprodotto

$$(12) \quad K'(\zeta, z) = \frac{1}{r(\zeta, z)} = \frac{1}{\frac{i}{2}(\overline{\zeta_2} - z_2) - \overline{\zeta_1} z_1}.$$

Il nucleo K' è definito positivo, in quanto la relazione

$$(13) \quad K(\gamma(\zeta), \gamma(z)) = \frac{1}{4} \cdot \frac{(i+z_2)\overline{(i+\zeta_2)}}{r(\zeta, z)} = \frac{1}{4}(i+z_2)\overline{(i+\zeta_2)}K'(\zeta, z),$$

permette ovviamente di scaricare la proprietà da K' a K . Sia ora F una funzione in DA e si definisca $\tilde{F} : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$, $\tilde{F}(z) = 2(i+z_2)^{-1}F(\gamma(z))$. Definiamo per queste funzioni il prodotto interno

$$\langle \tilde{F}, \tilde{F} \rangle_* = \langle F, G \rangle.$$

Un elementare calcolo algebrico mostra che K' è il nucleo riprodotto per il prodotto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_*$. Lo spazio $DA(\mathcal{U})$ è quello contenente le funzioni \tilde{F} , $F \in DA$, dotato del prodotto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_*$. La mappa $F \mapsto \tilde{F}$ è un'isometria tra DA e $DA(\mathcal{U})$, estendendo quella che lega $H^2(\mathbb{D})$ ad $H^2(\mathbb{R} \times (0, \infty))$.

Data una misura μ su \mathbb{B} , definiamo una nuova misura $\tilde{\mu}$ su \mathcal{U} :

$$(14) \quad d\tilde{\mu}(z) = |i+z_2|^2 d\mu(\gamma(z)).$$

Lemma 6.1. *La misura μ su \mathbb{B} è di Carleson per DA se e solo se $\tilde{\mu}$ è di Carleson per $DA(\mathcal{U})$.*

Infatti:

$$\begin{aligned} \|\tilde{F}\|_{DA_*}^2 &= \|F\|_{DA}^2 \\ &\gtrsim \int_{\mathbb{B}} |F(w)|^2 d\mu(w) = \int_{\mathcal{U}} |F(\gamma(z))|^2 d\mu(\gamma(z)) \\ &= \int_{\mathcal{U}} |\tilde{F}(z)|^2 d\tilde{\mu}(z). \end{aligned}$$

Un ragionamento del tutto analogo a quello svolto in \mathbb{B} (lemma 4.1) ci porta a:

Lemma 6.2. *La misura $\tilde{\mu}$ definita in (14) è di Carleson per $DA(\mathcal{U})$ se e solo se vale la disuguaglianza*

$$\int_{\mathcal{U}} g \tilde{T}g d\tilde{\mu} \leq C(\tilde{\mu})^2 \int_{\mathcal{U}} g^2 d\tilde{\mu},$$

dove

$$\tilde{T}g(z) = \int_{\mathcal{U}} (\Re K')(z, w)g(w) d\tilde{\mu}(w).$$

6.2. ...nelle coordinate di Heisenberg. Seguendo ancora [18], scriviamo \mathcal{U} in coordinate di tipo Heisenberg.

Gli automorfismi complessi di \mathcal{U} sono le *rotazioni complesse* R_a ($a \in \mathbb{C}$, $|a| = 1$):

$$R_a(z_1, z_2) = (az_1, z_2);$$

le *dilatazioni anisotrope* δ_ρ , $\rho \geq 0$:

$$\delta_\rho(z_1, z_2) = (\rho z_1, \rho^2 z_2);$$

le *traslazioni* $[\zeta, t] \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}$:

$$[\zeta, t](z_1, z_2) = (z_1 + \zeta, z_2 + t + 2iz_1\bar{\zeta} + i|\zeta|^2).$$

Le coordinate *Heisenberg* in $\bar{\mathcal{U}}$ (la chiusura di \mathcal{U} in \mathbb{C}) sono

$$z = (z_1, z_2) = [\zeta, t, r] = [z_1, \operatorname{Re}z_2, \operatorname{Im}z_2 - |z_1|^2].$$

Il *gruppo di Heisenberg* \mathbb{H} è il gruppo delle traslazioni:

$$[\zeta, t] \cdot [\xi, s] = [\zeta + \xi, t + s + 2\operatorname{Im}(\zeta\bar{\xi})].$$

Lo zero del gruppo è $0 = [0, 0]$ e l'inverso di $[\zeta, t]$ è $[-\zeta, -t]$. La misura di Haar su \mathbb{H} è $d\zeta dt$. Indicheremo con $d\beta$ la misura indotta dalla misura di Haar su $\partial\mathcal{U}$:

$$d\beta(z) = d\zeta dt.$$

Abbiamo anche che $dz = d\zeta dt dr$ è la misura di Lebesgue su \mathcal{U} .

Traduciamo ora la funzione $r(z, w)$ in coordinate Heisenberg.

Proposizione 6.1. *In coordinate Heisenberg, $z = [\zeta, t, r]$, $w = [\xi, s, p]$, abbiamo*

$$r(z, w) = \frac{i}{2}(s - t - 2\operatorname{Im}(\zeta \cdot \bar{\xi})) + \frac{p + r + |\xi - \zeta|^2}{2},$$

che può anche essere riscritto

$$r(z, w) = \varphi_{p+r}([\xi, s]^{-1} \cdot [\zeta, t]),$$

dove

$$\varphi_r([\zeta, t]) = \frac{i}{2}t + \frac{1}{2}(r + |\zeta|^2).$$

In particolare, l' integrazione rispetto a nuclei della forma $f(r(z, w))$ può essere interpretata in termini di convoluzione in \mathbb{H} .

Nel caso del nucleo K' abbiamo che, se $z = [\zeta, t; r]$, $w = [\xi, s; p]$ e $[\xi, s]^{-1} \cdot [\zeta, t] = [\eta, u]$, allora $K'(z, w) = k_{p+r}([\eta, u])$,

$$(15) \quad k_h([\eta, u]) = 2 \frac{h + |\eta|^2}{u^2 + (h + |\eta|^2)^2}.$$

Abbiamo quindi una nuova maniera per riscrivere il lemma 6.2.

Lemma 6.3. *La misura $\tilde{\mu}$ è di Carleson per $DA(\mathcal{U})$ se e solo se verifica la stima*

$$\int_{\mathbb{H} \times (0, \infty)} g([\eta, u; h]) \int_{\mathbb{H} \times (0, \infty)} k_{h+k}([\zeta, t]^{-1}[\eta, u]) g([\zeta, t; k]) d\tilde{\mu}([\zeta, t; k]) d\tilde{\mu}([\eta, u; h]) \leq C(\tilde{\mu})^2 \int_{\mathbb{H} \times (0, \infty)} g d\tilde{\mu}.$$

En passant, notiamo che il nucleo k è definito positivo:

$$(16) \quad \sum_{l, m} c_l k_{h_l + h_m}([\zeta_m, t_m]^{-1}[\zeta_l, t_l]) \overline{c_m} \geq 0.$$

In particolare, la funzione $\kappa([\zeta, t]) := k_0([\zeta, t])$ è *definita positiva* sul gruppo \mathbb{H} , quindi può essere interpretata nel senso della teoria delle rappresentazioni [13]. Questo punto di vista è ancora da sviluppare.

Un'altra proprietà forse interessante di κ è che soddisfa un'equazione differenziale lineare e omogenea dall'aspetto geometrico:

$$\Delta_{\mathbb{H}} \kappa = \frac{1}{2} \frac{\partial \kappa}{\partial |\zeta|^2}.$$

L'operatore $\Delta_{\mathbb{H}}$ è il laplaciano "somma di quadrati" di \mathbb{H} : $\Delta_{\mathbb{H}} = XX + YY$. Ricordo che $X = \partial_x + 2y\partial_t$ e $Y = \partial_y - 2x\partial_t$ sono campi invarianti a sinistra su \mathbb{H} .

7. UN' INTERPRETAZIONE GEOMETRICA DEL NUCLEO k

Per meglio capire la geometria del nucleo k , consideriamo la sua restrizione a $\partial\mathcal{U}$ ($p = r = 0$):

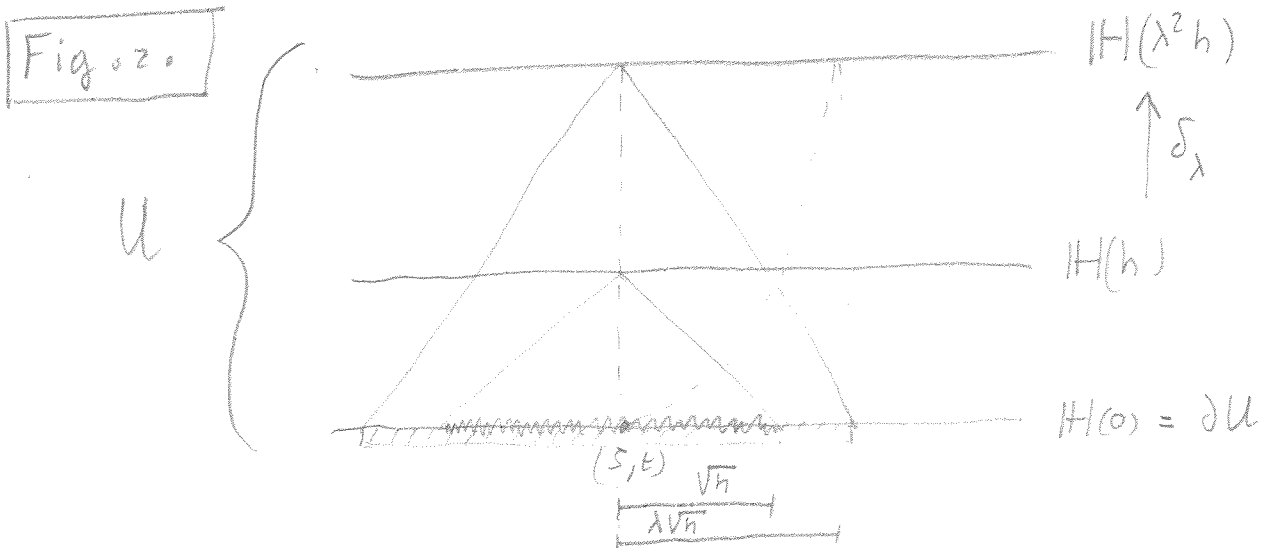
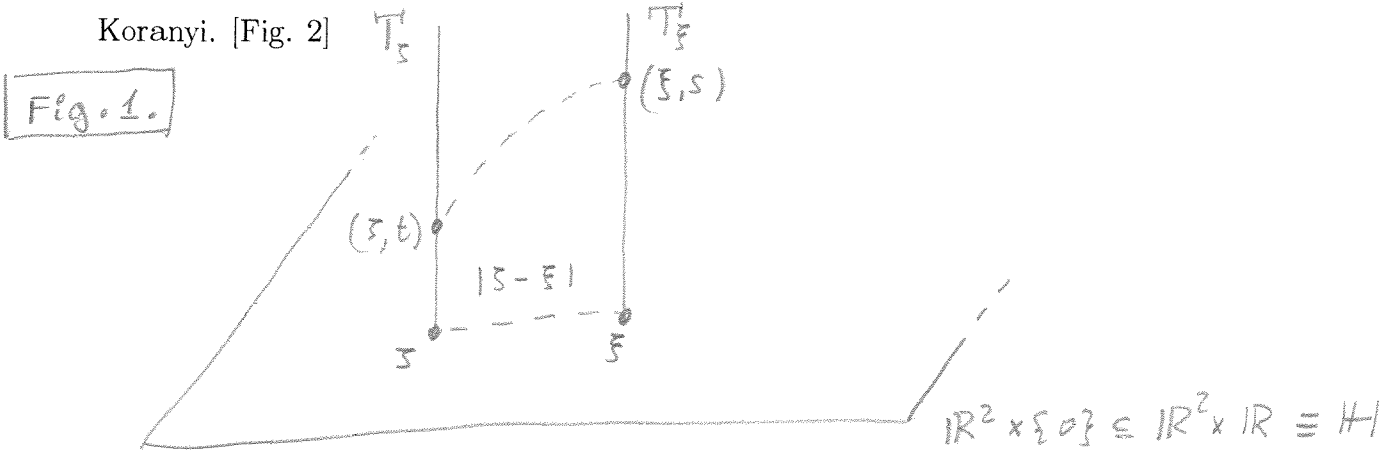
$$(17) \quad k_0([\eta, u]) = 2 \frac{|\eta|^2}{u^2 + |\eta|^4} = 2 \frac{|\eta|^2}{\|[\eta, u]\|^4},$$

dove $\|[\eta, u]\| = (u^2 + |\eta|^4)^{1/4}$ è la *norma di Koranyi* in \mathbb{H} . Vediamo dunque come il nucleo K' abbia una natura ibrida. Il denominatore è la (quarta potenza della) distanza di Koranyi tra i *punti* $[\zeta, t]$ e $[\xi, s]$ in \mathbb{H} , mentre il numeratore è la distanza di Koranyi tra le *rette* $T_\zeta = \{[\zeta, \tau] : \tau \in \mathbb{R}\}$ e $T_\xi = \{[\xi, \sigma] : \sigma \in \mathbb{R}\}$. È noto che tali rette hanno diversi significati intrinseci in \mathbb{H} : dal punto di vista algebrico, sono laterali del centro di \mathbb{H} ; da quello metrico-subriemanniano, ciascuna retta è il *cut-locus* di ogni punto appartenente ad essa. [Fig. 1]

Il dominio di Siegel $\mathbb{H} \times (0, +\infty)$ può essere geometricamente interpretato in diverse maniere. Il punto di vista che ci è più comodo è di considerare ogni foglia $\mathbb{H}(r) = \mathbb{H} \times \{r\}$ come una copia del gruppo di Heisenberg con la distanza di Koranyi $\mathbb{H} \equiv \mathbb{H} \times \{0\}$, visto alla risoluzione $r^{1/2}$.

Richiamo brevemente la *distanza di Koranyi* in \mathbb{H} . Dati due punti $[\zeta, t]$ e $[\xi, s]$ in \mathbb{H} , $d([\zeta, t], [\xi, s]) = \|[\zeta, t]^{-1}[\xi, s]\|$. La distanza di Koranyi è ovviamente invariante per traslazioni, è una distanza ed è omogenea di grado 1 rispetto alle dilatazioni.

Il nostro punto di vista, ora, è che il punto $[\zeta, t; h]$ di $\mathbb{H}(h)$ rappresenti la palla di Koranyi in \mathbb{H} avente centro $[\zeta, t]$ e raggio $h^{1/2}$. Le dilatazioni ci fanno passare da una scala all'altra: $\delta_\lambda : \mathbb{H}(h) \rightarrow \mathbb{H}(\lambda^2 h)$ corrisponde a una dilatazione di λ per la distanza di Koranyi. [Fig. 2]



Della quantità

$$k_{h+h}([\zeta, t]^{-1}[\xi, s]) = 2 \frac{h+k+|\xi-\zeta|^2}{(t-s-2\Im(\bar{\zeta}\xi))^2 + (h+k+|\xi-\zeta|^2)^2}$$

consideriamo separatamente denominatore e numeratore. Il denominatore (alla 1/4) lo stimiamo

$$D \approx \max(h^{1/2}, k^{1/2}, \|[\zeta, t]^{-1}[\xi, s]\|),$$

mentre il denominatore (alla 1/2) vale

$$N \approx \max(h^{1/2}, k^{1/2}, |\xi - \zeta|).$$

Dati i due punti $[\zeta, t; h]$ e $[\xi, s; k]$, in $\mathbb{H}(h)$ e $\mathbb{H}(k)$ rispettivamente, ad essi associamo il punto $[\zeta, t; D]$. Si noti che si tratta sostanzialmente del punto $[\xi, s; D]$, poichè la risoluzione D è grande almeno quanto la distanza dei due punti, per definizione di D . [Fig. 3.1] Lo stesso discorso lo possiamo fare per le rette: a T_ζ in $\mathbb{H}(h)$ e T_ξ in $\mathbb{H}(k)$ associamo T_ζ in $\mathbb{H}(N)$. La nostra struttura quoziente $\mathbb{R}^2 \equiv \mathbb{H}/T_0$ viene ora vista a scale diverse. La retta T_ζ in $\mathbb{H}(h)$ rappresenta il "tubo"

$$\{[\xi, s] \in \mathbb{H} : \exists t \in \mathbb{R} \text{ t.c. } d([\xi, s], [\zeta, t]) \leq h^{1/2}\}.$$

[Fig. 3.2]

Fig. 3.01

Caso in cui $D \approx \|[\zeta, t]^{-1}[\xi, s]\|$

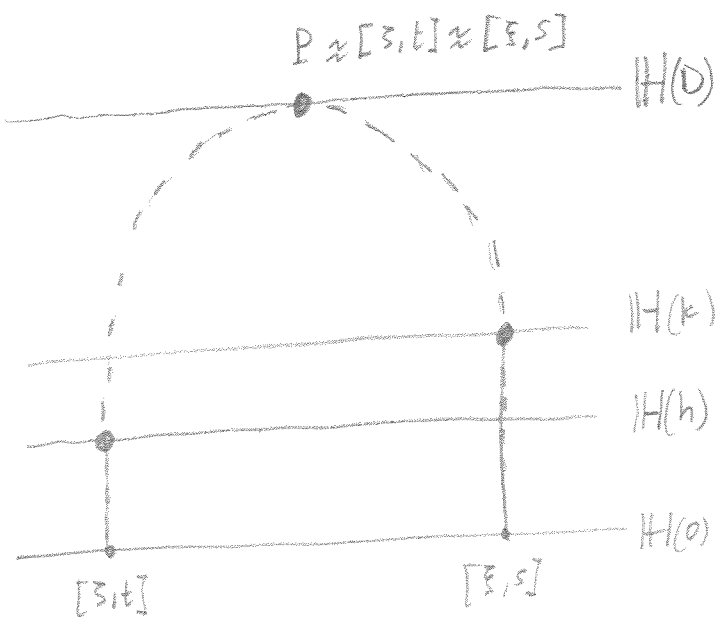
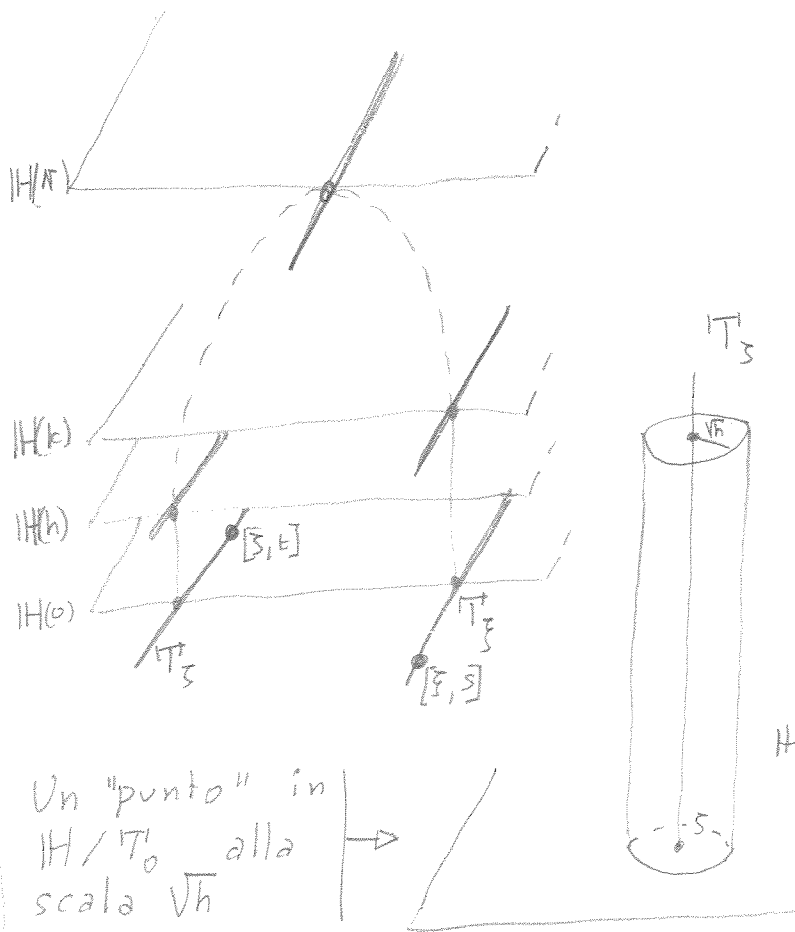


Fig. 3.02

Caso in cui $N \approx |\xi - \zeta|$

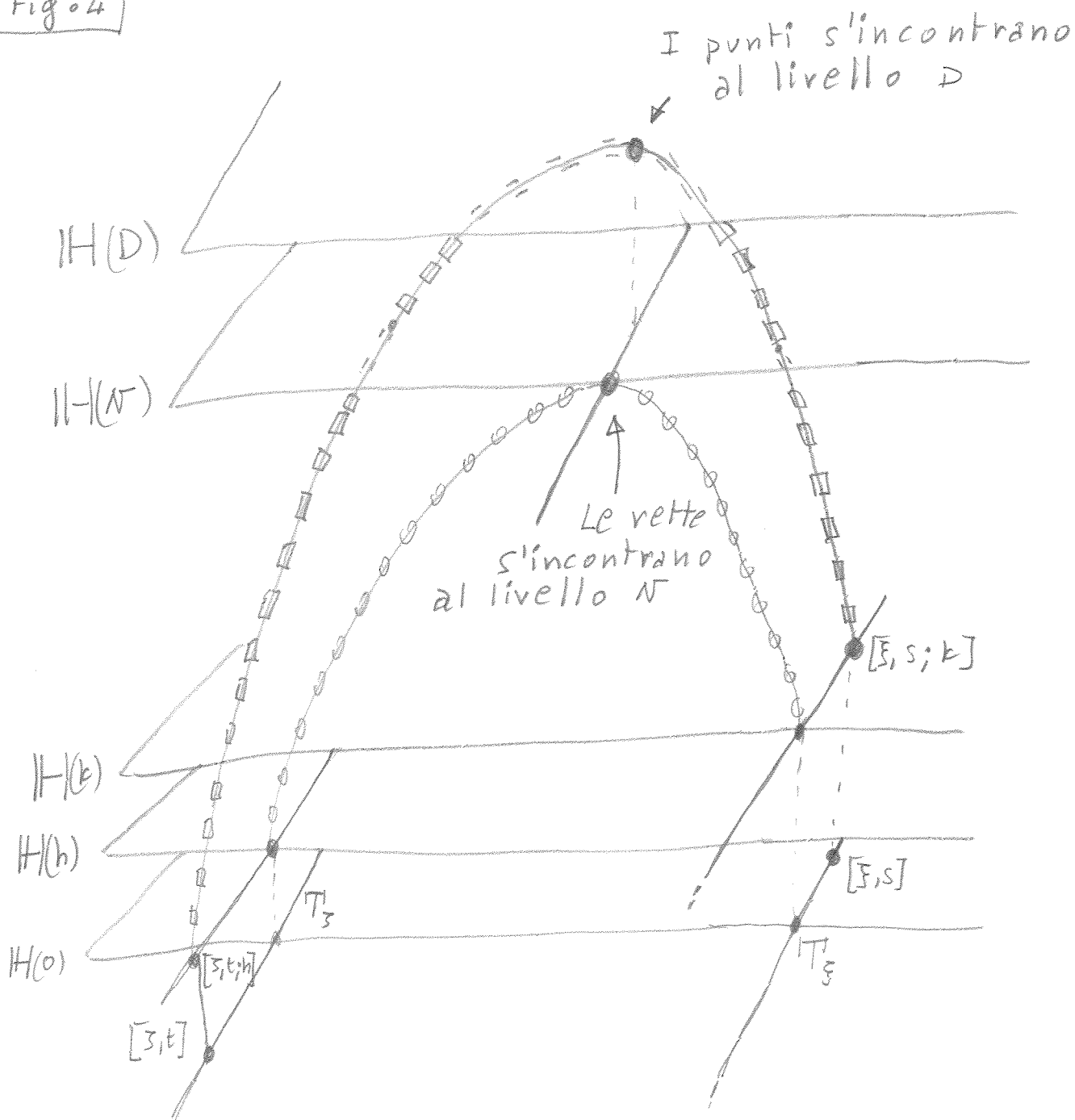


Un "punto" in \mathbb{H}/T_0 alla scala \sqrt{h}

Riassumendo. Il punto $[\zeta, t; D]$ in $\mathbb{H} \times (0, \infty)$ rappresenta la più piccola palla metrica in \mathbb{H} (i) avente raggio non inferiore a quello delle palle metriche rappresentate da $[\zeta, t; h]$ e $[\xi, s; k]$; (ii) contenente i punti $[\zeta, t]$ e $[\xi, s]$. Il punto (ζ, N) in $\mathbb{R}^2 \times (0, \infty)$ rappresenta la più piccola palla euclidea in \mathbb{R}^2 (i) avente raggio non inferiore a quello delle palle euclidee rappresentate da $(\zeta, h) \equiv (T_\zeta, h)$ e $(\xi, k) \equiv (T_\xi, k)$; (ii) contenente i punti ζ e ξ . Il punto $[\zeta, t; D]$ sta in $\mathbb{H}(D)$, che possiamo approssimativamente identificare con $\mathbb{H}(2^{-n})$, $n = \lfloor \log_2 D \rfloor$. Allo stesso modo, il punto (ζ, N) sta in $\mathbb{R}^2(N)$, che possiamo approssimativamente identificare con $\mathbb{R}^2(2^{-m})$, $m = \lfloor \log_2 N \rfloor$. [Fig. 4] Il nucleo vale, approssimativamente,

$$k_{h+k}([\zeta, t]^{-1}[\xi, s]) \approx 2^{2n-m}.$$

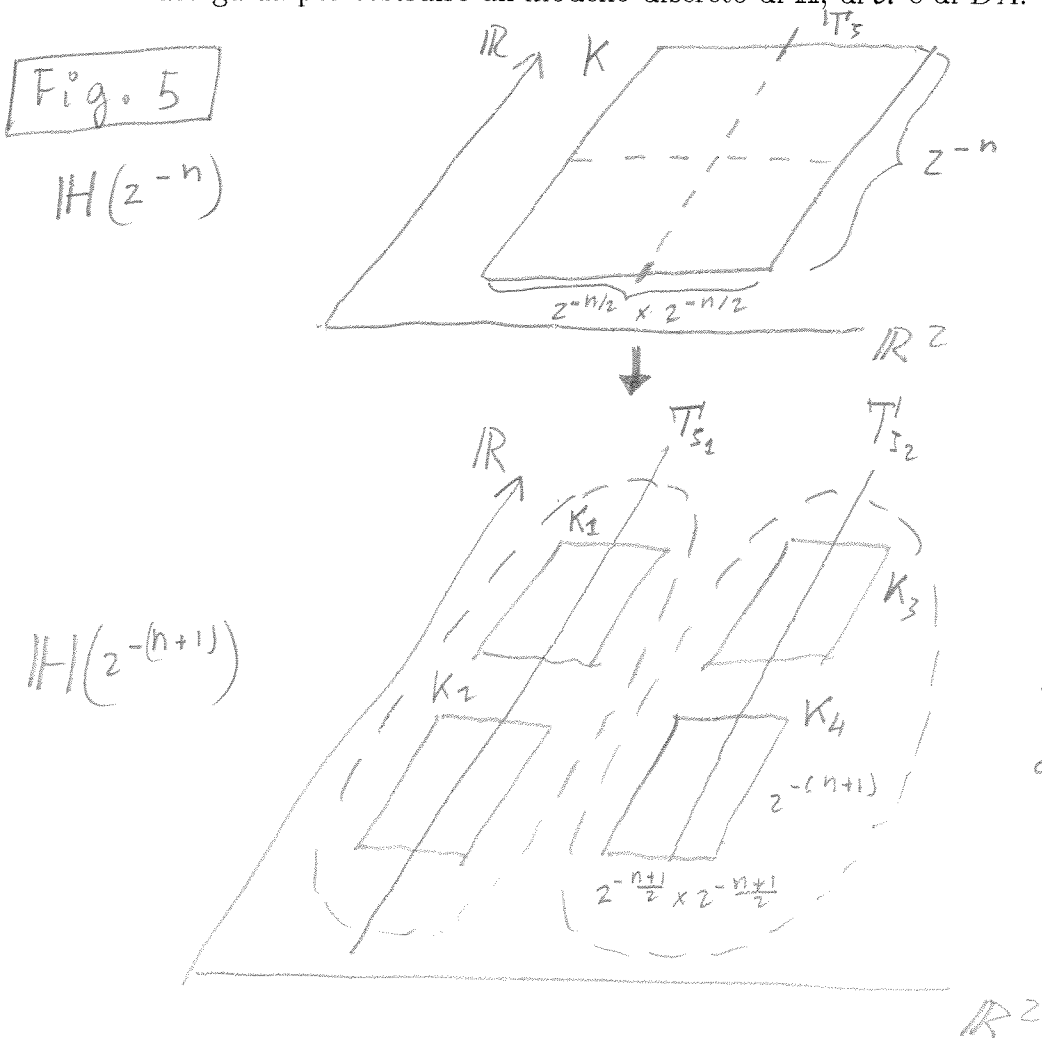
Fig. 4



7.1. **Una discretizzazione del dominio di Siegel.** Le ultime considerazioni del paragrafo precedente possono essere usate per discretizzare a diverse scale sia \mathbb{H} , che $\mathbb{R}^2 \equiv \mathbb{H}/T_0$. Ciò potrebbe essere fatto in maniera assai precisa utilizzando delle piastrellature frattali di \mathbb{H} [19], ma ci accontenteremo qui di dare un'idea più grossolana.

Per ogni n intero, consideriamo $\mathbb{H}(2^{-n})$ e il piano quoziente $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^2(2^{-n})$. Dividiamo \mathbb{R}^2 in quadrati Q_α^n di lato $2^{-n/2}$ (nella maniera solita) e, per ciascun quadrato Q_α^n , dividiamo il corrispondente tubo $Q_\alpha^n \times \mathbb{R} \subset \mathbb{H}(2^{-n})$ in regioni $K_{\alpha,m}^n$ ($m \in \mathbb{Z}$), di modo che tali regioni siano approssimativamente palle metriche di raggio $2^{-n/2}$ nella metrica di Koranyi. Supponiamo per comodità che ogni quadrato Q_α^n venga diviso esattamente in quadrati Q_β^{n+1} al livello inferiore (ciò non è possibile se scegliamo dei quadrati, ovviamente!) e che ogni regione $K_{\alpha,m}^n$ sia l'unione di regioni $K_{\beta,l}^{n+1}$. Un semplice confronto di volumi mostra che (i) ogni Q_α^n a livello n si divide in *due* Q_β^{n+1} al livello inferiore e che (ii) ogni regione $K_{\alpha,m}^n$ è unione di "circa" *quattro* regioni $K_{\beta,l}^{n+1}$ al livello inferiore. Inoltre, (iii) le quattro regioni sotto $K_{\alpha,m}^n$ si dividono equamente tra i due tubi che stanno sotto Q_α^n . [Fig. 5]

Ora, con più cautela questa costruzione può essere resa esatta, ma qui ci interessa solo come guida per costruire un modello discreto di \mathbb{H} , di \mathcal{U} e di DA .



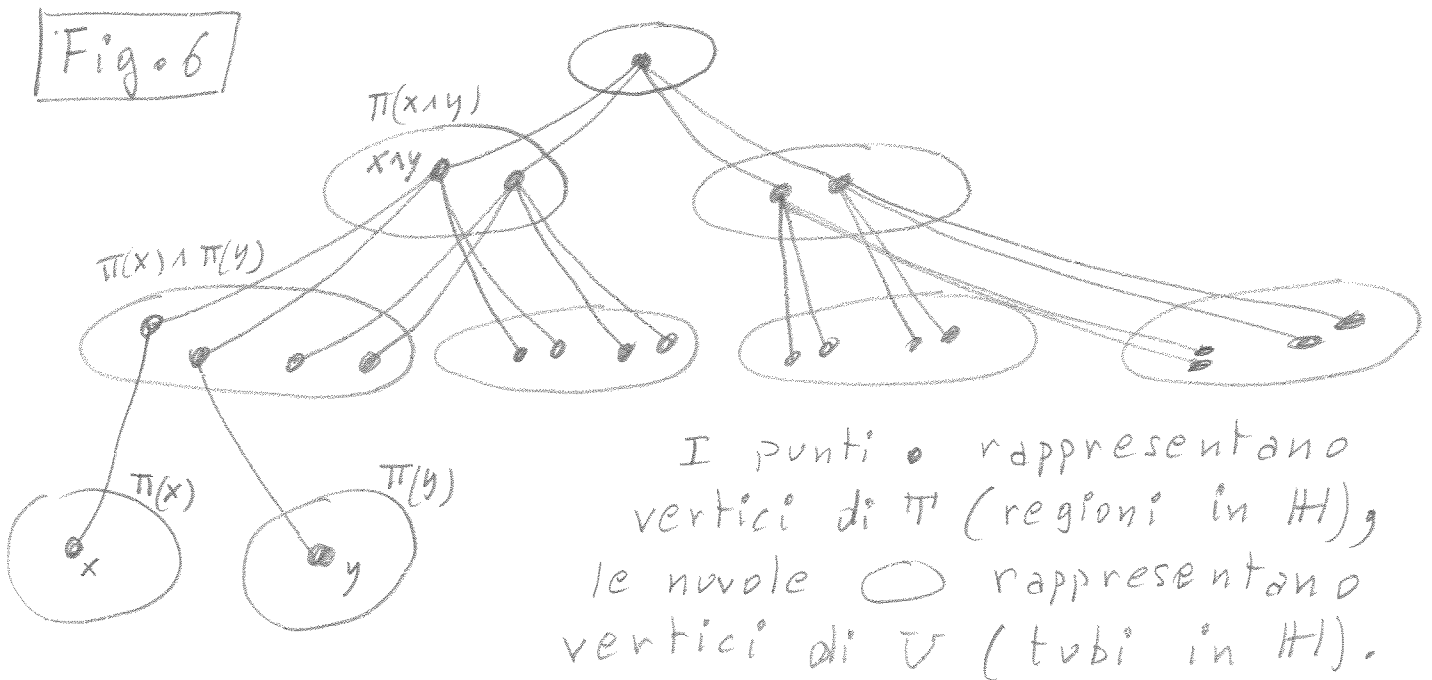
La regione K al livello z^{-n} si divide in 4 regioni al livello $z^{-(n+1)}$, che a coppie si distribuiscono nei due tubi in cui si è diviso il tubo a cui apparteneva K .

Consideriamo un *albero omogeneo* T con omogeneità 4: abbiamo un elemento o a livello $d(o) = 0$, al quale sono legati 4 elementi x_j^1 al livello $d(x_j^1) = 1$, a ciascuno dei quali sono legati 4 elementi al livello 2, e così via. Al livello n abbiamo 4^n elementi. Ciascun elemento x in $T \setminus \{o\}$, $d(x) = n \geq 1$, è parametrizzato da una stringa di elementi in \mathbb{Z}_4 , il gruppo ciclico di ordine 4: $x = ox^1 \dots x^n$, con $x^j \in \mathbb{Z}_4$. Dati due punti x, y in T , $x = ox^1 \dots x^n$, $y = oy^1 \dots y^m$, con $x^1 = y^1, \dots, x^l = y^l$, ma $x^{l+1} \neq y^{l+1}$ ($o \ l = \min(m, n)$), indichiamo $x \wedge y = ox^1 \dots x^l$ (il percorso iniziale che x e y hanno in comune). *Gli elementi x dell'albero T modellano le palle metriche (se $d(x) = n$, allora stiamo parlando di una palla metrica di raggio 2^{-n}); se $x \wedge y$ modella la palla metrica più piccola avente raggio maggiore o uguale a quello delle palle modellate x e y , e contenente sia x che y .*

Consideriamo ora un albero omogeneo U avente omogeneità 2, i cui elementi sono parametrizzati da elementi di \mathbb{Z}_2 (a parte l'unico elemento a livello 0, che indichiamo ancora con o). La proiezione sul quoziente $\pi : \mathbb{Z}_4 \rightarrow \mathbb{Z}_2$ induce una funzione suriettiva $\pi : T \rightarrow U$:

$$\pi(ox^1 \dots x^n) := o\pi(x^1) \dots \pi(x^n).$$

Chiaramente, $d(\pi(x)) := d(x)$ è una buona definizione di livello in U . L'operazione $\wedge : U \times U \rightarrow U$ è definita come in T . *Si noti che, in generale, $\pi(x \wedge y) \neq \pi(x) \wedge \pi(y)$.* (è invece facile verificare che $\pi(x \wedge y) \leq \pi(x) \wedge \pi(y)$, dove $z \leq w$ significa che z si trova sul cammino che, sull'albero, congiunge o a w). [Fig. 6]



Il modello discreto del nucleo di Drury-Arveson è, chiaramente:

$$h(x, y) = 2^{2d(x \wedge y) - d(\pi(x) \wedge \pi(y))}$$

Teorema 7.1. *Il nucleo h è definito positivo:*

$$\sum_{i,j=1}^k c_i h(x_i, x_j) \overline{c_j} \geq 0$$

per ogni scelta di x_1, \dots, x_k in T e di c_1, \dots, c_k in \mathbb{C} .

Questo teorema non è utile alla dimostrazione del Teorema 5.1 e la sua dimostrazione non segue dal fatto che il nucleo di Drury-Arveson è definito positivo. Ci permette di definire uno spazio di Hilbert di funzioni DA_d su T , che chiamiamo **spazio di Drury-Arveson discreto**. Sarebbe interessante avere per lo spazio DA_d un'interpretazione in termini di teoria degli operatori.

Sia $\mu : T \rightarrow [0, \infty)$ una misura su T . Diciamo che μ è di Carleson per DA_d se vale la disuguaglianza:

$$\sum_{x \in T} \left| \sum_{y \in T} h(x, y) g(y) \mu(y) \right|^2 \mu(x) \leq C(\mu)^2 \sum_{x \in T} |g(x)|^2 \mu(x).$$

Si verifica in maniera standard che μ è di Carleson per DA_d se e solo se si ha l'immersione (continua) di DA_d in $L^2(\mu)$.

Dato x in T , sia $[o, x]$ l'insieme dei vertici che uno deve attraversare nel cammino più breve che, seguendo i lati di T , porta da o a x . Poniamo

$$S(x) = \{y \in T : x \in [o, y]\}.$$

Teorema 7.2. *La misura μ è di Carleson per DA_d se e solo se le due seguenti proprietà valgono:*

$$(18) \quad \mu(S(x)) \leq C(\mu)^2 2^{-d(x)},$$

$$(19) \quad \frac{1}{\mu(S(x))} \sum_{y \in S(x)} \sum_{z \in S(x)} h(x, y) \mu(y) \mu(z) \leq C(\mu)^2.$$

Le condizioni (18) e (19) sono i modelli discreti di (7) e (8) nel Teorema 5.1. In [5], la dimostrazione del Teorema 5.1 viene in effetti ricondotta a una variante discreta del tutto analoga al Teorema 7.2, dove T è un albero avente come vertici palle metriche approssimate aventi raggi 2^{-n} , $n \geq 0$.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

- [1] J. Agler and J. E. M^cCarthy, *Complete Nevanlinna-Pick kernels*, J. Funct. Anal. **175** (2000), 111-124.
- [2] J. Agler and J. E. M^cCarthy, *Pick interpolation and Hilbert function spaces*, AMS 2002.
- [3] P. Ahern, *Exceptional sets for holomorphic Sobolev functions*, Michigan Math. J. 35 (1988), no. 1, 29-41.
- [4] P. Ahern, W. Cohn, *Exceptional sets for Hardy Sobolev functions, $p > 1$* , Indiana Univ. Math. J. 38 (1989), no. 2, 417-453.
- [5] N. Arcozzi, R. Rochberg, E. Sawyer. *Carleson Measures for the Drury-Arveson Hardy space and other Besov-Sobolev spaces on Complex Balls*, Adv. Math. **218**,no. 4, (2008), p. 1107-1180.
- [6] N. Arcozzi, R. Rochberg, E. Sawyer, *Capacity, Carleson measures, boundary convergence, and exceptional sets*, di prossima pubblicazione nel volume "*Perspective in Harmonic Analysis and Applications in honor of V.G. Maz'ya 70-th birthday*", della collana Proceedings of Symposia in Pure and Applied Mathematics della A.M.S. (curatori: Dorina Mitrea, Marius Mitrea).
- [7] N Aronszajn, *Theory of Reproducing Kernels*, Trans. Amer. Math. Soc. **68**, (1950). 337-404.
- [8] W. B. Arveson, *Subalgebras of C^* -algebras III: multivariable operator theory*, Acta Math. **181** (1998), 159-228.
- [9] L. Carleson, *Interpolations by bounded analytic functions and the corona problem*, Ann. of Math. (2) **76** (1962) 547-559.
- [10] Z. Chen, *Characterizations of Arveson's Hardy space*, Complex Variables **48**,(2003), 453-465.
- [11] C. Cascante, J. M. Ortega, *Carleson measures on spaces of Hardy-Sobolev type*, Canad. J. Math. 47 (1995), no. 6, 1177-1200.
- [12] S. W. Drury, *A generalization of von Neumann's inequality to the complex ball*, Proc. A. M. S. **68** (1978), 300-304. *A generalization of von Neumann's inequality to the complex ball*, Proc. Amer. Math. Soc. **68** (1978), no. 3, 300-304.
- [13] P. Eymard, *L'algèbre de Fourier d'un groupe localement compact*, Bull. Soc. Math. France 92 1964 181-236.
- [14] S. G. Krantz, *Function theory of several complex variables*. Second edition. Wadsworth & Brooks/Cole, 1992.

- [15] D. Marshall, C. Sundberg, *Interpolating Sequences for the Multipliers of the Dirichlet Space*, preprint (1994) scaricabile da <http://www.math.washington.edu/~marshall/preprints/preprints.html>.
- [16] J. M. Ortega, J. Fábrega, *Pointwise multipliers and decomposition theorems in analytic Besov spaces*, Math. Z. 235 (2000), no. 1, 53–81.
- [17] D. A. Stegenga, *Multipliers of the Dirichlet space*, Illinois J. Math. 24 (1980), no. 1, 113–139.
- [18] E. M. Stein, *Harmonic analysis*, Princeton, NJ, 1993.
- [19] R. S. Strichartz, *Self-similarity on nilpotent Lie groups*, in Geometric analysis (Philadelphia, PA, 1991), 123–157, Contemp. Math., 140, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1992.
- [20] E. Tchoundja, *Carleson measures for the generalized Bergman spaces via a $T(1)$ -Theorem*, di prossima pubblicazione su Ark. Mat.
- [21] J. von Neumann, *Eine Spektraltheorie für allgemeine Operatoren eines unitären Raumes*, Math. Nachr. 4, (1951). 258–281.