SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
DELL'UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI BOLOGNA

Angelo Favini

PROBLEMI DIRETTI E INVERSI PER SISTEMI DI EQUAZIONI DIFFERENZIALI

22 gennaio 2009

Sunto. Si utilizzano gli spazi d'interpolazione reale per risolvere problemi diretti e inversi di evoluzione in spazi di Banach, sfruttando la regolaritá spaziale dei dati.

Summary. Real interpolation spaces are used to solve some direct and inverse evolution problems in Banach spaces, on the ground of space regularity assumptions.

All'inizio di questo ciclo di seminari, voglio ricordare il Professor **Bruno Pini**, maestro ed ispiratore per tanti di noi.

A lui va un commosso ricordo.

1 Introduzione

Questo seminario espone alcuni recentissimi risultati del lavoro [13], in collaborazione con A. Lorenzi e H. Tanabe, su problemi diretti e inversi relativi a sistemi di equazioni di evoluzione singolari.

Ci sono numerosissimi studi riguardanti problemi di identificazione del tipo

$$(P) \qquad \begin{aligned} &\dot{y}(t) + Ay(t) = f(t)z, \quad 0 \le t \le \tau, \\ &y(0) = y_0, \\ &\Phi[y(t)] = g(t), 0 \le t \le \tau, \end{aligned}$$

dove $-A$ genera un semigruppo C_0 nello spazio di Banach X o un semigruppo infinitamente differenziabile in X, z é un fissato elemento di X, $y_0 \in X$, $\Phi \in X^*$, $g \in C^1([0,\tau];\mathbb{R})$. Si deve trovare la soluzione (y, f), con $f \in C([0,\tau];\mathbb{R})$. Ricordo solo [1], [2], [3], [4], [5], [10], [11], [12], [15].

In tutti questi lavori, riguardanti il caso parabolico, si cerca in effetti una $f(t)$ piú regolare (di classe $C^\theta, 0 < \theta < 1$) in modo da applicare noti risultati di regolaritá massimale (hölderiana) nel tempo. A tal fine, viene supposto (cfr. [14]) che A sia un operatore lineare chiuso dallo spazio di Banach X in sé soddisfacente la stima risolvente

$$\|(z + A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \le c(1 + |z|)^{-\beta} \tag{1.1}$$

per ogni z nella sezione

$$\Sigma_\alpha := \{z \in \mathbb{C} : \Re\mathrm{e}\ z \ge -c(1 + |\Im\mathrm{m}\ z|^\alpha\}, \quad 0 < \beta \le \alpha 1. \tag{1.2}$$

Taira in [17] considera in effetti il caso $\alpha = 1$, introduce la potenza A^α per $\gamma > 1 - \beta$ e prova che $D(A^\gamma) \supseteq D(A)$ purchè $1 - \beta < \gamma < \beta$ (cosicchè deve essere $\beta > 1/2$).

Se $\alpha = \beta = 1$, sono ormai classici i risultati di Da Prato, Lunardi, Sinestrari, ecc. concernenti la regolaritá massimale temporale e/o spaziale delle soluzioni strette del problema di Cauchy

$$\frac{dy}{dt} + Ay = f(t), \quad 0 \le t \le \tau, \tag{1.3}$$

$$y(0) = y_0, \tag{1.4}$$

$f \in C([0,\tau]; X)$, $y_0 \in D(A)$.

Se $0 < \beta \le 1$, $\alpha = 1$, esistenza (e anche regolaritá temporale) della soluzione è stata considerata da C. Wild in [19]. Nel caso di A operatore multivoco, in cui (1.3) prende la forma di inclusione, vengono introdotti in [14] gli spazi

$$X_\Delta^{\theta,\infty} := \{u \in X : \sup_{t>0} t^\theta \|A^\circ (t + A)^{-1} u\|_X < \infty\}, \tag{1.5}$$

dove $A^\circ(t+A)^{-1}$ é la sezione lineare di $A(t+A)^{-1}$ introdotta in [14], Theorem 2.7. Se A non è multivoco e $\alpha=\beta=1$, allora $X_A^{\theta,\infty}=(X,D(A))_{\theta,\infty}$, spazio di interpolazione reale tra X e $D(A)$. In generale, si ha (cfr. [14], p. 26)

$$X_A^{\theta,\infty} \subseteq (X,D(A))_{\theta,\infty}, \quad 0<\theta<1, \tag{1.6}$$

$$(X,D(A))_{\theta,\infty} \subseteq X_A^{\theta+\beta-1,\infty}, \quad 1-\beta<\theta<1. \tag{1.7}$$

Segue che $D(A) \subseteq X_A^{\theta,\infty}$ purché $0<\theta<\beta$ e quindi, in effetti, $X_A^{\theta,\infty}$ non é intermedio fra $D(A)$ e X. Peró $D(A^2) \subseteq X_A^{\theta,\infty}$.

Rimaniamo nel caso "univalent": se $u \in D(A^2)$, $t \geq 1$,

$$t^\theta A(A+t)^{-1}u = t^\theta (A+t)^{-1}A^{-1}A^2u = t^{\theta-1}(A^{-1}-(A+t)^{-1})A^2u$$

e cosí, per $t \geq 1$,

$$t^\theta \|A(A+t)^{-1}u\|_X \leq t^{\theta-1}\|Au\|_X + ct^{\theta-1}\|A^2u\|_X.$$

Poichè A è assunto invertibile, l'inclusione segue.

Introdurremo allora degli spazi intermedi $\tilde{X}_A^{\theta,\infty}$ fra X e $D(A)$ (e che si riducano a $X_A^{\theta,\infty}$ se $\alpha=\beta=1$), che sembrano piú adatti a trattare la risolubilitá di (1.3), (1.4) e la regolaritá spaziale della relativa soluzione. Per brevitá, elimineremo "∞" da $X_A^{\theta,\infty}$ e scriveremo X_A^θ e $\tilde{X}_A^\theta$, rispettivamente. A ció é dedicata la sezione 2. Nel paragrafo 3 studieremo la regolaritá spaziale (e temporale) delle soluzioni di (1.3), (1.4). Nel paragrafo 4 considereremo il problema di identificazione (1.1), (1.2), sotto assunzioni di regolaritá spaziale. Nel paragrafo 5 affronteremo un nuovo problema di identificazione, del tipo

$$\begin{aligned} &y'(t)+Ay(t)=f_1(t)z_1+f_2(t)z_2, \\ &\Phi_j[y(t)]=g_j(t), \quad t\in[0,\tau], \quad j=0,1, \end{aligned}$$

del tutto nuovo in letteratura. Nel paragrafo 6 applicheremo i risultati del paragrafo 5 nel risolvere un problema inverso per sistemi di equazioni differenziali di evoluzione. Finalmente, nel paragrafo 7, applicheremo i risultati astratti ad alcuni sistemi di equazioni alle derivate parziali, sia regolari che degeneri.

2 Spazi intermedi

Sia A un operatore lineare chiuso da X in sè soddisfacente (1.1), (1.2), con $\alpha+\beta>1$. Allora [14], Proposition 3.4, p. 50, assicura che se $1-\beta<\theta<1$, allora

$$t^{\frac{2-\beta-\theta}{\alpha}}\|Ae^{-tA}u\|_X \leq c\|u\|_{X_\alpha^\theta} \tag{2.1}$$

e, per il Teorema 3.5, p. 51,

$$\|(e^{-tA}-I)u\|X \leq ct^{\frac{\theta-2+\alpha+\beta}{\alpha}}\|u\|_{X_A^\theta}, \quad 2-\alpha-\beta<\theta<1,$$

cosicchè $\|e^{-tA}x-x\|_X \to 0$ per $t\to 0+$ per ogni $x\in X_A^\theta$, $2-\alpha-\beta<\theta<1$.

In base alla (2.1), introduciamo lo spazio intermedio

$$\tilde{X}_A^\theta := \{u \in X; \sup_{t>0} t^{\frac{2-\beta-\theta}{\alpha}} \|Ae^{-tA}u\|_X < \infty\},$$

con norma

$$\|u\|_{\tilde{X}_A^\theta} := \|u\|_X + \sup_{t>0} t^{\frac{2-\beta-\theta}{\alpha}} \|Ae^{-tA}u\|_X.$$

Sappiamo che

$$\|Ae^{-tA}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq ct^{\frac{\beta-\theta-1}{\alpha}}, \quad t > 0,\ \theta \geq 0,$$

e quindi

$$\|Ae^{-tA}u\|_X \leq ct^{\frac{\beta-2}{\alpha}}\|u\|_X, \quad u \in X,$$
$$\|Ae^{-tA}u\|_X = \|e^{-tA}Au\|_X \leq ct^{\frac{\beta-1}{\alpha}}\|Au\|_X \leq ct^{\frac{\beta-1}{\alpha}}\|u\|_{D(A)}$$

con $\|u\|_{D(A)} := \|u\|_X + \|Au\|_X$. Per interpolazione,

$$\|Ae^{-tA}u\|_X \leq Ct^{\frac{\beta+\theta-2}{\alpha}}\|u\|_{(X,D(A))_{\theta,\infty}}.$$

Quindi,

$$\sup_{t>0} t^{\frac{2-\beta-\theta}{\alpha}} \|Ae^{-tA}u\|_X \leq C\|u\|_{(X,D(A))_{\theta,\infty}}$$

e allora

$$X_A^\theta \subseteq (X, D(A))_{\theta,\infty} \subseteq \tilde{X}_A^\theta, \quad 0 < \theta < 1. \tag{2.2}$$

D'altra parte, se $u \in \tilde{X}_A^\theta$, $0 < s < t$, $2 - \alpha - \beta < \theta < 1$,

$$e^{-tA}u - e^{-sA}u = \int_s^t \frac{\partial}{\partial\tau}(e^{-rA})ud\tau = \int_s^t (-A)e^{-rA}ud\tau$$
$$= \int_s^t \tau^{\frac{2-\beta-\theta}{\alpha}} \tau^{\frac{\beta+\theta-2}{\alpha}} (-A)e^{-\tau A}ud\tau$$

e cosí

$$\|e^{-tA}u - e^{-sA}u\|_X \leq c\int_s^t \tau^{\frac{\beta+\theta-2}{\alpha}} d\tau \|u\|_{\tilde{X}_A^\theta}$$
$$\leq c(t-s)^{\frac{\alpha+\beta+\theta-2}{\alpha}}\|u\|_{\tilde{X}_A^\theta} = c|t-s|^{\frac{\theta-(2-\alpha-\beta)}{\alpha}}\|u\|_{\tilde{X}_A^\theta}.$$

Segue che esiste il $\lim_{t\to 0+} e^{-tAu}$ per ogni $u \in \tilde{X}_A^\theta$, $2 - \alpha - \beta < \theta < 1$. Chiamiamo ξ questo limite: $e^{-tA}u \to \xi$ per $t \to 0+$. Ma allora $A^{-1}e^{-tA}u \to A^{-1}\xi$ per $t \to 0+$. Se Γ è la curva $\Re\mathrm{e}\ z = a - c(1 + |\Im\mathrm{m}\ z|)^\alpha$, $a > c\ (> 0)$, orientata dal basso verso l'alto,

$$A^{-1}e^{-tA}u = \int_\Gamma e^{\lambda t}A^{-1}(\lambda + A)^{-1}ud\lambda = \int_\Gamma \frac{e^{\lambda t}}{\lambda}\left[A^{-1} - (\lambda + A)^{-1}\right]ud\lambda$$
$$= A^{-1}u - \int_\Gamma \frac{e^{\lambda t}}{\lambda}(\lambda + A)^{-1}ud\lambda.$$

Mandando t a $0+$, l'ultimo integrale tende e 0, cosicché $A^{-1}e^{-tA}u \to A^{-1}\xi = A^{-1}u$, i.e. $\xi = u$. Notiamo che qui gioca un ruolo sostanziale il fatto che A sia univalent. Segue che $e^{-tA}u$ è fortemente continuo su $[0,+\infty[$ nella norma di X per ogni $u \in \tilde{X}_A^\theta$, $\theta > 2-\alpha-\beta$.

Sia ora $\lambda > 0$ e prendiamo $u \in D(A)$. Allora, poiché $\frac{1-\beta}{\alpha} < 1$, $\int_0^\infty e^{-\lambda t}e^{-tA}udt$ converge e

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t}e^{-tA}udt &= \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial t}(-e^{-\lambda t})e^{-tA}udt = \left[-e^{-\lambda t}e^{-tA}u\right]_{t=0}^{t=\infty} \\ &+ \int_0^\infty -e^{-\lambda t}e^{-tA}Audt \\ = \quad & u - \int_0^\infty e^{-\lambda t}e^{-tA}Audt.\end{aligned}$$

Cosí$\int_0^\infty e^{-\lambda t}e^{-tA}(\lambda + A)udt = u$ per ogni $u \in D(A)$. Ció implica che per ogni $u \in X$

$$(\lambda + A)^{-1}u = \int_0^\infty e^{-\lambda t}e^{-tA}udt.$$

Infatti, se $u \in X$, esiste $v \in D(A)$ tale che $u = (A+\lambda)v$. Ma allora

$$(\lambda + A)^{-1}u = v = \int_0^\infty e^{-\lambda t}e^{-tA}(\lambda + A)vdt = \int_0^\infty e^{-\lambda t}e^{-tA}udt.$$

Cosí, se $u \in \tilde{X}_A^\theta$ e $t > 0$, allora

$$\begin{aligned}&\|A(t+A)^{-1}u\|_X = \|\int_0^\infty e^{-\lambda t}Ae^{-\lambda A}ud\lambda\|_X \\ &\leq c\int_0^\infty e^{-\lambda t}\lambda^{\frac{\theta+\beta-2}{\alpha}}d\lambda\|u\|_{\tilde{X}_A^\theta} = c\int_0^\infty e^{-\xi}\frac{\xi^{\frac{\theta+\beta-2}{\alpha}}}{t^{\frac{\theta+\alpha+\beta-2}{\alpha}}}d\xi\|u\|_{\tilde{X}_A^\theta}.\end{aligned}$$

Pertanto, se $0 < \beta \leq \alpha \leq 1$, $\alpha + \beta > 1$, $\theta > 2-\alpha-\beta$, valgono le immersioni continue

$$\tilde{X}_A^\theta \subseteq X_A^{\frac{\theta+\alpha+\beta-2}{\alpha}} \subseteq (X, D(A))_{\frac{\theta+\alpha+\beta-2}{\alpha},\infty}.$$

Si noti che $\theta + \alpha + \beta - 2 < \alpha$ implica $\theta < 2-\beta$. Alcuni dei precedenti risultati, con $\alpha = 1$, furono enunciati in [19].

3 Regolaritá spaziale delle soluzioni del problema di Cauchy

Consideriamo il problema di Cauchy (1.3), (1.4), con $f \in C([0,\tau];X)$, $y_0 \in D(A)$. Vogliamo una soluzione stretta di (1.3), (1.4): $y \in C^1([0,\tau];X)$, $Ay \in C([0,\tau];X)$, sotto condizioni di regolaritá spaziale sui dati. Denotiamo con

$B([0,\tau];X)$ lo spazio delle funzioni limitate da $[0,\tau]$ in X, con la norma del sup. Allora noi supporremo

$$f \in C([0,\tau];X) \cap B([0,\tau];\tilde{X}_A^\theta), \tag{3.1}$$

$$y_0 \in D(A),\ Ay_0 \in \tilde{X}_A^\theta,\ \alpha+\beta > \frac{3}{2},\ 2(2-\alpha-\beta) < \theta < 1. \tag{3.2}$$

Necessariamente, la soluzione y di (1.3), (1.4) è data da

$$y(t) = e^{-tA}y_0 + \int_0^t e^{-(t-s)A}f(s)ds, \quad 0 \le t \le \tau. \tag{3.3}$$

Sia

$$y_1(t) = e^{-tA}y_0, \quad y_2(t) = \int_0^t e^{-(t-s)A}f(s)ds. \tag{3.4}$$

Sappiamo dalle precedenti considerazioni che y_1 è differenziabile e

$$\|y_1'(t) - y_1'(s)\|_X = \|A(y_1(t)-y_1(s))\|_X = \|\int_s^t Ae^{-\tau A}Ay_0 d\tau\|_X$$

$$\le c\int_s^t \tau^{\frac{\theta+\beta-2}{\alpha}}\|Ay_0\|_{\tilde{X}_A^\theta}d\tau \le c'(t-s)^{\frac{\theta-(2-\alpha-\beta)}{\alpha}}\|Ay_0\|_{\tilde{X}_A^\theta}.$$

Dunque, $Ay_1 = -y_1' \in C^{\frac{\theta-[2-\alpha-\beta]}{\alpha}}([0,\tau];X)$.

Consideriamo la regolaritá spaziale:

$$\begin{aligned}
& \sup_{0\le t\le\tau}\sup_{s>0} s^{\frac{2-\beta-\theta}{\alpha}}\|Ae^{-sA}Ae^{-tA}y_0\|_X \\
= & \sup_{0\le t\le\tau}\sup_{s>0} s^{\frac{2-\beta-\theta}{\alpha}}\|Ae^{-(s+t)A}Ay_0\|_X \\
= & \sup_{0\le t\le\tau}\sup_{s>0}\left(\frac{s}{s+t}\right)^{\frac{2-\beta-\theta}{\alpha}}(s+t)^{\frac{2-\beta-\theta}{\alpha}}\|Ae^{-(s+t)A}Ay_0\|_X \\
\le & \ c\|Ay_0\|_{\tilde{X}_A^\theta}.
\end{aligned}$$

Perció, $Ay_1, y_1' \in C^{\frac{\theta-[2-\alpha-\beta]}{\alpha}}([0,\tau];X) \cap B([0,\tau];\tilde{X}_A^\theta)$. Riguardo a y_2, abbiamo

$$Ay_2(t) - Ay_2(s) = \int_0^s \left[Ae^{-(t-\sigma)A} - Ae^{-(s-\sigma)A}\right]f(\sigma)d\sigma + \int_s^t Ae^{-(t-\sigma)A}f(\sigma)ds.$$

Scriviamo

$$\int_s^t Ae^{-(t-\sigma)A}f(\sigma)d\sigma = \int_s^t (t-\sigma)^{\frac{2-\beta-\theta}{\alpha}}(t-\sigma)^{\frac{\theta+\beta-2}{\alpha}}Ae^{-(t-\sigma)A}f(\sigma)d\sigma$$

e deduciamo

$$\begin{aligned}
& \left\|\int_s^t Ae^{-t(t-\sigma)A}f(\sigma)d\sigma\right\|_X \le c\|f\|_{B([0,\tau]:\tilde{X}_A^\theta)}\int_s^t (t-\sigma)^{\frac{\beta+\theta-2}{\alpha}}d\sigma \\
= & \ c\|f\|_{B([0,\tau]:\tilde{X}_A^\theta)}(t-s)^{\frac{\theta-[2-\alpha-\beta]}{\alpha}}.
\end{aligned}$$

Il primo addendo coincide con

$$
\begin{aligned}
& \int_0^s \left[Ae^{-(t-\sigma)A} - Ae^{-(s-\sigma)A} \right] f(\sigma) d\sigma \\
= & \ - \int_0^s \int_{s-\sigma}^{t-\sigma} A^2 e^{-\nu A} f(\sigma) d\nu d\sigma \\
= & \ - \int_0^s \int_{s-\sigma}^{t-\sigma} \left[Ae^{-\frac{\nu}{2}A} \right] \left[Ae^{-\frac{\nu}{2}A} f(\sigma) \right] d\nu d\sigma
\end{aligned}
$$

e cosí

$$
\begin{aligned}
& \left\| \int_0^s \left[Ae^{-(t-\sigma)A} - Ae^{-(s-\sigma)A} \right] f(\sigma) d\sigma ds \right\|_X \\
\leq & \ c \int_0^s \int_{s-\sigma}^{t-\sigma} \nu^{\frac{\theta+2\beta-4}{\alpha}} d\nu d\sigma \|f\|_{B([0,\tau];\tilde{X}_A^\theta)} \\
\leq & \ c'(t-s)^{\frac{\theta-2(2-\alpha-\beta)}{\alpha}} \|f\|_{B([0,\tau];X_A^\theta)},
\end{aligned}
$$

cfr. Lunardi [16], p. 144: basta scrivere

$$
\frac{\theta + 2\beta - 4}{\alpha} = A - 2, \quad A = \frac{\theta + 2(\alpha+\beta-2)}{\alpha}.
$$

In altri termini, $Ay_2 \in C^{\frac{\theta-2(2-\alpha-\beta)}{\alpha}}([0,\tau];X)$ purché $2(2-\alpha-\beta) < \theta < 1$, $\alpha+\beta > 3/2$.

Riguardo la regolaritá spaziale, scriviamo

$$
Ae^{-\xi A} Ay_2(t) = \int_0^t Ae^{-\frac{t-s+\xi}{2}A} Ae^{-\frac{t-s+\xi}{2}A} f(s) ds,
$$

ottenendo da $f \in B([0,\tau];\tilde{X}_A^\theta)$ che

$$
\|Ae^{-\xi A} Ay_2(t)\|_X \leq c \int_0^t (t-s+\xi)^{\frac{\beta-2}{\alpha}} (t-s+\xi)^{\frac{\beta+\theta-2}{\alpha}} \|f\|_{B([0,\tau];\tilde{X}_A^\theta)} ds
$$

$$
= \quad c \int_0^t (t-s+\xi)^{\frac{\theta-2(2-\beta)}{\alpha}} dx \|f\|_{B([0,\tau];\tilde{X}_A^\theta)}.
$$

Cosí

$$
\sup_{0 \leq t \leq \tau} \sup_{\xi > 0} \xi^{\frac{4-\alpha-2\beta-\theta}{\alpha}} \|Ae^{-\xi A} Ay_2(t)\|_X < \infty.
$$

Poiché

$$
\frac{4-\alpha-2\beta-\theta}{\alpha} = \frac{2-\beta-[\alpha+\beta+\theta-2]}{\alpha},
$$

concludiamo che $Ay_2 \in B([0,\tau];\tilde{X}_A^{\theta-[2-\alpha-\beta]}) \cap C^{\frac{\theta-2(2-\alpha-\beta)}{\alpha}}([0,\tau;X)$.

Dunque, si ha:

Teorema 1. *Se $Ay_0 \in \tilde{X}_A^\theta$, $f \in C([0,\tau];X) \cap B([0,\tau];\tilde{X}_A^\theta)$, allora il problema (1.3), (1.4) ha una (unica) soluzione stretta $y(t)$ con la regolaritá*

$$\frac{dy}{dt},\ Ay \in C([0,\tau];X) \cap B([0,\tau];\tilde{X}_A^{\theta-[2-\alpha-\beta]}),$$
$$Ay \in C^{\frac{\theta-2[2-\alpha-\beta]}{\alpha}}(0,\tau];X),$$

purché $2(2-\alpha-\beta) < \theta < 1$, $\alpha+\beta > 3/2$.

4 Un primo problema di identificazione

Trattiamo ora il problema di identificazione (P) nella sezione 1. Vogliamo trovare la coppia $(y,f) \in C([0,\tau];D(A)) \times C([0,\tau];R)$ soddisfacente (P).

Supponiamo $g \in C^1([0,\tau];R)$, $Ay_0 \in \tilde{X}_A^\theta$, $z \in \tilde{X}_A^\theta$, $\alpha+\beta > 3/2$, $2(2-\alpha-\beta) < \theta < 1$, $\Phi \in X^*$, $\Phi[z] \neq 0$. Se (y,f) è la soluzione cercata, abbiamo

$$\dot{g}(t) + \Phi[Ay(t)] = f(t)\Phi[z]$$

e cosí

$$f(t) = \frac{1}{\Phi[z]}\{\dot{g}(t) + \Phi[Ay(t)]\} = \text{per il Teorema 1}$$
$$= \frac{1}{\Phi[z]}\{\dot{g}(t) + \Phi[Ae^{-tA}y_0]\} + \frac{1}{\Phi[z]}\int_0^t \Phi[Ae^{-(t-s)A}z]f(s)ds.$$

Si noti che $t \to Ae^{-tA}y_0 = e^{-tA}Ay_0$ è continua su $[0,\tau]$. Cerchiamo di risolvere l'equazione integrale in $C([0,\tau]:R)$

$$(E) \quad f(t) = b(t) + \frac{1}{\Phi[z]}\int_0^t \Phi[Ae^{-(t-s)A}z]f(s)ds, \quad 0 \leq t \leq \tau,$$

dove

$$b(t) = \frac{1}{\Phi[z]}\{\dot{g}(t) + \Phi[Ae^{-tA}y_0]\}.$$

Sia

$$(Sf)(t) = \frac{1}{\Phi[z]}\int_0^t \Phi[Ae^{-(t-s)A}z]f(s)ds.$$

Poiché $z \in \tilde{X}_A^\theta$,

$$\|Ae^{-(t-s)A}z\|_X \leq \frac{c}{(t-s)^{\frac{2-\theta-\beta}{\alpha}}} = \frac{c}{(t-s)^{1-\theta_0}},$$

con $\theta_0 = \frac{\theta-[2-\alpha-\beta]}{\alpha}$. Allora

$$|(Sf)(t)| \leq \frac{c}{|\Phi[z]|}\int_0^t \|\Phi\|_{X^*}\|z\|_{\tilde{X}_A^\theta}\frac{|f(s)|}{(t-s)^{1-\theta_0}}ds.$$

Si puó allora ripetere l'argomente usato in [2], AL Horani-Favini, per concludere che

$$\|S^n f(t)\| \leq \left[c\frac{\|\Phi\|_{X^*}}{|\Phi[z]|}\|z\|_{\tilde{X}_A^\theta}\right]^n \frac{\Gamma(\theta_0)t^{n\theta_0}}{\Gamma(n\theta_0)n\theta_0}\|f\|_{C([0,\tau];R)}.$$

Poiché $\sqrt[n]{\Gamma(n\theta_0)} \to \infty$ per $n \to \infty$, concludiamo che l'operatore S ha un raggio spettrale uguale a zero. Cosí l'equazione (E) ammette un'unica soluzione continua f su $[0,\tau]$. In forza del Teorema 1, concludiamo che la soluzione y corrispondente alla $f(t)$ ha la regolaritá $\frac{dy}{dt}$, $Ay \in C([0,\tau];X) \cap B([0,\tau];\tilde{X}_A^{\theta-[2-\alpha-\beta]})$, $Ay \in C^{\frac{\theta-2[2-\alpha-\beta]}{\alpha}}([0,\tau];X)$. In conclusione,

Teorema 2. *Se* $z \in \tilde{X}_A^\theta$, $Ay_0 \in \tilde{X}_A^\theta$, $\alpha+\beta > 3/2$, $2(2-\alpha-\beta) < \theta < 1$, $\Phi \in X^*$, $\Phi[z] \neq 0$, *allora (E) ammette una unica soluzione stretta* $(y,f) \in C([0,\tau];D(A)) \times C([0,\tau];R)$ *tale che* $\frac{dy}{dt}, Ay \in B([0,\tau];\tilde{X}_A^{\theta-[2-\alpha-\beta]})$, $Ay \in C^{\frac{\theta-2[2-\alpha-\beta]}{\alpha}}([0,\tau];X)$.

5 Un nuovo problema di identificazione

In questo paragrafo consideriamo il problema di identificare **due** funzioni incognite $f_1(t)$, $f_2(t)$ dal sistema

$$\text{(R)}\begin{cases} \frac{dy}{dt}(t) + Ay(t) = f_1(t)z_1 + f_2(t)z_2, & 0 \leq t \leq \tau, \\ y(0) = y_0, \\ \Phi_1[y(t)] = g_1(t), & 0 \leq t \leq \tau, \\ \Phi_2[y(t)] = g_2(t), & 0 \leq t \leq \tau, \end{cases}$$

dove g_1, g_2 sono date in $C^1([0,\tau];R)$, y_0, z_1, z_2 fissati in X. Posto

$$\mathfrak{A} = \begin{bmatrix} \Phi_1[z_1] & \Phi_1[z_2] \\ \Phi_2[z_1] & \Phi_2[z_2] \end{bmatrix}, \text{ con } \det\mathfrak{A} \neq 0,$$

si ottiene il sistema

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix} &= \mathfrak{A}^{-1}\begin{bmatrix} \dot{g}_1(t) \\ \dot{g}_2(t) \end{bmatrix} + \mathfrak{A}^{-1}\begin{bmatrix} \Phi_1[e^{-tA}Ay_0] \\ \Phi_2[e^{-tA}Ay_0] \end{bmatrix} \\ + \quad & \mathfrak{A}^{-1}\int_0^t \begin{bmatrix} \Phi_1[Ae^{-(t-s)A}z_1] & \Phi_1[Ae^{-(t-s)A}z_2] \\ \Phi_2[Ae^{-(t-s)A}z_1] & \Phi_2[Ae^{-(t-s)A}z_2] \end{bmatrix}\begin{bmatrix} f_1(s) \\ f_2(s) \end{bmatrix} ds. \end{aligned}$$

Si introduce in $C([0,\tau];R^2)$ $(= C([0,\tau];R) \times C([0,\tau];R))$ la norma $\|(f,g)\|_{C([0,\tau];R^2)} = \max_{0\leq t\leq\tau}(|f(t)| + |g(t)|)$.

Sia

$$S\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}(t) = \mathfrak{A}^{-1}\int_0^t \begin{bmatrix} \Phi_1[Ae^{-(t-s)A}z_1] & \Phi_1[Ae^{-(t-s)A}z_2] \\ \Phi_2[Ae^{-(t-s)A}z_1] & \Phi_2[Ae^{-(t-s)A}z_2] \end{bmatrix}\begin{bmatrix} f_1(s) \\ f_2(s) \end{bmatrix} ds.$$

Si trova una stima per S^n:

$$\|S^n \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} (t)\|_{R^2} \le c_1^n \frac{\Gamma(\theta_0)^n}{\Gamma(n\theta_0)} \frac{t^{n\theta_0}}{n\theta_0} \|(f_1, f_2)\|_{C([0,\tau];R^2)},$$

dove

$$c_1 = \|\mathfrak{A}^{-1}\|_{\mathcal{L}(R^2)} c[\|\Phi_1\|_{X^*} + \|\Phi_2\|_{X^*}][\|z_1\|_{\tilde{X}_A^\theta} + \|z_2\|_{\tilde{X}_A^\theta}],$$

con c opportuna costante positiva. Si puó allora concludere come prima. Precisamente,

Teorema 3. *Sia $\alpha+\beta > 3/2$, $2(2-\alpha-\beta) < \theta < 1$. Se $Ay_0 \in \tilde{X}_A^\theta$, $\Phi_1, \Phi_2 \in X$, $g_1, g_2 \in C^1([0,\tau]; R)$, $z_1, z_2 \in \tilde{X}_A^\theta$, con*

$$\begin{vmatrix} \Phi_1[z_1] & \Phi_1[z_2] \\ \Phi_2[z_1] & \Phi_2[z_2]] \end{vmatrix} \ne 0,$$
$$\Phi_1[y_0] = g_1(0), \quad \Phi_2[y_0] = g_2(0),$$

allora il problema (R) ha una unica soluzione stretta $(y, f_1, f_2) \in C([0,\tau]; D(A)) \times C([0,\tau]; R) \times C([0,\tau]; R)$ tale che $\frac{dy}{dt}, Ay \in B([0,\tau]; \tilde{X}_A^{\theta-[2-\alpha-\beta]}$, $Ay \in C^{\frac{\theta-2[2-\alpha-\beta]}{\alpha}}([0,\tau]; X)$.

Osservazione 1. Sappiamo che se $\theta > 2[2-\alpha-\beta]$, allora

$$\tilde{X}_A^{\theta-[2-\alpha-\beta]} \subseteq X_A^{\frac{\theta+2(\alpha+\beta-2)}{\alpha}} \subseteq (X, D(A))_{\frac{\theta+2(\alpha+\beta-2)}{\alpha},\infty}.$$

Si puó allora concludere con il seguente corollario.

Corollario 1. *Se $\alpha+\beta > 3/2$, $2-(2-\alpha-\beta) < \theta < 1$, $Ay_0 \in X_A^\theta$ (risp. $(X, D(A))$), $g_i \in C^1([0,\tau]; R)$, $i = 1, 2$, $z_1, z_2 \in X_A^\theta$ (risp. $(X, D(A))_{\theta,\infty}$),*

$$\begin{vmatrix} \Phi_1[z_1] & \Phi_1[z_2] \\ \Phi_2[z_1] & \Phi_2[z_2] \end{vmatrix} \ne 0, \quad \Phi_1[y_0] = g_1(0), \quad \Phi_2[y_0] = g_2(0),$$

allora il problema (R) ammette una unica soluzione stretta (y, f_1, f_2) tale che $\frac{dy}{dt}, Ay \in B([0,\tau]; X^{\frac{\theta-2[2-\alpha-\beta]}{\alpha}})$, (risp. $B([0,\tau]; (X, D(A))_{\frac{\theta-2[2-\alpha-\beta]}{\alpha},\infty}$), $Ay \in C^{\frac{\theta-2[2-\alpha-\beta]}{\alpha}}([0,\tau]; X)$. In particolare, se $\alpha = \beta = 1$, noi otteniamo la massima regolaritá $\frac{dy}{dt}, Ay \in B([0,\tau]; (X, D(A))_{\theta,\infty})$, $Ay \in C^\theta([0,\tau]; X)$.

6 Applicazione a sistemi di equazioni differenziali

Siano A, B, C, D operatori lineari chiusi da uno spazio di Banach X in sé. Nello spazio $X \times X$ consideriamo il sistema

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \\
&= f_1(t)\begin{bmatrix} z_{11} \\ z_{21} \end{bmatrix} + f_2(t)\begin{bmatrix} z_{12} \\ z_{22} \end{bmatrix}, \quad 0 \le t \le \tau, && (6.1) \\
&x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0, && (6.2) \\
&\Psi_1[x(t)] = g_1(t), \quad 0 \le t \le \tau, \quad \Psi_1[x_0] = g_1(0), && (6.3) \\
&\Psi_2[x(t)] = g_2(t), \quad 0 \le t \le \tau, \quad \Psi_2[x_0] = g_2(0). && (6.4)
\end{aligned}$$

Assumiamo

$$\begin{aligned}
&\|(z + A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \le c(1 + |z|)^{-\beta_1}, \quad z \in \Sigma_\alpha, && (6.5) \\
&\|(z + D)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \le c(1 + |z|)^{-\beta_2}, \quad z \in \Sigma_\alpha, && (6.6) \\
&\|C(z + A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \le c(1 + |z|)^{-\delta_1}, \quad z \in \Sigma_\alpha, && (6.7) \\
&\|B(z + D)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \le c(1 + |z|)^{-\delta_2}, \quad z \in \Sigma_\alpha, && (6.8) \\
&\delta_1 + \delta_2 \in R^+. && (6.9)
\end{aligned}$$

Introduciamo l'operatore $\mathcal{A}$ in $X \times X$ mediante

$$D(\mathcal{A}) = D(A) \times D(D), \quad \mathcal{A}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Ax + By \\ Cx + Dy \end{bmatrix}.$$

(Il sistema è disaccoppiato.) Allora è mostrato in [4] che

$$\|(z + \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(X \times X)} \le c(1 + |z|)^{-\beta}, \quad z \in \Sigma_\alpha, \ |z| \text{ grande}, \tag{6.10}$$

dove

$$\beta = \min\{\beta_1, \beta_2, \beta_1 + \delta_2, \beta_2 + \delta_1\}. \tag{6.11}$$

Un cambiamento di variabile permette di supporre che (6.10) valga per ogni $z \in \Sigma_\alpha$.

Sia $E = X \times X$ e si ponga $\xi = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, $z_1 = \begin{bmatrix} z_{11} \\ z_{21} \end{bmatrix}$, $z_2 = \begin{bmatrix} z_{12} \\ z_{22} \end{bmatrix}$. Allora (6.1), (6.2) si leggono

$$\begin{aligned}
&\frac{d\xi}{dt} + \mathcal{A}\xi = f_1(t)z_1 + f_2(t)z_2, \quad 0 \le t \le \tau, \\
&\xi(0) = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \xi_0.
\end{aligned}$$

Introduciamo i funzionali $\Phi_1, \Phi_2 \in E^*$ mediante

$$\Phi_1[\xi] = \Phi_1 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \Psi_1[x],$$
$$\Phi_2[\xi] = \Phi_2 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \Psi_2[y].$$

Applicando Φ_1 e Φ_2 a ξ, noi otteniamo:

$$\begin{aligned} \dot{g}_1(t) + \Psi_1[Ax(t) + By(t)] = f_1(t)\Psi_1[z_{11}] + f_2(t)\Psi_1[z_{12}], \\ \dot{g}_2(t) + \Psi_2[Cx(t) + Dy(t)] = f_1(t)\Psi_2[z_{21}] + f_2(t)\Psi_2[z_{22}], \end{aligned}$$

rispettivamente, cioè lo stesso risultato che otteniamo applicando (6.3), (6.4) a (6.1). Poiché

$$\begin{vmatrix} \Phi_1[z_1] & \Phi_1[z_2] \\ \Phi_2[z_1] & \Phi_2[z_2] \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \Psi_1[z_{11}] & \Psi_1[z_{12}] \\ \Psi_2[z_{21}] & \Psi_2[z_{22}] \end{vmatrix} \neq 0, \tag{6.12}$$

il Teorema 3 ed il suo corollario si traducono nei seguenti risultati.

Teorema 4. *Siano soddisfatte (6.5)∼(6.9) con* β *da (6.11),* $\alpha+\beta > 3/2$, $2(2-\alpha-\beta) < \theta < 1$. *Se* $\mathcal{A}\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} \in \tilde{X}^\theta_{\mathcal{A}}$, $g_1, g_2 \in C^1([0,\tau]; R)$, $\begin{bmatrix} z_{11} \\ z_{21} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} z_{12} \\ z_{22} \end{bmatrix} \in \tilde{X}^\theta_{\mathcal{A}} \subseteq X \times X$, $\Psi_1, \Psi_2 \in X^*$, $\Psi_1[x_0] = g_1(0)$, $\Psi_2[y_0] = g_2(0)$ *e vale (6.12), allora il problema di identificazione (6.1)∼(6.4) ammette una unica soluzione stretta* $((x,y), f_1, f_2) \in C([0,\tau]; D(\mathcal{A})) \times C([0,\tau]; R) \times C([0,\tau]; R)$ *tale che* $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}, \mathcal{A}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in B([0,\tau]; \tilde{X}^{\theta-[2-\alpha-\beta]}_{\mathcal{A}}$, $\mathcal{A}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in C^{\frac{\theta-2[2-\alpha-\beta]}{\alpha}}([0,\tau]; X \times X)$.

Corollario 2. *Valgano (6.5)∼(6.9), (6.11), (6.12),* $\alpha + \beta > 3/2$, $2(2-\alpha-\beta < \theta < 1$, $g_1, g_2 \in C^1([0,\tau]; R)$. *Se* $\mathcal{A}\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} \in X^\theta_{\mathcal{A}}$ *(risp.* $(X \times X, D(\mathcal{A}))_{\theta,\infty}$*),* $\Psi_1[x_0] = g_1(0)$, $\Psi_2[y_0] = g_2(0)$, $\begin{bmatrix} z_{11} \\ z_{21} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} z_{12} \\ z_{22} \end{bmatrix} \in X^\theta_{\mathcal{A}}$ *(risp.* $(X \times X, D(\mathcal{A}))_{\theta,\infty}$*) allora il problema (6.1)∼(6.4) ammette una unica soluzione stretta* $((x,y), f_1, f_2) \in C([0,\tau]; D(\mathcal{A})) \times C([0,\tau]; R) \times C([0,\tau]; R)$ *tale che* $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}, \mathcal{A}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in B([0,\tau]; X^{\frac{\theta-2[2-\alpha-\beta]}{\alpha}})$*, risp.* $B([0,\tau]; (X \times X; D(\mathcal{A}))_{\frac{\theta-2[2-\alpha-\beta]}{\alpha},\infty})$, $\mathcal{A}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in C^{\frac{\theta-2[2-\alpha-\beta]}{\alpha}}([0,\tau]; X \times X)$.

Osservazione 2. Il Teorema 4 e il Corollario 2 si applicano anche se la matrice operatoriale $\mathcal{A}$ non ha dominio $D(A) \times D(D)$, cfr. la monografia in preparazione di K. Engel [9].

7 Esempi ed applicazioni

Ci limitiamo a due esempi, il primo dei quali è legato proprio all'Osservazione 2 relativa a domini disaccoppiati.

Esempio 1. Questo problema concerne un modello di reazione-diffusione che descrive un sistema epidemico umano studiato da Capasso e Kumish [6]. Tale modello consiste di una equazione parabolica accoppiata ad una equazione differenziale ordinaria via un operatore feedback sul bordo, vedi Engel [9].

Per ottenere risultati di stabilitá in [6], gli autori linearizzano il modello e arrivano al seguente sistema di evoluzione, dove $u(t,x)$ e $v(t,x)$ stanno, rispettivamente, per la concentrazione dell'agente infettivo e la densitá della popolazione infettiva al tempo t e al punto x:

$$D_t u(t,x) = \Delta u(t,x) - a(x)u(t,x) + f_1(t)z_{11}(x) + f_2(t)z_{12}(x), \quad (t,x) \in (0,\tau)\times\Omega, \tag{7.1}$$

$$D_t v(t,x) = c(x)u(t,x) - d(x)v(t,x) + f_1(t)z_{21}(x) + f_2(t)z_{22}(x), \quad (t,x) \in (0,\tau)\times\Omega, \tag{7.2}$$

$$u(0,x) = u_0(x), \quad v(0,x) = v_0(x), \quad x \in \Omega, \tag{7.3}$$

$$D_\nu u(t,x) + \beta(x)u(t,x) = \int_\Omega h(x,y)v(t,y)dt, \ (t,x) \in (0,\tau)\times\partial\Omega, \tag{7.4}$$

$$\int_\Omega u(t,x)\mu_1(dx) = g_1(t), \quad 0 \le t \le \tau, \tag{7.5}$$

$$\int_\Omega v(t,x)\mu_2(dx) = g_2(t), \quad 0 \le t \le \tau, \tag{7.6}$$

dove Ω è un dominio limitato di R^n, $n \ge 1$, con frontiera regolare $\partial\Omega$, Δ è il Laplaciano, $a,b,c,d \in C(\bar\Omega)$, $\beta \in C(\partial\Omega)$, $h \in L^\infty(\partial\Omega\times\Omega)$ sono funzioni non negative, D_ν denota la derivata normale esterna su $\partial\Omega$, $z_{ik} \in C(\bar\Omega)$, $i,k = 1,2$, $g_i \in C^1([0,\tau];R)$, $i = 1,2$, e μ_1,μ_2 sono delle misure, precisamente funzioni d'insieme additive limitate regolari definite sul campo generato dagli insiemi chiusi (cfr. [8], p. 261).

Introduciamo l'operatore $\mathcal{A}$ in $C(\bar\Omega)\times C(\bar\Omega)$ mediante

$$-\mathcal{A} = \begin{bmatrix} \Delta - M_a & 0 \\ M_c & -M_d \end{bmatrix},$$

$$D(\mathcal{A}) = \{(u,v) \in C(\bar\Omega)\times C(\bar\Omega) : u \in H^2(\Omega), \Delta u \in C(\bar\Omega),$$
$$D_\nu u(x) + \beta(x)u(x) = \int_\Omega h(x,y)v(y)dy \text{ su } \partial\Omega\},$$

dove M_h denota l'operatore di moltiplicazione indotto dalla funzione h. È provato in [9], p. 126, che $-\mathcal{A}$ genera un semigruppo analitico in $C(\bar\Omega)\times C(\bar\Omega)$. Qui $\alpha = \beta = 1$, $0 < \theta < 1$. Supponiamo $(u_0,v_0) \in D(\mathcal{A})$, $((\Delta - a(\cdot))u_0, c(\cdot)u_0 - d(\cdot)v_0) \in (C(\bar\Omega)\times C(\bar\Omega), D(\mathcal{A}))_{\theta,\infty}$, $\int_\Omega u_0(x)\mu_1(dx) = g_1(0)$, $\int_\Omega v_0(x = \mu_2(dx) =$

$g_2(0)$, $g_1, g_2 \in C^1([0,\tau];R)$, $z_{ik} \in C(\bar{\Omega})$, $i,k = 1,2$, $(z_{11}, z_{21}), (z_{12}, z_{22}) \in (C(\bar{\Omega}) \times C(\bar{\Omega}), D(\mathcal{A}))_{\theta,\infty}$,

$$\left| \begin{array}{cc} \int_\Omega z_{11}\mu_1(dx) & \int_\Omega z_{12}\mu_1(dx) \\ \int_\Omega z_{21}\mu_2(dx) & \int_\Omega z_{22}\mu_2(dx) \end{array} \right| \neq 0;$$

allora il problema di identificazione (7.1)$\sim$(7.6) ha una unica soluzione stretta globale $((u,v), f_1, f_2) \in C([0,\tau]; D(\mathcal{A})) \times C([0,\tau];R) \times C([0,\tau];R)$ tale che $(D_t u, D_t v)$, $\mathcal{A}\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \in B([0,\tau]; (C(\bar{\Omega}) \times C(\bar{\Omega}), D(\mathcal{A}))_{\theta,\infty})$.

Possiamo caratterizzare lo spazio d'interpolazione $(C(\bar{\Omega}) \times C(\bar{\Omega}), D(\mathcal{A}))_{\theta,\infty}$ utilizzando [18], Theorem 1.14.3, p.93, e la rappresentazione di $\mathcal{A} - \lambda I$ come prodotto di opportune matrici operatoriali, data da [9], p. 126, connesse all'operatore $Q = \Delta - M_a$, $D(Q) = \{f \in C(\bar{\Omega}) \cap H^2(\Omega) : \Delta f \in C(\bar{\Omega}), D_\nu f + \beta f_{|\partial\Omega} = 0\}$.

Esempio 2. Consideriamo il sistema parabolico degenere

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \Delta(a(x)u(t,x)) + b(x)v(t,x) + f_1(t)z_{11}(x) + f_2(t)z_{12}(x), \tag{7.7}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}(t,x) = c(x)u(t,x) + \Delta(d(x)v(t,x)) + f_1(t)z_{21}(x) + f_2(b)z_{22}(x), \tag{7.8}$$

$$(t,x) \in (0,\tau) \times \Omega,$$

$$u(0,x) = u_0(x), \quad v(0,x) = v_0(x), \quad x \in \Omega, \tag{7.9}$$

$$a(x)u(t,x) = 0 = d(x)v(t,x), \quad (t,x) \in (0,\tau) \times \partial\Omega, \tag{7.10}$$

$$\int_\Omega \eta_1(x)u(t,x)dx = g_1(t), \int_\Omega \eta_2(x)v(t,x)dx = g_2(t), \ 0 \le t \le \tau, \tag{7.11}$$

insieme alle condizioni di compatibilitá

$$\int_\Omega \eta_1(x)u_0(x)dx = g_1(0), \quad \int_\Omega \eta_2(x)v_0(x)dx = g_2(0),$$

Ω essendo un dominio aperto limitato in R^n, $n \geq 1$, con frontiera regolare $\partial\Omega$, $a(x), b(x), c(x), d(x)$ sono funzioni continue da $\bar{\Omega}$ a R, $a(x), d(x) > 0$ quasi-dappertutto in Ω, $z_{ij} \in L^2(\Omega)$, $u_0, v_0 \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, g_i è una funzione continua da $[0,\tau]$ in R, $i = 1,2$. L'obiettivo è quello di identificare (u, v, f_1, f_2).

Ricordiamo ([14], p. 83) che se

$$a^{-1} \in L^r(\Omega) \begin{cases} \text{con } r \geq 2, \text{ quando } n = 1, \\ \text{con } r > 2, \text{ quando } n = 2, \\ \text{con } r \geq n, \text{ quando } n \geq 3, \end{cases}$$

allora l'operatore K definito da

$$D(K) := \{u \in L^2(\Omega) : au \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)\},$$
$$Ku := -\Delta(au), u \in D(K)$$

soddisfa la stima risolvente

$$\|(\lambda I + K)^{-1} f\|_{L^2(\Omega)} \le c|\lambda|^{-(2r-n)/2r} \|f\|_{L^2(\Omega)},$$

per ogni λ in un settore contenente il semipiano $\Re \mathrm{e}\ z \ge 0$. Cosí $\alpha = 1$, $\beta = (2r-n)/2r$.

Supponiamo che $a(x), d(x)$ appartengano a $L^{r_1}(\Omega), L^{r_2}(\Omega)$. Valgono pertanto (6.5), (6.6) con $\alpha = 1$, $\beta_1 = (2r_1 - n)/2r_1$, $\beta_2 = (2r_2 - n)/2r_2$ per gli operatori L_1 e L_2 corrispondenti a K. Poiché gli operatori di moltiplicazione per $b(x)$ e per $c(x)$ sono limitati, β in (6.4) è

$$\beta = \min\{\beta_1, \beta_2\} = \min\{1 - \frac{1}{2r_1}, 1 - \frac{1}{2r_2}\} > \frac{1}{2}, \ (r_1, r_2 > n).$$

Supponiamo

$$\begin{vmatrix} \int_\Omega \eta_1(x) z_{11}(x) dx & \int_\Omega \eta_1(x) z_{12}(x) dx \\ \int_\Omega \eta_2(x) z_{21}(x) dx & \int_\Omega \eta_2(x) z_{22}(x) dx \end{vmatrix} \ne 0,$$
$$g_1, g_2 \in C^1([0,\tau]; R), \quad 2(1-\beta) < \theta < 1.$$

Poiché $(L^2(\Omega) \times L^2(\Omega), D(\mathcal{A}))_{\theta,\infty} = (L^2(\Omega), D(L_1))_{\theta,\infty} \times (L^2(\Omega), D(L_2))_{\theta,\infty}$ se $(\Delta(a(\cdot)u_0) + b(\cdot)v_0, c(\cdot)u_0 + \Delta(d(\cdot)v_0)) \in (L^2(\Omega), D(L_1))_{\theta,\infty} \times (L^2(\Omega), D(L_2))_{\theta,\infty}$, $z_{11}, z_{12} \in (L^2(\Omega), D(L_1))_{\theta,\infty}$, $z_{21}, z_{22} \in (L^2(\Omega), D(L_2))_{\theta,\infty}$, possiamo concludere che il problema (7.7)$\sim$(7.11), con la condizione di compabilitá (7.12) ha una unica soluzione stretta globale $((u,v), f_1, f_2) \in C([0,\tau]; D(L_1) \times D(L_2)) \times C([0,\tau]; R) \times C([0,\tau]; R)$ tali che $\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial t} \\ \frac{\partial v}{\partial t} \end{bmatrix} \in B([0,\tau]; (L^2(\Omega) \times L^2(\Omega), D(L_1) \times D(L_2))_{\theta,\infty})$, $\mathcal{A} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \in C^{\theta - 2(1-\beta)}([0,\tau]; L^2(\Omega) \times L^2(\Omega))$.

Piú in generale, si potrebbe trattare un analogo problema doppiamente degenere relativo al sistema

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t}(m(x)u(t,x)) = \Delta(a(x)u(t,x)) + b(x)v(t,x) + f_1(t)z_{11}(x) + f_2(t)z_{12}(x), \\ &\frac{\partial}{\partial t}(n(x)v(t,x)) = c(x)u(t,x) + \Delta(d(x)v(t,x)) + f_1(t)z_{21}(x) + f_2(t)z_{22}(x), \\ &\quad (t,x) \in (0,\tau) \times \Omega \end{aligned}$$

$m(x), n(x)$ continue > 0 su Ω, mediante il cambiamento di variabili $m(x)u = u_1$, $n(x)v = v_1$.

BIBLIOGRAFIA

[1] M. AL Horani, A. Favini, *An identification problem for first order degenerate differential equations*, Journal Optim. Th. Appl. 130 (2006), 41–60.

[2] M. AL Horani, A. Favini, *Degenerate first order identification problems in Banach spaces*, in Differential Equations: Inverse and Direct Problems, 1–15, Angelo Favini and Alfredo Lorenzi eds., Taylor and Francis Group, Chapman & Hall CRC, Boca Raton, USA, 2006.

[3] M. AL Horani, A. Favini, A. Lorenzi, *Second-order degenerate identification differential problems*, Journal Optim. Th. Appl. 141 (2009), 13–36.

[4] M. AL Horani, A. Favini, A. Lorenzi, H. Tanabe, *First-order regular and degenerate identification differential problems*, Preprint.

[5] A. Asanov, E.R. Atamanov, *Nonclassical and inverse problems for pseudoparabolic equations*, VSP, Utrecht, Holland, 1997.

[6] V. Capasso, K. Kunish, *A reaction diffusion system arising in modelling man-environment diseases*, Quart. Appl. Math. 46 (1988), 431–450.

[7] R. Cross, *Multivalued linear operators*, M. Dekker, New York, USA, 1998.

[8] N. Durford, J.T. Schwartz, *Linear operators, Part I*, Interscience Publ., New York, USA, 1967.

[9] K. Engel, *Operator matrices and systems of evolution equations*, Preprint.

[10] A. Favini, A. Lorenzi, *Singular integro-differential equations of parabolic type and inverse problems*, Mathem. Models and Methods in Applied Sciences 13 (2003), 1745–1766.

[11] A. Favini, A. Lorenzi, *Identification problems in singular integro-differential equations of parabolic type I*, Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems, Series A: Math. Anal. 12 (2005), 303–321.

[12] A. Favini, A. Lorenzi, *Identification problems in singular integro-differential equations of parabolic type II*, Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications 56 (2004), 879–904.

[13] A. Favini, A. Lorenzi, H. Tanabe, *Direct and inverse problems for systems of singular differential boundary value problems*, Preprint.

[14] A: Favini, A. Yagi, *Degenerate differential equations in Banach spaces*, M. Dekker, New York, USA, 1999.

[15] A: Lorenzi, *Introduction to identification problems via functional analysis*, VSP, Utrecht, Holland, 2001.

[16] A. Lunardi, *Analytic semigroups and optimal regularity in parabolic problems*, Birkhäuser, Basel, Switzerland, 1995.

[17] K. Taira, *The theory of semigroups with weak singularity and its applications to partial differential equations*, Tsukuba J. Math. 13 (1989), 513–562.

[18] H. Triebel, *Interpolation theory, function spaces, differential operators*, North-Holland, Amsterdam, Holland, 1978.

[19] C. Wild, *Semigroupes de croissance $\alpha < 1$ holomorphes*, C.R. Acad. Sc. Paris 285 (1977), 437–440.