Seminario di Analisi Matematica
Dipartimento di Matematica
dell'Università di Bologna

Anno Accademico 2007-08

Annalisa Baldi

Ipoellitticità per operatori differenziali a valori matriciali in gruppi di Carnot

24 aprile 2008

Abstract

In this note we present a joint result with Bruno Franchi and Maria Carla Tesi about matrix valued hypoelliptic operators in Carnot groups. More precisely, let $\mathcal{L}$ be a non–negative self–adjoint matrix–valued operator of order $a \leq Q$, in a Carnot group $\mathbb{G}$ (here Q is the homogeneous dimension of $\mathbb{G}$). We investigate the relationship among hypoellipticity and maximal hypoellipticity (i.e. sharp L^2 estimates in appropriate Sobolev spaces), L^p-maximal hypoellipticity (i.e. sharp L^p estimates in appropriate Sobolev spaces for $1 < p < \infty$), and what we call maximal subellipticity of $\mathcal{L}$ (which is basically a sharp high order energy estimate). The results exposed here are proved in detail in [2].

Sommario In questa nota presentiamo alcuni risultati ottenuti in collaborazione con Bruno Franchi e Maria Carla Tesi riguardanti operatori ipoellittici a valori matriciali in gruppi di Carnot. Più precisamente, sia $\mathcal{L}$ un operatore non negativo autoaggiunto a valori matriciali, di ordine $a \le Q$ in un gruppo di Carnot $\mathbb{G}$. Con Q indichiamo la dimensione omogenea di $\mathbb{G}$. Studiamo i legami che intercorrono tra l'ipoellitticità e la ipoellitticità massimale di $\mathcal{L}$ (ovvero stime fini L^2 in appropriati spazi di Sobolev), la L^p-ipoellitticità massimale (cioè stime sharp L^p in opportuni spazi di Sobolev, per $1 < p < \infty$), e quella che chiamiamo subellitticità massimale di $\mathcal{L}$ (che è una sorta di stima fine di ordine superiore dell'energia). I risulati qui esposti sono dimostrati in dettaglio in [2]

1. Introduzione

Sia $\mathbb{G}$ un gruppo di Carnot di dimensione omogenea Q (si veda la sezione successiva per una precisa definizione) identificato con $\mathbb{R}^n$ tramite la mappa esponenziale, e sia $\mathcal{L}$ un operatore differenziale omogeneo invariante a sinistra di ordine $a = 2r$, $r \in \mathbb{N}$, tale che ${}^t\mathcal{L} = \mathcal{L} \ge 0$. Sia $W_1, \dots, W_m$ una base del primo strato dell'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ di $\mathbb{G}$. È nota la seguente equivalenza ([10], Teorema 2.1 ed osservazioni successive, e [17], Proposizione 1.4.7, per campi vettoriali su gruppi di Heisenberg).

Teorema 1.1. *Sono equivalenti i seguenti fatti:*

i) *$\mathcal{L}$ è ipoellittico;*

ii) *se $\Omega \subset \mathbb{G}$ è un aperto limitato, esiste $C = C_\Omega$ tale che per ogni polinomio omogeneo P in $W_1, \dots, W_m$ di grado a si ha*

$$\|P\alpha\|_{L^2(\mathbb{G})} \le C \left(\|\mathcal{L}\alpha\|_{L^2(\mathbb{G})} + \|\alpha\|_{L^2(\mathbb{G})} \right),$$

per ogni $\alpha \in \mathcal{D}(\Omega)$, cioè $\mathcal{L}$ è ipoellittico massimale nel senso di [10].

Consideriamo ora, più in generale, un operatore $\mathcal{L} = {}^t\mathcal{L} \ge 0$ di ordine $a \le Q$ a valori $N \times N$ matriciale. In questo seminario vogliamo analizzare i legami che intercorrono tra l'ipoellitticità e la ipoellitticità massimale di $\mathcal{L}$ (ovvero stime fini L^2 in appropriati spazi di Sobolev), la L^p-ipoellitticità massimale (cioè stime sharp L^p in opportuni spazi di sobolev, per $1 < p < \infty$), e quella che chiamiamo subellitticità massimale di $\mathcal{L}$ (che è una sorta di stima fine dell'energia). Anche nel caso matriciale l'equivalenza tra l'ipoellitticità dell'operatore e la massimale ipoellitticità si ottiene ripetendo gli stessi argomenti di [10], Teorema 2.1, per il caso scalare.

Invece la prova che l'ipoellitticità implica la L^p-massimale ipoellitticità richiede un argomento che si basa sull'esistenza sia di una inversa sinistra che di una inversa destra $\mathcal{K}$ di $\mathcal{L}$ (si veda [7]), e anche su precise stime L^p per $\mathcal{K}$. Occorre perciò provare che esiste una soluzione fondamentale (a valori matriciali) Γ per $\mathcal{L}$, e che Γ, per convoluzione, definisce un operatore $\mathcal{K}$ che è sia l'inverso destro che l'inverso sinistro di $\mathcal{L}$. Procedendo come in [19], proviamo prima l'esistenza di una soluzione fondamentale globale Γ, se $a < Q$, sostanzialmente adattando la prova fatta da Folland nel caso scalare. Per coprire anche il caso $a = Q$ – cruciale ad esempio se si vuole lavorare con il Laplaciano di contatto sulle 1-forme intrinseche nel primo gruppo di Heisenberg dove $Q = 4$ e $a = 4$ (si vedano ad esempio [20], [1])– la prova va un po' modificata per tenere conto del comportamento logaritmico di Γ.

A questo punto, ragionando come in [7], è facile vedere che Γ fornisce per convoluzione un inverso destro per $\mathcal{L}$.

Invece, per provare che per convoluzione Γ produce anche un inverso sinistro dobbiamo ragionare in modo diverso: se α è una funzione vettoriale smooth a supporto compatto, allora mostriamo che $\beta := \mathcal{K}\mathcal{L}\alpha - \alpha$ è $\mathcal{L}$-armonica (cioè $\mathcal{L}\beta = 0$) che si annulla all'infinito, se $a < Q$, o che è limitata, se $a = Q$. Otteniamo poi la conclusione desiderata invocando un teorema tipo Liouville per operatori invarianti a sinistra ipoellittici a valori matriciali (inspirato ad un risultato scalare di [15]). In altri termini, a differenza di Folland in [7], non utilizziamo nessuna proprietà di simmetria della soluzione fondamentale. Infatti, avendo a che fare con operatori differenziali di ordine superiore, non è nota un'espressione esplicita di $\mathcal{K}$, e nemmeno si può provare in modo facile la simmetria della soluzione fondamentale rispetto alla mappa $p \to p^{-1}$. La prova di Folland (Corollario 2.8 di [7]) sembra basarsi pesantemente sull'assunzione che $\Gamma(p^{-1}) \equiv \Gamma(p)$. Nel nostro lavoro, questa proprietà di simmetria (quando $a < Q$) risulta essere invece *una conseguenza* dell'esistenza di un inverso sinistro.

In un certo senso, questo approccio è simile a quello usato in [18] e [4], Capitolo V, Sezione 3, quando $\mathcal{L}$ è un operatore somma di quadrati, in cui la prova utilizza un principio di massimo. Ovviamente nel caso vettoriale un principio di massimo non può essere utilizzato. Al suo posto noi utilizziamo un teorema tipo Liouville per funzioni a valori vettoriali in gruppi omogenei (si veda la Proposizione 3.2).

Nel Teorema 4.1, con un argomento di interpolazione, proviamo inoltre che l'ipoellitticità massimale di $\mathcal{L}$ implica la massimale ipoellitticità di $\mathcal{L}$, cioè se $\Omega \subset \mathbb{G}$ è un aperto limitato esiste

$C = C_\Omega$ tale che per ogni polinomio omogeneo P in $W_1, \ldots, W_m$ di grado r si ha

$$\|P\alpha\|_{L^2(\mathbb{G})} \leq C \left(\langle \mathcal{L}\alpha, \alpha \rangle_{L^2(\mathbb{G})} + \|\alpha\|_{L^2(\mathbb{G})} \right), \tag{1}$$

per ogni $\alpha \in \mathcal{D}(\Omega)$, (vedere anche [10], Capitolo III, 7).

Infine, per completare il cerchio delle equivalenze, dobbiamo mostrare che la subellitticità massimale implica la ipoellitticità. Nel caso degli operatori somma di quadrati, la prova di questa implicazione risale a [11] e [14]. La nostra prova è ispirata ad argomentazioni pseudoddifferenziali utilizzate in [16], e si basa su una precisa rappresentazione del commutatore $[W^I, p(x,D)]$ del polinomio omogeneo W^I di grado $|I|$ (nei campi orizzontali) con l'operatore pseudoddifferenziale $p(x,D)$ che sta in un'opportuna classe di Hörmander (si vedano i Lemmi 5.1 e 5.2). Le dimostrazioni date in [11] e [14] per operatori di ordine 2 non possono essere ripetute nel nostro caso, in quanto si basano proprio sul fatto che 2 è un numero privilegiato. Infatti, se consideriamo W_i un campo vettoriale orizzontale e $p(x,D)$ un operatore pseudodifferenziale di ordine zero, il loro commutatore dà $[W_i^2, p(x,D)]\alpha = q(x,D)W_i\alpha + r(x,D)\alpha$, con q e r entrambi di ordine zero. Quindi il commutatore è in sostanza controllato da tutte le derivate orizzontali di α, che a loro volta, per l'ipotesi di subellitticità (1), sono controllate da $\langle \mathcal{L}\alpha, \alpha \rangle$, e quindi dalle derivate orizzontali di ordine la metà dell'ordine di $\mathcal{L}$. In altri termini, qui è cruciale che sia $2 - 1 = \frac{1}{2}2$. E questo ovviamente non vale quando l'ordine dell'operatore $\mathcal{L}$ è $a > 2$. Supponendo che $\mathcal{L}$ sia massimale ipoellittico anzichè massimale subellittico, cioè supponendo che $\|\mathcal{L}u\|$ controlli tutte le derivate fino all'ordine di $\mathcal{L}$, questo problema è superato in [16] grazie al Lemma 5.1, esprimendo $[W^I, p(x,D)]$ come una somma di termini del tipo $q(x,D)W^J$, con $|J| \leq |I| - 1$. Nella nostra prova, per superare lo stesso problema, ci occorre un risultato un po' diverso (Lemma 5.2); ovvero ci occorre un risulato in cui, attraverso diverse integrazioni per parti, sia possibile distribuire in un modo opportuno le derivate orizzontali in entrambi i fattori del prodotto scalare, in modo tale che appaiano solo le derivate orizzontali di ordine inferiore ad $\frac{1}{2}a$.

2. Notazioni e risulati preliminari

Un *gruppo di Carnot* $\mathbb{G}$ *di passo* κ è un gruppo di Lie connesso, semplicemente connesso, la cui algebra di Lie $\mathfrak{g}$ ammette una stratificazione di passo κ, ovvero esistono κ sottospazi lineari $V_1, ..., V_\kappa$ tali che

$$\mathfrak{g} = V_1 \oplus ... \oplus V_\kappa, \quad [V_1, V_i] = V_{i+1}, \quad V_\kappa \neq \{0\}, \quad V_i = \{0\} \text{ se } i > \kappa, \tag{2}$$

dove $[V_1, V_i]$ è il sottospazio di $\mathfrak{g}$ generato dai commutatori $[X, Y]$ con $X \in V_1$ e $Y \in V_i$. Sia $m_i = \dim(V_i)$, con $i = 1, \ldots, \kappa$ e $h_i = m_1 + \cdots + m_i$ (dove $h_0 = 0$ e $h_\kappa = n$). Si scelga una base $e_1, \ldots, e_n$ di $\mathfrak{g}$ che si adatti alla statificazione, cioè tale che

$$e_{h_{j-1}+1}, \ldots, e_{h_j} \text{ è una base di } V_j \text{ per ogni } j = 1, \ldots, \kappa.$$

Sia $W = W_1, \ldots, W_n$ una famiglia di campi vettoriali invarianti a sinistra tali che $W_i(0) = e_i$. In forza di (2), il sottinsieme $W_1, \ldots, W_{m_1}$ genera per commutazione tutti gli altri campi vettoriali. La mappa esponenziale da $\mathfrak{g}$ su $\mathbb{G}$ è 1-1, ovvero ogni $p \in \mathbb{G}$ può essere scritto in un solo modo come $p = \exp(p_1 W_1 + \cdots + p_n W_n)$. Usando le coordinate esponenziali, identifichiamo p con la $n-$pla $(p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{R}^n$ e $\mathbb{G}$ con $(\mathbb{R}^n, \cdot)$ dove l'espressione esplicita dell'operazione di gruppo $\cdot$ è determinata dalla formula di Campbell-Hausdorff (si veda anche la Proposizione 2.1 sotto). Il sottofibrato del fibrato tangente generato dai campi vettoriali $W_1, \ldots, W_{m_1}$ gioca un ruolo predominante nella teoria, ed è detto il *fibrato orizzontale* $H\mathbb{G}$; le fibre di $H\mathbb{G}$ sono

$$H\mathbb{G}_x = \text{span } \{W_1(x), \ldots, W_{m_1}(x)\}, \qquad x \in \mathbb{G}.$$

D'ora in avanti, per semplicità indicheremo $m := m_1$.

Su $\mathbb{G}$ si ha una struttura subriemanniana, dotando ogni fibra di $H\mathbb{G}$ di un prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle_x$ e di una norma $|\cdot|_x$ che rende la base $W_1(x), \ldots, W_m(x)$ una base ortonormale. Ovvero, se $v = \sum_{i=1}^m v_i W_i(x) = (v_1, \ldots, v_m)$ e $w = \sum_{i=1}^m w_i W_i(x) = (w_1, \ldots, w_m)$ sono in $H\mathbb{G}_x$, si ha $\langle v, w \rangle_x := \sum_{j=1}^m v_j w_j$ e $|v|_x^2 := \langle v, v \rangle_x$. Un vettore di $H\mathbb{G}_x$ è detto vettore orizzontale.

Analogamente agli spazi euclidei, un gruppo di Carnot è dotato di una ricca struttura (però non commutativa): infatti, ci sono due importanti famiglie di automorfismi di $\mathbb{G}$, le traslazioni e le dilatazioni (non isotrope) di $\mathbb{G}$. Per ogni $x \in \mathbb{G}$, la *traslazione (a sinistra)* $\tau_x : \mathbb{G} \to \mathbb{G}$ è definita da

$$z \mapsto \tau_x z := x \cdot z.$$

Per ogni $\lambda > 0$, la *dilatazione* $\delta_\lambda : \mathbb{G} \to \mathbb{G}$, è definita come

$$\delta_\lambda(x_1, ..., x_n) = (\lambda^{d_1} x_1, ..., \lambda^{d_n} x_n),$$

dove $d_i \in \mathbb{N}$ è detta costante di *omogeneità della variabile* x_i in $\mathbb{G}$ ed è definita da

$$d_j = i \quad \text{per } h_{i-1} + 1 \leq j \leq h_i, \tag{3}$$

quindi $1 = d_1 = ... = d_{m_1} < d_{m_1+1} = 2 \leq ... \leq d_n = \kappa$.

Riportiamo nelle seguenti proposizioni alcuni risultati più o meno noti riguardanti l'operazione del gruppo e i campi vettoriali W_j (si vedano ad esempio in [9] le Proposizioni 2.1 e 2.2).

Proposizione 2.1. *La legge di composizione nel gruppo ha la forma*

$$x \cdot y = x + y + \mathcal{Q}(x,y), \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^n \tag{4}$$

dove $\mathcal{Q} = (\mathcal{Q}_1, \ldots, \mathcal{Q}_n) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *e ogni* $\mathcal{Q}_i$ *è un polinomio omogeneo di grado* d_i *rispetto alle dilatazioni intrinseche di* $\mathbb{G}$ *definite in (2), e quindi*

$$\mathcal{Q}_i(\delta_\lambda x, \delta_\lambda y) = \lambda^{d_i} \mathcal{Q}_i(x,y), \quad \forall x, y \in \mathbb{G}.$$

Perciò, per ogni $x, y \in \mathbb{G}$

$$\mathcal{Q}_1(x,y) = ... = \mathcal{Q}_{m_1}(x,y) = 0,$$

$$\mathcal{Q}_j(x,0) = \mathcal{Q}_j(0,y) = 0 \quad e \quad \mathcal{Q}_j(x,x) = \mathcal{Q}_j(x,-x) = 0, \quad per\, m_1 < j \leq n, \tag{5}$$

$$\mathcal{Q}_j(x,y) = \mathcal{Q}_j(x_1, \ldots, x_{h_{i-1}}, y_1, \ldots, y_{h_{i-1}}), \quad se \quad 1 < i \leq \kappa \quad e \quad j \leq h_i. \tag{6}$$

In particolare dalla Proposizione 2.1 segue che

$$\delta_\lambda x \cdot \delta_\lambda y = \delta_\lambda (x \cdot y)$$

e che l'inverso x^{-1} di un elemento $x = (x_1, \ldots, x_n) \in (\mathbb{R}^n, \cdot)$ è

$$x^{-1} = (-x_1, \ldots, -x_n),$$

(si vedano [8], Proposizione 2.1, e [13]).

Proposizione 2.2. *I campi vettoriali* W_j *hanno coefficienti polinomiali e si possono scrivere come*

$$W_j = \partial_j + \sum_{i > h_l}^{n} q_{i,j}(x) \partial_i, \quad per\, j = 1, \ldots, n \text{ } e \text{ } j \leq h_l, \tag{7}$$

dove $q_{i,j}(x) = \frac{\partial \mathcal{Q}_i}{\partial y_j}(x,y)|_{y=0}$ *perciò se* $j \leq h_l$ *segue che* $q_{i,j}(x) = q_{i,j}(x_1, ..., x_{h_{l-1}})$ *e* $q_{i,j}(0) = 0$.

In particolare, campi vettoriali $W_1, \cdots, W_{m_1}$ sono omogenei di grado 1 rispetto alle dilatazioni del gruppo.

Denotiamo poi con ρ una norma omogenea, C^∞ fuori dall'origine, che induca una distanza su $\mathbb{G}$ come in [22], p. 638. Più avanti utilizzeremo la seguente distanza di gauge

$$d(x,y) := \rho(y^{-1} \cdot x).$$

Denotiamo con $U(p,r)$ e $B(p,r)$ rispettivamente le palle aperte e chiuse associate a d.
La metrica d si comporta bene rispetto alla traslazioni a sinistra e alle dilatazioni:

$$d(z\cdot x, z\cdot y) = d(x,y) \quad , \quad d(\delta_\lambda(x),\delta_\lambda(y)) = \lambda d(x,y)$$

per $x,y,z \in \mathbb{G}$ e $\lambda > 0$.

L'intero

$$Q = \sum_{j=1}^{n} d_j = \sum_{i=1}^{\kappa} i \dim V_i \tag{8}$$

si dice la *dimensione omogenea* di $\mathbb{G}$. È anche la dimensione di Hausdorff di $\mathbb{R}^n$ rispetto a d.

La misura di Lebesgue n-dimensionale $\mathcal{L}^n$, è la misura di Haar del gruppo $\mathbb{G}$. Allora se $E \subset \mathbb{R}^n$ è misurabile, vale che $\mathcal{L}^n(x\cdot E) = \mathcal{L}^n(E)$ per ogni $x \in \mathbb{G}$. Inoltre, se $\lambda > 0$ si ha che $\mathcal{L}^n(\delta_\lambda(E)) = \lambda^Q \mathcal{L}^n(E)$. In particolare,

$$\mathcal{L}^n(U(p,r)) = r^Q \mathcal{L}^n(U(p,1)) = r^Q \mathcal{L}^n(U(0,1)). \tag{9}$$

Rispetto alla misura di Lebesgue $\mathcal{L}^n$ si definiscono gli spazi $L^p(\mathbb{G})$.

Come si trova ad esempio in [8], può essere definita una legge di convoluzione nel gruppo $\mathbb{G}$: se, ad esempio, $f \in \mathcal{D}(\mathbb{G})$ e $g \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{G})$, si pone

$$f * g(p) := \int f(q) g(q^{-1}p)\, dq \quad \text{for } q \in \mathbb{G}. \tag{10}$$

Ricordiamo che se g è una funzione C^∞ e L è un operatore differenziale left invariant, allora $L(f*g) = f * Lg$. La convoluzione è ancora ben definita anche quando $f,g \in \mathcal{D}'(\mathbb{G})$, purché almeno una delle due sia una distribuzione a supporto compatto (cioè sia in $\mathcal{E}'(\mathbb{G})$). Ricordiamo inoltre la definizione di *nucleo di tipo* α. Seguendo Folland in [7], un nucleo di tipo α è una distribuzione omogenea di grado $\alpha - Q$ (di nuovo, rispetto alle dilatazioni δ_r definite in (2)), che è C^∞ fuori dall'origine.

Seguendo [8], adottiamo la notazione multi-indice per le derivate di ordine superiore. Se $I = (i_1,\dots,i_n)$ è un multi-indice, poniamo

$$W^I = W_1^{i_1} \cdots W_n^{i_n}. \tag{11}$$

Dal teorema di Poincaré–Birkhoff–Witt (si veda ad esempio [5], I.2.7), gli operatori differenziali W^I formano una base dell'algebra degli operatori left-invariant su $\mathbb{G}$. Indichiamo inoltre con $|I| := i_1 + \cdots + i_n$ l'ordine dell'operatore W^I, e con $d(I) := d_1 i_1 + \cdots + d_n i_n$ il suo grado di omogeneità rispetto alle dilatazioni del gruppo. Dal teorema di Poincaré–Birkhoff–Witt segue in particolare che ogni operatore differenziale lineare omogeneo nelle derivate orizzontali può essere espresso come una combinazione lineare di operatori W^I della speciale forma scritta sopra. Quindi, possiamo spesso limitarci a considerare operatori della forma W^I. Sia k un intero positivo, $1 \le p < \infty$, e Ω un aperto di $\mathbb{G}$. Lo spazio di Sobolev (Folland-Stein) $W^{k,p}_{\mathbb{G}}(\Omega)$ associato ai campi $W_1, \dots, W_n$ è l'insieme delle funzioni $f \in L^p(\Omega)$ tali che $W^I f \in L^p(\Omega)$, per ogni W^I come sopra, con $d(I) \le k$, dotato della norma naturale. Il pedice $\mathbb{G}$ ce lo mettiamo per evitare confusione con gli usuali spazi di Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$. Denotiamo poi con $\overset{\circ}{W}{}^{k,p}_{\mathbb{G}}(\Omega)$ il completamento di $\mathcal{D}(\Omega)$ in $W^{k,p}_{\mathbb{G}}(\Omega)$.

Fissiamo $N \in \mathbb{N}$. D'ora in poi, considereremo funzioni a valori vettoriali $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$. Se $\Omega \subset \mathbb{G}$ è un aperto, $k \in \mathbb{N}$ e $1 \le p \le \infty$, usiamo ancora la stessa notazione $W^{k,p}_{\mathbb{G}}(\Omega)$ (e $\overset{\circ}{W}{}^{k,p}_{\mathbb{G}}(\Omega)$) per indicare gli spazi di funzioni a valori vettorilai $\big(W^{s,p}_{\mathbb{G}}(\Omega)\big)^N$ (rispettivamente $\big(\overset{\circ}{W}{}^{k,p}_{\mathbb{G}}(\Omega)\big)^N$) e scriviamo ad esempio che $\alpha \in W^{s,p}_{\mathbb{G}}(\Omega)$. Analogamente, scriviamo ancora $L^p(\Omega)$ per $\big(L^p(\Omega)\big)^N$ e $W^{k,p}(\Omega)$ per $\big(W^{k,p}(\Omega)\big)^N$.

Inoltre, se $T = (T_1, \dots, T_N) \in \mathcal{D}'(\Omega)^N$, T può essere identificata con un elemento del duale di $\mathcal{D}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ avendo

$$\langle T|\phi\rangle := \sum_j \langle T_j|\phi_j\rangle$$

con $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_N) \in \mathcal{D}(\Omega, \mathbb{R}^N)$. La stessa convenzione è valida per $T = (T_1, \dots, T_N) \in \mathcal{S}'(\Omega)^N$.

3. Soluzione fondamentale e un teorema di tipo Liouville

Sia $\mathcal{L} := \big(\mathcal{L}_{ji}\big)_{j,i=1,\dots,N}$ un operatore differenziale su $\mathcal{E}(\mathbb{G}, \mathbb{R}^N)$ definito da

$$\mathcal{L}(\alpha_1, \dots, \alpha_N) = \big(\sum_i \mathcal{L}_{i1}\alpha_i, \dots, \sum_i \mathcal{L}_{iN}\alpha_i\big), \tag{12}$$

dove gli $\mathcal{L}_{ij}$ sono polinomi omogenei a coefficienti costanti di grado a in $W_1, \dots, W_m$. Grazie all'invarianza a sinistra e all'omogeneità dei campi $W_1, \dots, W_m$, diciamo che l'operatore $\mathcal{L}$ è invariante a sinistra e omogeneo di grado a. L'aggiunto formale di $\mathcal{L}$, ${}^t\mathcal{L}$, ha la forma

$${}^t\mathcal{L}(\alpha_1, \dots, \alpha_N) = \big(\sum_i {}^t\mathcal{L}_{1i}\alpha_i, \dots, \sum_i {}^t\mathcal{L}_{Ni}\alpha_i\big). \tag{13}$$

Ci proponiamo di studiare la soluzione fondamentale (a valori matriciali) di $\mathcal{L}$, per ottenere nel Teorema 4.1 stime fini L^p per $\mathcal{L}$. La dimostrazione del seguente risultato si trova in [2].

Teorema 3.1. *Sia $\mathcal{L}$ un operatore left-invariant ipoellittico tale che ${}^t\mathcal{L} = \mathcal{L}$. Supponiamo anche che $\mathcal{L}$ sia omogeneo di grado $a \leq Q$. Allora per $j = 1, \dots, N_m$ esistono*

$$K_j = \big(K_{1j}, \dots, K_{Nj}\big), \quad j = 1, \dots N \tag{14}$$

con $K_{ij} \in \mathcal{D}'(\mathbb{G}) \cap \mathcal{E}(\mathbb{G} \setminus \{0\})$, $i, j = 1, \dots, N$ tali che

i) *si ha*

$$\sum_i \mathcal{L}_{i\ell} K_{ij} = \begin{cases} \delta & se \quad \ell = j \\ 0 & se \quad \ell \neq j; \end{cases}$$

ii) *per $a < Q$, i K_{ij} sono nuclei di tipo a, per $i, j = 1, \dots, N$ (ovvero, sono funzioni smooth fuori dall'origine, omogenee di grado $a - Q$, e quindi stanno in $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{G})$, per il Corollario 1.7 di* [7]*). Se $a = Q$, i K_{ij} soddisfano la stima logaritmica $|K_{ij}(p)| \leq C(1 + |\ln \rho(p)|)$ e quindi appartengono a $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{G})$. Inoltre, le loro derivate orizzontali (i.e. $W_\ell K_{ij}$ per $\ell = 1, \dots, m$) sono nuclei di tipo $Q - 1$ nel senso di* [7]*;*

iii) *se $\alpha \in \mathcal{D}(\mathbb{G}, \mathbb{R}^N)$, e poniamo*

$$\mathcal{K}\alpha := \big(\sum_j \alpha_j * K_{1j}, \dots, \sum_j \alpha_j * K_{Nj}\big), \tag{15}$$

allora $\mathcal{L}\mathcal{K}\alpha = \alpha$. Quando $a < Q$, vale anche $\mathcal{K}\mathcal{L}\alpha = \alpha$.

iv) *se $a = Q$, allora per ogni $\alpha \in \mathcal{D}(\mathbb{G}, \mathbb{R}^N)$ esiste $\beta_\alpha := (\beta_1, \dots, \beta_N) \in \mathbb{R}^N$, tale che*

$$\mathcal{K}\mathcal{L}\alpha - \alpha = \beta_\alpha.$$

Come già sottolineato nell'introduzione uno degli ingredienti fondamentali per completare la prova del teorema è fornito dal seguente teorema di tipo Liouville (ispirato ad un risultato in [15]). La proposizione è provata in [2].

Proposizione 3.2. *Supponiamo che $\mathcal{L}$ verifichi le ipotesi del Teorema 3.1. Se $T = (T_1, \dots, T_N) \in \mathcal{S}'(\mathbb{G})^N$ verifica $\mathcal{L}T = 0$, allora T è un polinomio (a valori vettoriali).*

4. Risultato principale

Teorema 4.1. *Sia*

$$\mathcal{L} : \mathcal{E}(\mathbb{G}, \mathbb{R}^N) \to \mathcal{E}(\mathbb{G}, \mathbb{R}^N)$$

un operatore differenziale autoaggiunto, non negativo, left-invariant omogeneo di grado $a := 2r \leq Q$, con $r \in \mathbb{N}$ e Q la dimensione omogenea di $\mathbb{G}$. Sono equivalenti i seguenti fatti:

i) *$\mathcal{L}$ è ipoellittico;*

ii) *$\mathcal{L}$ è subellittico massimale, cioè, se $\Omega \subset \mathbb{G}$ è un aperto limitato, allora esiste $C = C_\Omega$ tale che per ogni multi-indice I con $|I| = r$*

$$\|W^I\alpha\|_{L^2(\mathbb{G})} \le C\left(\langle\mathcal{L}\alpha, \alpha\rangle_{L^2(\mathbb{G})} + \|\alpha\|^2_{L^2(\mathbb{G})}\right)^{1/2} \tag{16}$$

per ogni $\alpha \in \mathcal{D}(\Omega, \mathbb{R}^N)$;

iii) *$\mathcal{L}$ è ipoellittico massimale nel senso di* [10]*, i.e., se $\Omega \subset \mathbb{G}$ è un aperto lomitato, esiste $C = C_\Omega$ tale che per ogni multi-indice I con $|I| = 2r$ si ha*

$$\|W^I\alpha\|_{L^2(\mathbb{G})} \le C\left(\|\mathcal{L}\alpha\|_{L^2(\mathbb{G})} + \|\alpha\|_{L^2(\mathbb{G})}\right) \tag{17}$$

per ogni $\alpha \in \mathcal{D}(\Omega, \mathbb{R}^N)$;

iv) *se $1 < p < \infty$ è fissato, e $\Omega \subset \mathbb{G}$ è un aperto limitato, allora esiste $C = C_{\Omega,p}$ tale che per ogni multi-indice I con $|I| = 2r$ si ha*

$$\|W^I\alpha\|_{L^p(\mathbb{G})} \le C\left(\|\mathcal{L}\alpha\|_{L^p(\mathbb{G})} + \|\alpha\|_{L^p(\mathbb{G})}\right) \tag{18}$$

per ogni $\alpha \in \mathcal{D}(\Omega, \mathbb{R}^N)$.

Per la disuguaglianza di Poincaré ([13]*), in* (18), (17)*, (e in* (16)*), si può sostituire $|I| = 2r$ con $|I| \le 2r$ ($|I| = r$ con $|I| \le r$, respettivamente).*

Dimostrazione. (*cenni*) La dimostrazione completa di questo risultato si trova in [2]. Chiaramente, iv) implica iii). Per vedere che iii) implica ii) si può ragionare come in [6], Teorema 1. Infatti, per dilatazione, è facile vedere che la costante C in (17) può essere scelta indipendente da Ω. Quindi (17) dice che il dominio di $\mathcal{L}$ in $L^2(\mathbb{G})$ con la norma del grafico è immerso con continuità in $W^{2r,2}_{\mathbb{G}}(\mathbb{G})$. Per interpolazione, il dominio di $\mathcal{L}^{1/2}$ con la norma del grafico è immerso con continuità in $W^{r,2}_{\mathbb{G}}(\mathbb{G})$ (lo spazio di interpolazione di ordine $\frac{1}{2}$ tra $W^{2r,2}_{\mathbb{G}}(\mathbb{G})$ e $L^2(\mathbb{G})$ è $W^{r,2}_{\mathbb{G}}(\mathbb{G})$, per [7], Teorema 4.10 and Proposizione 4.1). E questo dà precisamente la (16).

Diamo adesso un cenno della prova che ii) implica i). Tutte le notazioni sugli operatori pseudoddifferenziali che usiamo, come i risultati qui richiamati si trovano nella sezione successiva, Sezione 5. Dividiamo la dimostrazione in due passi.

Passo 1. Se $\Omega \subset \mathbb{G}$ è un aperto limitato esiste $C > 0$ tale che, denotando con $\|\cdot\|_s$ la norma in $W^{s,2}_{\mathbb{G}}(\mathbb{G})$, per ogni $\delta > 0$ si ha

$$\sum_{|I|\le r} \|W^I\alpha\|^2_{\delta(r-|I|)} \le C\big(\langle\mathcal{L}\alpha, \alpha\rangle + \|\alpha\|_0^2\big). \tag{19}$$

per ogni $\alpha \in \mathcal{D}(\Omega, \mathbb{R}^N)$.

Limitiamoci al caso $0 < |I| < r$ e rimandiamo a [2] per la prova completa. Poniamo

$$S_h := \sum_{|J|\le h} \|W^J\alpha\|_{\delta(r-|J|)}.$$

Notiamo che $S_h \le S_{h+1}$.

Per $s \in \mathbb{R}$, denotiamo ora con Λ^s l'operatore pseudodifferenziale con simbolo $(1+|\xi|^2)^{s/2}$. Denotiamo ancora con Λ^s l'operatore diagonale indotto su $\mathcal{D}'(\Omega,\mathbb{R}^N)$ come segue: se $T = (T_1,\dots,T_N) \in D(\Omega,\mathbb{R}^N)$, scriviamo

$$\Lambda^s T := (\Lambda^s T_1,\dots,\Lambda^s T_N).$$

Per il Lemma 5.1 e la disuguaglianza classica di interpolazione per gli spazi di Sobolev, dato $\varepsilon > 0$, si ha

$$\begin{aligned}
\|W^I\alpha\|_{\delta(r-|I|)} &= \|\Lambda^{\delta(r-|I|-1)}W^I\alpha\|_\delta \\
&\le \|W^I\Lambda^{\delta(r-|I|-1)}\alpha\|_\delta + \|[\Lambda^{\delta(r-|I|-1)},W^I]\alpha\|_\delta \\
&\le \|W^I\Lambda^{\delta(r-|I|-1)}\alpha\|_\delta + \sum_{|J|<|I|}\|b_J(x,D)W^J\alpha\|_\delta \\
&\le \|W^I\Lambda^{\delta(r-|I|-1)}\alpha\|_\delta + C\sum_{|J|<|I|}\|W^J\alpha\|_{\delta(r-|I|)} \\
&\le \|W^I\Lambda^{\delta(r-|I|-1)}\alpha\|_\delta + C\varepsilon\sum_{|J|<|I|}\|W^J\alpha\|_{\delta(r-|J|)} \\
&+ C_\varepsilon\sum_{|J|<|I|}\|W^J\alpha\|_0 \\
&\le \|W^I\Lambda^{\delta(r-|I|-1)}\alpha\|_\delta + C\varepsilon S_{|I|} + C_\varepsilon\sum_{|J|<|I|}\|W^J\alpha\|_0.
\end{aligned} \tag{20}$$

Per la disuguaglianza di Poincaré ([13]) più volte iterata, e per la (16)

$$C_\varepsilon\sum_{|J|<|I|}\|W^J\alpha\|_0 \le C_\varepsilon\sum_{|J|=r}\|W^J\alpha\|_0 \le C_\varepsilon(\langle\mathcal{L}\alpha,\alpha\rangle + \|\alpha\|_0^2)^{1/2},$$

così che

$$\|W^I\alpha\|_{\delta(r-|I|)} \le \|W^I\Lambda^{\delta(r-|I|-1)}\alpha\|_\delta + C\varepsilon S_{|I|} + C_\varepsilon(\langle\mathcal{L}\alpha,\alpha\rangle + \|\alpha\|_0^2)^{1/2}. \tag{21}$$

Occorre ricordare che per la seguente fondamentale stima classica ([11]), esiste $\delta \in (0,1)$ tale che, se Ω_0 è un aperto limitato , e $u \in \mathcal{D}(\Omega_0)$, allora

$$\|u\|_\delta \le C\big(\sum_{j=1}^m \|W_j u\|_0 + \|u\|_0\big), \tag{22}$$

dove $C = C(\Omega_0)$ è indipendente da $u \in \mathcal{D}(\Omega_0)$. Quindi, commutando un certo numero di volte ed applicando ancora il Lemma di commutazione 5.1, l'interpolazione e la disuguaglianza di Poincarè (in diversi passaggi si devono considerare opportune cut-off che una volta che si commuti introducono svariati termini da stimare) si ottiene infine che

$$\begin{aligned} \|W^I\alpha\|_{\delta(r-|I|)} &\le C\varepsilon S_{|I|} + C_\varepsilon(\|\mathcal{L}\alpha\|_0 + \|\alpha\|_0) \\ &\le C\varepsilon S_{r-1} + C_\varepsilon(\langle\mathcal{L}\alpha,\alpha\rangle + \|\alpha\|_0^2)^{1/2}. \end{aligned} \tag{23}$$

Summando su $0 \le |I| \le r-1$ abbiamo che

$$S_{r-1} \le C\varepsilon S_{r-1} + C_\varepsilon(\langle\mathcal{L}\alpha,\alpha\rangle + \|\alpha\|_0^2)^{1/2}, \tag{24}$$

e quindi la (19) per un'opportuna scelta di $\varepsilon > 0$.

Passo 2. In questa seconda parte utilizzeremo anche il Lemma di commutazione 5.2, in quanto ci occorrerà, attraverso diverse integrazioni per parti, distribuire in modo opportuno le derivate orizzontali in entrambi i fattori del prodotto scalare, in modo tale che appaiano in entrambi i fattori solo le derivate orizzontali di ordine inferiore ad $\frac{1}{2}a$.

Se $\alpha \in \mathcal{D}'(\Omega, \mathbb{R}^N)$, allora esiste $t \in \mathbb{R}$ tale che

$$W^I\alpha \in W^{t+\delta(r-|I|),2}_{\mathrm{loc}}(\Omega) \quad \text{per } |I| \le r. \tag{25}$$

Infatti, $\alpha \in W^{-N,2}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ per un opportuno $N \ge 0$. Poniamo $t := -N - r$. Poichè $W^I\alpha \in W^{-N-|I|,2}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, l'asserto segue in quanto $W^{-N-|I|,2}_{\mathrm{loc}}(\Omega) \subset W^{t+\delta(r-|I|),2}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Infatti, $-N-|I|-t-\delta(r-|I|) = r-|I|-\delta(r-|I|) = (r-|I|)(1-\delta) \ge 0$.

Supponiamo ora che $\mathcal{L}\alpha$ sia $\mathbb{C}^\infty$ in Ω. Facciamo vedere che

$$W^I\alpha \in W^{t+\delta+\delta(r-|I|),2}_{\mathrm{loc}}(\Omega) \quad \text{for } |I| \le r. \tag{26}$$

Questo segue applicando un certo numero (elevato!) di commutazioni e applicando i due Lemmi di commutazione enunciati nell'appendice (i dettagli in [2]). Poi iterando questo risultato, mostriamo che α è smooth e quindi che $\mathcal{L}$ è ipoellittico.

Finalmente, per chiudere il cerchio, non ci resta che mostrare che i) implica iv). A questo fine si ripetono i ragionamenti fatti in [1], Proposizione 4.14. Ad esempio, se $a < Q$, per il Teorema 3.1, se $\alpha \in \mathcal{D}(\mathbb{G}, \mathbb{R}^N)$ e W^I è ancora un polinomio omogeneo di grado a nei campi orizzontali, da (15), possiamo scrivere

$$W^I\alpha = W^I\mathcal{K}\mathcal{L}\alpha = \big(\sum_j (\mathcal{L}\alpha)_j * W^I K_{1j}, \dots, \sum_j (\mathcal{L}\alpha)_j * W^I K_{Nj}\big). \tag{27}$$

Poiché i $W^I K_{ij}$sono nuclei di tipo zero, la tesi segue grazie alla Proposizione 1.9 di [7].

Questo completa la dimostrazione del teorema.

$\square$

5. Appendice: Operatori ΨDO differenziali e lemmi di commutazione

Seguiamo ad esempio [12], Cap.18. Se $s \in \mathbb{R}$, indichiamo con $\mathcal{S}^s$ le classi dei simboli di ordine s, cioè le classi delle funzioni smooth $a = a(x, \xi)$ tali che

$$\left|\partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha a(x,\xi)\right| \leq C_{\alpha,\beta}(1+|\xi|)^{s-|\alpha|}$$

per ogni $x, \xi \in \mathbb{R}^n$ e per tutti i multi-indici con entrate intere non negative α e β. Lo spazio S^s è uno spazio di Fréchet con seminorme

$$\|a\|_{\alpha,\beta} = \sup_{x,\xi} \left|\partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha a(x,\xi)\right|(1+|\xi|)^{|\alpha|-s}.$$

Come sempre, denotiamo con $a(x, D)$ l'operatore pseudodifferenziale associato al simbolo $a(x, \xi)$.

Un operatore pseudodifferenziale $P = P^*$ si dice propriamente supportato quando ha la proprietà che: per ogni compatto$K$ c'è un compatto K' tale che le distribuzioni supportate in K sono mappate in distribuzioni supportate in K'.

Lemma 5.1 ([16]). *Sia $I := (i_1, \dots, i_h)$ un multi-indice, con $1 \leq i_j \leq m$. Sia $W^I := W_{i_1} \cdots W_{i_h}$ un polinomio omogeneo nei campi orizzontali $W_1, \dots, W_m$, sia $\Lambda = \Lambda(x, D)$ un operatore pseudodifferenziale propriamente supportato con simbolo $\Lambda(x, \xi) \in \mathcal{S}^k$. Allora*

$$[W^I, \Lambda] = \sum_{|J| \leq |I|-1} b_J(x, D) W^J, \tag{28}$$

dove i $b_J(x, D)$ sono operatori pseudodifferenziali propriamente supportati associati ai simboli $b_J(x, \xi) \in \mathcal{S}^k$. Se, inoltre, i $\Lambda(x, \xi)$ stanno in un insieme limitato di $\mathcal{S}^k$, allora tutti i b_J stanno in un insieme limitato di $\mathcal{S}^k$.

Lemma 5.2 ([2]). *Siano $I_1 := (i_1^1, \dots, i_h^1)$ $I_2 := (i_1^2, \dots, i_k^2)$ multi-indici, con $1 \leq i_j^\ell \leq m$, $|I_1| + |I_2| \leq 2r$. Siano $W^{I_1} := W_{i_1^1} \cdots W_{i_h^1}$ e $W^{I_2} := W_{i_1^2} \cdots W_{i_k^2}$ monomi omogenei nei campi orizzontali $W_1, \dots, W_m$, e siano $\Lambda_1 = \Lambda_1(x, D)$ e $\Lambda_2 = \Lambda_2(x, D)$ due operatori pseudodifferenziali propriamente supportati associati ai simboli $\Lambda_1(x, \xi) \in \mathcal{S}^k$ e $\Lambda_2(x, \xi) \in \mathcal{S}^h$, rispettivamente. Siano poi j_0 e ℓ_0 due interi non negativi tali che $j_0 + \ell_0 = |I_1| + |I_2| - 1$. Allora possiamo* *scrivere*

$$\begin{aligned}
&\langle [W^{I_1}, \Lambda_1]u) | W^{I_2}\Lambda_2\phi\rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{G}),(\mathbb{G})} \\
&= \sum_{|J|\le j_0, |L|\le \ell_0} \langle b_J(x,D)W^J u | c_L(x,D)W^L\phi\rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{G}),(\mathbb{G})}
\end{aligned} \tag{29}$$

per ogni $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{G})$ *e* $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{G})$*, dove i* $b_J(x,D)$ *e i* $c_L(x,D)$ *sono operatori pseudodifferenziali propriamente supportati con simboli in* $\mathcal{S}^k$ *e* $\mathcal{S}^h$*, rispettivamente. Inoltre, se* $\Lambda_1(x,\xi)$ *e* $\Lambda_2(x,\xi)$ *stanno rispettivamente in un insieme limitato di* $\mathcal{S}^k$ *e* $\mathcal{S}^h$*, allora anche i* b_J *e i* c_L *stanno rispettivamente in un insieme limitato di* $\mathcal{S}^k$ *e* $\mathcal{S}^h$*.*

Riferimenti bibliografici

[1] Annalisa Baldi, Bruno Franchi, and Maria Carla Tesi. Compensated compactness in the contact complex of Heisenberg groups. *Indiana Univ. Math. J*, 57(1):133–186, 2008

[2] Annalisa Baldi, Bruno Franchi, and Maria Carla Tesi. Hypoellipticity, fundamental solution and Liouville type theorem for matrix–valued differential operators in Carnot groups. *J. Eur. Math. Soc.* (to appear).

[3] Annalisa Baldi, Bruno Franchi, and Maria Carla Tesi. Fundamental solution and sharp L^p estimates for Laplace operators in the contact complex of Heisenberg groups. *Ricerche Mat.*, 55(1):119–144, 2006.

[4] Andrea Bonfiglioli, Ermanno Lanconelli, and Francesco Uguzzoni. *Stratified Lie groups and potential theory for their sub-Laplacians.* Monographs in Mathematics. Springer, Berlin. (2007).

[5] Nicolas Bourbaki. *Éléments de mathématique. XXVI. Groupes et algèbres de Lie. Chapitre 1: Algèbres de Lie.* Actualités Sci. Ind. No. 1285. Hermann, Paris, 1960.

[6] Charles L. Fefferman and Duong H. Phong. Subelliptic eigenvalue problems. In *Conference on harmonic analysis in honor of Antoni Zygmund, Vol. I, II (Chicago, Ill., 1981)*, Wadsworth Math. Ser., pages 590–606. Wadsworth, Belmont, CA, 1983.

[7] Gerald B. Folland. Subelliptic estimates and function spaces on nilpotent Lie groups. *Ark. Mat.*, 13(2):161–207, 1975.

[8] Gerald B. Folland and Elias M. Stein. *Hardy spaces on homogeneous groups*, volume 28 of *Mathematical Notes*. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1982.

[9] Bruno Franchi, Raul Serapioni, and Francesco Serra Cassano. On the structure of finite perimeter sets in step 2 Carnot groups. *J. Geom. Anal.*, 13(3):421–466, 2003.

[10] Bernard Helffer and Jean Nourrigat. *Hypoellipticité maximale pour des opérateurs polynômes de champs de vecteurs*, volume 58 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1985.

[11] Lars Hörmander. Hypoelliptic second order differential equations. *Acta Math.*, 119:147–171, 1967.

[12] Lars Hörmander. *The analysis of linear partial differential operators. I*, volume 256 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 1990. Distribution theory and Fourier analysis.

[13] David Jerison. The Poincaré inequality for vector fields satisfying Hörmander's condition. *Duke Math. J.*, 53(2):503–523, 1986.

[14] Joseph J. Kohn. Pseudo-differential operators and hypoellipticity. In *Partial differential equations (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XXIII, Univ. California, Berkeley, Calif., 1971)*, pages 61–69. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1973.

[15] Xuebo Luo. Liouville's theorem for homogeneous differential operators. *Comm. Partial Differential Equations*, 22(11-12):1837–1848, 1997.

[16] Jean Nourrigat. *Subelliptic estimates for systems of pseudo-differential operators*, volume 20 of *Notas de curso*. Recife, 1982.

[17] Raphaël Ponge. Heisenberg calculus and spectral theory of hypoelliptic operators on heisenberg manifolds. *Mem. Amer. Math. Soc.*, to appear.

[18] Fulvio Ricci. *Sub-Laplacians on Nilpotent Lie Groups (Appendix: Hörmander's Theorem)*. Lecture Notes at the Scuola Normale Superiore. Pisa, 2002–2003. http://homepage.sns.it/fricci/corsi.html.

[19] Linda P. Rothschild and Elias M. Stein. Hypoelliptic differential operators and nilpotent groups. *Acta Math.*, 137(3-4):247–320, 1976.

[20] Michel Rumin. Formes différentielles sur les variétés de contact. *J. Differential Geom.*, 39(2):281–330, 1994.

[21] Michel Rumin. Around heat decay on forms and relations of nilpotent Lie groups. In *Séminaire de Théorie Spectrale et Géométrie, Vol. 19, Année 2000–2001*, volume 19 of *Sémin. Théor. Spectr. Géom.*, pages 123–164. Univ. Grenoble I, Saint, 2001.

[22] Elias M. Stein. *Harmonic analysis: real-variable methods, orthogonality, and oscillatory integrals*, volume 43 of *Princeton Mathematical Series*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1993. With the assistance of Timothy S. Murphy, Monographs in Harmonic Analysis, III.

Annalisa Baldi
Dipartimento di Matematica
Piazza di Porta S. Donato 5
40127 Bologna, Italy;
e-mail: baldi@dm.unibo.it