Seminario di Analisi Matematica
Dipartimento di Matematica
dell'Università di Bologna

Anno Accademico 2007-08

Chiara Cinti

Risultati di unicità per una classe di operatori di Kolmogorov degeneri

21 febbraio 2008

Abstract

We consider the Cauchy problem for hypoelliptic Kolmogorov equations in the form

$$\partial_t u = \sum_{i,j=1}^{m} a_{i,j}(z)\partial_{x_i x_j} u + \sum_{j=1}^{m} a_j(z)\partial_{x_j} u + \sum_{i,j=1}^{N} b_{i,j} x_i \partial_{x_j} u,$$

$(x,t) \in \mathbb{R}^N \times]0,T[$, $1 \le m \le N$, as well as in its divergence form.

We prove that, if $|u(x,t)| \le M \exp\left(a(t^{-\beta} + |x|^2)\right)$, for some positive constants a, M and $\beta \in]0,1[$ and $u(\cdot,0) \equiv 0$, then $u \equiv 0$.

The proof of the main result is based on some previous uniqueness result and on the application of some estimates in “short cylinders”, first introduced by Safonov in the study of uniformly parabolic operators.

1. Introduzione

I risultati che presenterò sono stati ottenuti in collaborazione con Sergio Polidoro e costituiscono il contenuto del lavoro [5]. Consideriamo in $\mathbb{R}^{N+1}$ i seguenti operatori, che possono essere sia in forma di non-divergenza

$$Lu := \sum_{i,j=1}^{m} a_{i,j}(z)\partial_{x_i x_j} u + \sum_{j=1}^{m} a_j(z)\partial_{x_j} u + \sum_{i,j=1}^{N} b_{i,j} x_i \partial_{x_j} u - \partial_t u, \tag{1}$$

sia in forma di divergenza

$$Lu := \sum_{i,j=1}^{m} \partial_{x_i} \left(a_{i,j}(z)\partial_{x_j} u \right) + \sum_{i,j=1}^{N} b_{i,j} x_i \partial_{x_j} u - \partial_t u. \tag{2}$$

Qui e nel seguito $z = (x,t)$ denota il generico punto di $\mathbb{R}^{N+1}$, $1 \leq m < N$, $B = (b_{i,j})_{i,j=1,\dots,N}$ è una matrice reale e costante tale per cui l'operatore

$$K := \sum_{j=1}^{m} \partial_{x_j}^2 + \sum_{i,j=1}^{N} b_{i,j} x_i \partial_{x_j} - \partial_t \tag{3}$$

sia ipoellittico. I coefficienti $a_{i,j}$, a_j nel caso di (1) (oppure $a_{i,j}$, $\partial_{x_i} a_{i,j}$ nel caso di (2)) sono funzioni limitate ed Hölderiane di esponente $\alpha \leq 1$ (cf. (17)). Inoltre supponiamo che $A_0(z) = (a_{i,j}(z))_{i,j=1,\dots,m}$ sia simmetrica e che sia verificata la seguente condizione di uniforme ellitticità in $\mathbb{R}^m$

$$\Lambda^{-1}|\zeta|^2 \leq \langle A_0(z)\zeta, \zeta\rangle \leq \Lambda|\zeta|^2, \quad \forall\, \zeta \in \mathbb{R}^m, \forall\, z \in \mathbb{R}^{N+1}. \tag{4}$$

In questo lavoro studiamo l'unicità della soluzione classica del problema di Cauchy

$$\begin{cases} Lu = 0 & \text{in } \mathbb{R}^N \times]0,T[\,, \\ u(\cdot,0) = 0 & \text{in } \mathbb{R}^N. \end{cases} \tag{5}$$

Questa questione è stata ampiamente trattata in letteratura nel caso in cui L sia un operatore uniformemente parabolico. In generale si ottiene l'unicità assumendo particolari condizioni di crescita per la soluzione u di (5).

I risultati più conosciuti richiedono condizioni di crescita uniformi rispetto al tempo.

Consideriamo l'operatore del calore $L = \Delta - \partial_t$. Nel 1924 Holmgren [9] provò l'unicità per la classe delle soluzioni del problema di Cauchy in una dimensione verificanti

$$|u(x,t)| \le M e^{c|x|^2 \log|x|} \quad \text{per} \quad |x| > 1,\ t \in \mathbb{R}.$$

Ma il risultato più noto è quello di Tychonoff [20] del 1935:

$$|u(x,t)| \le M e^{c|x|^2},\ (x,t) \in \mathbb{R}^N \times]0,T] \qquad \Rightarrow \qquad u \equiv 0. \tag{6}$$

Tychonoff costruì anche un celebre controesempio. Si tratta della seguente funzione

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi^{(k)}(t) \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \quad \varphi(t) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{t^2}\right) & \text{se } t > 0, \\ 0 & \text{se } t \le 0, \end{cases}$$

che è soluzione di (5), e verifica $|u(x,t)| \le M e^{c|x|^{2+\varepsilon}}$ per $(x,t) \in \mathbb{R}^N \times]0,T[$ ed $\varepsilon > 0$. Ciò mostra come la condizione di crescita in x nella (6) sia ottimale.
In seguito (1936) Täcklind [19] estese questi risultati mostrando l'esistenza di una sola soluzione del problema (5) tale che

$$|u(x,t)| \le M e^{c|x| p(|x|)} \quad \text{per} \quad |x| > 1,\ t \in]0,T[,$$

ove $p(r)$ è una funzione positiva e continua su $\mathbb{R}^+$ tale che

$$\int_0^\infty \frac{dr}{\inf_{s \ge r} p(s)} = +\infty.$$

Anche una condizione unilaterale su u può assicurare l'unicità. Ad esempio Widder [21] nel 1944 provò che:

$$u \ge 0 \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^N \times]0,T] \qquad \Rightarrow \qquad u \equiv 0. \tag{7}$$

Consideriamo ora operatori parabolici più generali. Krzyański [11] nel 1941 mostrò che la condizione di Tychonoff (6) garantisce l'unicità per operatori parabolici in forma di non-divergenza a coefficienti limitati e continui. A Serrin [17] nel 1954 è dovuta l'estensione del teorema di unicità di Widder (7) alle soluzioni di equazioni della forma $u_t = a(x)u_{xx} + b(x)u_x + c(x)u$ con coefficienti Hölderiani e uniformemente limitati.
Si ha poi il seguente risultato di Aronson e Besala [1] del 1967 (cf. anche [12]), che permette una crescita di tipo lineare per alcuni coefficienti:

Teorema 1.1. *Sia* $L = \sum_{i,j=1}^{N} a_{i,j}(z)\partial_{x_i x_j} + \sum_{j=1}^{N} b_j(z)\partial_{x_j} - \partial_t$, *ove* $(a_{i,j}(z))_{i,j}$ *è semidefinita positiva ed esistono* $C_1, C_2 > 0$ *tali che*

$$|a_{i,j}(z)| \leq C_1, \quad |b_j(z)| \leq C_2(|x|^2+1)^{1/2} \quad in \quad \mathbb{R}^N \times [0,T].$$

Se u *è soluzione del problema* (5), *allora*

$$u(x,t) \geq -Me^{c|x|^2} \quad in \quad \mathbb{R}^N \times]0,T] \qquad \Rightarrow \qquad u \geq 0 \quad in \quad \mathbb{R}^N \times [0,T].$$

Questo teorema, combinato con un risultato di tipo (7), dà l'unicità di u. Osserviamo esplicitamente che non si richiede l'uniforme ellitticità della matrice $(a_{i,j}(z))_{i,j}$, e dunque il risultato si applica direttamente anche ai nostri operatori di Kolmogorov in forma di non-divergenza.

Altre condizioni sulla crescita di u uniformi rispetto a t possono essere di tipo integrale. Sempre in [1], Aronson e Besala hanno mostrato che, per L come in Teorema 1.1 e tale che $\sum_{i,j=1}^{N} a_{i,j}(z)\xi_i\xi_j \geq \Lambda|\xi|^2$, se u è soluzione di (5) allora

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} e^{-c|x|^2}|u(x,t)|dxdt < \infty \qquad \Rightarrow \qquad u \equiv 0. \tag{8}$$

Questo risultato è stato esteso ad operatori di tipo Kolmogorov, rispettivamente da Polidoro [15] nel caso di invarianza rispetto alle dilatazioni, e da Di Francesco e Pascucci [6] nel caso di non invarianza.
Anche il risultato di Widder (7) è stato generalizzato ad operatori di tipo Kolmogorov (cf. [15] e [7]).

Per avere l'unicità in (5) si possono anche assumere ipotesi di crescita di u non uniformi nel tempo. Nel caso dell'operatore del calore, ricordiamo il lavoro di Shapiro [18] in cui l'unicità segue dall'ipotesi $\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty} = o(t^{-1})$ per $t \to 0$, e più recentemente quello di Chung [2]: se esistono $a, M > 0$ e $\beta \in]0,1[$ tali che

$$|u(x,t)| \leq M \exp\left(a(t^{-\beta} + |x|^2)\right), \tag{9}$$

per ogni $(x,t) \in \mathbb{R}^N \times]0,T[$, allora $u \equiv 0$. Chung e Kim [3] hanno provato che la condizione di crescita (9) è ottimale rispetto al tempo, mostrando che il risultato è falso se $\beta = 1$.

Infatti la funzione

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_M} \frac{1}{(2\pi t)^{N/2}} \exp\left(-\frac{(x-\zeta)^2}{4t}\right) \exp\left(e^{\zeta^2}\right) d\zeta,$$
$$D_M = \left\{\xi + i\eta \in \mathbb{C} \mid \xi \geq M, |\eta| \leq \frac{\pi}{2\xi}\right\},$$

ove l'integrale è in senso antiorario, è una soluzione non banale del problema di Cauchy (5) per l'equazione del calore e soddisfa $|u(x,t)| \leq C_\varepsilon \exp\left(\frac{\varepsilon}{t}\right)$, per ogni $\varepsilon > 0$.
Il risultato di Chung [2] è stato poi esteso da Ferretti [8] ad operatori uniformemente parabolici a coefficienti misurabili, sia in forma di divergenza, sia di non-divergenza. Lo strumento fondamentale usato da Ferretti sono le stime sui cosiddetti "cilindri corti", introdotte da Safonov [16] nello studio di operatori uniformemente parabolici; il suo metodo si serve poi di una costruzione geometrica basata sull'invarianza dell'operatore rispetto al cambiamento di variabili euclideo e alla dilatazione $\delta_\lambda(x,t) = (\lambda x, \lambda^2 t)$.

Enunciamo a questo punto i nostri principali risultati, che estendono [8].

Teorema 1.2. *Sia L l'operatore nella sua forma di non-divergenza* (1). *Sia $u \in C(\mathbb{R}^N \times [0,T])$ soluzione del problema di Cauchy* (5). *Se esistono $a, M > 0$ e $\beta \in]0,1[$ tali che*

$$|u(x,t)| \leq M \exp\left(a(t^{-\beta} + |x|^2)\right), \tag{9}$$

per ogni $(x,t) \in \mathbb{R}^N \times]0,T[$, allora $u \equiv 0$.

Teorema 1.3. *Sia L l'operatore nella sua forma di divergenza* (2). *Sia $u \in C(\mathbb{R}^N \times [0,T])$ soluzione del problema di Cauchy* (5). *Se esistono $a > 0$ e $\beta \in]0,1[$ tali che*

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} \exp\left(-a(t^{-\beta} + |x|^2)\right)|u(x,t)| dx dt < \infty, \tag{10}$$

allora $u \equiv 0$.

La prova dei nostri risultati segue l'approccio di Ferretti in [8]. Proviamo infatti alcune stime sui "cilindri corti" analoghe a quelle in [16], usando un semplice metodo basato sulle stime a priori della soluzione fondamentale di L. Adattiamo le idee di [8] alla geometria non-euclidea del gruppo di Lie relativo all'operatore di Kolmogorov K in (3) e alla sua pseudo-distanza. Alcune differenze rispetto a [8] sono dovute al fatto che nei gruppi di Lie vale solo una disuguaglianza pseudo-triangolare, invece della classica disuguaglianza triangolare; inoltre non possiamo usare la stima sui "cilindri corti" di base arbitariamente grande.

2. Risultati preliminari

Ricordiamo la definizione di gruppo di Lie relativo agli operatori di tipo Kolmogorov e qualche risultato sulla soluzione fondamentale di (1)-(2).

L'ipotesi di ipoellitticità di K in (3) è equivalente all'esistenza di una base di $\mathbb{R}^N$ tale che B assume la forma

$$\begin{pmatrix} * & B_1 & 0 & \dots & 0 \\ * & * & B_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & * & \dots & B_r \\ * & * & * & \dots & * \end{pmatrix} \tag{11}$$

dove ogni B_j è una matrice di dimensione $m_{j-1} \times m_j$ e rango m_j, con

$$m_0 := m \geq m_1 \geq \ldots \geq m_r \geq 1, \qquad m_0 + m_1 + \ldots + m_r = N,$$

mentre $*$ è una matrice a coefficienti costanti arbitrari. Infine, posto

$$E(s) = \exp(-sB^T), \quad A = \mathrm{diag}(I_m, 0, \ldots, 0), \quad \mathcal{C}(t) = \int_0^t E(s)AE^T(s)ds, \tag{12}$$

ove I_m denota la matrice identità $m \times m$, allora la matrice $\mathcal{C}(t)$ è definita positiva per ogni $t > 0$. Sotto queste condizioni equivalenti la soluzione fondamentale di K è (cf. [10])

$$\begin{aligned} \Gamma(x,t,\xi,\tau) = & \frac{(4\pi)^{-\frac{N}{2}}}{\sqrt{\det \mathcal{C}(t-\tau)}} \cdot \\ & \cdot \exp\Big(-\frac{1}{4}\langle \mathcal{C}^{-1}(t-\tau)(x - E(t-\tau)\xi), x - E(t-\tau)\xi\rangle - (t-\tau)\mathrm{tr}B\Big), \end{aligned} \tag{13}$$

se $t > \tau$, e $\Gamma(x,t,\xi,\tau) = 0$ se $t \leq \tau$. Il gruppo di Lie relativo a K è definito dall'operazione

$$(x,t) \circ (\xi,\tau) = (\xi + E(\tau)x, t+\tau), \quad (x,t),(\xi,\tau) \in \mathbb{R}^{N+1}. \tag{14}$$

Inoltre, K risulta invariante anche rispetto ad un gruppo di dilatazioni $\delta(\lambda)_{\lambda>0}$ se e solo se ogni matrice indicata con $*$ in (11) è nulla. In tal caso le dilatazioni sono definite da

$$\delta(\lambda) := \big(D(\lambda), \lambda^2\big) = \mathrm{diag}\left(\lambda I_{m_0}, \lambda^3 I_{m_1}, \ldots, \lambda^{2r+1} I_{m_r}, \lambda^2\right), \tag{15}$$

(I_{m_j} è la matrice identità $m_j \times m_j$). Definiamo le seguenti norme $\delta(\lambda)$-omogenee

$$\|(x,t)\|_{\mathcal{G}} = \rho, \text{ ove } \rho > 0 \text{ è soluzione di } \frac{x_1^2}{\rho^{2q_1}} + \cdots + \frac{x_N^2}{\rho^{2q_N}} + \frac{t^2}{\rho^4} = 1, \quad \|(0,0)\|_{\mathcal{G}} = 0;$$

$$|x|_{\mathcal{G}} = \|(x,0)\|_{\mathcal{G}},$$

ove $q_j \in \mathbb{N}$ sono tali che $\delta(\lambda) = \mathrm{diag}(\lambda^{q_1}, \dots, \lambda^{q_N}, \lambda^2)$. Esiste $\mathbf{c} \geq 1$ tale che

$$\|z \circ \zeta\|_{\mathcal{G}} \leq \mathbf{c}\left(\|z\|_{\mathcal{G}} + \|\zeta\|_{\mathcal{G}}\right), \qquad \text{per ogni } z, \zeta \in \mathbb{R}^{N+1}. \tag{16}$$

Come detto in precedenza, consideriamo operatori che non sono necessariamente invarianti per dilatazioni, tuttavia l'ipotesi di Hölderianità dei coefficienti $a_{i,j}$, a_j nel caso di (1) (oppure $a_{i,j}$, $\partial_{x_i} a_{i,j}$ nel caso di (2)) viene espressa in termini delle dilatazioni definite in (15) e della relativa norma. In particolare, devono esistere $c > 0$ e $\alpha \in]0,1]$ tali che

$$|a_{i,j}(z) - a_{i,j}(\zeta)| \leq c\, \|\zeta^{-1} \circ z\|_{\mathcal{G}}^{\alpha}, \qquad \text{per ogni } \ z, \zeta \in \mathbb{R}^{N+1}. \tag{17}$$

Questo accade perchè, dato un operatore $K = \sum_{j=1}^m \partial^2_{x_j}, + \langle x, B\nabla\rangle - \partial_t$, le proprietà di omogeneità del corrispondente $K_0 = \sum_{j=1}^m \partial^2_{x_j}, + \langle x, B_0\nabla\rangle - \partial_t$, ove B_0 si ottiene da B annullando tutti i blocchi $*$ in (11), si estendono a K stesso. Ad esempio (cf. [13]), se E_0 e $\mathcal{C}_0$ sono le matrici definite come in (12) con B_0 al posto di B, per ogni $T > 0$ esiste $c_T > 0$ tale che

$$\left\langle \mathcal{C}_0^{-1}(t)x, x\right\rangle (1 - c_T t) \leq \left\langle \mathcal{C}^{-1}(t)x, x\right\rangle \leq \left\langle \mathcal{C}_0^{-1}(t)x, x\right\rangle (1 + c_T t) \tag{18}$$

per $(x,t) \in \mathbb{R}^N \times [-T, T], t \neq 0$, ed esistono $k'_T, k''_T > 0$ tali che

$$k'_T t^Q (1 - c_T t) \leq \det \mathcal{C}(t) \leq k''_T t^Q (1 + c_T t), \tag{19}$$

per $(x,t) \in \mathbb{R}^N \times]0,T]$, con $t < \frac{1}{c_T}$.

Consideriamo ora la soluzione fondamentale Γ degli operatori L in (1)-(2). Nei lavori [6] e [7] si prova che per ogni $T > 0$ esistono due operatori a coefficienti costanti K^-, K^+ e due constanti positive c^-, c^+ tali che

$$c^- \Gamma^-(x,t,y,s) \leq \Gamma(x,t,y,s) \leq c^+ \Gamma^+(x,t,y,s), \tag{20}$$

per ogni $(x,t),(y,s) \in \mathbb{R}^{N+1}$, con $0 < t-s \leq T$. Qui Γ^- e Γ^+ denotano le soluzioni fondamentali di

$$K^- = \Lambda^- \sum_{i=1}^m \partial_{x_i}^2 + Y, \qquad K^+ = \Lambda^+ \sum_{i=1}^m \partial_{x_i}^2 + Y.$$

Osserviamo esplicitamente che Λ^-, Λ^+ e c^-, c^+ in (20) dipendono solo da T, da Λ in (4), dalla matrice B e dalla costante di Hölder dei coefficienti $a_{i,j}$.

Chiudiamo il paragrafo ricordando (cf. [4]) una stima locale puntuale di tipo Moser delle soluzioni di $Lu = 0$ nella sua forma di divergenza (2). Ponendo

$$\widetilde{H}_R(\xi,\tau) = \left\{(x,t) \in \mathbb{R}^{N+1} : \tau - R^2 < t < \tau + R^2;\ |x - E(t-\tau)\xi|_{\mathcal{G}} < R\right\},$$

se u è soluzione di $Lu = 0$ in $\widetilde{H}_R(x_0,t_0)$ con $0 < r \leq 1$, esiste una costante c che dipende solo da Λ in (4), dalla matrice B e da Q tale che, per ogni $p \geq 1$, vale

$$\sup_{\widetilde{H}_\rho(x_0,t_0)} |u|^p \leq \frac{c}{(r-\rho)^{Q+2}} \int_{\widetilde{H}_r(x_0,t_0)} |u(y,s)|^p dy\, ds, \tag{21}$$

per ogni $\rho \in \left[\frac{r}{2}, r\right]$.

3. Condizioni integrali e puntuali

Vogliamo innanzitutto mostrare che, se L è nella forma di divergenza (2), la condizione integrale (10) e quella puntuale (9) sono equivalenti. Si ha infatti

Proposizione 3.1. *Sia $u \in C(\mathbb{R}^N \times [0,T], \mathbb{R})$ soluzione del problema di Cauchy* (5)*, con L in forma di divergenza* (2)*, e per $a > 0$, $\beta \in]0,1[$ sia*

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} \exp\big(-a(t^{-\beta} + |x|^2)\big)|u(x,t)|dxdt < \infty.$$

Allora esistono due costanti positive b e M, tali che

$$|u(x,t)| \leq M \exp\big(b(t^{-\beta} + |x|^2)\big) \qquad \text{in } \mathbb{R}^N \times \left]0, \tfrac{T}{2}\right].$$

Dimostrazione. Con la stima (21) delle soluzioni di $Lu = 0$, per $(x,t) \in \mathbb{R}^N \times \left]0, \frac{T}{2}\right]$,

$$|u(x,t)| \leq \frac{c}{t^{\frac{Q+2}{2}}} \int_{\widetilde{H}_{\sqrt{t/2}}(x,t)} |u(y,s)|dy\, ds \leq \frac{c\, c_H}{t^{\frac{Q+2}{2}}} \int_{\widetilde{H}_{\sqrt{t/2}}(x,t)} e^{-a(s^{-\beta}+|y|^2)}|u(y,s)|dy\, ds,$$

ove

$$c_H = \sup_{(\xi,\tau)\in \widetilde{H}_{\sqrt{t/2}}(x,t)} e^{a(\tau^{-\beta}+|\xi|^2)} \le C_T\, e^{a\left(\left(\frac{t}{2}\right)^{-\beta}+|x|^2\right)}.$$

Poichè $\widetilde{H}_{\sqrt{t/2}}(x,t) \subset \mathbb{R}^N\times]0,T[$, e osservando che

$$t^{-\frac{Q+2}{2}}\, e^{\frac{2^\beta a}{t^\beta}} = e^{\frac{b}{t^\beta}} \left(t^{-\frac{Q+2}{2}} e^{\frac{2^\beta a - b}{t^\beta}} \right),$$

la prova si conclude scegliendo $b > 2^\beta a$. □

4. Stime sui "cilindri corti"

Estendiamo ora le stime sui "cilindri corti" introdotte da Safonov in [16]. I nostri cilindri sono modellati secondo la particolare geometria non-euclidea di L (cf. [14]):

$$H_R(\xi,\tau,h) = \left\{(x,t)\in\mathbb{R}^{N+1} : \tau < t < \tau + h;\ |E(\tau - t)x - \xi|_{\mathcal{G}} < R\right\};$$

$\partial_P H_R(\xi,\tau,h) = B_R(\xi,\tau)\cup\Sigma_R(\xi,\tau,h)$ denota la frontiera parabolica di $H_R(\xi,\tau,h)$, unione di base e superficie laterale.

Teorema 4.1. *Sia L sia nella sua forma di non-divergenza* (1)*, sia in quella di divergenza* (2)*. Per ogni $R_0 > 0$ esistono $\mathbf{C} > 0$ e $\varepsilon_0 \in]0,1]$, tali che, se u è soluzione di $Lu = 0$ in $H_R(\xi,\tau,\varepsilon R^2)$, $u = 0$ in $B_R(\xi,\tau)$, per qualche $(\xi,\tau)\in\mathbb{R}^{N+1}$, $R\in]0,R_0]$ e $\varepsilon\in]0,\varepsilon_0]$, allora*

$$|u(E(t)\xi, t+\tau))| \le e^{-\mathbf{C}\frac{R^2}{t}} \sup_{\Sigma_R(\xi,\tau,\varepsilon R^2)} |u|,$$

per ogni $t\in[0,\varepsilon R^2]$.

Dimostrazione. Per l'invarianza rispetto all'operazione "$\circ$", possiamo limitarci al caso $(\xi,\tau) = (0,0)$. Consideriamo la funzione:

$$v(x,t) := \frac{2}{c^-}\int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(x,t,y,0)\varphi\left(D\left(\tfrac{1}{R}\right)y\right)dy,$$

ove $\varphi\in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ è un'opportuna funzione cut-off, e c^- è la costante in (20). Se $|x|_{\mathcal{G}} = R$,

$$v(E(t)x,t) \ge 2\int_{\mathbb{R}^N} \Gamma^-(E(t)x,t,y,0)\varphi\left(D\left(\tfrac{1}{R}\right)y\right)dy \longrightarrow 2\,\varphi\left(D\left(\tfrac{1}{R}\right)x\right) = 2,$$

uniformemente sui compatti per $t \to 0^+$. Allora esiste $\varepsilon_0 \in]0, 1/4[$ tale che $v(E(t)x, t) \geq 1$ per $|x|_{\mathcal{G}} = R$ e $t \in]0, \varepsilon_0 R^2]$. Ossia,

$$v \geq 1 \quad \text{in} \quad \Sigma_R(0, 0, \varepsilon_0 R^2).$$

Applicando ora il principio del massimo al cilindro $H_R(0, 0, \varepsilon_0 R^2)$, si ottiene

$$|u(0,t)| \leq v(0,t) \sup_{\Sigma_R(0,0,\varepsilon_0 R^2)} |u| \qquad \text{per ogni} \;\; t \in [0, \varepsilon_0 R^2]. \tag{22}$$

Per concludere la prova, non resta che trovare una stima dall'alto per $v(0,t)$. Anzitutto, usando (20) e la definizione di φ, si ha per $t > 0$

$$v(0,t) \leq 2\,\frac{c^+}{c^-} \int_{\mathbb{R}^N} \Gamma^+(0,t,y,0)\varphi\left(D\left(\tfrac{1}{R}\right)y\right) dy \leq 2\,\frac{c^+}{c^-} \int_{|y|_{\mathcal{G}} \geq R/2} \Gamma^+(0,t,y,0) dy. \tag{23}$$

Ma Γ^+ è soluzione fondamentale di un operatore a coefficienti costanti, quindi riusciamo a scriverne l'espressione esplicita (cf. (13)). Dunque, usando (18) e (19),

$$\begin{aligned}
\Gamma^+(0,t,y,0) &= \frac{(4\pi)^{-N/2}}{\sqrt{\det \mathcal{C}(t)}} \exp\left(-\frac{1}{4}\langle \mathcal{C}^{-1}(t)E(t)y, E(t)y\rangle\right) \\
&\leq \frac{(4\pi)^{-N/2}}{\sqrt{c'_T t^Q}} \exp\left(-\frac{c''_T}{4}\left\langle E_0(1)^T \mathcal{C}_0^{-1}(1)E_0(1)D\Big(\tfrac{1}{\sqrt{t}}\Big)y, D\Big(\tfrac{1}{\sqrt{t}}\Big)y\right\rangle\right),
\end{aligned}$$

Sia ora $t \in]0, \varepsilon_0 R^2]$. Ponendo $\eta := D\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)y$, e osservando che per $|\eta|_{\mathcal{G}} \geq \frac{R}{2\sqrt{t}} > 1$ vale $\langle \eta, \eta\rangle \geq |\eta|^2_{\mathcal{G}}$, troviamo

$$\int_{|y|_{\mathcal{G}} \geq R/2} \Gamma^+(0,t,y,0) dy \leq C_T \int_{|\eta|_{\mathcal{G}} \geq \frac{R}{2\sqrt{t}}} e^{-\frac{C_0}{4}|\eta|^2_{\mathcal{G}}} d\eta, \tag{24}$$

per opportune costanti positive C_T e C_0. D'altra parte, un calcolo diretto mostra che

$$\int_{|\eta|_{\mathcal{G}} \geq \frac{R}{2\sqrt{t}}} e^{-\frac{C_0}{4}|\eta|^2_{\mathcal{G}}} d\eta \leq e^{-\frac{C_0}{48}\frac{R^2}{t}} e^{-\frac{C_0}{48}\frac{1}{\varepsilon_0}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\frac{C_0}{12}|\eta|^2_{\mathcal{G}}} d\eta. \tag{25}$$

Ne segue che, posto $\mathbf{C} := \frac{C_0}{48}$,

$$v(0,t) \leq 2\,\frac{c^+}{c^-} C_T e^{-\mathbf{C}\frac{R^2}{t}} e^{-\mathbf{C}\frac{1}{\varepsilon_0}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\frac{C_0}{12}|\eta|^2_{\mathcal{G}}} d\eta \leq e^{-\mathbf{C}\frac{R^2}{t}}, \qquad \text{per ogni} \;\; t \in]0, \varepsilon_0 R^2],$$

scegliendo ε_0 abbastanza piccolo. Da (22) segue allora la tesi. □

5. Risultati di unicità

Mostriamo ora come la condizione di crescita puntuale (9) implichi l'unicità della soluzione del problema di Cauchy (5) per entrambi i tipi di operatore, sia in forma di non-divergenza, sia di divergenza.

Proposizione 5.1. *Sia L sia nella sua forma di non-divergenza* (1)*, sia in quella di divergenza* (2)*, e sia $u \in C(\mathbb{R}^N \times [0,T], \mathbb{R})$ soluzione del problema di Cauchy* (5)*. Supponiamo che per $a > 0$ e $\beta \in]0,1[$ valga*

$$|u(x,t)| \le \exp\left(a(t^{-\beta} + |x|^2)\right) \qquad \text{in } \ \mathbb{R}^N \times]0,T].$$

Allora esistono $h_0 \in]0,T]$ e $M_0 > 0$, che dipendono dall'operatore L, da a e da β, tali che

$$|u(x,t)| \le M_0 \exp\left(2a|x|^2\right) \qquad \text{in } \ \mathbb{R}^N \times]0,h_0]. \tag{26}$$

Dalla Proposizione 5.1 seguono immediatamente i nostri principali risultati di unicità, enunciati nei Teoremi 1.2 e 1.3. Precisamente, se L è in forma di non-divergenza, da (26) si ottiene $u \equiv 0$ usando direttamente il risultato classico di Aronson e Besala richiamato in Teorema 1.1. Invece, se L è in forma di divergenza, (26) permette di servirsi del risultato di tipo (8) provato da Di Francesco e Pascucci in [6].

Al fine di dimostrare la Proposizione 5.1 occorre premettere un lemma.

Lemma 5.1. *Sia $R_0 > \boldsymbol{c}^{\frac{1}{1-\beta}}$, ove $\boldsymbol{c}$ è la costante in* (16)*. Poniamo $\overline{R} = \frac{\boldsymbol{c} R_0^{2-\beta}}{R_0^{1-\beta} - \boldsymbol{c}}$, e sia $u \in C\left(\overline{H_{\overline{R}}(0,0,T)}, \mathbb{R}\right)$ solutione di*

$$\begin{cases} Lu = 0 & \text{in } H_{\overline{R}}(0,0,T), \\ u = 0, & \text{in } B_{\overline{R}}(0,0). \end{cases}$$

Supponiamo che per $a > 0$ e $\beta \in]0,1[$ valga

$$|u(x,t)| \le \exp\left(at^{-\beta}\right) \qquad \text{in } \ H_{\overline{R}}(0,0,T). \tag{27}$$

Allora esiste $h_0 \in]0,T]$, che dipende solo da a, β, R_0 e dall'operatore L, tale che

$$|u(x,t)| \le 1 \qquad \text{in } \ H_{R_0}(0,0,h_0).$$

Dimostrazione. Siano $\varepsilon_0, \mathbf{C}$ come in Teorema 4.1. Consideriamo il cilindro $H_{R_0}(0,0,h_0)$, ove $h_0 \in]0,\varepsilon_0]$ sarà scelto più avanti. Per ogni $j \in \mathbb{N}\cup\{0\}$, poniamo

$$h_j := \frac{h_0}{R_0^{2j}}, \quad r_j := R_0^{(\beta-1)j+1}, \quad R_j := \sum_{i=0}^{j} \mathbf{c}^{i+1} r_i.$$

Osserviamo che, per ogni $j \in \mathbb{N}$,

$$\varepsilon_j := \frac{h_{j-1}}{r_j^2} = \frac{h_0}{R_0^{2\beta j}} \le h_0 \le \varepsilon_0, \qquad R_j < \mathbf{c} R_0 \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{c}^i R_0^{(\beta-1)i} = \overline{R}. \tag{28}$$

Poniamo ora, per ogni $j \in \mathbb{N}\cup\{0\}$,

$$D_j := \{x \in \mathbb{R}^N \;\mid\; (x,0) = (x_0,0)\circ(x_1,0)\circ\ldots\circ(x_j,0),\ |x_i|_{\mathcal{G}} \le r_i,\ i = 0,\ldots,j\}$$

Usando ripetutamente la disuguaglianza pseudo-triangolare (16), troviamo che

$$\begin{aligned} |x|_{\mathcal{G}} &\le \mathbf{c}\big(\|(x_0,0)\|_{\mathcal{G}} + \|(x_1,0)\circ\ldots\circ(x_j,0)\|_{\mathcal{G}}\big) \\ &\le \mathbf{c}|x_0|_{\mathcal{G}} + \mathbf{c}^2|x_1|_{\mathcal{G}} + \ldots + \mathbf{c}^{j-1}|x_{j-2}|_{\mathcal{G}} + \mathbf{c}^j|x_{j-1}|_{\mathcal{G}} + \mathbf{c}^j|x_j|_{\mathcal{G}} \le \sum_{i=0}^{j}\mathbf{c}^{i+1} r_i = R_j < \overline{R}, \end{aligned}$$

per $x \in D_j$, da cui $D_j \subseteq \{x \in \mathbb{R}^N \mid |x|_{\mathcal{G}} \le \overline{R}\}$ per ogni $j \in \mathbb{N}$.
Poichè $u(E(t)x,t) \to 0$ per $t \to 0$, uniformemente sui compatti di $\mathbb{R}^N$, esiste $J \in \mathbb{N}$ tale che $|u| \le 1$ in $\big\{(E(t)x,t) \mid |x|_{\mathcal{G}} \le \overline{R},\ 0 \le t \le h_J\big\}$. Segue che

$$|u| \le 1 \qquad \text{in} \quad \{(E(t)x,t) \mid x \in D_J,\ 0 \le t \le h_J\}. \tag{B_J}$$

Essendo $t^{-\beta} \le h_J^{-\beta}$ per $t \in [h_J, h_0]$, da (B_J) e dalla condizione di crescita (27) segue

$$|u| \le \exp\big(a h_J^{-\beta}\big) \qquad \text{in} \quad \{(E(t)x,t) \mid x \in D_J,\ 0 \le t \le h_0\}. \tag{A_J}$$

Mostriamo che (A_J) implica

$$|u| \le 1 \qquad \text{in} \quad \{(E(t)x,t) \mid x \in D_{J-1},\ 0 \le t \le h_{J-1}\}. \tag{B_{J-1}}$$

Sia $x \in D_{J-1}$ e $t \in [0, h_{J-1}]$. Per il Teorema 4.1 si ha

$$|u(E(t)x,t)| \le \exp\left(-\mathbf{C}\frac{r_J^2}{t}\right) \sup_{\Sigma_{r_J}(x,0,\varepsilon_J r_J^2)} |u| \le \exp\left(-\mathbf{C}\frac{r_J^2}{h_{J-1}}\right) \sup_{\Sigma_{r_J}(x,0,\varepsilon_J r_J^2)} |u|.$$

D'altra parte, se $(y,s) \in \Sigma_{r_J}(x,0,\varepsilon_J r_J^2)$, allora esiste $x_J \in \mathbb{R}^N$ tale che $|x_J|_{\mathcal{G}} = r_J$ e $(y,s) = (E(s)y_J, s)$, ove $(y_J,0) = (x,0) \circ (x_J,0)$. Poichè $y_J \in D_J$ e $0 \le s \le h_0$, la stima (A_J) dà $|u(y,s)| \le \exp\left(ah_J^{-\beta}\right)$. Così

$$|u(E(t)x,t)| \le \exp\left(ah_J^{-\beta} - \mathbf{C}\frac{r_J^2}{h_{J-1}}\right) = \exp\left(-\frac{\mathbf{C}R_0^{2\beta J}}{2h_0} + \frac{R_0^{2\beta J}}{h_0^\beta}\left(a - \frac{\mathbf{C}}{2h_0^{1-\beta}}\right)\right) \le 1,$$

scegliendo $h_0 \le \min\left\{\varepsilon_0, T, \left(\frac{\mathbf{C}}{2a}\right)^{\frac{1}{1-\beta}}\right\}$. Questo prova (B_{J-1}). Ora da (B_{J-1}) segue (A_{J-1}), e così via, fino a che

$$|u| \le 1 \quad \text{in} \quad \{(E(t)x,t) \ \mid \ x \in D_0,\ 0 \le t \le h_0\}. \tag{B_0}$$

Questo conclude la prova, perchè tale insieme coincide con $H_{R_0}(0,0,h_0)$. □

Dimostrazione della Proposizione 5.1. Fissati $R_0 > \mathbf{c}^{\frac{1}{1-\beta}}$ e $x_0 \in \mathbb{R}^N$, poniamo

$$v(x,t) := u\left((x_0,0)\circ(x,t)\right) = u(x + E(t)x_0, t).$$

Dall'ipotesi di crescita su u si ha

$$|v(x,t)| \le \exp\left(at^{-\beta}\right)\exp\left(2a|x|^2\right)\exp\left(2a|E(t)x_0|^2\right) \qquad \text{per ogni } (x,t) \text{ in } \ H_{\overline{R}}(0,0,T),$$

ove $\overline{R}$ è come in Lemma 5.1. Allora

$$|u(E(t)x_0,t)| = |v(0,t)| \le M_0 \exp\left(2a|E(t)x_0|^2\right) \qquad \text{per ogni } \ (x_0,t) \in \mathbb{R}^N \times]0,h_0],$$

con $M_0 = \sup_{H_{\overline{R}}(0,0,T)} \exp\left(2a|x|^2\right)$. Il risultato segue considerando un arbitario $(y,t) \in \mathbb{R}^N \times]0,h_0]$ e ponendo $x_0 = E(-t)y$ nella precedente disuguaglianza. □

Riferimenti bibliografici

[1] D. G. Aronson, P. Besala, *Uniqueness of positive solutions of parabolic equations with unbounded coefficients*, Colloq. Math., **18** (1967), 125–135;

[2] S.-Y. Chung, *Uniqueness in the Cauchy problem for the heat equation*, Proc. Edinburgh Math. Soc. (2), **42** (1999) 455–468;

[3] S.-Y. Chung, D. Kim, *An example of nonuniqueness of the Cauchy problem for the heat equation*, Comm. Partial Differential Equations, **19** (1994), 1257–1261;

[4] C. Cinti, A. Pascucci, S. Polidoro, *Pointwise estimates for solutions to a class of non-homogeneous Kolmogorov equations*, Mathematische Annalen, **340** (2008), 237–264;

[5] C. Cinti, S. Polidoro, *Bounds on short cylinders and uniqueness results for degenerate Kolmogorov equation*, preprint;

[6] M. Di Francesco, A. Pascucci, *On a class of degenerate parabolic equations of Kolmogorov type*, AMRX Appl. Math. Res. Express, (2005), 77–116;

[7] M. Di Francesco, S. Polidoro, *Schauder estimates, Harnack inequality and Gaussian lower bound for Kolmogorov type operators in non-divergence form*, Advances in Differential Equations, 11 (2006) 1261–1320;

[8] E. Ferretti, *Uniqueness in the Cauchy problem for parabolic equations*, Proc. Edinb. Math. Soc. (2), **46** (2003) 329–340;

[9] E. Holmgren, *Sur les solutions quasianalytiques de l'equation de la chaleur*, Ark. Mat. **138** (1924) 1–9;

[10] L. Hörmander, *Hypoelliptic second order differential equations*, Acta Math., **119** (1967), 147–171;

[11] M. Krzyżański, *Sur les solutions des equations du type parabolique determinées dans une region illimitée*, Bull. Amer. Math. Soc., **47** (1941) 911–915;

[12] M. Krzyżański, *Certaines inégalités relatives aux solutions de l'équation parabolique linéaire normale*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astr. Phys., **7** (1959) 131–135;

[13] E. Lanconelli, S. Polidoro, *On a class of hypoelliptic evolution operators*, Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino, **52** (1994), 29–63. Partial differential equations, II (Turin, 1993);

[14] A. Montanari, *Harnack inequality for totally degenerate Kolmogorov-Fokker-Planck operators*, Boll. Un. Mat. Ital. B (7), **10** (1996) 903–926;

[15] S. Polidoro, *Uniqueness and representation theorems for solutions of Kolmogorov-Fokker-Planck equations*, Rend. Mat. Appl. (7), **15** (1995) 535–560;

[16] M. Safonov, *Estimates near the boundary for solutions of second order parabolic equations*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. I (Berlin, 1998), no. Extra Vol. I, (1998) 637–647;

[17] J. B. Serrin, *A uniqueness theorem for the parabolic equation* $u_t = a(x)u_{xx} + b(x)u_x + c(x)u$, Bull. Amer. Math. Soc. **60** (1954), 344 (Abstract).

[18] V. L. Shapiro, *The uniqueness of solutions of the heat equation in an infinite strip*, Trans. Amer. Math. Soc., **125** (1966), 326–361;

[19] S. Täcklind, *Sur les classes quasianalytiques des solutions des équations aux derivées partielles du type paraboliques*, Nova Acta Soc. Sci. Upsal. **10** (1936) 1–57;

[20] A. Tychonoff, *A uniqueness theorem for the heat equation*, Mat. Sb. **42** (1935) 199–216;

[21] D. V. Widder, *Positive temperatures on the infinite rod*, Trans. Amer. Math. Soc., **55** (1944), 85–95.