Seminario di Analisi Matematica

Dipartimento di Matematica
dell'Università di Bologna

Anno Accademico 2007-08

Andrea Bonfiglioli

La Formula di Taylor per i Gruppi Omogenei ed Applicazioni

6 marzo 2008

Abstract

In this paper, we provide a Taylor formula with integral remainder in the setting of homogeneous groups in the sense of Folland and Stein [18]. This formula allows us to give a simplified proof of the so-called 'Taylor inequality'. As a by-product, we furnish an explicit expression for the relevant Taylor polynomials. Applications are provided. Among others, it is given a sufficient condition for the real-analiticity of a function whose higher order derivatives (in the sense of the Lie algebra) satisfy a suitable growth condition. Moreover, we prove the 'L-harmonicity' of the Taylor polynomials related to a 'L-harmonic' function, when L is a general homogenous left-invariant differential operator on a homogeneous group. (This result is one of the ingredients for obtaining Schauder estimates related to L.)

I risultati di seguito enunciati sono dimostrati in dettaglio in [7].

1. Introduzione e Risultati Principali

Un *gruppo omogeneo* (nel senso di Folland e Stein, [18]) è un gruppo di Lie connesso e semplicemente $(G, \cdot)$ la cui algebra di Lie, $\mathrm{Lie}(G)$, è dotata di una *famiglia di dilatazioni* $\{\delta_\lambda\}_{\lambda>0}$, i.e., una famiglia di omomorfismi di algebra di $\mathrm{Lie}(G)$ della forma $\delta_\lambda = \exp(A \log \lambda)$, dove A è un endomorfismo diagonalizzabile dello spazio vettoriale $\mathrm{Lie}(G)$ con autovalori positivi $\sigma_1, \dots, \sigma_N$.

Equivalentemente, $\{\delta_\lambda\}_{\lambda>0}$ è una famiglia di dilatazioni su $\mathrm{Lie}(G)$ se e solo se esistono scalari positivi $\sigma_1, \dots, \sigma_N$ e una base $\{X_1, \dots, X_N\}$ di $\mathrm{Lie}(G)$ tale che

$$\delta_\lambda(X_i) = \lambda^{\sigma_i} X_i \quad \text{per ogni } i = 1, \dots, N \text{ e ogni } \lambda > 0, \tag{1}$$

e, inoltre, ogni δ_λ è un omomorfismo di algebra di $\mathrm{Lie}(G)$.

Una notevole classe di gruppi omogenei è la ben nota classe dei *gruppi di Lie stratificati* [17], [18], [30], oggi ben noti anche come *gruppi di Carnot* (si veda anche [9] per una introduzione ai gruppi di Carnot). Tuttavia, ci sono gruppi omogenei che non sono stratificati[1]

[1]Un esempio è dato dal seguente gruppo (si veda [10]; si veda anche [8, Example 6.4]): Denotiamo il punto di $\mathbb{R}^5$ con (x, y, z, w, t), e consideriamo la legge di composizione

$$\begin{aligned}&(x, y, z, w, t) * (\xi, \eta, \zeta, \omega, \tau)\\ &:= \Big(x + \xi, y + \eta, z + \zeta, w + \omega + x\,\eta, t + \tau - \tfrac{1}{2}\, y\, \xi^2 - x\,\xi\,\eta - x\,y\,\xi + x\,\zeta + x\,\omega\Big).\end{aligned}$$

Non è difficile provare che $\mathbb{G} = (\mathbb{R}^5, *)$ è un gruppo di Lie nilpotente di passo 3 e che

$$\delta_\lambda(x, y, z, w, t) := \big(\lambda\, x, \lambda\, y, \lambda^2\, z, \lambda^2\, w, \lambda^3\, t\big), \quad \lambda > 0$$

definisce un gruppo di dilatazioni su $\mathbb{G}$. I primi tre campi vettoriali della base Jacobiana sono

$$X = \partial_x - x\, y\, \partial_t, \quad Y = \partial_y + x\, \partial_w, \quad Z = \partial_z + x\, \partial_t.$$

Si ha

$$W := [X, Y] = \partial_w + x\, \partial_t, \qquad T := [X, Z] = \partial_t, \qquad [X, W] = [X, [X, Y]] = \partial_t,$$

mentre $[Y, Z]$, $[X, T]$, $[Y, W]$, $[Y, T]$, $[Z, W]$, $[Z, T]$ e tutti i commutatori di altezza ≥ 4 si annullano. Si nota quindi che l'algebra di $\mathbb{G}$ *non è stratificata*, poiché T è un commutatore di altezze sia 2 sia 3 di X, Y, Z.

ed esistono gruppi stratificati che possono venire dotati di una struttura omogenea differente da quella ereditata dalla stratificazione. Un esempio di quest'ultimo caso è dato dai *gruppi di tipo Kolmogorov* descritti nella Sezione 2 - § 4 (si veda anche [9, Section 4.1.4]).

Un gruppo omogeneo è nilpotente (si veda [18, Proposition 1.3]) cosicché la mappa esponenziale $\mathrm{Exp} : \mathrm{Lie}(G) \to G$ è un diffeomorfismo globale (analitico). Quindi, se poniamo per ogni $X, Y \in \mathrm{Lie}(G)$,

$$X * Y := \mathrm{Exp}^{-1}(\mathrm{Exp}\,(X) \cdot \mathrm{Exp}\,(Y)),$$

allora $(\mathrm{Lie}(G), *)$ e $(G, \cdot)$ sono gruppi di Lie isomorfi via Exp. È un fatto ben noto che, per la formula di Baker-Campbell-Hausdorff, $*$ è esprimibile come una somma "universale" di Lie bracket iterate

$$X * Y = X + Y + \tfrac{1}{2}\,[X, Y] + \tfrac{1}{12}\,[X, [X, Y]] - \tfrac{1}{12}\,[Y, [X, Y]] + \cdots$$

Per questa ragione, rispetto ad ogni scelta di coordinate lineari su $\mathrm{Lie}(G)$, l'operazione $*$ è una legge di gruppo polinomiale. Inoltre, essendo δ_λ un omomorfismo di algebra, si ha

$$\delta_\lambda(X * Y) = \delta_\lambda(X) + \delta_\lambda(Y) + \tfrac{1}{2}\,[\delta_\lambda(X), \delta_\lambda(Y)] + \cdots = \delta_\lambda(X) * \delta_\lambda(Y),$$

i.e., δ_λ è anche un omomorfismo del gruppo di Lie $(\mathrm{Lie}(G), *)$.

Di più, se identifichiamo $\mathrm{Lie}(G)$ con $\mathbb{R}^N$ via la scelta della base $\{X_1, \ldots, X_N\}$ di autovettori di δ_λ come in (1), è ovvio che δ_λ prende la forma esplicita

$$\delta_\lambda : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N, \quad \delta_\lambda(x_1, \ldots, x_N) = (\lambda^{\sigma_1} x_1, \ldots, \lambda^{\sigma_N} x_N). \tag{2}$$

La seguente definizione è allora decisamente molto naturale.

Definizione 1.1. *Diciamo che $\mathbb{G} = (\mathbb{R}^N, *, \delta_\lambda)$ è un* gruppo omogeneo su $\mathbb{R}^N$ *se sussiste il fatto seguente: $(\mathbb{R}^N, *)$ è un gruppo di Lie, δ_λ è come in* (2) *con $1 \le \sigma_1 \le \cdots \le \sigma_N$ e δ_λ è un omomorfismo del gruppo $(\mathbb{R}^N, *)$, per ogni $\lambda > 0$.*

L'ordine dei σ_i è ovviamente non-restrittivo, mentre l'assumere $\sigma_1 \ge 1$ è una conveniente normalizzazione che può sempre essere performata senza perdere di generalità. (Infatti, basta sostituire un generale δ_λ come in (2) con $\delta_{\lambda^{1/\sigma_1}}$.)

Gli argomenti di cui sopra mostrano che un gruppo omogeneo generale G è naturalmente isomorfo ad un gruppo omogeneo $\mathbb{G}$ su $\mathbb{R}^N$.

Per questa ragione è non restrittivo supporre di trattare un gruppo omogeneo su $\mathbb{R}^N$, cosa che faremo in tutto il resto di questa nota. Osserviamo esplicitamente che l'aggettivo 'omogeneo' per il gruppo $\mathbb{G}$ di cui sopra è appropriato, per la seguente ragione: posto $\mathfrak{g} := \mathrm{Lie}(\mathbb{G})$, il differenziale $\mathrm{d}\delta_\lambda : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ è un omomorfismo di algebra (poiché δ_λ è un omomorfismo di gruppo) e, se $Z_i \in \mathfrak{g}$ coincide con $\partial_{x_i}|_0$ nell'origine, non è difficile vedere che $\mathrm{d}\delta_\lambda(Z_i) = \lambda^{\sigma_i} Z_i$. Quindi $\mathbb{G}$ è pure un gruppo omogeneo nel senso di [18].

Faremo riferimento alla base di cui sopra $\{Z_1, \dots, Z_N\}$ chiamandola *la base Jacobiana di* $\mathfrak{g}$. L'aggettivo 'Jacobiana' si riferisce al fatto che i coefficienti in $x \in \mathbb{G}$ del campo vettoriale Z_i sono dati dalle entrate della i-esima colonna della matrice Jacobiana $\mathcal{J}_{\tau_x}(0)$, dove τ_x è la traslazione a sinistra di ampiezza x. La rilevanza della base Jacobiana (che è ben posta solo su un gruppo di Lie su $\mathbb{R}^N$) è anche evidente dal fatto seguente: Se $\varphi : \mathbb{R}^N \to G$ è la identificazione che abbiamo già utilizzato, i.e.,

$$\varphi : \mathbb{R}^N \to G, \quad \varphi(x_1, \dots, x_N) = \mathrm{Exp}\,(x_1 X_1 + \cdots + x_N X_N),$$

allora $\mathrm{d}\varphi(Z_i) = X_i$ per ogni $i = 1, \dots, N$. *In altre parole, la base Jacobiana gioca il medesimo ruolo per $\mathbb{G}$ che la base di δ_λ-autovettori X_i gioca per G.*

Per rinforzare ulteriormente il nostro assunto di trattare gruppi omogenei su $\mathbb{R}^N$, descriviamo l'argomento centrale di questa nota: *i polinomi di Taylor sui gruppi omogenei.* Ricordiamo dapprima che un polinomio (reale) su un gruppo di Lie G è una funzione $P : G \to \mathbb{R}$ tale che $P \circ \mathrm{Exp}$ è un polinomio sullo spazio vettoriale $\mathrm{Lie}(G)$. Ora, se G è omogeneo, dalla identificazione di cui sopra di G con $\mathbb{R}^N$, il set dei polinomi su G ovviamente corrisponde al set degli usuali polinomi su $\mathbb{R}^N$: una utile semplificazione!

La seguente definizione sarà cruciale per i nostri scopi.

Definizione 1.2. *Sia $\mathbb{G} = (\mathbb{R}^N, *, \delta_\lambda)$ un gruppo omogeneo su $\mathbb{R}^N$ e sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ un aperto contenente l'origine. Sia infine $f : \Omega \to \mathbb{R}$ e fissiamo un qualunque*

$$n \in \mathfrak{S} := \{\alpha_1\sigma_1 + \cdots + \alpha_N\sigma_N : \ \alpha_1, \dots, \alpha_N \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}.$$

Se esistono un polinomio p su $\mathbb{G}$ con δ_λ-grado $\le n$ e $\varepsilon > 0$, tali che

$$f(x) = p(x) + \mathcal{O}_{x\to 0}\big(\varrho^{n+\varepsilon}(x)\big), \tag{3}$$

per una certa norma δ_λ-omogenea ϱ su $\mathbb{G}$, diciamo che p è il polinomio di Maclaurin di δ_λ-grado n relativo ad f. *In tal caso poniamo $P_n(f,0) := p$.*

Se $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ è un aperto arbitrario e $x_0 \in \Omega$, poniamo anche

$$P_n(f,x_0) := P_n(f \circ \tau_{x_0}, 0) \circ \tau_{x_0^{-1}} \tag{4}$$

e diciamo che $P_n(f,x_0)$ è il polinomio di Taylor di δ_λ-grado n relativo a f nel punto x_0.

Facciamo direttamente riferimento alla Sezione 2 per la nozione di δ_λ-grado e di norma δ_λ-omogenea. L'unicità di p come in (3) si può dimostrare facilmente (si veda l'Osservazione 3.1). L'esistenza di p si può fare risalire a Folland e Stein [18, Chapter 1–§ C], ma verrà anche annunciata qui (si veda la Sezione 3) e dimostrata in [7] con argomenti elementari basati unicamente sulla classica formula di Taylor con resto di Peano. In [18, Theorem 1.37], viene dimostrata la cosiddetta *disuguaglianza di Taylor* per i gruppi omogenei, un risultato che implica immediatamente (3): il relativo p in [18] è un polinomio la cui esistenza è garantita da (indiretti) argomenti dimensionali. Inoltre, per la prova della citata disuguaglianza di Taylor, vengono utilizzati una versione quantitativa di un risultato di connettività di tipo Carathéodory-Chow-Rashevsky (semplificato dall'ambiente nilpotente e omogeneo, tuttavia pur sempre altamente non triviale) e un *Teorema di tipo Valor Medio (subellittico)* (si vedano, rispettivamente, Lemma 1.31 e Theorem 1.33 in [18]).

Lo scopo di questa nota è di annunciare una versione (migliorata) di tale disuguaglianza di Taylor (si veda il Teorema 4.2 nella Sezione 4) unicamente utilizzando argomenti elementari (roughly, integrazione per parti in $\mathbb{R}$) e senza invocare alcun risultato di connettività né il teorema del valor medio. Infatti forniamo una formula di Taylor con *resto integrale*, scrivendo la usuale formula di Taylor lungo il cammino

$$[0,1] \ni t \mapsto f(x * \mathrm{Exp}\,(t\,\mathrm{Log}\,(h))).$$

Quando $\mathrm{Log}\,(h)$ è decomposto rispetto alla base Jacobiana $\{Z_1, \dots, Z_N\}$, si ottiene come risultato collaterale una espressione esplicita dei polinomi di Taylor, espressione che sembra mancare in [18]. Questa forma esplicita (si veda (34)) è totalmente simile a quella classica, non appena la derivata $\partial_{x_{i_1}} \cdots \partial_{x_{i_k}} f(x_0)$ è rimpiazzata da $Z_{i_1} \cdots Z_{i_k} f(x_0)$ e il relativo prodotto di incrementi

$$(x - x_0)_{i_1} \cdots (x - x_0)_{i_k}$$

è rimpiazzato da

$$\mathrm{Log}_{\,i_1}(x_0^{-1} * x) \cdots \mathrm{Log}_{\,i_k}(x_0^{-1} * x),$$

dove $\mathrm{Log}_{\,i}$ è la i-esima componente di Log rispetto alla base $\{Z_1, \dots, Z_N\}$.

Nella Sezione 5 forniamo alcune delle possibili applicazioni della formula di Taylor.

Dapprima esibiamo la formula di Taylor *orizzontale* con resto integrale, quando $\mathbb{G}$ è un gruppo stratificato omogeneo. Per una applicazione di tale formula alla convessità sui gruppi di Carnot, si veda Lu, Manfredi e Stroffolini [27] (si veda anche [6], [29] nel contesto del gruppo di Heisenberg).

In secondo luogo, forniamo una espressione esplicita dei polinomi di Taylor quando $\mathbb{G}$ è un gruppo di Lie omogeneo di *passo due*. Una formula alternativa (equivalente alla nostra –siccome i polinomi di Taylor sono unici– ma con un differente formalismo) è stata provata sul gruppo di Heisenberg da Arena, Caruso e Causa [3] ed è stata recentemente generalizzata ai gruppi di Carnot di passo due dai medesimi autori, [4] (con lo stesso formalismo in [3]).

Inoltre, siccome la stima del nostro resto integrale migliora parzialmente quella in [18, Theorem 1.37], siamo in grado di fornire una condizione sufficiente per l'analiticità reale di una funzione f le cui derivate $Z_{i_1} \cdots Z_{i_k} f$ soddisfano una certa condizione di crescita, generalizzante l'usuale condizione (necessaria e sufficiente) nel caso Euclideo classico. A differenza tuttavia del caso classico, la prova di questo risultato per i gruppi omogenei è piuttosto delicata.

Per finire, come ultima applicazione, dimostriamo un risultato concernente la *'L-armonicità' dei polinomi di Taylor* di una funzione 'L-armonica', quando L è un operatore differenziale (di ordine qualunque) omogeneo e left-invariant su un gruppo omogeneo (si veda la Proposizione 5.1).

Quest'ultima applicazione fornisce un'altra motivazione per i risultati in [7], qui annunciati. Il ruolo dell'approssimazione polinomiale nel derivare risultati fini di regolarità è ben nota: si veda e.g., il classico risultato di Calderón e Zygmund, recentemente adattato ai gruppi stratificati da Ambrosio e Magnani [2]. Di più, la 'armonicità' dei polinomi di Taylor è uno dei principali ingredienti per ottenere *stime di Schauder* (puntuali) per opportune classi di PDE's, per mezzo di un metodo ispirato alle idee di Bers [5] e di Caffarelli [11].

Nel contesto classico delle equazioni ellittico-paraboliche, vari risultati sono già disponibili in letteratura, come andiamo a ricordare brevemente. Infatti, in [5] (risp. in [11]; si veda anche Caffarelli e Cabré [13]) equazioni ellittiche lineari omogenee e di ordine arbitrario (risp. del secondo ordine) sono considerate. Per un adattamento al caso di equazioni paraboliche del secondo ordine, si veda anche [1]. L'idea di confrontare soluzioni con polinomi (quadratici) è stata poi utilizzata da Caffarelli [12] e da Wang [31] per equazioni ellittiche fully nonlinear (del secondo ordine) e per equazioni paraboliche. Per equazioni ellittiche di ordine superiore o per equazioni paraboliche, simili idee sono utilizzate da Han [21], [22]. Nel case ellittico classico, i prerequisiti per ottenere stime di Schauder (pur comprendendo ancora la già citata armonicità dei polinomi di Taylor) possono essere significativamente ridotti (si veda [19]).

Generalizzazioni altamente non triviali dei metodi di Bers e di Caffarelli al contesto *subellittico* dei gruppi di Carnot (che ancora utilizzano la 'armonicità' dei relativi polinomi di Taylor) sono stati recentemente ottenuti da Capogna e Han [14] e, nel setting di alcuni gruppi omogenei, da Gutiérrez e Lanconelli [20]. In particolare, [14, Lemma 3.8] contiene un risultato concernente la $\mathcal{L}$-armonicità dei polinomi di Taylor quando $\mathcal{L}$ è un sub-Laplaciano su un gruppo di Carnot. Osserviamo che la nostra Proposizione 5.1 non è contenuta in [14, Lemma 3.8] bensì lo generalizza, poiché noi prendiamo in considerazione operatori arbitrari omogenei e left-invariant (contenenti i sub-Laplaciani come caso particolare) su arbitrari gruppi omogenei (comprendenti in particolare i gruppi di Carnot). Inoltre, la nostra Proposizione 5.1 si applica direttamente al caso trattato in [20], che include operatori ipoellittici ultraparabolici detti *di tipo Kolmogorov* (si veda § 4 nella sezione seguente), i quali generalizzano i classici operatori prototipo di Kolmogorov-Fokker-Planck (che vengono anche studiati in [25], [26]).

Per differenti risultati di calcolo sui gruppi stratificati, si veda ad esempio Heinonen, [23]; per risultati di geometria sub-Riemanniana sui gruppi di Carnot, si veda Danielli, Garofalo, Nhieu, [16]; per il teorema della funzione implicita in spazi di Carnot–Carathéodory, si veda Citti e Manfredini, [15].

2. Notazioni e Definizioni

§ 1. Notazioni sui Gruppi Omogenei. Nel seguito, denotiamo con

$$\mathbb{G} = (\mathbb{R}^N, *, \delta_\lambda)$$

un dato gruppo omogeneo su $\mathbb{R}^N$, seguendo la Definizione 1.1. Poniamo anche $\mathfrak{g} := \mathrm{Lie}(\mathbb{G})$ e gli elementi di $\mathfrak{g}$ sono pensati come operatori lineari (left-invariant) del primo ordine. Le mappe

$$\mathrm{Exp} : \mathfrak{g} \to \mathbb{G} \quad \text{e} \quad \mathrm{Log} : \mathbb{G} \to \mathfrak{g}$$

denoteranno rispettivamente le relative mappe esponenziale e logaritmica (le quali sono globalmente definite e a componenti polinomiali).

Inoltre, $\{\delta_\lambda\}_{\lambda>0}$ denoterà una *fissata* famiglia di dilatazioni come in (2), con $1 \leq \sigma_1 \leq \cdots \leq \sigma_N$. La legge di composizione di un gruppo omogeneo su $\mathbb{R}^N$ ha una forma relativamente esplicita:

$$(x * y)_1 = x_1 + y_1, \quad (x * y)_j = x_j + y_j + Q_j(x, y), \quad 2 \leq j \leq N, \tag{5}$$

dove Q_j è una funzione polinomiale (somma di monomi misti in x e y) che dipende solo da $x_1, \ldots, x_{j-1}$ e $y_1, \ldots, y_{j-1}$. Si veda ad esempio [18, equation (1.22)]; si veda anche [9, Theorem 1.3.15].

Diciamo che una funzione $f : \mathbb{G} \to \mathbb{R}$ è *δ_λ-omogenea di grado $\beta \in \mathbb{R}$* se

$$f(\delta_\lambda(x)) = \lambda^\beta f(x)$$

per ogni $x \in \mathbb{G}$ e ogni $\lambda > 0$. Una *norma omogenea* ϱ *su* $\mathbb{G}$ è una funzione continua $\varrho : \mathbb{G} \to [0, \infty)$ tale che $\varrho(x) = 0$ se e solo se $x = 0$ e ϱ è δ_λ-omogenea di grado 1. Un esempio di norma δ_λ-omogenea è

$$\varrho(x) = \textstyle\sum_{j=1}^N |x_j|^{1/\sigma_j}. \tag{6}$$

(In [18], ad una norma omogenea è anche richiesto di essere C^∞ fuori dall'origine e di essere "pari" rispetto alla inversione del gruppo. Non avremo modo di fare uso di queste assunzioni.)

§ 2. Notazioni sui Polinomi. Nel seguito, α denoterà sempre un multi-indice con N entrate intere e non negative, i.e.,

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N) \quad \text{con} \quad \alpha_1, \dots, \alpha_N \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Se α è un multi-indice, poniamo

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_N^{\alpha_N}, \qquad (D_x)^\alpha = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{x_N}^{\alpha_N}.$$

Useremo anche le seguenti notazioni

$$|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_N, \quad |\alpha|_{\mathbb{G}} = \alpha_1\, \sigma_1 + \cdots + \alpha_N\, \sigma_N$$

per denotare, rispettivamente, la lunghezza Euclidea di α e la *lunghezza* δ_λ*-omogenea* di α. Con questa notazione, poniamo poi

$$\mathfrak{S} := \big\{ |\alpha|_{\mathbb{G}} : \alpha \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^N \big\}. \tag{7}$$

Per esempio, se $\sigma_1 = 1$, allora $\mathbb{N} \subseteq \mathfrak{S}$ e se inoltre i σ_i sono tutti interi, allora $\mathbb{N} = \mathfrak{S}$. Nel seguito, $[y]$ denoterà sempre la parte intera del numero reale y. Se $p : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ è una funzione polinomiale non-identicamente nulla

$$p(x) = \textstyle\sum_\alpha c_\alpha\, x^\alpha$$

(la somma essendo finita e i c_α essendo numeri reali), poniamo

$$\deg_{\mathbb{G}}(p) := \max\{ |\alpha|_{\mathbb{G}} \,:\, c_\alpha \neq 0 \},$$

e diciamo che $\deg_{\mathbb{G}}(p)$ è il $\mathbb{G}$-*grado* (o *grado* δ_λ*-omogeneo*) di p. Il $\mathbb{G}$-grado del polinomio nullo è convenzionalmente posto 0. Si noti che $\deg_{\mathbb{G}}(p) \in \mathfrak{S}$, per ogni polinomio p.

Per ogni $n \in \mathfrak{S}$, fissiamo dunque la seguente definizione:

$$\mathcal{P}_n := \big\{ p \text{ polinomio su } \mathbb{R}^N \,:\, \deg_{\mathbb{G}}(p) \le n \big\}. \tag{8}$$

Ovviamente, $\mathcal{P}_n$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$. Se p è un qualunque polinomio su $\mathbb{R}^N$, può sempre essere decomposto (in modo unico) come $p = q_1 + q_2$ con $q_1 \in \mathcal{P}_n$ e $q_2 \notin \mathcal{P}_n$ nel modo seguente:

$$\text{Se } p(x) = \textstyle\sum_{\alpha \in \mathcal{A}} c_\alpha \, x^\alpha \text{ con } c_\alpha \neq 0 \text{ per ogni } \alpha \in \mathcal{A},$$

poniamo

$$q_1(x) := \sum_{\alpha \in \mathcal{A}:\ |\alpha|_{\mathbb{G}} \le n} c_\alpha \, x^\alpha, \qquad q_2 := p - q_1. \tag{9}$$

Diciamo che q_1 è la *proiezione di p su $\mathcal{P}_n$*.

§ 3. Notazioni sulle Derivate. Se X è un operatore differenziale lineare su $\mathbb{G}$, diciamo che X è *δ_λ-omogeneo di grado $\beta \in \mathbb{R}$* se

$$X(u \circ \delta_\lambda) = \lambda^\beta \, (Xu) \circ \delta_\lambda,$$

per ogni $u \in C^\infty(\mathbb{G}, \mathbb{R})$ e ogni $\lambda > 0$. Denotiamo con $\{Z_1, \dots, Z_N\}$ la *base Jacobiana* di $\mathfrak{g}$, i.e., per ogni $j \in \{1, \dots, N\}$, Z_j è l'unico campo vettoriale left-invariant su $\mathbb{G}$ tale che

$$Z_j|_0 = \partial_{x_j}|_0.$$

Per esempio, Z_j (si veda [18, page 21]) e ∂_{x_j} sono δ_λ-omogenei di grado σ_j.

Sia τ_x la traslazione a sinistra di ampiezza x su $\mathbb{G}$ (i.e., $\tau_x(y) = x * y$). Allora, se $\mathcal{J}_{\tau_x}(0)$ denota la matrice Jacobiana di τ_x nell'origine, per ogni funzione $u \in C^\infty(\mathbb{G}, \mathbb{R})$ e ogni $x \in \mathbb{G}$, si ha

$$\big(Z_1 u(x), \dots, Z_N u(x)\big) = \big(\partial_{x_1} u(x), \dots, \partial_{x_N} u(x)\big)\, \mathcal{J}_{\tau_x}(0).$$

Inoltre, denotata con $a_{i,j}(x)$ la (i,j)-esima entrata di $\mathcal{J}_{\tau_x}(0)$, gli $a_{i,j}$ sono polinomi e $a_{j,j} = 1$, $a_{i,j} \equiv 0$ per ogni $j \le N$ e ogni $i < j$. Così, prendendo in considerazione i δ_λ-gradi degli Z_h e dei ∂_{x_h}, si ha la formula

$$Z_h = \partial_{x_h} + \textstyle\sum_{j:\ \sigma_j > \sigma_h} a_{j,h}(x)\, \partial_{x_j}. \tag{10}$$

Per ogni multi-indice α, introduciamo la Z-derivata di ordine superiore, ponendo

$$Z^\alpha := Z_1^{\alpha_1} \cdots Z_N^{\alpha_N}.$$

Ovviamente, Z^α è un operatore differenziale left-invariant δ_λ-omogeneo di grado $|\alpha|_{\mathbb{G}}$.

Se $\{X_1, \dots, X_N\}$ sono campi vettoriali left-invariant, se $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, N\}$ (per qualche $k \in \mathbb{N}$) e se $I = (i_1, \dots, i_k)$, poniamo

$$X_I = X_{i_1} \cdots X_{i_k} \quad \text{e} \quad \sigma(I) = \sigma_{i_1} + \cdots + \sigma_{i_k}. \tag{11}$$

Si osservi che $\sigma_I \in \mathfrak{S}$, per ogni I come sopra. Si noti anche che se $\{Z_1, \dots, Z_N\}$ è la base Jacobiana, Z_I è un operatore differenziale left-invariant δ_λ-omogeneo di grado $\sigma(I)$. Partendo da (10), si ottiene

$$Z^\alpha = (D_x)^\alpha + \sum_{\beta:\, \beta \neq \alpha,\, |\beta| \leq |\alpha|,\, |\beta|_{\mathbb{G}} \geq |\alpha|_{\mathbb{G}}} a_{\beta,\alpha}(x)\, (D_x)^\beta, \tag{12}$$

per ogni multi-indice α, essendo gli $a_{\beta,\alpha}$ polinomi δ_λ-omogenei di grado $|\beta|_{\mathbb{G}} - |\alpha|_{\mathbb{G}}$. (Si veda [9, Proposition 20.1.5]; si veda anche [18, equation (1.28)].)

Dal teorema di Poincaré-Birkhoff-Witt, gli Z^α formano una base per l'algebra degli operatori differenziali left-invariant su $\mathbb{G}$. Inoltre, semplici argomenti di δ_λ-omogeneità provano il seguente fatto

$$\mathrm{span}\big\{Z_I \,:\, \sigma(I) = n\big\} = \mathrm{span}\big\{Z^\alpha \,:\, |\alpha|_{\mathbb{G}} = n\big\}, \tag{13}$$

per ogni fissato $n \in \mathfrak{S}$.

§ 4. Un Esempio (prototipo). Consideriamo la seguente matrice B di ordine $N \times N$, scritta a blocchi come

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ B^{(1)} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & B^{(2)} & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & B^{(r)} & 0 \end{pmatrix}, \tag{14}$$

dove $B^{(j)}$ è un blocco $p_j \times p_{j-1}$ *con rango che uguaglia* p_j, per ogni $j = 1, 2, \dots, r$. Inoltre

$$p_0 \geq p_1 \geq \cdots \geq p_r, \quad p_0 + p_1 + \cdots + p_r = N.$$

Per finire, i blocchi 0 in (14) sono opportunamente scelti in modo che B abbia dimensione $N \times N$. In $\mathbb{R}^{1+N}$, il cui punto sarà denotato da (t,x), con $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^N$, introduciamo la seguente legge di composizione

$$(t,x) * (\tau,\xi) := \big(t+\tau, \xi + \exp(\tau\, B)\, x\big). \tag{15}$$

Si verifica facilmente che $\mathbb{B} = (\mathbb{R}^{1+N}, *)$ è un gruppo di Lie il cui elemento neutro è l'origine $(0,0)$ e dove l'inverso è dato da $(t,x)^{-1} = (-t, -\exp(-t\,B)\,x)$. La matrice Jacobiana nell'origine della traslazione a sinistra $\tau_{(t,x)}$ è la seguente matrice a blocchi ($\mathbb{I}_N$ è la matrice identità $N \times N$)

$$\mathcal{J}_{\tau_{(t,x)}}(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ Bx & \mathbb{I}_N \end{pmatrix}.$$

Quindi, la base Jacobiana di $\mathfrak{b}$, l'algebra di Lie di $\mathbb{B}$, è data da

$$Y = \partial_t + \textstyle\sum_{j=1}^N (Bx)_j\, \partial_{x_j}, \quad \partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_N}. \tag{16}$$

Si può provare che (si veda [9, Section 4.1.4]) $(\mathbb{B}, *)$ è un gruppo *stratificato* (nel senso di [17]) con la seguente *stratificazione*

$$\mathfrak{b} = \underbrace{\mathrm{span}\{Y, \partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_{p_0}}\}}_{=:V_1} \oplus \underbrace{[V_1, V_1]}_{=:V_2} \oplus \underbrace{[V_1, V_2]}_{=:V_3} \oplus \dots \oplus \underbrace{[V_1, V_r]}_{=:V_{r+1}}.$$

Infatti si noti che $[V_i, V_j] = V_{i+j}$ per ogni $i,j = 1, \dots, r+1$ (posto $V_i := \{0\}$ per $i > r+1$). Di conseguenza, un naturale gruppo di dilatazioni su $\mathbb{B}$ *potrebbe essere* il seguente ('str' sta per 'stratificato'):

$$\delta_\lambda^{\mathrm{str}}(t, x^{(0)}, x^{(1)}, \dots, x^{(r)}) = (\lambda t, \lambda x^{(0)}, \lambda^2 x^{(1)}, \dots, \lambda^{r+1} x^{(r)}).$$

Qui abbiamo usato la seguente notazione: abbiamo diviso $\mathbb{R}^N$ come segue

$$\mathbb{R}^N = \mathbb{R}^{p_0} \times \mathbb{R}^{p_1} \times \dots \times \mathbb{R}^{p_r},$$

ed abbiamo denotato il punto di $\mathbb{R}^{p_i}$ con $x^{(i)}$, per ogni $0 \le i \le r$, ed il punto di $\mathbb{R}^N$ con la notazione $(x^{(0)}, x^{(1)}, \dots, x^{(r)})$.

Si può vedere che $\{\delta_\lambda^{\mathrm{str}}\}_{\lambda>0}$ è una famiglia di automorfismi di $(\mathbb{B}, *)$ e che

$$Y \text{ e } \partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_{p_0}}$$

sono $\delta_\lambda^{\rm str}$-omogenei di grado 1. Tuttavia, supponiamo di essere interessati a considerare e.g., operatori ultraparabolici come

$$L = \textstyle\sum_{j=1}^{p_0} (\partial_{x_j})^2 + Y \tag{17}$$

(si veda e.g., Lanconelli e Kogoj, [25] o Lanconelli e Polidoro, [26]): in questo caso, *L manca di buone proprietà di* δ_λ^{str}*-omogeneità*. Fortunatamente, L è invece anche δ_λ-omogeneo di grado 2, se consideriamo la seguente δ_λ:

$$\delta_\lambda(x^{(0)}, t, x^{(1)}, \dots, x^{(r)}) = (\lambda x^{(0)}, \lambda^2 t, \lambda^3 x^{(1)}, \dots, \lambda^{2r+1} x^{(r)}).$$

(Qui abbiamo parzialmente cambiato notazione del punto di $\mathbb{R}^{1+N}$ al fine di avere gli esponenti della dilatazione ordinati in modo crescente come d'uso.) Il fatto notevole è che *anche* $\{\delta_\lambda\}_\lambda$ *è una famiglia di automorfisi di* $(\mathbb{B}, *)$ (si veda [26]) e ora Y è δ_λ-omogeneo di grado 2 e $\partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_{p_0}}$ sono δ_λ-omogenei di grado 1, cosicché L in (17) è δ_λ-omogeneo di grado 2.

Quando si considera la struttura omogenea indotta da δ_λ, è più conveniente pensare all'algebra $\mathfrak{b}$ di $\mathbb{B}$ come algebra *graduata* (piuttosto che stratificata), i.e., $\mathfrak{b}$ è equipaggiata dalla decomposizione

$$\mathfrak{b} = \underbrace{\mathrm{span}\{\partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_{p_0}}\}}_{=:W_1} \oplus \underbrace{\mathrm{span}\{Y\}}_{=:W_2} \oplus \underbrace{[W_1, W_2]}_{=:W_3} \oplus \cdots \oplus \underbrace{[W_1, W_r]}_{=:W_{r+1}},$$

la quale è una *graduazione*, i.e., $[W_i, W_j] \subseteq W_{i+j}$ per ogni $i, j = 1, \dots, r+1$ (posto $W_i := \{0\}$ per $i > r+1$). Si noti che $[W_1, W_1] = \{0\} \subsetneq W_2$.

Come conseguenza, $\mathbb{K} := (\mathbb{R}^{1+N}, *, \delta_\lambda)$ (anche chiamato un *gruppo di tipo Kolmogorov*, si veda [9, Section 4.1.4]) è un gruppo omogeneo su $\mathbb{R}^{1+N}$ nel senso della Definizione 1.1 e tutti i risultati di questa nota si applicano a $\mathbb{K}$ (in particolare Proposizione 5.1 può essere applicata all'operatore ultraparabolico L in (17)).

I gruppi di tipo Kolmogorov sono stati introdotti da Lanconelli e Polidoro [26] per lo studio di una classe di operatori ipoellittici ultraparabolici comprendenti i classici operatori di Kolmogorov-Fokker-Planck. La legge di composizione in [26] (che coincide con $*$ in (15)) fu suggerita dalla struttura della soluzione fondamentale dell'operatore $\partial_{x_1}^2 + x_1\,\partial_{x_2} - \partial_{x_3}$ in $\mathbb{R}^3$ fornita da Kolmogorov in [24].

3. La Formula di Taylor per i Gruppi Omogenei: Resto di Peano

Enunciamo di seguito l'esistenza e unicità del polinomio di Taylor $P_n(f, x_0)$ (si veda la Definizione 1.1). Gli unici ingredienti per la prova sono la usuale formula di Taylor (Euclidea) con resto di Peano (ad alcuni argomenti di δ_λ-omogeneità). La forma esplicita di $P_n(f, x_0)$ è postposta alla Sezione 4. Inoltre, osserviamo che $P_n(f, x_0)$ in Definizione 1.1 è lo stesso che il "left-polinomio di Taylor" di Folland e Stein, [18, page 26]. La seguente osservazione mostra l'unicità del polinomio di Taylor secondo la Definizione 1.1.

Osservazione 3.1. Sia $\mathbb{G} = (\mathbb{R}^N, *, \delta_\lambda)$ un gruppo di Lie omogeneo. Siano $x_0 \in \mathbb{G}$, $n \in \mathfrak{S}$ e sia f una funzione a valori reali sull'aperto $\Omega \subseteq \mathbb{G}$. Allora, esiste al più una funzione polinomiale P, con δ_λ-grado $\leq n$, tale che, per qualche $\varepsilon > 0$ (dipendente da P e n) si abbia

$$f(x) = P(x) + \mathcal{O}_{x \to x_0}\big(\varrho^{n+\varepsilon}(x_0^{-1} * x)\big), \tag{18}$$

essendo ϱ una qualche norma δ_λ-omogenea su $\mathbb{G}$. Il polinomio P è indipendente da ε e dalla norma δ_λ-omogenea ϱ.

Lemma 3.1. *Sia $n \in \mathfrak{S}$ e sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ un intorno aperto di 0. Supponiamo che $f \in C^{[n]+1}(\Omega, \mathbb{R})$ sia tale che*

$$f(x) = \mathcal{O}_{x \to 0}(|x|^{[n]+1}),$$

dove $|\cdot|$ è la norma Euclidea su $\mathbb{R}^N$. Sia anche $\{Z_1, \ldots, Z_N\}$ la base Jacobiana di un gruppo omogeneo $\mathbb{G}$ su $\mathbb{R}^N$. Allora $Z^\alpha f(0) = 0$, per ogni multi-indice α con $|\alpha|_{\mathbb{G}} \leq n$.

Possiamo ora enunciare il seguente risultato, che prova l'esistenza dei polinomi di Taylor come conseguenza elementare della classica formula di Taylor con resto di Peano. (Si veda anche Manfredi [28], per simili argomenti usati per ottenere una formula di Taylor di ordine due nei gruppi di Carnot.)

Proposizione 3.1. *Siano $n \in \mathfrak{S}$ e $f \in C^{[n]+1}(\Omega, \mathbb{R})$, essendo $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ un intorno aperto dell'origine.*

Allora la proiezione P_n su $\mathcal{P}_n$ dell'usuale polinomio di Maclaurin relativo a f di grado (ordinario) $[n]$ è il polinomio di Maclaurin $P_n(f,0)$ di δ_λ-grado n relativo a f. Inoltre, (3) vale con $\varepsilon = [n] + 1 - n$ (> 0).

Per finire, P_n ha la seguente proprietà:

$$Z^\alpha P_n(0) = Z^\alpha f(0), \quad \textit{ogniqualvolta } |\alpha|_{\mathbb{G}} \le n. \tag{19}$$

Dimostrazione. Si usano la classica formula di Maclaurin per f, la definizione di $\mathcal{P}_n$, argomenti sui δ_λ-gradi, il Lemma 3.1 il fatto che $|x| \le \varrho(x)$ vicino 0. □ □

Dalla left-invariance degli Z_i e la definizione (4) di $P_n(f, x_0)$, si ha

$$Z^\alpha(P_n(f,x_0))(x_0) = Z^\alpha f(x_0), \quad \text{ogniqualvolta } |\alpha|_{\mathbb{G}} \le n.$$

Quindi $P_n(f, x_0)$ è il "left-polinomio di Taylor di f in x_0 di grado omogeneo n", secondo Folland e Stein (si veda [18, page 26]).

Osservazione 3.2. *$P_n(f, x_0)$ è caratterizzato dall'essere l'unico polinomio P di δ_λ-grado $\le n$ tale che* (18) *vale per qualche $\varepsilon = \varepsilon(P, n, x_0, f) > 0$ e per qualche norma δ_λ-omogenea ϱ.*

Osservazione 3.3. *L'espressione esplicita di $P_n(f,0)$ in termine delle derivate Euclidee (si veda la Proposizione 3.1) è*

$$P_n(f,0)(x) = \sum_{|\alpha|_{\mathbb{G}} \le n} \frac{D^\alpha f(0)}{\alpha!}\, x^\alpha. \tag{20}$$

L'equazione (20), apparentemente di uso modesto siccome non coinvolge esplicitamente i campi vettoriali Z_i, sarà invece usata in modo cruciale nella Sezione 5, § 3. La formula esplicita per $P_n(f,0)$ in funzione degli Z_i (di certo più intrinseca) è contenuta nella seguente sezione (si veda (34)).

4. La Formula di Taylor per i Gruppi Omogenei: Resto Integrale

Questa sezione contiene l'enunciato della disuguaglianza di Taylor (Teorema 4.2) e una espressione esplicita (34) dei polinomi di Taylor. Questi risultati deriveranno da una formula di Taylor con resto integrale, semplice conseguenza dello stesso tipo di formula nel caso Euclideo di $\mathbb{R}^1$! *Per brevità, consideriamo solo funzioni definite su tutto* $\mathbb{G}$. Le versioni localizzate dei risultati a seguire sono ottenibili con piccole modifiche.

È ben noto che, dato $X \in \mathfrak{g}$, se $\gamma(t)$ è una curva integrale di X (i.e., $\dot{\gamma}(t) = X(\gamma(t))$ per ogni $t \in \mathbb{R}$) allora, se $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ e $u \in C^{n+1}(\mathbb{G}, \mathbb{R})$, si ha

$$u(\gamma(t)) = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} (X^k u)(\gamma(0)) + \frac{1}{n!} \int_0^t (t-s)^n \big(X^{n+1} u\big)(\gamma(s))\, \mathrm{d}s. \tag{21}$$

Ne segue il

Lemma 4.1. *Sia $\mathbb{G} = (\mathbb{R}^N, *, \delta_\lambda)$ un gruppo di Lie omogeneo su $\mathbb{R}^N$. Siano $x, h \in \mathbb{G}$. Supponiamo che $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ e $u \in C^{n+1}(\mathbb{G}, \mathbb{R})$. Allora, si ha*

$$\begin{aligned} u(x * h) = &\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \big((\operatorname{Log} h)^k u\big)(x) + \\ &+ \frac{1}{n!} \int_0^1 (1-s)^n \big((\operatorname{Log} h)^{n+1} u\big)\big(x * \operatorname{Exp}(s \operatorname{Log} h)\big)\, \mathrm{d}s. \end{aligned} \tag{22}$$

Un restatement del lemma di cui sopra fornisce il corollario di cui sotto.

Corollario 4.1. *Siano verificate le ipotesi del Lemma 4.1. Sia $\{X_1, \dots, X_N\}$ una qualunque base dell'algebra di Lie di $\mathbb{G}$. Allora (si veda anche la notazione in* (11)*),*

$$\begin{aligned} u(x * h) = u(x) + \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{I=(i_1,\dots,i_k) \\ i_1,\dots,i_k \leqslant N}} \frac{X_I u(x)}{k!}\, \zeta_{i_1}(h) \cdots \zeta_{i_k}(h) + \\ + \sum_{\substack{I=(i_1,\dots,i_{n+1}) \\ i_1,\dots,i_{n+1} \leqslant N}} \zeta_{i_1}(h) \cdots \zeta_{i_{n+1}}(h) \int_0^1 (X_I u)\Big(x * \operatorname{Exp}\Big(\sum_{i \le N} s\, \zeta_i(h)\, X_i\Big)\Big)\, \tfrac{(1-s)^n}{n!}\, \mathrm{d}s. \end{aligned} \tag{23}$$

Qui, abbiamo usato la seguente notazione:

$$\operatorname{Log} h = \zeta_1(h)\, X_1 + \dots + \zeta_N(h)\, X_N, \quad \forall\ h \in \mathbb{G}. \tag{24}$$

Possiamo definire su $\mathfrak{g}$ un *gruppo di dilatazioni*, denotato con $\{\Delta_\lambda\}_{\lambda>0}$ nel seguente modo: Se $\{Z_1, \dots, Z_N\}$ è la base Jacobiana per $\mathfrak{g}$, allora Δ_λ è l'unica mappa lineare su $\mathfrak{g}$ tale che

$$\Delta_\lambda(Z_i) = \lambda^{\sigma_i} Z_i \quad \text{per ogni } i = 1, \dots, N. \tag{25}$$

Semplici argomenti di ODE's provano che, per ogni $x \in \mathbb{G}$ e ogni $X \in \mathfrak{g}$, si ha (si veda e.g., [9, Theorem 1.3.28])

$$\Delta_\lambda\big(\mathrm{Log}\,(x)\big) = \mathrm{Log}\,\big(\delta_\lambda(x)\big), \quad \delta_\lambda\big(\mathrm{Exp}\,(X)\big) = \mathrm{Exp}\,\big(\Delta_\lambda(X)\big). \tag{26}$$

Nella prova del Teorema 4.1 a seguire, avremo bisogno del seguente lemma.

Lemma 4.2. *Sia ϱ una qualunque norma δ_λ-omogenea su $\mathbb{G}$. Allora, esiste una costante $\mathbf{c}_0 = \mathbf{c}_0(\varrho, \mathbb{G}) > 0$ tale che per ogni $x \in \mathbb{G}$ e $s \in [0,1]$, si ha*

$$\varrho\big(\mathrm{Exp}\,(s\,\mathrm{Log}\,(x))\big) \le \mathbf{c}_0\,\varrho(x), \quad \textit{per ogni } x \in \mathbb{G}, \textit{ e ogni } s \in [0,1]. \tag{27}$$

Si ha il seguente risultato, una "disuguaglianza di Maclaurin" con resto integrale su gruppi omogenei.

Teorema 4.1. *Sia $\mathbb{G} = (\mathbb{R}^N, *, \delta_\lambda)$ un gruppo di Lie omogeneo su $\mathbb{R}^N$. Sia inoltre $\{Z_1, \dots, Z_N\}$ la base Jacobiana per $\mathfrak{g}$. Infine, supponiamo che $n \in \mathfrak{S}$ e $u \in C^{[n]+1}(\mathbb{G}, \mathbb{R})$. Allora, seguendo le notazioni in* (24) *(con gli X_i rimpiazzati dagli Z_i) e in* (11)*, si ha*

$$u(x) = u(0) + \sum_{k=1}^{[n]} \sum_{\substack{i_1,\dots,i_k \leqslant N \\ I=(i_1,\dots,i_k),\ \sigma(I)\leqslant n}} \frac{Z_I u(0)}{k!}\,\zeta_{i_1}(x)\cdots\zeta_{i_k}(x) + R_n(x), \tag{28}$$

dove, posto $u = q_n + R_n$, q_n coincide con il polinomio di Maclaurin $P_n(u,0)$ di δ_λ-grado n relativo a u e

$$\begin{aligned} R_n(x) = {} & \sum_{k=1}^{[n]} \sum_{\substack{i_1,\dots,i_k \leqslant N \\ I=(i_1,\dots,i_k),\ \sigma(I)> n}} \frac{Z_I u(0)}{k!}\,\zeta_{i_1}(x)\cdots\zeta_{i_k}(x) + \\ & + \sum_{\substack{i_1,\dots,i_{[n]+1} \leqslant N \\ I=(i_1,\dots,i_{[n]+1})}} \zeta_{i_1}(x)\cdots\zeta_{i_{[n]+1}}(x) \int_0^1 (Z_I u)\Big(\mathrm{Exp}\,\Big(\sum_{i\leqslant N} s\,\zeta_i(x)\,Z_i\Big)\Big)\,\tfrac{(1-s)^{[n]}}{[n]!}\,\mathrm{d}s. \end{aligned} \tag{29}$$

Inoltre, fissata una qualunque norma δ_λ-omogenea ϱ, esiste una costante $\mathbf{c} > 0$ (dipendente da $\mathbb{G}$ e ϱ) tale che per ogni $n \in \mathfrak{S}$

$$|R_n(x)| \le \sum_{k=1}^{[n]+1} \frac{\mathbf{c}^k}{k!} \sum_{\substack{i_1,\dots,i_k \leqslant N, \\ I=(i_1,\dots,i_k),\ \sigma(I)> n}} \varrho(x)^{\sigma(I)} \sup_{\varrho(z)\le \mathbf{c}\,\varrho(x)} |Z_I u(z)|. \tag{30}$$

Dimostrazione. Si usano i seguenti ingredienti, in modo opportuno: (23); Lemma 4.2; l'Osservazione 3.1; il fatto che esiste $\mathbf{c}_1 = \mathbf{c}_1(\varrho, \mathbb{G}) > 0$ tale che

$$\mathbf{c}_1^{-1}\, \varrho^{\sigma_i}(x) \leq |\zeta_i(x)| \leq \mathbf{c}_1\, \varrho^{\sigma_i}(x) \quad \forall\, x \in \mathbb{G},\ i = 1, \dots, N.$$

La scelta

$$\varepsilon := \min_{k=1,\dots,[n]+1} \Big\{ \sigma(I) - n \,:\, I = (i_1, \dots, i_k),\ i_1, \dots, i_k \leq N,\ \sigma(I) > n \Big\} \tag{31}$$

è quella giusta per soddisfare la Definizione 1.2. □ □

Osservazione 4.1. Per esempio, se i σ_i relativi alla dilatazione δ_λ sono tutti interi positivi (come per i gruppi di Carnot o il gruppo di tipo Kolmogorov nella Sezione 2), allora, ogniqualvolta un multi-indice I soddisfa $\sigma(I) > n$, soddisfa anche $\sigma(I) \geq n + 1$ per ogni $n \in \mathfrak{S}$. Ciò segue dal fatto che $n, \sigma(I) \in \mathfrak{S}$ e, in questo caso, $\mathfrak{S} = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Come conseguenza, se ε è come in (31), allora $\varepsilon = 1$ e la disuguaglianza di Taylor in (30) diventa

$$|R_n(x)| \leq \sum_{k=1}^{n+1} \frac{\mathbf{c}^k}{k!} \sum_{\substack{i_1,\dots,i_k \leqslant N, \\ I=(i_1,\dots,i_k),\ \sigma(I) \geqslant n+1}} \varrho(x)^{\sigma(I)} \sup_{\varrho(z) \leq \mathbf{c}\, \varrho(x)} |Z_I u(z)|.$$

Se $x_0 \in \mathbb{G}$ è un qualunque punto, sostituendo u e x nel Teorema 4.1 con $u \circ \tau_{x_0}$ e $x_0^{-1} * x$ (e ricordando (4)), si ottiene il seguente:

Teorema 4.2 (Disuguaglianza di Taylor)**.** *Siano verificate le ipotesi del Teorema 4.1. Sia anche $x_0 \in \mathbb{G}$ fissato. Allora, per ogni $x \in \mathbb{G}$ si ha*

$$u(x) = P_n(u, x_0)(x) + R_n(x, x_0) = \tag{32}$$

$$u(x_0) + \sum_{k=1}^{[n]} \sum_{\substack{i_1,\dots,i_k \leqslant N \\ I=(i_1,\dots,i_k),\ \sigma(I) \leqslant n}} \frac{Z_I u(x_0)}{k!} \zeta_{i_1}(x_0^{-1} * x) \cdots \zeta_{i_k}(x_0^{-1} * x) + R_n(x, x_0),$$

dove il termine di resto $R_n(x,x_0)$ è dato da

$$R_n(x,x_0)=\sum_{k=1}^{[n]}\sum_{\substack{i_1,\dots,i_k\leqslant N\\ I=(i_1,\dots,i_k),\ \sigma(I)>n}}\frac{Z_Iu(x_0)}{k!}\,\zeta_{i_1}(x_0^{-1}*x)\cdots\zeta_{i_k}(x_0^{-1}*x)+$$
$$+\sum_{\substack{i_1,\dots,i_{[n]+1}\leqslant N\\ I=(i_1,\dots,i_{[n]+1})}}\zeta_{i_1}(x_0^{-1}*x)\cdots\zeta_{i_{[n]+1}}(x_0^{-1}*x)\times$$
$$\times\int_0^1(Z_Iu)\Big(x_0*\mathrm{Exp}\Big(\sum_{i\leq N}s\,\zeta_i(x_0^{-1}*x)\,Z_i\Big)\Big)\,\tfrac{(1-s)^{[n]}}{[n]!}\,\mathrm{d}s.$$

Inoltre, per ogni fissata norma omogenea ϱ su $\mathbb{G}$, esiste $\mathbf{c}>0$ *(dipendente da $\mathbb{G}$ e ϱ) tale che, per ogni $n\in\mathfrak{S}$,*

$$|R_n(x,x_0)|\leq \tag{33}$$
$$\sum_{k=1}^{[n]+1}\frac{\mathbf{c}^k}{k!}\sum_{\substack{i_1,\dots,i_k\leqslant N,\\ I=(i_1,\dots,i_k),\ \sigma(I)>n}}\varrho(x_0^{-1}*x)^{\sigma(I)}\sup_{\varrho(z)\leq\mathbf{c}\,\varrho(x_0^{-1}*x)}|Z_Iu(x_0*z)|.$$

Per finire, una formula esplicita per il polinomio di Taylor $P_n(u,x_0)$ di δ_λ-grado $n\in\mathfrak{S}$ relativo a u e il punto x_0 è

$$P_n(u,x_0)(x)= \tag{34}$$
$$u(x_0)+\sum_{k=1}^{[n]}\sum_{\substack{i_1,\dots,i_k\leqslant N\\ I=(i_1,\dots,i_k),\ \sigma(I)\leqslant n}}\frac{Z_Iu(x_0)}{k!}\,\zeta_{i_1}(x_0^{-1}*x)\cdots\zeta_{i_k}(x_0^{-1}*x).$$

Osservazione 4.2. Commenti simili a quelli nell'Osservazione 4.1 valgono anche per la disuguaglianza di Taylor. Quindi, (33) può essere migliorata appropriatamente (sostituendo $[n]$ con n e "$\sigma(I)>n$" con "$\sigma(I)\geq n+1$").

Osserviamo che la stima (33) migliora l'analoga formula in [18, Theorem 1.37]: infatti la costante cha appare nell'analogo estremo superiore in [18] è della forma β^{n+1} (per una costante strutturale β) mentre la nostra è $\mathbf{c}$, indipendente da n; inoltre, l'analogo del nostro "$\mathbf{c}^k/k!$" appare in [18] sotto forma del più generico "C_n". Proprio la presenza di $\mathbf{c}^k/k!$ nella nostra somma su k può essere usata per provare risultati di analiticità per funzioni u le cui derivate di ordine superiore $Z_I u$ soddisfano una opportuna stima di crescita, come mostriamo nella Sezione 5, § 3.

5. Applicazioni

Forniamo ora alcune applicazioni della formula di Taylor e della disuguaglianza di Taylor della sezione precedente. L'applicazione in § 3 di cui sotto (la cui prova sembra essere piuttosto delicata) è uno dei risultati principali di [7].

Per cominciare forniamo la formula di Taylor *orizzontale* con resto integrale, quando $\mathbb{G}$ è un gruppo omogeneo stratificato. Quindi esibiamo una espressione esplicita dei polinomi di Taylor, quando $\mathbb{G}$ è un gruppo di Lie omogeneo di *passo due*. Come terza applicazione, dimostriamo una condizione sufficiente per l'analiticità reale di una funzione u, questa condizione solo dipendendo da una opportuna crescita delle derivate $Z_I u$. Per finire, dimostriamo un risultato concernente la "L-armonicità" dei polinomi di Taylor di una funzione "L-armonica".

§ 1. Formula di Taylor Orizzontale. Quando $\mathbb{G}$ è un gruppo stratificato, il primo strato della relativa stratificazione è detto 'orizzontale'. Scegliendo "l'incremento" h nel Corollario 4.1 in modo tale che $\operatorname{Log}(h)$ è orizzontale, si ottiene la seguente *formula di Taylor orizzontale.* Osserviamo esplicitamente che in questo caso si ha $\mathfrak{S} = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Corollario 5.1. *Sia $\mathbb{G} = (\mathbb{R}^N, *, \delta_\lambda)$ un gruppo omogeneo stratificato. Sia $x \in \mathbb{G}$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ e supponiamo che $u \in C^{n+1}(\mathbb{G}, \mathbb{R})$. Sia anche $\{X_1, \ldots, X_m\}$ una qualunque base del primo strato della stratificazione dell'algebra di Lie di $\mathbb{G}$.*

Allora, per ogni $\xi_1, \ldots, \xi_m \in \mathbb{R}$, si ha

$$u\big(x * \operatorname{Exp}\big(\sum_{j\le m} \xi_j X_j\big)\big) = u(x) + \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{I=(i_1,\ldots,i_k)\\ i_1,\ldots,i_k \leqslant m}} \frac{X_I u(x)}{k!}\, \xi_{i_1} \cdots \xi_{i_k} +$$

$$+ \sum_{\substack{I=(i_1,\ldots,i_{n+1})\\ i_1,\ldots,i_{n+1} \leqslant m}} \xi_{i_1} \cdots \xi_{i_{n+1}} \int_0^1 (X_I u)\big(x * \delta_s\big(\operatorname{Exp}\big(\sum_{j\le m} \xi_j X_j\big)\big)\big)\, \tfrac{(1-s)^n}{n!}\, \mathrm{d}s.$$

Per esempio, se prendiamo $n = 1$ nel corollario di cui sopra, si ottiene la *formula di Taylor orizzontale con resto integrale di ordine due*

$$
\begin{aligned}
(35)\qquad & u\big(x * \mathrm{Exp}\,(\xi \cdot X)\big) = u(x) + (\xi \cdot X)u(x) + \\
& + \int_0^1 \Big\langle \mathrm{Hess}_{\mathrm{sym}} u\big(x * \delta_s\big(\mathrm{Exp}\,(\xi \cdot X)\big)\big)\, \xi, \xi \Big\rangle\, (1-s)\, \mathrm{d}s,
\end{aligned}
$$

dove si è posto $\xi \cdot X = \sum_{j=1}^m \xi_j X_j$ e

$$
\mathrm{Hess}_{\mathrm{sym}} u = \Big(\frac{X_h X_k u + X_k X_h u}{2}\Big)_{h,k=1,\dots,m}
$$

la cosiddetta matrice *Hessiana simmetrizzata* di u. Per una applicazione di (35) alla convessità sui gruppi di Carnot, si veda e.g., [27, Proposition 4.1]. Per una applicazione della formula di Taylor orizzontale di ordine uno e due nel contesto del gruppo di Heisenberg, si veda anche [6], [29].

§ 2. Polinomi di Taylor per i gruppi di passo 2. Sia $\mathbb{G} = (\mathbb{R}^N, *, \delta_\lambda)$ un gruppo di Lie omogeneo nilpotente di passo due. Allora, si vede facilmente che $\mathbb{G}$ è anche stratificato. In questo case, la legge di composizione $*$ ha una forma assai trasparente (si veda e.g., [9, Chapter 3]).

Infatti, a meno di isomorfismo canonico è non restrittivo supporre che $\mathbb{G} = (\mathbb{R}^N, *, \delta_\lambda)$, dove: $N = m + h$, il punto di $\mathbb{R}^N$ è denotato con (x, t), essendo $x \in \mathbb{R}^m$, $t \in \mathbb{R}^h$, la dilatazione δ_λ è data da $\delta_\lambda(x, t) = (\lambda x, \lambda^2 t)$ e, infine, la legge di composizione $*$ è (qui $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota l'usuale prodotto scalare in $\mathbb{R}^m$)

$$
(x,t) * (\xi, \tau) = \Big(x + \xi,\ t_1 + \tau_1 + \tfrac{1}{2}\,\langle B^{(1)} x, \xi \rangle, \dots, t_h + \tau_h + \tfrac{1}{2}\,\langle B^{(h)} x, \xi \rangle\Big),
$$

per h matrici $B^{(1)}, \dots, B^{(h)}$ di ordine $m \times m$ (*che dipendono solo dalle relazioni commutatoriali nell'algebra di* $\mathbb{G}$) le cui parti antisimmetriche $\frac{1}{2}(B^{(k)} - (B^{(k)})^T)$ $(k = 1, \dots, h)$ sono linearmente indipendenti. La base Jacobiana è data da

$$
\begin{aligned}
& X_i = \partial/\partial x_i + \tfrac{1}{2} \textstyle\sum_{k=1}^h \big(\sum_{j=1}^m B^{(k)}_{i,j}\, x_j \big)\, \partial/\partial t_k \qquad (i = 1, \dots, m), \\
& T_k = \partial/\partial t_k \qquad (k = 1, \dots, h).
\end{aligned}
$$

Inoltre, le mappe Exp e Log sono rispettivamente

$$\operatorname{Exp}(\xi\cdot X+\tau\cdot T)=\Big(\xi,\tau_1+\tfrac14\langle\xi,B^{(1)}\xi\rangle,\cdots,\tau_h+\tfrac14\langle\xi,B^{(h)}\xi\rangle\Big),$$
$$\operatorname{Log}(x,t)=x\cdot X+\Big(t_1-\tfrac14\langle x,B^{(1)}x\rangle,\dots,t_h-\tfrac14\langle x,B^{(h)}x\rangle\Big)\cdot T.$$

Qui si è posto $\xi\cdot X=\sum_{i=1}^m\xi_iX_i$ e $\tau\cdot T=\sum_{k=1}^h\tau_kT_k$.

Quindi, confrontando con (34), il polinomio di Taylor di δ_λ-grado n di una funzione C^∞ u in (x^0,t^0) è

$$P_n\big(u,(x^0,t^0)\big)(x,t)=u(x^0,t^0)+\sum_{r+s=1}^n\frac{1}{(r+s)!}\times$$
$$\times\sum_{\substack{i_1,\dots,i_r\leqslant m\ j_1,\dots,j_s\leqslant h\\ r+2s\leqslant n}}X_{i_1}\cdots X_{i_r}\,T_{j_1}\cdots T_{j_s}u(x^0,t^0)\ (x_{i_1}-x^0_{i_1})\cdots(x_{i_r}-x^0_{i_r})$$
$$\times\Big(t_{j_1}-t^0_{j_1}-\tfrac14\langle B^{(j_1)}(x+x^0),x-x^0\rangle\Big)\cdots\Big(t_{j_s}-t^0_{j_s}-\tfrac14\langle B^{(j_s)}(x+x^0),x-x^0\rangle\Big).$$

Qui si usa il fatto che i T_j appartengono al centro dell'algebra di $\mathbb{G}$.

§ 3. Un risultato di analiticità reale. Come ulteriore applicazione della nostra disuguaglianza di Taylor nel Teorema 4.2, dimostriamo il seguente risultato di analiticità reale. A differenza del classico caso Euclideo, la prova per i gruppi omogenei è non immediata.

Teorema 5.1. *Sia $\mathbb{G}=(\mathbb{R}^N,*,\delta_\lambda)$ un gruppo omogeneo su $\mathbb{R}^N$. Sia u di classe C^∞ su $\mathbb{G}$. Supponiamo che per ogni $x_0\in\mathbb{G}$ esistano r, $M>0$ tali che*

$$\sup_{\varrho(x_0^{-1}*z)<r}|Z_Iu(z)|\le M^{\sigma(I)}\,k!\quad\forall\,I=(i_1,\dots,i_k),\ \forall\,k\in\mathbb{N},\tag{36}$$

essendo ϱ una fissata norma omogenea su $\mathbb{G}$. Allora u è analitica reale su $\mathbb{G}$. (Qui, come d'uso, $(i_1,\dots,i_k)$ è una k-upla con entrate in $\{1,\dots,N\}$.)

§ 4. "L-armonicità" dei polinomi di Taylor. Come ultima applicazione della formula di Taylor, forniamo un risultato concernente la "L-armonicità" dei polinomi di Taylor di una funzione "L-armonica". Dapprima, fissiamo il tipo di operatori differenziali L (possibilmente di ordine superiore) di cui ci vogliamo occupare.

Sia $\mathbb{G} = (\mathbb{R}^N, *, \delta_\lambda)$ un gruppo omogeneo su $\mathbb{R}^N$. Sia L un operatore differenziale su $\mathbb{G}$ *left-invariant* rispetto a $*$ e *omogeneo di grado* $s > 0$ rispetto a δ_λ.

Per il teorema di Poincaré-Birkhoff-Witt (e semplici argomenti di δ_λ-omogeneità), questo è equivalente a dire che, se $Z_1, \dots, Z_N$ denota la base Jacobiana del gruppo omogeneo $\mathbb{G}$, allora

$$L = \sum_k \sum_{\substack{i_1,\dots,i_k \le N \\ I=(i_1,\dots,i_k),\ \sigma(I)=s}} c_I\, Z_I. \tag{37}$$

Qui, la somma sull'indice (intero e non negativo) k è finita, i c_I sono dati scalari e il numero reale $s > 0$ è fissato.

Cominciamo con un semplice lemma.

Lemma 5.1. *Siano fissate le notazioni di cui sopra. Sia* $u \in C^\infty(\mathbb{G}, \mathbb{R})$.

Allora, se $n \in \mathfrak{S}$, *si ha*

$$L(P_n(u,0)) = \begin{cases} P_{n-s}(Lu, 0) & \textit{per ogni } n \ge s, \\ 0 & \textit{per ogni } n < s. \end{cases} \tag{38}$$

Dimostrazione. Sia $n \in \mathfrak{S}$. Osserviamo dapprima che $L(P_n(u,0)) \equiv 0$ per ogni $n < s$, grazie al seguente fatto: Siccome $P_n(u,0)$ è un polinomio di δ_λ-grado $\le n$ e L è un operatore differenziale δ_λ-omogeneo di grado s, allora $L(P_n(u,0))$ è una somma di funzioni δ_λ-omogenee di gradi $\le n - s < 0$. Siccome $L(P_n(u,0))$ è anche C^∞, questo è possibile solo se è identicamente nullo.

Dal Teorema 4.1, si ha

$$u(x) = P_n(u,0)(x) + R_n(x)$$

(con resto $R_n(x) = \mathcal{O}_{x\to 0}(\varrho^{n+\varepsilon}(x))$, e $\varepsilon > 0$ come in (31)), cosicché (essendo L lineare)

$$Lu(x) = L(P_n(u,0))(x) + LR_n(x). \tag{39}$$

Basta quindi dimostrare che, per ogni fissato $n \in \mathfrak{S}$ con $n \ge s$, si ha ($\varepsilon > 0$ come sopra)

$$LR_n(x) = \mathcal{O}_{x\to 0}(\varrho^{n-s+\varepsilon}(x)). \tag{40}$$

Dal risultato di unicità nell'Osservazione 3.1, (39) prova (38). La prova di (40) segue senza difficoltà dalla forma *esplicita* di R_n data in (29). □ □

Per il seguente risultato, fissiamo una definizione: Diciamo che una funzione $u \in C^\infty(\mathbb{G}, \mathbb{R})$ è *L-armonica su $\mathbb{G}$* se

$$Lu(x) = 0 \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{G}. \tag{41}$$

Proposizione 5.1. *Sia $\mathbb{G} = (\mathbb{R}^N, *, \delta_\lambda)$ un gruppo omogeneo su $\mathbb{R}^N$ e sia L l'operatore differenziale in (37). Supponiamo che u sia una funzione L-armonica su $\mathbb{G}$, nel senso di (41).*

Allora, per ogni $n \in \mathfrak{S}$ e ogni $x_0 \in \mathbb{G}$, la funzione $x \mapsto P_n(u, x_0)(x)$ (il polinomio di Taylor di δ_λ-grado n di u in x_0) è L-armonica su $\mathbb{G}$.

Dimostrazione. Basta provare l'asserto per $x_0 = 0$ (per la left-invariance di L).

Dal Lemma 5.1 sappiamo che, per ogni $n \in \mathfrak{S}$ con $n \geq s$,

$$L(P_n(u, 0)) = P_{n-s}(Lu, 0) = P_{n-s}(0, 0) = 0$$

(la seconda uguaglianza seguendo dalla L-armonicità di u e l'ultima essendo ovvia conseguenza dell'unicità del polinomio di Taylor).

Siccome $L(P_n(u, 0)) = 0$ anche per gli n in $\mathfrak{S}$ con $0 \leq n < s$ (ancora grazie a (38) nel Lemma 5.1), la prova è completa. □ □

Riferimenti bibliografici

[1] Alessandrini, G., Vessella, S.: *Local behavior of solutions to parabolic equations*, Comm. Partial Differential Equations, **13** (1988), no. 9, 1041–1058.

[2] Ambrosio, L., Magnani, V.: *Weak differentiability of BV functions on stratified groups*, Math. Z., **245** (2003), 123–153.

[3] Arena, G., Caruso, A., Causa, A.: *Taylor formula for Carnot groups and applications.* Matematiche (Catania) **60**, 375–383 (2005)

[4] Arena, G., Caruso, A., Causa, A.: *Taylor formulas on step two Carnot groups.* Preprint (2007).

[5] Bers, L.: *Local behavior of solutions of general linear elliptic equations.* Comm. Pure Appl. Math. **8**, 473–496 (1955)

[6] Bieske, T.: *On ∞-harmonic functions on the Heisenberg group.* Commun. Partial Differ. Equations **27**, 727–761 (2002)

[7] Bonfiglioli, A.: *Taylor Formula for Homogenous Groups and Applications.* Preprint (2007).

[8] Bonfiglioli, A., Lanconelli, E.: *Left Invariant Hörmander Operators on Non-Nilpotent Lie Groups in $\mathbb{R}^N$. Fundamental Solutions and Applications to Kolmogorov-Fokker-Planck Equations.* Preprint (2008).

[9] Bonfiglioli, A., Lanconelli, E., Uguzzoni, F.: *Stratified Lie Groups and Potential Theory for their sub-Laplacians.* Springer Monographs in Mathematics **26**, New York, NY, Springer (2007).

[10] Bramanti, M., Brandolini, L.: *L^p-estimates for uniformly hypoelliptic operators with discontinuous coefficients on homogeneous groups*, Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino. **58** (2000), 389-433.

[11] Caffarelli, L. A.: *Elliptic second order equations.* Rend. Sem. Mat. Fis. Milano **58**, 253–284 (1988)

[12] Caffarelli, L. A.: *Interior a priori estimates for solutions of fully nonlinear equations.* Ann. of Math. **130**, 189–213 (1989)

[13] Caffarelli, L. A., Cabré, X.: *Fully Nonlinear Elliptic Equations.* Amer. Math. Soc. Colloquium Publications **43**, Amer. Math. Soc. Providence, RI (1995)

[14] Capogna, L., Han, Q.: *Pointwise Schauder estimates for second order linear equations in Carnot groups.* Harmonic analysis at Mount Holyoke (South Hadley, MA, 2001), Contemp. Math. **320**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 45–69 (2003)

[15] Citti, G., Manfredini, M.: *Implicit function theorem in Carnot–Carathéodory spaces.* Commun. Contemp. Math. **8**, 657-680 (2006).

[16] Danielli, D., Garofalo, N., Nhieu, D.M.: *Sub-Riemannian calculus on hypersurfaces in Carnot groups.* Adv. Math. **215**, 292-378 (2007).

[17] Folland, G.B.: *Subelliptic estimates and function spaces on nilpotent Lie groups.* Ark. Mat. **13**, 161–207 (1975)

[18] Folland, G.B., Stein, E.M.: *Hardy spaces on homogeneous groups.* Mathematical Notes, **28**, Princeton University Press, Princeton, N.J. (1982)

[19] Gutiérrez, C.E.: personal communication.

[20] Gutiérrez, C.E., Lanconelli, E.: *Schauder estimates for second order operators on Lie groups.* Preprint (2008).

[21] Han, Q.: *On the Schauder estimates of solutions to parabolic equations.* Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) **27**, 1–26 (1998)

[22] Han, Q.: *Schauder estimates for elliptic operators with applications to nodal sets.* J. Geom. Anal. **10**, 455–480 (2000)

[23] Heinonen, J.: *Calculus on Carnot groups.* Kilpeläinen, T. (ed.), Fall school in analysis, Jyväskylä, Finland, October 3-7, 1994. Jyväskylä: University of Jyväskylä. Ber., Univ. Jyväskylä. Bericht 68, 1-31 (1995).

[24] Kolmogorov, A.N.: *Zufällige Bewegungen.* Ann. of Math. **35**, 116-117 (1934)

[25] Lanconelli, E., Kogoj, A.E.: *An invariant Harnack inequality for a class of hypoelliptic ultraparabolic equations*. Mediterr. J. Math. **1**, 51-80 (2004)

[26] Lanconelli, E., Polidoro, S.: *On a class of hypoelliptic evolution operators*. Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino **52**, 29–63 (1994)

[27] Lu, G., Manfredi, J.J., Stroffolini, B.: *Convex functions on the Heisenberg group*. Calc. Var. Partial Differential Equations **19**, 1–22 (2004)

[28] Manfredi, J.J.: *Nonlinear Subelliptic Equations on Carnot Groups*. III School on Analysis and Geometry in Metric Spaces, Trento, May 2003. Availbale at the following url: `http://www.pitt.edu/~manfredi/papers/fullynonlsubtrentofinal.pdf`

[29] Manfredi, J.J., Stroffolini, B.: *A version of the Hopf-Lax formula in the Heisenberg group*. Commun. Partial Differ. Equations **27**, 1139–1159 (2002)

[30] Rothschild, L.P., Stein, E.M.: *Hypoelliptic differential operators and nilpotent groups*. Acta Math. **137**, 247–320 (1976)

[31] Wang, L.: *On the regularity theory of fully nonlinear parabolic equations. I*. Comm. Pure Appl. Math. **45**, 27–76 (1992); II. Comm. Pure Appl. Math. **45**, 141–178 (1992)