Seminario di Analisi Matematica

Dipartimento di Matematica
dell'Università di Bologna

Anno Accademico 2008-09

Fausto Ferrari

Soluzioni stabili di equazioni semilineari e disuguaglianze di tipo Poincaré con curvature nel gruppo di Heisenberg

19 marzo 2009

Abstract

We discuss about a family of inequalities associated with semilinear entire stable solutions classified as weighted Poincaré inequalities with curvatures in the Heisenberg group. Moreover we show their applications in transition phase problems.

1. Introduzione

Fra i primi risultati inerenti le disuguaglianze tipo Sobolev-Poincaré nel gruppo di Heisenberg occorre citare la disuguaglianza ottenuta da Jerison e Lee [20] che, nel caso in cui $p = 2$, assume la forma seguente: per ogni $u \in C_0^\infty(\mathbb{H}^1)$

$$(\int_{\mathbb{H}^1} | u |^4)^{1/4} \leq \pi^{-1/2}(\int_{\mathbb{H}^1} | \nabla_{\mathbb{H}} u |^2)^{1/2}.$$

D'altra parte, numerosi altri autori si sono occupati dell'esistenza di disuguaglianze analoghe, spesso genericamente note in letteratura come disuguaglianze di Sobolev-Poincaré, in ambiti anche puramente metrici. Ricordo, brevemente, per la loro generalità, i risultati di Franchi Lu e Wheeden, vedi [17]. Più precisamente, nello spazio metrico (Ω, ρ), se, w_i, $i = 1, 2$ sono funzioni non negative tali che esiste una costante positiva c per cui per tutte le palle metriche I, J rispettivamente di raggio $r(I)$ e $r(J)$ soddisfano

$$\frac{r(I)}{r(J)}(\frac{w_2(I)}{w_2(J)})^{1/q} \leq c(\frac{w_1(I)}{w_1(J)})^{1/p},$$

$w_1 \in A_p(\Omega, \rho, dx)$ (classe p di Muckenhoupt) e w_2 doubling, $1 \leq p < q < \infty$, (cioè esiste una costante positiva M tale che per ogni palla metrica B_r di raggio r, $w_2(B_{2r}) \leq M w_2(B_r)$) allora per ogni B_r e per ogni $\phi \in \mathrm{Lip}(\bar{B}_r)$

$$(\frac{1}{w_2(B_r)} \int_{B_r} | \phi - \phi_{B_r} |^q \; w_2(x) dx)^{\frac{1}{q}} \leq cr(\frac{1}{w_1(B_r)} \int_{B_r} | \nabla \phi |^p \; w_1(x) dx)^{\frac{1}{q}}$$

dove $w_i(B_r) = \int_{B_r} w_i$, $i = 1, 2$ e $\phi_{B_r} = \frac{1}{w_2} \int_{B_r} f(x) w_2(x) dx$.

L'interesse per tali disuguaglianze discende dalle numerose applicazioni che esse hanno nello studio delle equazioni alle derivate parziali di tipo ellittico ed ellittico degenere, soprattutto per quanto concerne la regolarità interna delle soluzioni.

In particolare, in questa nota, presenterò alcuni risultati[1] riguardanti una famiglia di disuguaglianze generate dalle soluzioni stabili di equazioni semilineari nel gruppo di Heisenberg in cui compaiono, opportunamente pesate, le curvature intrinseche degli insiemi di livello di tali soluzioni. Rimandando alla sezione successiva il dettaglio delle definizioni di base, possiamo immediatamente formulare il risultato principale, dopo aver introdotto

[1]Buona parte dei risultati presentati sono stati ottenuti in collaborazione con Enrico Valdinoci dell'Università di Roma Tor Vergata.

le seguenti notazioni essenziali. Con h, p, ν, v indico rispettivamente la curvatura media intrinseca, la curvatura immaginaria, la normale intrinseca e la direzione tangente unitaria intrinseca di $\{u = c\}$ nel gruppo di Heisenberg $\mathbb{H}^1$. Inoltre i simboli $\nabla_{\mathbb{H}} u$ e Hu individuano rispettivamente il gradiente orizzontale e la matrice Hessiana orizzontale di u, mentre $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{H}}$ è la metrica sulla fibra $\mathcal{H}$ per cui i vettori $X = (1, 0, 2y)$ $Y = (0, 1, -2x)$ sono ortogonali e $\mid \nabla_{\mathbb{H}} u \mid = \sqrt{(Xu)^2 + (Yu)^2}$, dove $Xu = \partial_x u + 2y\partial_t u$, $Yu = \partial_y u - 2x\partial_t u$ e $T = [X, Y]$.

Teorema 1.1. *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{H}^1$ un aperto con frontiera regolare. Se $u \in C^2(\Omega)$ è soluzione stabile di $\Delta_{\mathbb{H}} u = f(u)$ allora per ogni $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$*

$$\int_{\Omega\cap\{\nabla_{\mathbb{H}}u\neq 0\}} \mid \nabla_{\mathbb{H}} u \mid^2 \left[h^2 + \left(p + \frac{\langle Huv, \nu\rangle_{\mathbb{H}}}{\mid \nabla_{\mathbb{H}} u \mid}\right)^2 + q\right]\phi^2 \leq \int_{\Omega} \mid \nabla_{\mathbb{H}}\phi \mid^2 \mid \nabla_{\mathbb{H}} u \mid^2,$$

e

$$q = 2\frac{YuTXu - XuTYu}{\mid \nabla_{\mathbb{H}} u \mid^2}.$$

Questa ricerca generalizza un'idea contenuta nei lavori di Sternberg e Zumbrun, vedi [26], [27], successivamente ripresa anche in [13], sempre per operatori a coefficienti costanti.

Per mettere in risalto il contenuto del Teorema 1.1 richiamo il caso trattato da Sternberg e Zumbrun per l'operatore di Laplace.

Se $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ e $\Delta u = f(u)$ in $\mathbb{R}^n$ è stabile, cioè se per ogni $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, vale

$$0 \leq \int_{\mathbb{R}^n} \langle\nabla\phi, \nabla\phi\rangle + \int_{\mathbb{R}^n} f'(u)\phi^2, \tag{1}$$

allora per ogni $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ la seguente disuguaglianza è soddisfatta:

$$\int_{\nabla u\neq 0} \left(\mid \nabla u \mid^2 \mathcal{C}^2 + \mid \nabla_T \mid \nabla u \mid\mid^2\right)\phi^2 \leq \int \mid \nabla u \mid^2 \mid \nabla\phi \mid^2 \, dx,$$

dove $\mathcal{C}^2 = \sum_{j=1}^{n-1} k_i^2$, k_i, $i = 1, \ldots, n-1$ sono le curvature principali delle superficie di livello di $\{u = c\}$ in $\{\nabla u \neq 0\}$, mentre ∇_T indica il gradiente tangenziale lungo gli insiemi di livello $\{u = c\}$ in $\{\nabla u \neq 0\}$. Nella Sezione 2 introdurrò le notazioni principali, nella Sezione 3 presenterò un cenno della dimostrazione del Teorema 1.1, rimandando all'Appendice alcune precisazioni, mentre farò ulteriori commenti inerenti le motivazioni e le possibili applicazioni del Teorema 1.1 ad un problema di transizione di fase nella Sezione 4.

2. Notazioni principali

Con $\mathbb{H}^1$ si denota il gruppo di Heisenberg definito a partire da $\mathbb{R}^3$ dotato della seguente operazione noncommutativa: per ogni $(x_1, y_1, t_1), (x_2, y_2, t_2) \in \mathbb{R}^3$,

$$(x_1, y_1, t_1) \circ (x_2, y_2, t_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, t_1, t_2 + 2(x_2 y_1 - x_1 y_2)).$$

I vettori $X = (1, 0, 2y)$ and $Y = (0, 1, -2x)$ vengono identificati con i due campi vettoriali $X = \frac{\partial}{\partial x} + 2y\frac{\partial}{\partial t}$ e $Y = \frac{\partial}{\partial y} - 2x\frac{\partial}{\partial t}$ che generano l'algebra. La non-commutatità dell'algebra di Lie generata da X e Y è evidenziata dal primo commutatore non nullo

$$[X, Y] = T = -4\frac{\partial}{\partial t}.$$

Su ogni fibra $\mathcal{H}_P = \text{span}\{X(P), Y(P)\}$ viene assegnata una metrica per cui se $U, V \in \mathcal{H}_P$, con $U = \alpha_1 X + \beta_1 Y$ e $V = \alpha_2 X + \beta_2 Y$, allora si definisce

$$\langle U, V\rangle_{\mathbb{H}} = \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2.$$

Questo prodotto interno rende i vettori X e Y ortonormali su $\mathcal{H}_P$. La norma di un vettore $U \in \mathcal{H}_P$ è definita come

$$| U |_{\mathbb{H}} = \sqrt{\langle U, X\rangle_{\mathbb{H}}^2 + \langle U, Y\rangle_{\mathbb{H}}^2}.$$

Se u è una funzione di classe C^1 allora $\nabla_{\mathbb{H}} u(P) = (Xu(P), Yu(P))$ dove $Xu(P)$ e $Yu(P)$ sono le coordinate del vettore $\nabla_{\mathbb{H}} u(P)$ rispetto alla base X e Y in P. Il vettore $\nabla_{\mathbb{H}} u$ è detto gradiente orizzontale di u. Un punto $P \in \Sigma$ è caratteristico per una superficie di livello $\Sigma = \{u = c\}$ con $u \in C^1$ se la fibra in P coincide con lo spazio tangente Euclideo di Σ in P. In particolare se $\nabla_{\mathbb{H}} u(P) \neq 0$, allora P è non caratteristico.

Se $P \in \{u = k\} \cap \{\nabla_{\mathbb{H}} u \neq 0\}$, e $\{u = k\}$ è di classe C^1 allora il vettore

$$\nu = \frac{\nabla_{\mathbb{H}} u(P)}{| \nabla_{\mathbb{H}} u(P) |}. \tag{2}$$

è chiamato la normale intrinseca a $\{u = k\}$ in P.

Se ν, è la normale intrinseca in un punto non caratteristico $P \in \{u = k\}$, allora

$$v = \frac{(Yu(P), -Xu(P))}{\mid \nabla_{\mathbb{H}} u \mid}, \tag{3}$$

è il versore tangente intrinseco a $\{u = k\}$ in P rispetto alla base (X, Y). In particolare $\langle \nu, v \rangle_{\mathbb{H}} = 0$. Posto

$$\Delta_{\mathbb{H}} u = X^2 u + Y^2 u,$$

tale operatore può essere scritto anche in forma di divergenza intrinseca nel modo seguente:

$$\Delta_{\mathbb{H}} u = \mathrm{div}_{\mathbb{H}}(\nabla_{\mathbb{H}} u) = X(Xu) + Y(Yu).$$

La matrice Hessiana orizzontale di u nel gruppo di Heisenberg è:

$$Hu = \begin{bmatrix} XXu, & YXu \\ XYu, & YYu \end{bmatrix}.$$

Tale matrice non è simmetrica. La sua norma è:

$$|Hu| = \sqrt{(XXu)^2 + (YXu)^2 + (XYu)^2 + (YYu)^2}. \tag{4}$$

Inoltre vale

$$(Hu)^2 = (Hu)(Hu)^T. \tag{5}$$

Se u è una funzione di classe $C^2(\Omega)$ che sia soluzione di

$$\Delta_{\mathbb{H}} u = f(u), \tag{6}$$

cioè

$$-\int_{\mathbb{H}} \langle \nabla_{\mathbb{H}} u, \nabla_{\mathbb{H}} \phi \rangle_{\mathbb{H}} = \int_{\mathbb{H}} f(u)\phi, \tag{7}$$

per ogni $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$, si dice che u è stabile per (6) se per ogni $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$,

$$0 \leq \int_{\mathbb{H}} \langle \nabla_{\mathbb{H}} \phi, \nabla_{\mathbb{H}} \phi \rangle_{\mathbb{H}} + \int_{\mathbb{H}} f'(u)\phi^2. \tag{8}$$

La condizione (8) dice in particolare che la variazione seconda associata al funzionale ha un segno, come per esempio nel caso in cui vi sia un minimo.

3. Alcuni passaggi della dimostrazione del Teorema 1.1

La dimostrazione del Teorema 1.1 necessita di alcuni lemmi introduttivi.

Lemma 3.1. *Se $u \in C^2(\Omega)$, allora*

$$X\Delta_{\mathbb{H}}u = \Delta_{\mathbb{H}}Xu + 2TYu \tag{9}$$

e

$$Y\Delta_{\mathbb{H}}u = \Delta_{\mathbb{H}}Yu - 2TXu. \tag{10}$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned}
X\Delta_{\mathbb{H}}u &= X(XXu) + X(YYu) = XX(Xu) + XY(Yu) \\
&= \Delta_{\mathbb{H}}Xu - YY(Xu) + XY(Yu) \\
&= \Delta_{\mathbb{H}}Xu - YY(Xu) + XY(Yu) - YX(Yu) + YX(Yu) \\
&= \Delta_{\mathbb{H}}Xu - YY(Xu) + TYu + YX(Yu) \\
&= \Delta_{\mathbb{H}}Xu + TYu + YTu = \Delta_{\mathbb{H}}Xu + 2TYu.
\end{aligned}$$

Quindi vale (9). In modo analogo si prova (10).

□

Ora se u soddisfa $\Delta_{\mathbb{H}}u = f(u)$, allora dal Lemma 3.1, segue

$$\begin{aligned}
\Delta_{\mathbb{H}}Xu + 2TYu &= f'(u)Xu \\
\Delta_{\mathbb{H}}Yu - 2TXu &= f'(u)Yu.
\end{aligned} \tag{11}$$

Il seguente risultato fornisce la prima parte della disuguaglianza (1).

Teorema 3.1. *Per ogni $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$*

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega\cap\{\nabla_{\mathbb{H}}u\neq 0\}} \left\{\mid Hu \mid^2 - \langle (Hu)^2\nu, \nu\rangle_{\mathbb{H}} - 2\,(TYuXu - TXuYu)\right\}\phi^2 \\
&\qquad \leq \int_\Omega \mid \nabla_{\mathbb{H}}\phi \mid^2 \mid \nabla_{\mathbb{H}}u \mid^2 .
\end{aligned} \tag{12}$$

Dimostrazione. La dimostrazione di questa disuguaglianza è contenuta in [16] e trae ispirazione dall'approccio inizialmente descritto in [26, 27, 12, 13]. Le modifiche sono dovute alla necessità di adattare alcuni strumenti matematici alla geometria del gruppo di Heisenberg.

Siano $\eta = Xu\phi^2$ e $\xi = Yu\phi^2$ funzioni test da utilizzare in (11), $\phi \in C_0^\infty$. Integrando per parti (11), si ottiene

$$-\int_{\mathbb{H}} \langle \nabla_{\mathbb{H}} Xu, \nabla_{\mathbb{H}}(Xu\phi^2)\rangle_{\mathbb{H}} + 2\left(\int_{\mathbb{H}} TYuXu\phi^2\right) = \int_{\mathbb{H}} f'(u)(Xu)^2\phi^2,$$

e

$$-\int_{\mathbb{H}} \langle \nabla_{\mathbb{H}} Yu, \nabla_{\mathbb{H}}(Yu\phi^2)\rangle_{\mathbb{H}} - 2\left(\int_{\mathbb{H}} TXuYu\phi^2\right) = \int_{\mathbb{H}} f'(u)(Yu)^2\phi^2.$$

Poi, sommando termine a termine si ha

$$\begin{aligned}
& -\int_{\mathbb{H}} \mid \nabla_{\mathbb{H}} Xu \mid^2 \phi^2 - \int_{\mathbb{H}} \mid \nabla_{\mathbb{H}} Yu \mid^2 \phi^2 \\
& -\int_{\mathbb{H}} \langle \nabla_{\mathbb{H}} Xu, \nabla_{\mathbb{H}}(\phi^2)\rangle_{\mathbb{H}} Xu - \int_{\mathbb{H}} \langle \nabla_{\mathbb{H}} Yu, \nabla_{\mathbb{H}}(\phi^2)\rangle_{\mathbb{H}} Yu \\
& + 2\int_{\mathbb{H}} (TYuXu - TXuYu)\,\phi^2 \\
& = \int_{\mathbb{H}} f'(u) \mid \nabla_{\mathbb{H}} u \mid^2 \phi^2.
\end{aligned} \tag{13}$$

Utilizzando $\mid \nabla_{\mathbb{H}} u \mid \phi$ come funzione test in (8), risulta:

$$0 \le \int_{\mathbb{H}} \mid \nabla_{\mathbb{H}}(\mid \nabla_{\mathbb{H}} u \mid \phi) \mid^2 + \int_{\mathbb{H}} f'(u) \mid \nabla_{\mathbb{H}} u \mid^2 \phi^2. \tag{14}$$

Sia $\mathbb{H}_o$ l'insieme $\Omega \cap \{\nabla_{\mathbb{H}} u \neq 0\}$. In $\mathbb{H}_o$,

$$X \mid \nabla_{\mathbb{H}} u \mid = \frac{1}{\mid \nabla_{\mathbb{H}} u \mid}(XuXXu + YuXYu) \tag{15}$$

e

$$Y \mid \nabla_{\mathbb{H}} u \mid = \frac{1}{\mid \nabla_{\mathbb{H}} u \mid}(XuYXu + YuYYu). \tag{16}$$

Poiché la seguente uguaglianza è soddisfatta in $\mathbb{H}_0$

$$\nabla_{\mathbb{H}} \mid \nabla_{\mathbb{H}} u \mid = \frac{1}{\mid \nabla_{\mathbb{H}} u \mid} (Hu)^T \nabla_{\mathbb{H}} u \tag{17}$$

ne consegue che, grazie a (5), in $\mathbb{H}_o$ si ha

$$\mid \nabla_{\mathbb{H}}(\mid \nabla_{\mathbb{H}} u \mid) \mid^2 = \frac{1}{\mid \nabla_{\mathbb{H}} u \mid^2} \langle (Hu)^T \nabla_{\mathbb{H}} u, (Hu)^T \nabla_{\mathbb{H}} u \rangle_{\mathbb{H}} = \frac{1}{\mid \nabla_{\mathbb{H}} u \mid^2} \langle (Hu)^2 \nabla_{\mathbb{H}} u, \nabla_{\mathbb{H}} u \rangle_{\mathbb{H}}. \tag{18}$$

Inoltre in $\mathbb{H}_o$ vale:

$$\nabla_{\mathbb{H}}(\mid \nabla_{\mathbb{H}} u \mid \phi) = \frac{\phi}{\mid \nabla_{\mathbb{H}} u \mid} (Hu)^T \nabla_{\mathbb{H}} u + \nabla_{\mathbb{H}} \phi \mid \nabla_{\mathbb{H}} u \mid .$$

Pertanto:

$$\begin{aligned}
&\left| \nabla_{\mathbb{H}}(\mid \nabla_{\mathbb{H}} u \mid \phi) \right|^2 \\
&= \langle \nabla_{\mathbb{H}}(\mid \nabla_{\mathbb{H}} u \mid \phi), \nabla_{\mathbb{H}}(\mid \nabla_{\mathbb{H}} u \mid \phi) \rangle_{\mathbb{H}} \\
&= \frac{\phi^2}{\mid \nabla_{\mathbb{H}} u \mid^2} \langle (Hu)^T \nabla_{\mathbb{H}} u, (Hu)^T \nabla_{\mathbb{H}} u \rangle_{\mathbb{H}} + 2 \langle \nabla_{\mathbb{H}} \phi, (Hu)^T \nabla_{\mathbb{H}} u \rangle_{\mathbb{H}} \phi + \mid \nabla_{\mathbb{H}} \phi \mid^2 \mid \nabla_{\mathbb{H}} u \mid^2 \\
&= \phi^2 \langle (Hu)^T \nu, (Hu)^T \nu \rangle_{\mathbb{H}} + 2 \langle \nabla_{\mathbb{H}} \phi, (Hu)^T \nabla_{\mathbb{H}} u \rangle_{\mathbb{H}} \phi + \mid \nabla_{\mathbb{H}} \phi \mid^2 \mid \nabla_{\mathbb{H}} u \mid^2 \\
&= \phi^2 \langle (Hu)^2 \nu, \nu \rangle_{\mathbb{H}} + 2 \langle Hu \nabla_{\mathbb{H}} \phi, \nabla_{\mathbb{H}} u \rangle_{\mathbb{H}} \phi + \mid \nabla_{\mathbb{H}} \phi \mid^2 \mid \nabla_{\mathbb{H}} u \mid^2 .
\end{aligned} \tag{19}$$

Sostituendo (19) in (14) risulta

$$\begin{aligned}
0 \leq \int_{\mathbb{H}_o} &\left(\phi^2 \langle (Hu)^2 \nu, \nu \rangle_{\mathbb{H}} + 2 \langle Hu \nabla_{\mathbb{H}} \phi, \nabla_{\mathbb{H}} u \rangle_{\mathbb{H}} \phi + \mid \nabla_{\mathbb{H}} \phi \mid^2 \mid \nabla_{\mathbb{H}} u \mid^2 \right) \\
&\qquad + \int_{\mathbb{H}} f'(u) \mid \nabla_{\mathbb{H}} u \mid^2 \phi^2.
\end{aligned} \tag{20}$$

Richiamando (13), segue da (20) che

$$\begin{aligned}
0 &\leq \int_{\mathbb{H}_o} \left(\langle (Hu)^2 \nu, \nu \rangle_{\mathbb{H}} \phi^2 + 2 \langle Hu \nabla_{\mathbb{H}} \phi, \nabla_{\mathbb{H}} u \rangle_{\mathbb{H}} \phi + \mid \nabla_{\mathbb{H}} \phi \mid^2 \mid \nabla_{\mathbb{H}} u \mid^2 \right) \\
&- \int_{\mathbb{H}_o} \mid \nabla_{\mathbb{H}} X u \mid^2 \phi^2 - \int_{\mathbb{H}_o} \mid \nabla_{\mathbb{H}} Y u \mid^2 \phi^2 \\
&- \int_{\mathbb{H}_o} \langle \nabla_{\mathbb{H}} X u, \nabla_{\mathbb{H}}(\phi^2) \rangle_{\mathbb{H}} X u - \int_{\mathbb{H}_o} \langle \nabla_{\mathbb{H}} Y u, \nabla_{\mathbb{H}}(\phi^2) \rangle_{\mathbb{H}} Y u \\
&+ 2 \int_{\mathbb{H}_o} (TYuXu - TXuYu)\, \phi^2.
\end{aligned}$$

Riordinando i termini, otteniamo la seguente disuguaglianza

$$
\begin{aligned}
0 \leq & \int_{\mathbb{H}_o} \left(\langle (Hu)^2 \nu, \nu \rangle_{\mathbb{H}} \phi^2 + \mid \nabla_{\mathbb{H}} \phi \mid^2 \mid \nabla_{\mathbb{H}} u \mid^2 \right) \\
& - \int_{\mathbb{H}_o} \mid \nabla_{\mathbb{H}} Xu \mid^2 \phi^2 - \int_{\mathbb{H}_o} \mid \nabla_{\mathbb{H}} Yu \mid^2 \phi^2 \\
& + 2 \int_{\mathbb{H}_o} (TYuXu - TXuYu) \, \phi^2 .
\end{aligned}
$$

Essa equivale a:

$$
\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{H}_o} \left(\mid \nabla_{\mathbb{H}} Xu \mid^2 + \mid \nabla_{\mathbb{H}} Yu \mid^2 - \langle (Hu)^2 \nu, \nu \rangle_{\mathbb{H}} - 2 \, (TYuXu - TXuYu) \right) \phi^2 \\
& \qquad \leq \int_{\mathbb{H}} \mid \nabla_{\mathbb{H}} \phi \mid^2 \mid \nabla_{\mathbb{H}} u \mid^2 .
\end{aligned}
$$

Quindi, richiamando (4), si deduce (12). □

Avendo ottenuto la prima parte di (1) nel precedente Teorema 3.1, occorre verificare ora la seconda parte esaminando gli insiemi di livello di u lontano dai punti caratteristici, cioè l'insieme dei punti P per cui $\{P \in \mathbb{H}^1 : \ \nabla_{\mathbb{H}} u(P) \neq 0\}$..

La curvatura media intrinseca h e la curvatura immaginaria p della superficie di livello $\{u = k\}$ sono definite come segue:

$$h = \mathrm{div}_{\mathbb{H}} \nu$$

e

$$p = -\frac{[X, Y]u}{\mid \nabla_{\mathbb{H}} u \mid},$$

per ulteriori dettagli si fa riferimento a [2], [3] (vedi anche [22] secondo una diversa prospettiva).

Sia

$$H\nu = \begin{bmatrix} X\nu_1, & Y\nu_1 \\ X\nu_2, & Y\nu_2 \end{bmatrix}. \tag{21}$$

In generale, se W è una sezione lungo una curva orizzontale $\phi : I \to \mathbb{H}$, $I \subset \mathbb{R}$ intervallo, della fibra $\mathcal{H}$, cioè $W(s) \in \mathcal{H}_{\phi(s)}$ per ogni $s \in I$ si definisce, vedi [3], la derivata di W

lungo ϕ in P come

$$\frac{d_\phi^{\mathbb{H}} W(s)}{ds}_{|s=0} = \lim \frac{d\mathcal{L}_{(\phi(0))\circ(-\phi(s))} W(s) - W(0)}{s},$$

con $\mathcal{L}_Q : P \to Q \circ P$ traslazione a sinistra di $Q = (q_1, q_2, q_3)$ e

$$d\mathcal{L}_Q = \begin{bmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 2q_2, & -2q_1, & 1 \end{bmatrix}.$$

Pertanto se $v \in \mathcal{H}_P$, $\phi : I \to \mathbb{H}$ è una curva orizzontale, $\phi(0) = P$, $\phi'(0) = v$ e W una sezione della fibra $\mathcal{H}$, si definisce, vedi Definition 4.2 in [3],

$$\nabla_v^{\mathbb{H}} W(P) = \frac{d^{\mathbb{H}}(W \circ \phi)(s)}{ds}_{|s=0}.$$

Allora, (vedi [2, 3] e in Appendice), per ogni $P \in \{u = k\} \cap \{\nabla_{\mathbb{H}} u \neq 0\}$,

$$\mathcal{W}(v) = -H\nu v = -hv, \tag{22}$$

dove $\mathcal{W} = -\nabla_{\cdot}^{\mathbb{H}} \nu_{\{u=k\}}(P)$ è la mappa di Weingarten intrinseca nel punto P relativa alla superficie non caratteristica $\{u = k\}$, e v è il versore unitario in $P \in \{u = k\}$, come definito in (3).

Pertanto vale il seguente risultato.

Lemma 3.2. *In $\{u = k\} \cap \{\nabla_{\mathbb{H}} u \neq 0\}$, vale la seguente uguaglianza:*

$$\mid Hu \mid^2 - \langle (Hu)^2 \nu, \nu \rangle_{\mathbb{H}} = \mid \nabla_{\mathbb{H}} u \mid^2 \left[h^2 + \left(p + \frac{\langle Huv, \nu \rangle_{\mathbb{H}}}{\mid \nabla_{\mathbb{H}} u \mid} \right)^2 \right]. \tag{23}$$

Per i dettagli della dimostrazione rimandiamo a [16].

Il Teorema 1.1 si ottiene quale corollario di quest'ultimo lemma.

4. Applicazioni ad un problema di transizione di fase

Se una grandezza si caratterizza nel realizzare due stati possibili e vogliamo descrivere da un punto di vista matematico il passaggio da una fase all'altra, allora un possibile modello idoneo a descrive dal punto di vista variazionale tale situazione è fornito da un funzionale del tipo:

$$E(u,\Omega) = \frac{\epsilon}{2}\int_{\Omega} \mid \nabla u(x) \mid^2 dx + \frac{1}{\epsilon}\int_{\Omega} W(u(x))dx,$$

dove $\epsilon >$ è un parametro (piccolo), vedi [21].

La funzione W può essere considerata come una densità di energia per cui, se pensiamo alla funzione u come la grandezza che caratterizza il sistema allora saremo nella fase -1 per quegli elementi del dominio Ω di u per cui $u = -1$, mentre saremo nella fase 1 per quei punti di Ω tali che $u = 1$. Allora è verosimile supporre che $W(\pm 1) = 0$ e $W(s) >$ se $s \neq \pm 1$. Questo dà origine alla nozione di densità di energia a *doppio pozzo*.

La presenza del termine $\frac{\epsilon}{2}\int_{\Omega} \mid \nabla u(x) \mid^2 dx$ è solitamente intesa come una penalizzazione, nel senso seguente. Si potrebbe pensare ad un funzionale che abbia il solo termine

$$\int_{\Omega} W(u(x))dx,$$

tuttavia questo modello non sarebbe suddisfacente perché per esempio le funzioni che realizzano i soli valori -1 e 1 sarebbero minimi, quindi il passaggio di fase non potrebbe essere descritto. Pertanto il termine *penalizzante* descrive, in un certo senso, l'inerzia del sistema a cambiare stato. Se $\Omega = \mathbb{R}^n$, a meno di una dilatazione spaziale, si può assumere che $\epsilon = 1$ e se prendiamo come modello di doppio pozzo la funzione $W(s) = (1 - r^2)^2/4$ allora il funzionale sarà

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} \mid \nabla u(x) \mid^2 dx + \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(1 - u(x)^2)^2}{4} dx.$$

Pertanto i punti critici di questo funzionale sono soluzioni deboli in $H^1(\mathbb{R}^n)$ dell'equazione alle derivate parziali

$$\Delta u = -u + u^3.$$

Conoscere gli insiemi di livello di queste soluzioni, per soluzioni stabili o comunque nella sola ipotesi in cui $\partial_n u > 0$, vedi [11], è peraltro una questione aperta anche nel caso dell'operatore di Laplace in $\mathbb{R}^n$ per $4 \leq n \leq 8$. Vedi [24] e [25] per conoscere risultati recenti, e [14] per lo stato dell'arte. Può essere utile osservare che la condizione $\partial_n u > 0$, è più forte della richiesta che u sia soluzione stabile. Infatti nel caso dell'operatore di Laplace se u è soluzione di $\Delta u = f(u)$ e $\partial_n u > 0$ allora

$$\Delta(\partial_n u) = f'(u)\partial_n u.$$

Pertanto, integrando per parti contro $\phi^2/\partial_n u$, $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ si ottiene

$$0 = \int_{\mathbb{R}^n} (\frac{2\phi\nabla\phi \cdot \nabla(\partial_n u)}{\partial_n u} - \frac{\phi^2 \mid \nabla(\partial_n u) \mid^2}{(\partial_n u)^2} + f'(u)\phi^2)dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} \mid \nabla\phi \mid^2 + f'(u)\phi^2 dx.$$

Nel caso del gruppo di Heisenberg più semplice, il funzionale è

$$E(u, \mathbb{H}^1) = \frac{\epsilon}{2} \int_{\mathbb{H}^1} \mid \nabla_{\mathbb{H}^1} u(x) \mid^2 dx + \frac{1}{\epsilon} \int_{\mathbb{H}^1} W(u(x))dx.$$

Pertanto i punti critici di tale funzionale soddisfano l'equazione alle derivate parziali in $\mathbb{H}^1$

$$\Delta_{\mathbb{H}^1} u = -u + u^3. \tag{24}$$

Tale equazione costituisce il prototipo dell'equazione semilineare oggetto del nostro interesse, vale a dire $\Delta_{\mathbb{H}^1} u = f(u)$. Il caso semilineare nel gruppo di Heisenberg è interessante per la natura non-commutativa del modello ed ̀stata studiata da da Birindelli e Lanconelli. In un primo lavoro, vedi [6], provano (forniamo il caso più semplice trattato dagli autori) che se u, $\mid u \mid \leq 1$ soddisfa (24), e

$$\lim_{x \to \pm\infty} u(x, y, t) = \pm 1,$$

uniformemente, allora u è unidimensionale. Inoltre provano in [7] che esiste una soluzione a simmetria radiale di (24), $\mid u \mid < 1$, $\partial_t u > 0$ e

$$\lim_{t \to \pm\infty} u(x, y, t) = \pm 1.$$

Questo tipo di controesempio lascia ovviamente aperta la possibilità che la richiesta $\partial_t u > 0$ sia in qualche modo speciale proprio per la natura non-commutativa del gruppo di Heisenberg. Recenti risultati [5] sembrano confermare, almeno in parte, questa eventualità nell'ipotesi aggiuntive di controllo dell'energia.

Vediamo ora un'applicazione del Teorema 1.1.

Corollario 4.1. *Sia u una soluzione stabile di $\Delta_{\mathbb{H}} u = f(u)$ in $\mathbb{H}$ tale che*

$$q \geq 0. \tag{25}$$

Per ogni $\tau > 0$, sia

$$\eta(\tau) = 4 \int_{B(0,\tau)} \mid \nabla_{\mathbb{H}} u(x,y,t) \mid^2 (x^2 + y^2)\, d(x,y,t). \tag{26}$$

Se

$$\liminf_{R\to\infty} \frac{\int_{\sqrt{R}}^{R} \frac{\eta(\tau)}{\tau^5}\, d\tau + \frac{\eta(R)}{R^4}}{(\log R)^2} = 0, \tag{27}$$

allora, gli insiemi di livello di u nell'intorno dei punti non caratteristici sono superficie minime nel gruppo Heisenberg (i.e., la curvatura intrinseca h di $\{u = c\}$ è nulla) e su tali insiemi la seguente equazione è soddisfatta

$$p = -\frac{1}{\mid \nabla_{\mathbb{H}} u \mid} \langle Huv, \nu \rangle_{\mathbb{H}}. \tag{28}$$

La dimostrazione di tale risultato si trova in [16]. Tuttavia, senza entrare nei dettagli, l'idea base della prova consiste nel provare che per un'opportuna famiglia di funzioni $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset C_0^\infty(\mathbb{H}^1)$ il membro di destra della disuguaglianza contenuta nel Teorema 1.1 tende a zero per $n \to \infty$ e $\phi_n \to 1$ quando $n \to \infty$.

Pertanto, oltre al Teorema 1.1 gioca un ruolo cruciale il seguente risultato, perché aiuta ad esplicitare la richiesta dell'esistenza della famiglia di funzioni appena descritta $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset C_0^\infty(\mathbb{H}^1)$ in una sorta di *decadimento all'infinito dell'energia* associata alla funzione u.

Lemma 4.1. *Siano $g \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n, [0, +\infty))$, q un numero reale, $q > 0$. Allora, per ogni $0 < r < R$,*

$$\int_{B(0,R)\setminus B(0,r)} \frac{g(\xi)}{\mid \xi \mid^q} d\xi \le q \int_r^R \frac{\eta(\tau)}{\tau^{q+1}} d\tau + \frac{1}{R^q}\eta(R),$$

dove per ogni $\tau > 0$,

$$\eta(\tau) = \int_{B(0,\tau)} g(\xi) d\xi. \tag{29}$$

Il lemma si applica considerando la norma di gauge nel gruppo di Heisenberg: $|\xi| = ((x^2 + y^2)^2 + t^2)^{1/4}$.

Questo tipo di risultato prelude a un Teorema di non esistenza. Infatti, si può subito osservare che non esistono funzioni non costanti indipendenti da t che soddisfano la condizione sull crescita dell'energia (27).

Infatti se tali funzioni esistessero dovrebbero essere soluzioni anche in senso classico di $\Delta u = f(u)$ in $\mathbb{R}^2$ e pertanto dovrebbero essere funzioni di una sola variabile, a meno di rotazioni, cioè $u(x, y) = g(\omega_1 x + \omega_2 y)$, con $\omega_1^2 + \omega_2^2 = 1$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, da cui seguirebbe una contraddizione con la condizione sulla crescita dell'energia (27) nel caso in cui g non fosse costante. Con considerazioni analoghe si perviene al seguente risultato di non esistenza.

Teorema 4.1. *Non esistono soluzioni stabili di $u \in C^2(\mathbb{H})$ di $\Delta_{\mathbb{H}} u = f(u)$ tali che*

$$\{\nabla_{\mathbb{H}} u = 0\} = \emptyset, \tag{30}$$

$$u \in L^\infty(\mathbb{H}), \tag{31}$$

$$q \geq 0 \tag{32}$$

e

$$\liminf_{R\to\infty} \frac{\int_{\sqrt{R}}^{R} \frac{\eta(\tau)}{\tau^5}\, d\tau + \frac{\eta(R)}{R^4}}{(\log R)^2} = 0, \tag{33}$$

dove

$$\eta(\tau) = 4 \int_{B(0,\tau)} \mid \nabla_{\mathbb{H}} u(x, y, t) \mid^2 (x^2 + y^2)\, d(x, y, t). \tag{34}$$

5. APPENDICE

Proposizione 5.1. *Se $u \in C^2(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{H}^1$, $\Sigma = \{u = c\}$ allora per ogni punto $P \in \Sigma$ non caratteristico per Σ,*

$$div_{\mathbb{H}} \nu = \frac{1}{\mid \nabla_{\mathbb{H}} u \mid} \langle Huv, v\rangle_{\mathbb{H}},$$

cioè se h è la curvatura media intrinseca Σ in P, allora

$$h = \frac{1}{\mid \nabla_{\mathbb{H}} u \mid} \langle Huv, v\rangle_{\mathbb{H}}.$$

Dimostrazione. In [3], Teorema 4.2, è dimostrato che $\nabla_v^{\mathbb{H}} \nu_{\{u=c\}} = hv$. Inoltre per definizione di $\nabla_v^{\mathbb{H}} \nu_{\{u=c\}}$, risulta

$$\nabla_v^{\mathbb{H}} \nu_{\{u=c\}} = \begin{bmatrix} X(\frac{Xu}{|\nabla_{\mathbb{H}} u|}), Y(\frac{Xu}{|\nabla_{\mathbb{H}} u|}) \\ X(\frac{Yu}{|\nabla_{\mathbb{H}}|}), Y(\frac{Yu}{|\nabla_{\mathbb{H}} u|}) \end{bmatrix} v,$$

pertanto

$$\langle \nabla_v^{\mathbb{H}} \nu_{\{u=c\}}, \nu \rangle_{\mathbb{H}} = 0.$$

Quindi sviluppando i calcoli risulta

$$\begin{bmatrix} X(\frac{Xu}{|\nabla_{\mathbb{H}}u|}), Y(\frac{Xu}{|\nabla_{\mathbb{H}}u|}) \\ X(\frac{Yu}{|\nabla_{\mathbb{H}}u|}), Y(\frac{Yu}{|\nabla_{\mathbb{H}}u|}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} XuX(\frac{1}{|\nabla_{\mathbb{H}}u|}), XuY(\frac{1}{|\nabla_{\mathbb{H}}u|}) \\ YuX(\frac{1}{|\nabla_{\mathbb{H}}u|}), YuY(\frac{1}{|\nabla_{\mathbb{H}}u|}) \end{bmatrix} + \frac{1}{\mid \nabla_{\mathbb{H}}u \mid} \begin{bmatrix} XXu, YXu \\ XYu, YXu \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{XuXXu+YuXYu}{|\nabla_{\mathbb{H}}u|^3}Xu, -\frac{XuYXu+YuYYu}{|\nabla_{\mathbb{H}}u|^3}Xu \\ -\frac{XuXXu+YuXYu}{|\nabla_{\mathbb{H}}u|^3}Yu, -\frac{XuYXu+YuYYu}{|\nabla_{\mathbb{H}}u|^3}Yu \end{bmatrix} + \frac{1}{\mid \nabla_{\mathbb{H}}u \mid} \begin{bmatrix} XXu, YXu \\ XYu, YXu \end{bmatrix}$$

Pertanto

$$\begin{bmatrix} X(\frac{Xu}{|\nabla_{\mathbb{H}}u|}), Y(\frac{Xu}{|\nabla_{\mathbb{H}}u|}) \\ X(\frac{Yu}{|\nabla_{\mathbb{H}}u|}), Y(\frac{Yu}{|\nabla_{\mathbb{H}}u|}) \end{bmatrix} v = \begin{bmatrix} -\frac{XuXXu+YuXYu}{|\nabla_{\mathbb{H}}u|^3}Xu, -\frac{XuYXu+YuYYu}{|\nabla_{\mathbb{H}}u|^3}Xu \\ -\frac{XuXXu+YuXYu}{|\nabla_{\mathbb{H}}u|^3}Yu, -\frac{XuYXu+YuYYu}{|\nabla_{\mathbb{H}}u|^3}Yu \end{bmatrix} v$$
$$+ \frac{1}{\mid \nabla_{\mathbb{H}}u \mid} \begin{bmatrix} XXu, YXu \\ XYu, YXu \end{bmatrix} v$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{XuXXu+YuXYu}{|\nabla_{\mathbb{H}}u|^4}XuYu + \frac{XuYXu+YuYYu}{|\nabla_{\mathbb{H}}u|^4}(Xu)^2 \\ -\frac{XuXXu+YuXYu}{|\nabla_{\mathbb{H}}u|^4}(Yu)^2 + \frac{XuYXu+YuYYu}{|\nabla_{\mathbb{H}}u|^4}YuXu \end{bmatrix}^T + \frac{1}{\mid \nabla_{\mathbb{H}}u \mid} \begin{bmatrix} XXu, YXu \\ XYu, YXu \end{bmatrix} v$$

Infine, riassumendo,

$$\begin{aligned} \langle \nabla_v^{\mathbb{H}} \nu_{\{u=c\}}, v \rangle_{\mathbb{H}} &= \langle \begin{bmatrix} -\frac{XuXXu+YuXYu}{|\nabla_{\mathbb{H}}u|^4}XuYu + \frac{XuYXu+YuYYu}{|\nabla_{\mathbb{H}}u|^4}(Xu)^2 \\ -\frac{XuXXu+YuXYu}{|\nabla_{\mathbb{H}}u|^4}(Yu)^2 + \frac{XuYXu+YuYYu}{|\nabla_{\mathbb{H}}u|^4}YuXu \end{bmatrix}^T, v \rangle \\ &+ \frac{1}{\mid \nabla_{\mathbb{H}}u \mid} \langle \begin{bmatrix} XXu, YXu \\ XYu, YXu \end{bmatrix} v, v \rangle, \end{aligned} \tag{35}$$

ma

$$\langle \begin{bmatrix} -\frac{XuXXu+YuXYu}{|\nabla_{\mathbb{H}}u|^4}XuYu + \frac{XuYXu+YuYYu}{|\nabla_{\mathbb{H}}u|^4}(Xu)^2 \\ -\frac{XuXXu+YuXYu}{|\nabla_{\mathbb{H}}u|^4}(Yu)^2 + \frac{XuYXu+YuYYu}{|\nabla_{\mathbb{H}}u|^4}YuXu \end{bmatrix}^T, v \rangle = 0.$$

Quindi risulta

$$\frac{1}{\mid \nabla_{\mathbb{H}}u \mid} \langle Huv, v \rangle_{\mathbb{H}} = h.$$

$\square$

References

[1] G. Alberti, L. Ambrosio, X. Cabré. *On a long-standing conjecture of E. De Giorgi: symmetry in 3D for general nonlinearities and a local minimality property.* Special issue dedicated to Antonio Avantaggiati on the occasion of his 70th birthday, Acta Appl. Math.,**65** (2001) 9-33.

[2] N. Arcozzi, F. Ferrari. *Metric normal and distance function in the Heisenberg group.* Math. Z., **256** (2007) 661-684.

[3] N. Arcozzi, F. Ferrari. *The Hessian of the distance from a surface in the Heisenberg group.* Ann. Acad. Sci. Fenn. Math., **33** (2008) 35–63 (http://mathstat.helsinki.fi/Annales/Vol33/vol33.html)

[4] N. Arcozzi, F. Ferrari. *A variational approximation of the perimeter with second order penalization in the Heisenberg group.* in preparation.

[5] I. Birindelli, F. Ferrari, E. Valdinoci. *Semilinear PDEs in the Heisenberg group: the role of the right invariant vector fields.* preprint (2009).

[6] I. Birindelli, E. Lanconelli. *A note on one dimensional symmetry in Carnot groups.* Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend. Lincei (9) Mat. Appl., **13** (2002) 17-22.

[7] I. Birindelli, E. Lanconelli. *A negative answer to a one-dimensional symmetry problem in the Heisenberg group.* Calc. Var. Partial Differential Equations, **18** (2003) 357-372.

[8] I. Birindelli, J. Prajapat. *Monotonicity and symmetry results for degenerate elliptic equations on nilpotent Lie groups.* Pacific J. Math., **204** (2002) 1-17.

[9] I. Birindelli, E. Valdinoci. *The Ginzburg-Landau equation in the Heisenberg group.* Commun. Contemp. Math., **10** (2008) 671-719.

[10] X. Cabré, A. Capella, *Regularity of radial minimizers and extremal solutions of semilinear elliptic equations.* J. Funct. Anal., **238** (2006) 709-733.

[11] E. De Giorgi. *Convergence problems for functionals and operators.* Proceedings of the International Meeting on Recent Methods in Nonlinear Analysis (Rome, 1978),Pitagora, Bologna, (1979) 131-188.

[12] A. Farina. *Propriétés qualitatives de solutions d'équations et systèmes d'équations non-linéaires.* Habilitation à diriger des recherches, Paris VI (2002).

[13] A. Farina, B. Sciunzi, E. Valdinoci. *Bernstein and De Giorgi type problems: new results via a geometric approach.* Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. **7** (2008) 741-791.

[14] A. Farina, E. Valdinoci. *The state of the art for a conjecture of De Giorgi and related problems.*, to appear in Ser. Adv. Math. Appl. Sci., World Sci. Publ., Hackensack, NJ (2008).

[15] F. Ferrari, *Curvature formulae of noncharacteristic smooth sets in the Heisenberg group*, preprint (2006).

[16] F. Ferrari, E. Valdinoci. *A geometric inequality in the Heisenberg group and its applications to stable solutions of semilinear problems*, Math. Annalen, **343** (2009) 351-370.

[17] B. Franchi, G. Lu, R.L. Wheeden. *Representation formulas and weighted Poincaré inequalities for Hörmander vector fields.* Ann. Inst. Fourier (Grenoble), **45** (1995) 577-604.

[18] N. Garofalo, D. Danielli, D-M. Nhieu. *Notion of convexity in Carnot groups*, Comm. Anal. Geom., **11** (2003) 263–341.

[19] N. Ghoussoub, C. Gui. *On a conjecture of De Giorgi and some related problems.* Math. Ann., **311** (1998) 481–491 .

[20] D. Jerison; J.M. Lee. *Extremals for the Sobolev inequality on the Heisenberg group and the CR Yamabe problem.* J. Amer. Math. Soc., **1** (1988) 1-13.

[21] L. Modica. *The gradient theory of phase transitions and the minimal interface criterion*, Arch. Rational. Mech. Anal., **98** (1987) 123-142 .

[22] F. Montefalcone. *Hypersurfaces and variational formulas in sub-Riemannian Carnot groups.* J. Math. Pures Appl., **87** (2007), 453-494.

[23] R. Monti, F. Serra Cassano. *Surface measures in Carnot-Carathéodory spaces.* Calc. Var. Partial Differential Equations, **13** (2001) 339-376.

[24] V. O. Savin. *Phase transitions: Regularity of Flat Level sets.* PhD thesis, University of Texas at Austin, 2003. https://dspace.lib.utexas.edu/bitstream/2152/993/1/savinov032.pdf

[25] V. O. Savin. *Phase transitions: Regularity of Flat Level sets.* Ann. of Math., **169** (2008) 41-78.

[26] P. Sternberg, K. Zumbrun. *A Poincaré inequality with applications to volume-constrained area-minimizing surfaces.* J. Reine Angew. Math., **503** (1998) 63-85 .

[27] P. Sternberg, K. Zumbrun. *Connectivity of phase boundaries in strictly convex domains.* Arch. Rational Mech. Anal. **141** (1998) 375-400.

Fausto Ferrari
Dipartimento di Matematica dell'Università
Piazza di Porta S. Donato, 5, 40126 Bologna, Italy
and
C.I.R.A.M.
Via Saragozza, 8, 40123 Bologna, Italy.
E-mail: `ferrari@dm.unibo.it`