SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
DELL'UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI BOLOGNA

Angelo Favini

PROBLEMI DI IDENTIFICAZIONE PER EQUAZIONI DIFFERENZIALI DEGENERI DEL PRIMO E DEL SECONDO ORDINE

24 gennaio 2008

Sunto. Si studiano problemi di identificazione per equazioni differenziali degeneri del primo e del secondo ordine nel tempo. Si trattano anche problemi di evoluzione regolari in spazi funzionali non-standard.

I risultati astratti sono illustrati con alcune applicazioni ad equazioni alle derivate parziali di interesse in scienze applicate.

Summary. Identification problems for degenerate abstract differential equations both of the first order and the second are discussed. This also allows to handle some regular evolution equations in non-standard functional spaces.

The abstract results are illustrated by means of some applications to concrete evolution problems for partial differential equations of interest in applied sciences.

Voglio ricordare il Professor **Bruno Pini**, il mio, il nostro **maestro**, che è stato la guida, l'esempio per me e per tanti di noi fin dall'inizio degli studi.

A lui rivolgo un pensiero commosso.

1 Introduzione

In questo Seminario esporró alcuni recenti risultati su problemi di identificazione per equazioni di evoluzione del primo e del secondo ordine, prevalentemente degeneri.

Una descrizione sintetica della problematica e dei metodi di soluzione si puó trovare nella monografia [11] di A. Lorenzi. Piú ampio materiale e motivazioni dalla fisica matematica si trovano, per esempio, nella monografia [13] di Prilepko et al. In tutta questa letteratura non vengono peró considerati problemi inversi, e in particolare, di identificazione, per equazioni differenziali o integro-differenziali in spazi di Banach, di tipo degenere o singolare. Tuttavia, vari ricercatori, soprattutto di origine russa, avevano giá cominciato a studiare problemi inversi (e non classici) per equazioni pseudoparaboliche, cfr. [5].

Ecco uno dei problemi-tipo: si tratta di determinare la (unica) coppia (y, f) in un certo ambito funzionale, soddisfacente

$$D_t(My(t)) + Ly(t) = f(t)z, \quad 0 \leq t \leq \tau, \tag{1}$$

$$(My)(0) = My_0, \tag{2}$$

$$\Phi[My(t)] = g(t), \quad 0 \leq t \leq \tau, \tag{3}$$

dove L, M sono operatori lineari chiusi dallo spazio di Banach X in sé, $y_0 \in \mathcal{D}(L)$ è dato, $\Phi \in X^*$ e $g \in C([0,\tau];\mathbb{R})$ è l'informazione aggiuntiva. Si richiede $\mathcal{D}(L) \subseteq \mathcal{D}(M)$, L invertibile, ma non necessariamente che M abbia inverso limitato.

Vogliamo una soluzione **stretta**, nel senso che

$$y \in C([0,\tau];\mathcal{D}(L)), \quad My \in C^1([0,\tau];X), \quad f \in C([0,\tau];\mathbb{R}).$$

Chiaramente, dovrá valere la condizione di compatibilitá

$$\Phi[My_0] = g(0).$$

Un primo, semplice risultato è stato ottenuto da M. AL Horani [1] sotto l'ipotesi che $\lambda = 0$ sia un polo semplice per l'operatore $L(\lambda L + M)^{-1}$. Poichè allora $X = N(T) \oplus R(T)$, dove $T = ML^{-1}$, l'equazione viene proiettata negli spazi $N(T)$ e $R(T)$ ottenendo una equazione algebrica e una differenziale regolare, rispettivamente e tutto viene ridotto ad un problema del tipo trattato in [11,13].

Questo approccio è stato esteso da AL Horani e Favini in [2] al problema del secondo ordine

$$D_t(MD_ty) + LD_ty + Ky = f(t)z, \quad 0 \leq t \leq \tau, \tag{4}$$

$$y(0) = y_0, \tag{5}$$

$$My'(0) = My_1, \tag{6}$$

$$\Phi[My(t)] = g(t), \quad 0 \leq t \leq \tau, \tag{7}$$

(a volte scriveremo per brevitá y' invece di D_t,) sotto le condizioni di compatibilitá $\Phi[My_0] = g(0)$, $\Phi[My_1] = g'(0)$, purché, appunto, $\lambda = 0$ sia un polo semplice per $L(\lambda L + M)^{-1}$ e $\mathcal{D}(L) \subseteq \mathcal{D}(M) \cap \mathcal{D}(K)$.

Benché la condizione sul risolvente sia soddisfatta per certe equazioni alle derivate parziali di interesse applicativo, è naturale chiedersi se tali problemi di identificazione siano risolubili in condizioni molto piú generali, per esempio, nella ipotesi che la coppia (L, M) sia (debolmente) parabolica, cioè per ogni $\lambda \in \Sigma_\alpha$, dove

$$\Sigma_\alpha := \{\lambda \in \mathbb{C} : \Re\mathrm{e}\ \lambda \geq -c(1 + |\Im\mathrm{m}\ \lambda|)^\alpha\}, \quad c > 0,$$

esista l'inverso limitato $(\lambda M + L)^{-1}$ e

$$\|M(\lambda M + L)^{-1}\|_{L(X)} \leq k(1 + |\lambda|)^{-\beta}, \quad \forall \lambda \in \Sigma_\alpha, \tag{8}$$

con $\alpha + \beta > 1$, $0 < \beta \leq \alpha \leq 1$. $L(X)$ denota naturalmente lo spazio di Banach delle funzioni lineari limitate da X in sé con

$$\|T\|_{L(X)} = \sup_{\|x\|=1} \|T(x)\|.$$

Il contenuto del Seminario è allora il seguente: nella Sezione 2 consideriamo il problema di identificazione (1)$\sim$(3), nel paragrafo 3 trattiamo brevemente il problema del secondo ordine (4)$\sim$(7).

Verranno forniti esempi concreti di applicazione a PDEs. I risultati vengono fondamentalmente dai lavori [3] e [4], in collaborazione con M. AL Horani e A. Lorenzi.

2 Problemi di identificazione del primo ordine

Cominciamo ad analizzare (1)$\sim$(3) nel caso migliore, cioè valga l'ipotesi (8) con $\alpha = \beta = 1$ e, in piú, lo spazio X sia riflessivo. Posto $T = ML^{-1}$, allora $T \in L(X)$ e

$$\|(zT + I)^{-1}\|_{L(X)} \leq k, \quad z \in \Sigma_1.$$

Una conseguenza del Teorema ergodico (cfr. [15]) assicura che X è la somma diretta $X = N(T) \oplus \overline{R(T)}$, essendo $N(T)$ il nucleo di T e $\overline{R(T)} = Y$ la chiusura dell'immagine di T. Denotando con $\tilde{T}$ la restrizione di T a Y, $\tilde{T}$ è un operatore potenziale astratto (cfr. [15]) in Y, anzi, $-\tilde{T}^{-1}$ genera un semigruppo analitico in Y.

Sia P la proiezione su $N(T)$ lungo Y. Allora il problema (1)$\sim$(3) si traduce, dopo il cambiamento di variabile $Ly = x$, nel sistema algebrico-differenziale

$$D_t(\tilde{T}(1-P))x(t) + (1-P)x(t) = f(t)(1-P)z, \quad 0 \leq t \leq \tau, \tag{9}$$

$$\tilde{T}(1-P)x(0) - \tilde{T}(1-P)Ly_0, \ (\text{se } y_0 \in \mathcal{D}(L)) \tag{10}$$

$$\Phi[\tilde{T}(1-P)x(t)] = g(t), \quad 0 \leq t \leq \tau, \tag{11}$$

$$Px(t) = f(t)Pz. \tag{12}$$

Il sistema (9)$\sim$(11) è riconducibile ad un sistema classico ponendo $\tilde{T}(1-P)x(t) = w(t)$ e utilizzando gli spazi d'interpolazione reale $(Y, \mathcal{D}(\tilde{T}^{-1}))_{\theta,\infty}$, $0 < \theta < 1$, cfr. Lunardi [12]. Una volta che $f(t)$ hölderiana è univocamente determinata, segue che anche $Px(t)$ lo è, insieme a $(1-P)x(t) = \tilde{T}^{-1}w(t)$.

Possiamo enunciare allora il primo risultato.

Teorema 1. *Valga l'assunzione (8) sugli operatori lineari chiusi nello spazio di Banach riflessivo X, con $\alpha = \beta = 1$, $\mathcal{D}(L) \subseteq \mathcal{D}(M)$, L invertibile, $\Phi \in X^*$, $g \in C^{1+\theta}([0,\tau];\mathbb{R})$, $0 < \theta < 1$, $\Phi[My_0] = g(0)$. Supponiamo poi*

$$\Phi[(1-P)z] \neq 0,$$

e per $0 < \theta < \theta_0 < 1$ risulti

$$\sup_{t>0} t^{\theta_0} \|(tT + I)^{-1}(1-P)z\| < \infty, \tag{13}$$

$$\sup_{t>0} t^{\theta} \|(tT + 1)^{-1}(1-P)Ly_0\| < \infty. \tag{14}$$

Allora (1)$\sim$(3) ammette una unica soluzione globale stretta (y, f):

$$(y, f) \in C^{\theta}([0,\tau]; \mathcal{D}(L)) \times C^{\theta}([0,\tau];\mathbb{R}), My \in C^{1+\theta}([0,\tau]; X).$$

La (13) si legge anche

$$\sup_{t>0} t^{\theta_0} \|L(tM + L)^{-1}(1-P)z\| < \infty.$$

Introducendo l'operatore multivoco $A = LM^{-1}$,

$$L(tM + L)^{-1} = A^0(tI + A)^{-1} := I - t(tI + A)^{-1}, \text{ (cfr [8])}$$

la suddetta condizione puó interpretarsi come

$$(1-P)z \in (Y, \mathcal{D}(A))_{\theta_0,\infty} = (X, \mathcal{D}(A))_{\theta_0,\infty}.$$

Esempio 1. Prendiamo $X = H^{-1}(\Omega)$, dove Ω è un aperto limitato di $\mathbb{R}^n$ con frontiera $\partial\Omega$ regolare (C^∞), $L = -\Delta$, $\mathcal{D}(L) = H_0^1(\Omega)$, M = moltiplicazione per una funzione misurabile non negativa e limitata $m(\cdot)$. È visto in [8] che tali M, L soddisfano (8) con $\alpha = \beta = 1$.

Se $\eta \in H_0^1(\Omega)$ è nello spazio duale di $H^{-1}(\Omega)$, possiamo quindi trattare il problema di identificazione per l'equazione del calore (di Poisson) degenere

$$\begin{aligned}
&D_t(m(x)u(x,t)) - \Delta u(x,t) = f(t)z(x), \quad (x,t) \in \Omega \times [0,\tau], \\
&m(x)u(x,t) \to m(x)u_0(x) \text{ per } t \to 0^+ \text{ in } H^{-1}(\Omega), \\
&\langle \eta, m(\cdot)u(\cdot,t)\rangle_{H_0^1(\Omega)\times H^{-1}(\Omega)} = g(t), \quad 0 \leq t \leq \tau.
\end{aligned}$$

Sebbene la proiezione P sia esplicitata in [15], la descrizione non è semplice. Se $z(x) = z_0(x) + z_1(x)$, dove $z_0 \in N(T)$, $z_1(x) = m(x)z_2(x)$, $z_2 \in H_0^1(\Omega)$,

$\langle \eta, mz_2 \rangle_{H_0^1(\Omega)\times H^{-1}(\Omega)} \neq 0$, $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ con $\Delta u_0 = mu_1$, per una funzione $u_1 \in H_0^1(\Omega)$, allora tutte le condizioni del Teorema 1 sono soddisfatte. Ricordiamo che se $V = H_0^1(\Omega)$ è munito del suo usuale prodotto interno, il suo duale $V' = H^{-1}(\Omega)$ si puó vedere come uno spazio di Hilbert rispetto al prodotto scalare

$$(u, \bar{u})_{V'} := \langle u, \psi \rangle_{V',V},$$

dove $\psi \in V$ soddisfa

$$-\Delta\psi = \bar{u}, \quad \psi = 0 \text{ su } \partial\Omega,$$

$\langle u, \psi \rangle_{V',V}$ essendo la dualitá fra V' e V. In effetti, essa si riduce al prodotto scalare in $L^2(\Omega)$

$$\int_\Omega u(x)\psi(x)dx, \quad \text{se } u \in L^2(\Omega).$$

Il caso $\beta < 1$ è molto piú complicato. Utilizzando basilari disuguaglianze di convoluzione in [6,7], necessarie per bilanciare la perdita di regolaritá temporale della soluzione di

$$\begin{aligned} &D_t(My) + Ly = f(t), \quad 0 \le t \le \tau, \\ &(My)(0) = My_0, \end{aligned}$$

nel senso che (cfr. [8]), se $f \in C^\theta([0,\tau];X)$, $0 < \beta \le \alpha \le 1$, $\alpha + \beta > 1$, $\omega = 2 - \alpha - \beta < \theta < 1$, $y_0 \in \mathcal{D}(L)$,

$$f(0) - Ly_0 \in W_\theta = \{y \in X : \sup_{t>0} t^\theta \|L(tM+L)^{-1}y\|_X = \sup_{t>0} t^\theta \|(tT+I)^{-1}y\|_X < \infty\},$$

allora esiste una unica soluzione $y \in C^{\theta-\omega}([0,\tau];\mathcal{D}(L))$ con $D_t(My) \in C^{\theta-\omega}([0,\tau];X)$ del problema sopra richiamato, si puó dimostrare il seguente risultato.

Teorema 2. *Valga la (8) e, in piú, sia $\alpha + \beta > 3/2$. Sia poi*

$$\begin{aligned} &g \in C^{1+\theta}([0,\tau];\mathbb{R}),\ 2 - \alpha - \beta < \theta < \alpha + \beta - 1,\ \Phi \in X^*, \\ &z = Tz^*,\ \Phi[z] \neq 0,\ Ly_0 = Tx^*,\ \Phi[My_0] = g(0). \end{aligned}$$

Allora il problema (1)∼(3) ammette una unica soluzione globale stretta $(y, f) \in C^\theta([0,\tau],\mathcal{D}(L)) \times C^\theta([0,\tau];\mathbb{R})$, $D_t(My) \in C^\theta([0,\tau];X)$.

Dal Teorema 2 si ottiene anche il seguente corollario relativo a generatori $-A$ di semigruppi infinitamente differenziabili di tipo parabolico, a dominio non necessariamente denso nello spazio di Banach X, soddisfacenti

$$\|(\lambda I + A)^{-1}\|_{L(X)} \le c(1 + |\lambda|)^{-\beta}, \quad \lambda \in \Sigma_\alpha, \tag{15}$$

cfr. [8,14,16].

Corollario 1. *Siano $0 < \beta \le \alpha \le 1$, $\alpha + \beta > 3/2$, valga (15), $g \in C^{1+\theta}([0,\tau];\mathbb{R})$, $2 - \alpha - \beta < \theta < \alpha + \beta - 1$, $\Phi \in X^*$, $z \in \mathcal{D}(A)$, $\Phi[z] \neq 0$, $y_0 \in \mathcal{D}(A^2)$, $\Phi[y_0] = g(0)$.*

Allora il problema di identificazione

$$\begin{aligned}
&y'(t) + Ay(t) = f(t)z, \quad 0 \le t \le \tau,\\
&y(0) = y_0,\\
&\Phi[y(t)] = g(t), \quad 0 \le t \le \tau,
\end{aligned}$$

ammette una unica soluzione $(y, f) \in C^\theta([0,\tau]; \mathcal{D}(A)) \times C^\theta([0,\tau]; \mathbb{R})$, $D_t y \in C^\theta([0,\tau]; X)$.

Esempio 2. Consideriamo il problema di identificazione in un dominio Ω di $\mathbb{R}^n$ con frontiera regolare $\partial\Omega$:

$$\begin{aligned}
&D_t(m(x)u(x,t)) = \sum_{i,j=1}^{n} D_{x_i}(a_{ij}(x) D_{x_j} u(x,t)) - a_0(x)u(x,t) + f(t)v(x),\\
&\qquad\qquad\qquad\quad (x,t) \in \Omega \times [0,\tau],\\
&u(x,t) = 0 \ \forall (x,t) \in \partial\Omega \times [0,\tau],\\
&\lim_{t\downarrow 0} m(x)u(x,t) = m(x)u_0(x), \quad x \in \Omega,\\
&\Phi[m(\cdot)u(\cdot,t)] = g(t), \quad 0 \le t \le \tau,
\end{aligned}$$

dove Φ è il funzionale associato a $\eta \in L^q(\Omega)$, $1/p + 1/q = 1$, $1 < p < \infty$, cioè

$$\Phi[m(\cdot)u(\cdot,t)] = \int_\Omega \eta(x) m(x) u(x,t) dx.$$

Si assume

$$\begin{aligned}
&a_0, a_{ij} \in C(\bar\Omega), \quad a_{ij} = a_{ji}, \quad a_0(x) \ge \gamma > 0,\\
&\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \ge c_0|\xi|^2, \quad \forall x \in \bar\Omega, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \quad c_0 > 0,\\
&m \in C(\bar\Omega), \quad , m(x) \ge 0, \quad \forall x \in \bar\Omega.
\end{aligned}$$

Si introducono gli operatori L ed M mediante

$$\begin{aligned}
&\mathcal{D}(L) := W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega), \quad Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} D_{x_j}(a_{ij} D_{x_j} u) + a_0(x)u,\\
&\mathcal{D}(M) = L^p(\Omega) = X, \quad Mu = m(\cdot)u(\cdot).
\end{aligned}$$

Allora (cfr. [8], pp. 79–80), vale (8) con $\alpha = 1$, $\beta = 1/p$, cosicché $\omega = 1/q$ e $\alpha + \beta > 3/2$ se e solo se $1 < p < 2$. In tal caso il Teorema 2 implica che se $1/q < \theta < 1/p$, $g \in C^{1+\theta}([0,\tau]; \mathbb{R})$, $\eta \in L^q(\Omega)$, $v(x) = m(x)\bar v(x)$, con $\bar v \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$, $\int_\Omega \eta(x)v(x)dx \ne 0$, $u_0 \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$, $Lu_0 = m\bar v_0$, con $\bar v_0 \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ e

$$\int_\Omega \eta(x) m(x) u_0(x) dx = g(0),$$

allora il problema di identificazione sopra descritto ammette una unica soluzione stretta globale

$$(u,f) \in C^\theta([0,\tau]; W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)) \times C^\theta([0,\tau];\mathbb{R}),$$

tale che $D_t(mu) \in C^\theta([0,\tau]; L^p(\Omega))$.

Inoltre, se $m(\cdot)$ è piú regolare [8,9], cioè $m \in C^1(\bar\Omega)$, $|\nabla m(x)| \leq cm(x)^\rho$, $0 < \rho \leq 1$, allora (8) è soddisfatta con $\alpha = 1$ e

$$\beta = \begin{cases} (2-\rho)^{-1}, & \text{se } p \in (1,2) \text{ e } \rho \in (2-p,1), \\ 2[p(2-\rho)]^{-1}, & \text{se } p \in [2,\infty),\ \rho \in (0,1). \end{cases}$$

Si possono cosí ampliare i valori di p per cui $\alpha + \beta > 3/2$.

Esempio 3. Le considerazioni dell'Esempio 2 si possono estendere ad operatori non simmetrici a diverse condizioni al contorno; per esempio,

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} D_{x_j}(a_{ij} D_{x_i} u) + \sum_{i=1}^{n} a_i(x) D_{x_i} u + a_0(x) u,$$

dove

$$\begin{aligned}
&a_{ij} \in C(\bar\Omega), \quad D_{x_j} a_{ij}, a_i, D_{x_i} a_i, a_0 \in L^\infty(\Omega),\ i,j = 1,\dots,n, \\
&\{a_{ij}(x)\} \text{ è una matrice simmetrica definita positiva,} \\
&\text{per ogni } x \in \bar\Omega: \ \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq c_0|\xi|^2,\ \forall x \in \bar\Omega,\ \xi \in \mathbb{R}^n,\ c_0 > 0, \\
&a_0 - \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{n} D_{x_i} a_i \geq c_1 > 0 \quad \text{in } \bar\Omega, \\
&b \in L^\infty(\partial\Omega), \quad b(x) + \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{n} a_i(x)\nu_i(x) \geq 0 \quad \forall x \in \partial\Omega,
\end{aligned}$$

dove $\nu(x) = (\nu_1(x), \dots, \nu_n(x))$ è il vettore normale unitario esterno in $x \in \partial\Omega$ e

$$\mathcal{D}(L) = \{u \in W^{2,p}(\Omega) : \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\nu_j D_{x_i} u + bu = 0 \text{ su } \partial\Omega\},$$

cioè $u \in \mathcal{D}(L)$ soddisfa condizioni al bordo di tipo Robin. Nel lavoro [10], in corso di stampa, è visto (Theorem 2.1) che se $m(x)$ è non negativa e in $L^\infty(\Omega)$, allora la coppia (L, M) soddisfa la (8) con $\alpha = 1$, $\beta = 1/p$. Pertanto, se $1 < p < 2$, i risultati descritti nell'Esempio 2 possono essere estesi a questo caso. Analogamente, se m è ρ-regolare, si ottengono stime risolventi migliori, analoghe a quelle descritte nell'Esempio 2. Si rimanda a [10].

Diamo ora due esempi non standard a cui il Corollario 1 si applica.

Esempio 4. In questa applicazione utilizzeremo un pregevole risultato di K. Taira [14].

Sia Ω un dominio limitato di $\mathbb{R}^n$ con frontiera $\partial\Omega$ di classe C^∞. Si assume inoltre che anche $\bar{\Omega}$ sia una varietá C^∞ n-dimensionale compatta con frontiera $\partial\Omega$. Sia

$$A = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) D_{x_i} D_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x) D_{x_i} + c(x)$$

un operatore differenziale ellittico del secondo ordine a coefficienti reali e C^∞ su $\bar{\Omega}$ tale che

$$a_{ij}(x) = a_{ji}(x), \quad \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq c_0|\xi|^2, \quad c_0 > 0, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Introduciamo l'operatore differenziale sul bordo

$$Bu = aD_\nu + \mathcal{T}u + bu,$$

dove a, b sono funzioni reali C^∞ su $\partial\Omega$, $\mathcal{T}u = \alpha \cdot \nabla u$ è un operatore tangenziale su $\partial\Omega$ ($\alpha \in C^\infty(\partial\Omega)$) e D_ν denota la derivata conormale associata alla matrice $\{a_{ij}\}$, cioè

$$D_\nu = \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_i j(x) n_i(x) n_j(x) \right)^{-1/2} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) n_i(x) n_j(x) D_{x_i},$$

dove $n(x) = (n_1(x), \ldots, n_n(x))$ denota il vettore normale unitario esterno a $\partial\Omega$ in x. Consideriamo il problema spettrale

$$\text{(SP)} \qquad \begin{cases} (A - \lambda)u = f & \text{in } \Omega, \\ Bu = \varphi & \text{su } \partial\Omega, \end{cases}$$

dove f e φ sono date funzioni su Ω e su $\partial\Omega$, rispettivamente. Si assume (cfr. [14], p. 515) che il campo vettoriale α non si annulli su $\Gamma_0 = \{x \in \partial\Omega : a(x) = 0\}$ e la funzione $t \to a(x(t, x_0))$ abbia zeri di ordine pari non maggiori di $2k$ lungo la curva integrale $x(t, x_0)$ di α passante per $x_0 \in \Gamma_0$ in $t = 0$. Una tale condizione viene detta condizione $(\mathrm{H})_\delta$, dove $\delta = 1/(1 + 2k)$. Notiamo che se $\delta \in (0, 1)$, il problema (SP) è un problema subellittico.

Sotto questa ipotesi, introduciamo l'operatore L mediante

$$\mathcal{D}(L) = \{u \in L^2(\Omega) : \ Au \in L^2(\Omega), \ Bu = 0\}, \quad Lu = -Au, \ u \in \mathcal{D}(L).$$

Allora, il Teorema 3, p. 516, in [14] stabilisce che l'operatore L soddisfa in $L^2(\Omega) = X$ la stima risolvente

$$\|(\lambda I + L)^{-1}\|_{L(L^2(\Omega))} \leq c|\lambda|^{-(1+\delta)/2}$$

per ogni λ con $|\arg \lambda| \leq \varphi$, $\varphi \in (\pi/2, \pi)$, $|\lambda|$ sufficientemente grande. Si puó allora applicare il Corollario 1, con $\alpha = 1$, $\beta = (1 + \delta)/2$. Si tenga presente che la soluzione u di (SP) soddisfa la stima

$$\|u\|^2_{H^{1+\delta}(\Omega)} \leq c\{\|f\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\varphi\|^2_{H^{1/2}(\Omega)} + |\lambda|^{1/2}\|\varphi\|^2_{L^2(\partial\Omega)}\}.$$

Per esempio, possiamo quindi considerare il problema di identificazione

$$\begin{aligned}
&D_t u(x,t) - A(x,D)u(x,t) = f(t)z(x), \quad (x,t) \in \Omega \times (0,\tau),\\
&a(x)D_\nu u(x,t) + (\mathcal{T}u)(x,t) + b(x)u(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \partial\Omega \times (0,\tau),\\
&u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \Omega,\\
&\int_\Omega \eta(x)u(x,t)dx = g(t), \quad 0 \le t \le \tau.
\end{aligned}$$

Poiché $\alpha = 1$, $\beta = (1+\delta)/2$, dovremo supporre

$$\begin{aligned}
&\theta \in \left(\frac{1-\delta}{2}, \frac{1+\delta}{2}\right), \quad \eta \in L^2(\Omega), \quad z(\cdot) \in \mathcal{D}(A),\\
&\int_\Omega \eta(x)z(x)dx \ne 0, \quad g \in C^{1+\theta}([0,\tau];\mathbb{R}), \quad \int_\Omega \eta(x)u_0(x)dx = g(0),
\end{aligned}$$

con $u_0 \in \mathcal{D}(A)$, $Bu_0 = 0$, $Au_0 \in \mathcal{D}(A)$, $BAu_0 = 0$. In tal caso, il problema di identificazione corrispondente ammette una unica soluzione stretta globale (u,f) tale che $u \in C^\theta([0,\tau];\mathcal{D}(L))$, $f \in C^\theta([0,\tau];\mathbb{R})$, $D_t u \in C^\theta([0,\tau];L^2(\Omega))$.

Esempio 5. Qui si considerano equazioni di evoluzione in spazi di Hölder di ordine > 1. A tal fine utilizziamo le notazioni e le stime fondamentali di W. von Wahl [16].

Ancora Ω denota un dominio aperto limitato di $\mathbb{R}^n$ con frontiera regolare $\partial\Omega$. Se $\nu \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ e $\omega \in (0,1)$, $C^{\nu+\omega}(\bar\Omega)$ denota lo spazio di Banach delle funzioni ν-volte differenziabili con continuitá su $\bar\Omega$ e le cui derivate di ordine ν sono hölderiane di esponente ω su $\bar\Omega$, munito della norma naturale.

Se $m \in \mathbb{N}$, $\omega \in (0, \min\{1/3, 1-1/(2m)\}) = (0,1/3)$, $\tilde\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ è un multi-indice, $\alpha_j \in \mathbb{N}\cup\{0\}$, $D^{\tilde\alpha} = \prod_{j=1}^n D_j^{\alpha_j}$, $D_j = i^{-1}\partial/\partial x_j$, supponiamo che $A_{\tilde\alpha} \in C^{\omega+1}(\bar\Omega;\mathbb{C})$, $|\tilde\alpha| \le 2m$, soddisfi $A_{\tilde\alpha}(x) \in \mathbb{R}$ per $|\tilde\alpha| \in \{0,2m\}$, $x \in \bar\Omega$ ed esista $M > 0$ per cui

$$M^{-1}|\xi|^{2m} \le \sum_{|\tilde\alpha|=2m} A_{\tilde\alpha}(x)\xi^{\tilde\alpha} \le M|\xi|^{2m}, \quad \forall x \in \bar\Omega, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Introduciamo l'operatore A in $X = C^{1+\omega}(\bar\Omega)$ mediante

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}(A) &:= \{u \in C^{2m+1+\omega}(\bar\Omega) : \ D^{\tilde\alpha}u = 0 \text{ su } \partial\Omega, \ |\tilde\alpha| \le m-1\},\\
Au &:= \sum_{|\tilde\alpha|\le 2m} A_{\tilde\alpha}(x)D^{\tilde\alpha}u, \quad u \in \mathcal{D}(A).
\end{aligned}$$

In [16], Satz II.1, p. 239, è provato che se $A_{\tilde 0}(x) \ge a_0$ sufficientemente grande, per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$, $\Re\mathrm{e}\,\lambda \ge -c_0(1+|\Im\mathrm{m}\,\lambda|)$, $c_0 > 0$ opportuno, vale la stima

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=0}^{2m} |\lambda|^{1-(j+1+\omega)/(2m)}\|u\|_{j+1+\omega} + \sum_{j=0}^{2m} |\lambda|^{1-(j+1)/(2m)}\|u\|_{j+1}\\
&\qquad \le c\|(\lambda I + A)u\|_{1+\omega}, \quad u \in \mathcal{D}(A).
\end{aligned}$$

Tale stima è fondamentale per provare (cfr. [16], p. 241) che $\lambda I + A$ ha inverso limitato in $X = C^{1+\omega}(\bar{\Omega})$ per tali λ e

$$\|(\lambda I + A)^{-1}\|_{L(X)} \leq c|\lambda|^{-1+(1+\omega)/(2m)}.$$

Il Corollario 1 si applica pertanto al problema di identificazione

$$\begin{aligned}
&D_t u(x,t) + A(x,D)u(x,t) = f(t)z(x), \quad (x,t) \in \Omega \times (0,\tau),\\
&u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \Omega,\\
&D^{\tilde{\alpha}} u(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \Omega \times (0,\tau), \quad |\tilde{\alpha}| \leq m-1,\\
&u(\bar{x},t) = g(t), \quad t \in [0,\tau],
\end{aligned}$$

dove $\bar{x}$ è un elemento fissato di $\bar{\Omega}$. Precisamente, se $m \geq 2$, $\omega \in (0,1/3)$, $(1+\omega)/(2m) < \theta < 1-(1+\omega)/(2m)$, $z(\cdot) \in \mathcal{D}(A)$, $z(\bar{x}) \neq 0$, $g \in C^{1+\theta}([0,\tau];\mathbb{R})$, $u_0 \in \mathcal{D}(A^2)$, $u_0(\bar{x}) = g(0)$, allora il suddetto problema ammette una unica soluzione stretta globale $(u,f) \in C^\theta([0,\theta];\mathcal{D}(A)) \times C^\theta([0,\tau];\mathbb{R})$, $u \in C^{1+\theta}([0,\tau];C^{1+\omega}(\bar{\Omega}))$.

3 Problemi di identificazione per equazioni del secondo ordine

Esporró velocemente alcuni risultati relativi al problema (4)$\sim$(7), cfr. [4].

Viene assunto che L, M, K siano operatori lineari chiusi nello spazio di Banach X, la coppia (L,M) soddisfi (8) e $\mathcal{D}(L) \subseteq D(M) \cap D(K)$. Siamo dunque nel caso parabolico, in cui L è dominante.

Va osservato che le conclusioni dei Teoremi 1 e 2 e del Corollario 1 continuano a valere se si suppone che le stime per $\|M(\lambda M + L)^{-1}\|_{L(X)}$ e $\|(\lambda I + A)^{-1}\|_{L(X)}$ valgano per $\lambda \in k_0 + \Sigma_\alpha$: basta introdurre la nuova incognita $w(t) = e^{-k_0 t} y(t)$. Vale poi il seguente lemma.

Lemma 1. *Siano $M : \mathcal{D}(M) \to X$, $L : \mathcal{D}(L) \to X$, $K : \mathcal{D}(K) \to X$ operatori lineari chiusi tali che $\mathcal{D}(L) \subseteq \mathcal{D}(M) \cap \mathcal{D}(K)$, vale (8) con $\alpha + \beta > 1$, L invertibile.*

Posto $\mathcal{D}(B) = \mathcal{D}(L) \times \mathcal{D}(M)$, $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(L) \times \mathcal{D}(L)$,

$$B = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & -I \\ K & L \end{bmatrix},$$

allora

$$\|B(\lambda B + A)^{-1}\|_{L(\mathcal{D}(L) \times X)} \leq c(1 + |\lambda|)^{-\beta}$$

per ogni $\lambda \in \Sigma_\alpha$, $|\lambda|$ grande.

Su $\mathcal{D}(L)$ si prende la norma $\|x\|_{\mathcal{D}(L)} := \|Lx\|$. La dimostrazione è facile. Posto

$$Q(\lambda) := I - \lambda(\lambda + KL^{-1})^{-1} KL^{-1} M(\lambda M + L)^{-1},$$

risulta

$$\lambda^2 M + \lambda L + K = (\lambda + KL^{-1}) Q(\lambda)(\lambda M + L)$$

per $\lambda \in \Sigma_\alpha$, $|\lambda|$ grande.

Chiaramente (4)$\sim$(6) si riduce al sistema del primo ordine in $\mathcal{D}(L) \times X$:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y(t) \\ x(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -I \\ K & L \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y(t) \\ x(t) \end{bmatrix} = f(t)\begin{bmatrix} 0 \\ z \end{bmatrix},$$
$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y(0) \\ x(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \end{bmatrix},$$

ma occorre associare a Φ un funzionale Ψ in $\mathcal{D}(L)^* \times X^*$.

Si noti poi che la riduzione a sistema deve necessariamente portare a richiedere una regolaritá in piú alla $g(t)$. Per superare questo ostacolo osserviamo preliminarmente che devono sicuramente valere le condizioni di consistenza

$$\Phi[My_0] = g(0), \quad \Phi[My_1] = g'(0) = \frac{dg}{dt}(0).$$

D'altra parte, la relazione $\Phi[My(t)] = g(t)$ implica $\Phi[My'(t)] = g'(t)$. Inversamente, se $\Phi[My'(t)] = g'(t)$, allora $\Phi[My(t)] - \Phi[My_0] = g(t) - g(0)$.

Possiamo allora procedere nel modo seguente. Fissiamo $h > 0$ grande. Il cambiamento di variabile $y(t) = e^{ht}x(t)$ trasforma (4)$\sim$(7) nel problema equivalente

$$(Mx')'(t) + (L + 2hM)x'(t) + (h^2M + hL + K)x(t) = e^{-ht}f(t)z, \quad 0 \le t \le \tau,$$
$$x(0) = y_0, \quad Mx'(0) = M(y_0 - hy_1),$$
$$\Phi[Mx(t)] = e^{-ht}g(t), \quad 0 \le t \le \tau.$$

Introduciamo il funzionale Ψ su $\mathcal{D}(L) \times X$ mediante

$$\Psi\left(\begin{bmatrix} y \\ w \end{bmatrix}\right) = \Phi[w].$$

Allora il problema (4)$\sim$(7) risulta equivalente a

$$D_t\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -I \\ h^2M + hL + K & L + 2hM \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \end{bmatrix}$$
$$= e^{-ht}f(t)\begin{bmatrix} 0 \\ z \end{bmatrix}, \ 0 \le t \le \tau,$$
$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x(0) \\ w(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 - hy_0 \end{bmatrix},$$
$$\Psi\left(\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \end{bmatrix}\right) = \Phi[Mw(t)] = D_t\left(e^{-ht}g(t)\right), \ 0 \le t \le \tau.$$

Tenuto conto di questa fondamentale osservazione, i principali risultati sul problema del secondo ordine possono essere cosí stabiliti.

Teorema 3. *Sia* $0 < \beta \le \alpha \le 1$, $\alpha + \beta > 3/2$, $2 - \alpha - \beta < \theta < \alpha + \beta - 1$. *Sia poi* $\Phi \in X^*$, *valga (8) e* $z = Mz^*$, $\Phi[z] \neq 0$,

$$Ky_0 + Ly_1 = M\bar{v}, \ \textit{per certi } z^*, \ \bar{v} \in \mathcal{D}(L),$$

$g \in C^{2+\theta}([0,\tau];\mathbb{R})$, con le condizioni

$$\Phi[My_0] = g(0), \quad \Phi[My_1] = g'(0).$$

Allora il problema (4)∼(7) ammette una unica soluzione stretta globale (y, f) tale che

$$y \in C^{1+\theta}([0,\tau];\mathcal{D}(L)), \quad My' \in C^{1+\theta}([0,\tau];X),$$
$$f \in C^{\theta}([0,\tau];\mathbb{R}).$$

Corollario 2. *Sia $-L$ il generatore di un semigruppo infinitamente differenziabile in X, con*

$$\|(\lambda I + L)^{-1}\|_{L(X)} \leq c(1 + |\lambda|)^{-\beta}$$

per ogni λ in $\Sigma_1 : \Re\mathrm{e}\ \lambda \geq -c_0(1 + |\Im\mathrm{m}\ \lambda|)$, $c_0 > 0$ e sia $\beta > 1/2$. Supponiamo $\Phi \in X^*$, $g \in C^{2+\theta}([0,\tau];X)$, $1 - \beta < \theta < \beta$, $z \in \mathcal{D}(L)$, $\mathcal{D}(L) \subseteq \mathcal{D}(K)$, $\Phi[z] \neq 0$, $y_0, y_1 \in \mathcal{D}(L)$, $Ky_0 + Ly_1 \in \mathcal{D}(L)$, $\Phi[y_0] = g(0)$, $\Phi[y_1] = g'(0)$.

Allora il problema di identificazione

$$y''(t) + Ly'(t) + Ky(t) = f(t)z, \quad 0 \leq t \leq \tau,$$
$$y(0) = y_0, \quad y'(0) = y_1,$$
$$\Phi[y(t)] = g(t), \quad 0 \leq t \leq \tau,$$

ammette una unica soluzione stretta globale (y, f) tale che

$$y \in C^{2+\theta}([0,\tau];X) \cap C^{1+\theta}([0,\tau];\mathcal{D}(L)),$$
$$f \in C^{\theta}([0,\tau];\mathbb{R}).$$

Teorema 4. *Siano M, L, K tre operatori lineari chiusi nello spazio di Banach riflessivo X, soddisfacenti*

$$\|M(\lambda M + L)^{-1}\|_{L(X)} \leq c(1 + |\lambda|)^{-1}, \quad \Re\mathrm{e}\ \lambda \geq \omega_0 \geq 0,$$

$\mathcal{D}(L) \subseteq \mathcal{D}(M) \cap \mathcal{D}(K)$. Sia P il proiettore sullo spazio nullo di $T = M(2hM + L)^{-1}$ per un certo $h > 0$.

Allora, se $\Phi \in X^*$, $z \in X$, $\Phi[(I - P)z] \neq 0$, $y_0, y_1 \in \mathcal{D}(L)$, $Ky_0 + Ly_1 = M\xi$ per uno $\xi \in \mathcal{D}(L)$, $(I - P)z \in R(T)$, $g \in C^{2+\theta}([0,\tau];\mathbb{R})$, $\Phi[My_0] = g(0)$, $\Phi[My_1] = g'(0)$, il problema di identificazione (4)∼(7) ammette una unica soluzione globale stretta

$$(y, f) \in [C^{1+\theta}([0,\tau];\mathcal{D}(L)) \cap C^{\theta}([0,\tau];\mathcal{D}(K))] \times C^{\theta}([0,\tau];\mathbb{R})$$

tale che

$$My' \in C^{1+\theta}([0,\tau];X).$$

Seguendo la traccia degli esempi precedenti, si possono fornire molte applicazioni ad equazioni alle derivate parziali del secondo ordine nel tempo.

BIBLIOGRAFIA

[1] M.H. AL Horani, *An identification problem for some degenerate differential equations,* Le Matematiche 57, pp. 217–227, 2002.

[2] M.H. AL Horani, A. Favini, *Degenerate second-order identification problems in Banach spaces,* Journal of Optimization Theory and Applications 120, pp. 305–326, 2004.

[3] M.H. AL Horani, A. Favini, *An identification problem for first-order degenerate differential equations,* Journal of Optimization Theory and Applications 130, pp. 41–60, 2006.

[4] M.H. AL Horani, A. Favini, A. Lorenzi *Second-order degenerate identification differential problems,* in corso di stampa su Journal of Optimization Theory and Applications, 2009.

[5] A. Asanov, E.R. Atamanov, Non-Classical and Inverse Problems for Pseudoparabolic Equations, VSP, Utrecht, 1997.

[6] A. Favini, A. Lorenzi, *Singular integro-differential equations of parabolic type and inverse problems*, Math. Models and Methods in Applied Sciences 13, pp. 1745–1766, 2003.

[7] A. Favini, A. Lorenzi, *Identification problems for singular integro-differential equations of parabolic type I,* Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems, Series A, Mathematical Analysis 12, pp. 303–328, 2005.

[8] A. Favini, A. Yagi, Degenerate Differential Equations in Banach Spaces, M. Dekker, New York-Basel-Hong Kong, 1999.

[9] A. Favini, A. Lorenzi, H. Tanabe, A. Yagi, *An L^p-approach to singular linear parabolic equations in bounded domains,* Osaka Journal of Mathematics 42, pp. 385–406, 2005.

[10] A. Favini, A. Lorenzi, H. Tanabe, A. Yagi, *An L^p-approach to singular linear parabolic equations with lower order,* in corso di stampa su Dynamics of Continuous and Discrete Systems, Special Issue, 2008.

[11] A. Lorenzi, An Introduction to Identification Problems via Functional Analysis, Inverse and Ill-posed Problems Series, VSP, Utrecht, 2001.

[12] A. Lunardi, Analytic Semigroups and Optimal Regularity in Parabolic Problems, Birkhäuser, Basel, 1995.

[13] A. Prilepko, D.G. Orlowsky, I. Vasin, Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics, M. Dekker, New York-Basel, NY, 2000.

[14] K. Taira, *The theory of semigroups with weak singularity and its applications to partial differential equations,* Tsukuba Journal Mathematics 13, pp. 513-562, 1989.

[15] K. Yosida, Functional Analysis, Springer Berlin, 1969.

[16] W. von Wahl, *Lineare und Semilineare Parabolische Differentialgleichungen in Räunen hölderstetigen Funktionen,* Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, pp. 234-262, 1975.