Seminario di Analisi Matematica
Dipartimento di Matematica
dell'Università di Bologna

Anno Accademico 2007-08

Davide Guidetti

Sviluppo asintotico delle soluzioni di un problema inverso di tipo parabolico

19 giugno 2008

Abstract

We consider the abstract parabolic inverse problem

$$(1) \qquad \begin{cases} u'(t) = A(t)u(t) + f(t)z(t) + h(t), & t \in [0, +\infty), \\ u(0) = u_0, \\ \Phi(u(t)) = g(t), & t \in [0, +\infty), \end{cases}$$

with u and f unknown. We assume that, $\forall t \in [0, +\infty)$, $A(t)$ is a sectorial operator in the Banach space X, z and h are functions with values in X, and f is an unknown scalar-valued function, Φ is a proper linear functional in X, g is a given scalar valued function. The knowledge of $\Phi(u(t))$ should provide the further information, which is necessary to determine f together with u.

We show that, under suitable assumptions on the data $A(t)$, z, h, u_0, g, (2) has a unique global solution in $[0, +\infty)$. Moreover, under further conditions, if $A(t) = A_0 + t^{-1}A_1 + ... + t^{-k}A_k + o(t^{-k})$ $(t \to +\infty)$, and z, h and g admit analogous expansions, even u and f can be expanded in the same way.

In questo seminario vorrei presentare alcuni risultati che ho ottenuto recentemente, inseriti in un lavoro in corso di stampa ([6]).

Consideriamo un problema di Cauchy parabolico astratto della forma

$$\begin{cases} u'(t) = (A(t) - \lambda)u(t) + f(t)z(t) + h(t), & t \in [S, +\infty), \\ u(S) = u_S, \\ \Phi[u(t)] = g(t), & t \in [S, +\infty). \end{cases} \tag{2}$$

Il problema è parabolico nel senso che, per ogni t in $[S, +\infty)$ $A(t)$ è il generatore infinitesimale di un semigruppo analitico $(e^{sA(t)})_{s\geq 0}$ in un certo spazio di Banach complesso X, λ è un parametro complesso. z e h sono assegnate funzioni a valori in X definite sull'intervallo $[S, +\infty)$, u_S è un dato iniziale appartenente al dominio $D(A(t))$ dell'operatore $A(t)$. La funzione f, definita in $[S, +\infty)$ e a valori scalari, è incognita assieme a u. Per compensare la mancata conoscenza di f, è assegnato per ogni $t \geq S$ il valore $\Phi[u(t)]$, con Φ opportuno funzionale lineare. Si vuole dunque determinare f assieme a u. In più , si cercano condizioni che assicurino la possibilità di sviluppare asintoticamente u e f per $t \to +\infty$. Più precisamente: si cercano condizioni che assicurino che u e f convergono per $t \to +\infty$, a un limite (u_0, f_0) in opportune norme. Ci si aspetta che, se $A(t)$, $z(t)$, $h(t)$, $g(t)$ convergono (in un senso opportuno) a A_0, z_0, h_0, g_0, allora (u_0, f_0) sia soluzione dell'equazione stazionaria

$$\begin{cases} 0 = (A_0 - \lambda)u_0 + f_0 z_0 + h_0, \\ \Phi(u_0) = g_0. \end{cases} \tag{3}$$

Inoltre, se

$$\begin{aligned} A(t) &= A_0 + t^{-1}A_1 + ... + t^{-k}A_k + o(t^{-k}), \quad t \to +\infty, \\ z(t) &= z_0 + t^{-1}z_1 + ... + t^{-k}z_k + o(t^{-k}), \\ h(t) &= h_0 + t^{-1}h_1 + ... + t^{-k}h_k + o(t^{-k}), \\ g(t) &= g_0 + t^{-1}g_1 + ... + t^{-k}g_k + o(t^{-k}), \end{aligned}$$

ci si aspetta che

$$\begin{aligned} u(t) &= u_0 + t^{-1}u_1 + ... + t^{-k}u_k + o(t^{-k}), \quad t \to +\infty, \\ f(t) &= f_0 + t^{-1}f_1 + ... + t^{-k}f_k + o(t^{-k}). \end{aligned}$$

Prima di illustrare i risultati che ho ottenuto su questo problema, vorrei segnalare alcuni articoli in cui sono stati considerati problemi analoghi.

In [7] Güvenilir e Kalantarov trattano un sistema della forma

$$
\begin{cases}
u'(t) + Au(t) = F(t)g(t) & t \in [0,+\infty), \\
u(0) = u_0, \\
(u(t),\omega) = \phi(t), & t \in [0,+\infty).
\end{cases} \tag{4}
$$

sotto le ipotesi seguenti: H è uno spazio di Hilbert con prodotto scalare $(.,.)$, A è un operatore autoaggiunto positivo in H, ω e u_0 appartengono a H, z e h sono funzioni assegnate a valori rispettivamente in H e $\mathbb{C}$. Sotto opportune condizioni, gli autori provano che (4) ha un'unica soluzione globale (u, f), che converge in un senso appropriato a $(0, 0)$. Per esempio, u converge a 0 nello spazio $D(A^{1/2})$.

Nel caso di problemi misti parabolici concreti, risultati nello stesso ordine di idee (vale a dire, in uno spazio L^2 e in un senso relativante debole) sono stati ottenuti da Belov ([1]), Kamynin e Francini ([8]), Vasin e Kamynin ([9], [10]).

Per dare un'idea di questo tipo di risultati, illustriamo brevemente quello contenuto in [7].

Teorema 1. *Consideriamo il problema (4). Supponiamo che:*

(I) $u_0, \omega \in D(A^{1/2})$*;*

(II) $g \in C([0,+\infty[; H)$, $\|g(t)\|_H \le K_1$ $\forall t \ge 0$*;*

(III) $|(g(t),\omega)| \ge g_0 > 0$ $\forall t \ge 0$*;*

(IV) $\phi(0) = (u_0, \omega)$*;*

(V) $\|Au\|_H \ge \mu^2 \|u\|_H$ $\forall u \in D(A)$, *per una certa* $\mu \in \mathbb{R}^+$*;*

(V) $\gamma := 1 - \frac{2K_1}{g_0\mu}\|A^{1/2}\omega\| - \frac{K_1^2}{g_0^2}\|A^{1/2}\omega\|^2 > 0$*;*

(VI) $\phi \in H^1(0,T)$ $\forall T \in \mathbb{R}^+$ *e*

$$\lim_{k\to+\infty} \int_k^{k+1} |\phi'(t)|^2 dt = 0.$$

Allora il problema (4) possiede un'unica soluzione (u, F) *tale che* $u \in W^{1,1}(0,T;H) \cap C([0,T]; D(A^{1/2})) \cap L^2(0,T;D(A))$, $F \in C([0,T])$ *per ogni* $T \in \mathbb{R}^+$*. Inoltre,*

$$\lim_{t\to+\infty} \|A^{1/2}u(t)\|_H^2 = 0, \qquad \lim_{k\to+\infty} \int_k^{k+1} |F(t)|^2 dt = 0. \tag{5}$$

Applichiamo il teorema 1 al seguente problema:

$$
(6) \qquad \begin{cases} D_t u(t,x) - \Delta u(t,x) = F(t)g(t,x) & t \in [0,+\infty), x \in \Omega, \\ u(t,x') = 0, & t \in [0,+\infty), x \in \partial\Omega, \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in \Omega, \\ \int_\Omega u(t,x)\omega(x)dx = \phi(t), & t \in [0,+\infty). \end{cases}
$$

Supponiamo che Ω sia un aperto limitato di $\mathbb{R}^n$ con frontiera regolare $\partial\Omega$. Introduciamo lo spazio di Hilbert

$$
(7) \qquad H := L^2(\Omega)
$$

e il seguente operatore A in H:

$$
(8) \qquad \begin{cases} D(A) := H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega), \\ Au := -\Delta u, \quad u \in D(A). \end{cases}
$$

Allora è ben noto che A è un operatore autoaggiunto e positivo in H. Inoltre,

$$
(9) \qquad D(A^{1/2}) = H_0^1(\Omega),
$$

con norme equivalenti. Allora dal teorema 1 segue il seguente

Corollario 1. *Consideriamo il problema (6). Supponiamo che:*

(I) $u_0, \omega \in H_0^1(\Omega)$;

(II) $g \in C([0,+\infty[; L^2(\Omega))$, $\|g(t)\|_{L^2(\Omega)} \le K_1 \ \forall t \ge 0$;

(III) $|\int_\Omega g(t,x)\omega(x)dx| \ge g_0 > 0 \ \forall t \ge 0$;

(IV) $\phi(0) = \int_\Omega u_0(x)\omega(x)dx$;

(V) $\int_\Omega |\Delta u(x)|^2 dx \ge \mu^2 \int_\Omega |u(x)|^2 dx$ *per ogni* $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, *con* $\mu \in \mathbb{R}^+$;

(V) $\gamma := 1 - \frac{2K_1}{g_0\mu}(\int_\Omega |\nabla\omega(x)|^2 dx)^{1/2} - \frac{K_1^2}{g_0^2}\int_\Omega |\nabla\omega(x)|^2 dx > 0$;

(VI) $\phi \in H^1(0,T) \ \forall T \in \mathbb{R}^+$ *e*

$$
\lim_{k\to+\infty} \int_k^{k+1} |\phi'(t)|^2 dt = 0.
$$

Allora il problema (6) possiede un'unica soluzione (u, F) *tale che* $u \in W^{1,1}(0,T;L^2(\Omega)) \cap C([0,T];H^1(\Omega)) \cap L^2(0,T;H^2(\Omega))$, $F \in C([0,T]$ *per ogni* $T \in \mathbb{R}^+$. *Inoltre,*

$$\lim_{t \to +\infty} \int_\Omega \|\nabla_x u(t,x)\|^2 dx = 0, \qquad \lim_{k \to +\infty} \int_k^{k+1} |F(t)|^2 dt = 0. \tag{10}$$

Passiamo ora al contenuto specifico di [6]. L'idea di base è che una condizione sufficiente che garantisce la convergenza di una funzione per $t \to +\infty$ è che la sua derivata sia sommabile. Assumeremo dunque come nuove incognite in (2) u' e f' e cercheremo condizioni affinché siano sommabili. È spesso conveniente cercare di applicare risultati di "regolarità massimale", vale a dire, risultati di isomorfismo vettoriale e topologico tra "spazi di soluzioni" e "spazi di dati". Vediamo qualche risultato di questo genere relativo al problema di Cauchy in ambiente "L^1". Cominciamo col richiamare la nozione di operatore settoriale:

Definizione 1. *Sia* X *uno spazio di Banach e sia* $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subseteq X \to X$ *un operatore lineare. Si dice che* $\mathcal{A}$ *è un operatore settoriale se*

(I) esistono $\omega \in \mathbb{R}$ *e* $\phi \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ *tali che il risolvente* $\rho(\mathcal{A})$ *contiene* $\Sigma := \{\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{\omega\} : |Arg(\lambda - \omega)| \le \phi\}$;

(II) esiste M *in* $\mathbb{R}^+$, *tale che* $\|(\lambda - \mathcal{A})^{-1})\|_{\mathcal{L}(X)} \le M|\lambda - \omega|^{-1}$ $\forall \lambda \in \Sigma$.

Se $\mathcal{A}$ è un operatore settoriale, è definito il semigruppo analitico $(e^{t\mathcal{A}})_{t>0}$, che è fortemente continuo in $t = 0$ se e solo se $D(\mathcal{A})$ è denso in X. Sia $\theta \in (0,1)$. Introduciamo lo spazio di interpolazione $D_\mathcal{A}(\theta, 1)$, definito come segue:

$$D_\mathcal{A}(\theta,1) := \{x \in X : \int_0^1 t^{-\theta} \|\mathcal{A}e^{t\mathcal{A}}x\|_X dt < +\infty\}. \tag{11}$$

$D_\mathcal{A}(\theta, 1)$ è uno spazio di Banach con la norma naturale

$$\|x\|_{D_\mathcal{A}(\theta,1)} := \|x\|_X + \int_0^1 t^{-\theta} \|\mathcal{A}e^{t\mathcal{A}}x\|_X dt. \tag{12}$$

Poniamo anche

$$D_\mathcal{A}(1+\theta,1) := \{x \in D(\mathcal{A}) : \mathcal{A}x \in D_\mathcal{A}(\theta,1)\}. \tag{13}$$

Se $x \in D_\mathcal{A}(1+\theta, 1)$, poniamo

$$\|x\|_{D_\mathcal{A}(1+\theta,1)} := \|x\|_{D_\mathcal{A}(\theta,1)} + \|\mathcal{A}x\|_{D_\mathcal{A}(\theta,1)}. \tag{14}$$

Come vedremo, in molti casi $D_{\mathcal{A}}(\theta,1)$ e $D_{\mathcal{A}}(1+\theta,1)$ ammettono delle caratterizzazioni "leggibili". Il nostro interesse per questi spazi è dovuto al seguente risultato di regolarità massimale:

Teorema 2. *Sia $\mathcal{A}$ un operatore settoriale in X e siano $\theta \in (0,1)$, $T \in (0,+\infty]$. Consideriamo il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} u'(t) = \mathcal{A}u(t) + f(t), & t \in (0,T), \\ u(0) = u_0. \end{cases} \tag{15}$$

Allora:

(I) se $T < +\infty$, (15) ammette una soluzione (unica) u appartenente a $W^{1,1}(0,T;D_{\mathcal{A}}(\theta,1)) \cap L^1(0,T;D_{\mathcal{A}}(1+\theta,1))$ se e solo se

$$u_0 \in D_{\mathcal{A}}(\theta,1), \qquad f \in L^1(0,T;D_{\mathcal{A}}(\theta,1)); \tag{16}$$

(II) nel caso $T = +\infty$, vale lo stesso risultato se

$$\{\mu \in \mathbb{C} : Re(\mu) \geq 0\} \subseteq \rho(\mathcal{A}). \tag{17}$$

Dimostrazione. Si veda [5]. (I) è essenzialmente dovuta a G. Di Blasio. □

Osservazione 1. Ci si può chiedere se sia veramente necessario lavorare con spazi relativamente "esotici" come $D_{\mathcal{A}}(\theta,1)$. Ebbene, si potrebbe dimostrare (vedi [2]) che, se nel teorema 2 si sostituisce $D_{\mathcal{A}}(\theta,1)$ con uno spazio di Banach riflessivo e l'operatore $\mathcal{A}$ non è limitato, si ottiene un enunciato falso.

Nel seguito utilizzeremo il seguente risultato di perturbazione:

Lemma 1. *Siano $\mathcal{A}$ un operatore settoriale nello spazio di Banach X, $0 < \theta' < \theta < 1$, $\Psi \in X'$ (lo spazio duale di X), $y_0 \in D_{\mathcal{A}}(\theta,1)$. Consideriamo il seguente operatore $\mathcal{B}$:*

$$\begin{cases} \mathcal{B} : D_{\mathcal{A}}(1+\theta',1) \to D_{\mathcal{A}}(\theta',1), \\ \mathcal{B}v := \mathcal{A}v + \Psi(\mathcal{A}v)y_0. \end{cases} \tag{18}$$

Allora:

(I) $\mathcal{B}$ è un operatore settoriale in $D_{cA}(\theta',1)$;

(II) $D_{\mathcal{B}}(\theta-\theta',1) = D_{\mathcal{A}}(\theta,1)$ and $D_{\mathcal{B}}(1+\theta-\theta',1) = D_{\mathcal{A}}(1+\theta,1)$, con norme equivalenti.

Definiamo, infine, la classe $AC(I;X)$ con I intervallo in $\mathbb{R}$ con interno non vuoto e X spazio di Banach:

$$AC(I;X) := \{f : I \to X : \exists f' \in L^1(I;X) | \forall s,t \in I, f(t) - f(s) = \int_s^t f'(\sigma)d\sigma\}. \tag{19}$$

Se I è limitato, si ha $AC(I;X) = W^{1,1}(0,T;X)$. Se $I = [S,+\infty)$ ($S \in \mathbb{R}$) e $f \in AC(I;X)$, esiste

$$f(\infty) := \lim_{t\to+\infty} f(t). \tag{20}$$

Passiamo ora a considerare il problema (2) in un intervallo limitato. Utilizzeremo le seguenti ipotesi:

(H1) X è uno spazio di Banch complesso, $S,T \in \mathbb{R}$, $S < T$, $\theta \in (0,1)$.

(H2) $\forall t \in [S,T]$ $\mathcal{A}(t)$ è un operatore settoriale in X, $X_\theta := D_{\mathcal{A}(t)}(\theta,1)$ e $X_{1+\theta} := D_{\mathcal{A}(t)}(\theta,1)$ sono indipendenti da t; $\|.\|_\theta$ e $\|.\|_{1+\theta}$ sono norme fissate, rispettivamente in X_θ e $X_{1+\theta}$, equivalenti a ciascuna norma $\|.\|_{D_{\mathcal{A}(t)}(\theta,1)}$ e $\|.\|_{D_{\mathcal{A}(t)}(1+\theta,1)}$; l'applicazione $t \to A(t)$, con $A(t)$ restrizione di $\mathcal{A}(t)$ a $D_{\mathcal{A}(t)}(1+\theta,1)$, appartiene a $AC([S,T];\mathcal{L}(X_{1+\theta},X_\theta))$;

(H3) $\lambda \in \mathbb{C}$;

(H4) $z,h \in AC([S,T];X_\theta)$;

(H5) $\Phi \in X'$;

(H6) $\Phi(z(t)) \neq 0$ $\forall t \in [S,T]$;

(H7) $u_S \in X_{1+\theta}$;

(H8) $g \in W^{2,1}(S,T)$, $\Phi(u_S) = g(S)$.

Vale allora il seguente

Teorema 3. *Supponiamo che valgano le ipotesi (H1)-(H8). Allora il problema (2) ammette un'unica soluzione (u,f) con*

$$u \in W^{2,1}(S,T;X_\theta) \cap AC([S,T];X_{1+\theta}),$$
$$f \in AC([S,T]).$$

Veniamo al caso degli intervalli illimitati e della convergenza per $t \to +\infty$ della soluzione. Introduciamo le seguenti ipotesi:

(I1) X è uno spazio di Banach complesso, $S \in \mathbb{R}$, $\theta \in (0,1)$.

(I2) $\forall t \in [S,+\infty]$ $\mathcal{A}(t)$ *è un operatore settoriale in* X, $X_\theta := D_{\mathcal{A}(t)}(\theta,1)$ *e* $X_{1+\theta} := D_{\mathcal{A}(t)}(1+\theta,1)$ *sono indipendenti da t;* $\|.\|_\theta$ *e* $\|.\|_{1+\theta}$ *sono norme fissate in* X_θ *e* $X_{1+\theta}$*, rispettivamente equivalenti a ciascuna norma* $\|.\|_{D_{\mathcal{A}(t)}(\theta,1)}$ *e* $\|.\|_{D_{\mathcal{A}}(1+\theta,1)}$*; l'applicazione* $t \to A(t)$ *appartiene a* $AC([S,+\infty);\mathcal{L}(X_{1+\theta},X_\theta))$*;*

(I3) $A_0 := A(+\infty) = \lim_{t\to+\infty} A(t)$ *in* $\mathcal{L}(X_{1+\theta},X_\theta)$*;*

(I4) $\lambda \in \mathbb{C}$*;*

(I5) $z, h \in AC([S,+\infty);X_\theta)$*;*

Poniamo

$$z_0 := \lim_{t\to+\infty} z(t). \tag{21}$$

Naturalmente, $z_0 \in X_\theta$.

(I6) $\Phi \in X'$*;*

(I7) $\Phi(z(t)) \neq 0$ $\forall t \in [S,+\infty)$, $\Phi(z_0) \neq 0$*;*

(I8) $u_S \in X_{1+\theta}$*;*

(I9) $g \in C^1([S,+\infty))$,$g' \in W^{1,1}(S,+\infty)$, $\Phi(u_S) = g(S)$*;*

(I10) definiamo

$$B_0 := A_0 - \lambda - \frac{1}{\Phi(z_0)}\Phi[A_0.]z_0. \tag{22}$$

Allora,

$$\{\mu \in \mathbb{C} : Re(\mu) \geq 0\} \subseteq \rho(B_0).$$

Poniamo

$$h_0 := \lim_{t\to+\infty} h(t) \ \ (\in X_\theta), \quad g_0 := \lim_{t\to+\infty} g(t) \ \ (\in \mathbb{C}), \tag{23}$$

che esistono, in virtù di $(I5)$ e $(I9)$.

Vale allora il seguente

Teorema 4. *Siano soddisfatte le ipotesi (I1)-(I10). Allora:*

(I) il problema (2) ha un'unica soluzione (u, f) *tale che,* $\forall T \in (S, +\infty)$, $u \in W^{2,1}(S, T; X_\theta) \cap AC([S, T]; X_{1+\theta})$, $f \in AC([S, T])$;

(II) $u \in AC([S, +\infty); X_{1+\theta})$, $u' \in W^{1,1}(S, +\infty;\ X_\theta)$;

(III) $f \in AC([S, +\infty))$.

(IV) Esistono

$$u_0 := X_{1+\theta} - \lim_{t \to +\infty} u(t),$$

$$f_0 := \lim_{t \to +\infty} f(t).$$

Inoltre,

$$\begin{cases} (A_0 - \lambda)u_0 + f_0 z_0 + h_0 = O, \\ \Phi(u_0) = g_0. \end{cases} \tag{24}$$

Cenno della dimostrazione Si deriva rispetto a t l'equazione (2) e si pone $v := u'$. Si ottiene allora

$$v'(t) = (A(t) - \lambda)v(t) + A'(t)(u_S + \int_S^t v(\sigma)d\sigma) + f'(t)z(t) + f(t)z'(t) + h'(t). \tag{25}$$

Ci si riconduce a un sistema della forma

$$\begin{cases} v'(t) = B_0 v(t) + ..., \\ v(S) = v_S \end{cases} \tag{26}$$

e, utilizzando (I10) e teorema 2, si prova che v e f' sono sommabili. Quindi u e f convergono per $t \to +\infty$.

Veniamo allora allo sviluppo asintotico della soluzione.

Teorema 5. *Supponiamo che le ipotesi (I1)-(I10) siano soddisfatte. Supponiamo, inoltre, che, per un certo* $k \in \mathbb{N}_0$,

$$A(t) = A_0 + t^{-1}A_1 + ... + t^{-k}A_k + t^{-k}r_A(t), \tag{27}$$

con $A_1, ..., A_k \in \mathcal{L}(X_{1+\theta}, X_\theta)$, $r_A \in AC([S_0, +\infty), \mathcal{L}(X_{1+\theta}, X_\theta))$, $\lim_{t \to +\infty} \|r_A(t)\|_{\mathcal{L}(X_{1+\theta}, X_\theta)} = 0$,

$$z(t) = z_0 + t^{-1}z_1 + ... + t^{-k}z_k + t^{-k}r_z(t), \tag{28}$$

con $z_1, ..., z_k \in X_\theta$*,* $r_z \in AC([S_0, +\infty), X_\theta)$*,* $\lim_{t\to+\infty} \|r_z(t)\|_{X_\theta} = 0$*,*

$$h(t) = h_0 + t^{-1}h_1 + ... + t^{-k}h_k + t^{-k}r_h(t), \tag{29}$$

con $h_1, ..., h_k \in X_\theta$*,* $r_h \in AC([S_0, +\infty), X_\theta)$*,* $\lim_{t\to+\infty} \|r_h(t)\|_{X_\theta} = 0$*,*

$$g(t) = g_0 + t^{-1}g_1 + ... + t^{-k}g_k + t^{-k}r_g(t), \tag{30}$$

con $g_1, ..., g_k \in \mathbb{C}$*,* $r_g \in C^1([S_0, +\infty))$*,* $r'_g \in W^{1,1}(S_0, +\infty)$*,* $\lim_{t\to+\infty} r_g(t) = 0$*. Allora* u *e* f *possono essere rappresentati nella forma*

$$u(t) = u_0 + t^{-1}u_1 + ... + t^{-k}u_k + t^{-k}r_u(t), \tag{31}$$

con $u_0, u_1, ..., u_k \in X_{1+\theta}$*,* $r_u \in AC([S_0, +\infty), X_{1+\theta})$*,* $r'_u \in W^{1,1}(S_0, +\infty; X_\theta)$*,* $\lim_{t\to+\infty} \|r_u(t)\|_{X_{1+\theta}} = 0$*,*

$$f(t) = f_0 + t^{-1}f_1 + ... + t^{-k}f_k + t^{-k}r_f(t), \tag{32}$$

con $f_0, f_1, ..., f_k \in \mathbb{C}$*,* $r_f \in AC([S_0, +\infty))$*,* $\lim_{t\to+\infty} r_f(t) = 0$*.*

È possibile determinare ricorsivamente i vettori $u_0, ..., u_k$ e gli scalari $f_0, ..., f_k$:

Proposizione 1. *Supponiamo che, per qualche* $k \in \mathbb{N}_0$*, siano soddisfatte le ipotesi del teorema 5. Allora:*

(I) il sistema

$$\begin{cases} (A_0 - \lambda)u + fz_0 + h = O, \\ \Phi(u) = g, \end{cases} \tag{33}$$

nell' incognita $(u, f) \in X_{1+\theta} \times \mathbb{C}$*, ha un'unica soluzione per ogni* $h \in X_\theta$*,* $\forall g \in \mathbb{C}$*.*

(II) Se (u_0, f_0) *soddisfa il sistema (24).*

(III) Se, per $j \in \{ ..., k\}$*, sono stati determinati* $u_0, ..., u_{j-1}$ *e* $f_0, ..., f_{j-1}$*,* (u_j, f_j) *può essere ottenuta risolvendo il sistema (del tipo (33))*

$$\begin{cases} (A_0 - \lambda)u_j + f_jz_0 + (j-1)u_{j-1} + \sum_{r=0}^{j-1} A_{j-r}u_r \\ + \sum_{r=0}^{j-1} f_rz_{j-r} + h_j = O, \\ \Phi(u_j) = g_j. \end{cases} \tag{34}$$

Veniamo ora ad applicare i risultati astratti precedenti a problemi al contorno misti di tipo parabolico. Per semplicità , ci limiteremo a considerare equazioni del secondo ordine.

Consideriamo il problema

$$
\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \sum_{1\le i,j\le n} \partial_{x_i}(a_{ij}(t,x)\partial_{x_j}u) - \lambda u(t,x) \\ +f(t)z(t,x) + h(t,x), \qquad t \in [S,+\infty), x \in \Omega, \\ u(t,x') = 0, \qquad x' \in \partial\Omega, \\ u(S,x) = u_S(x), \qquad x \in \Omega, \\ \int_\Omega \phi(x)u(t,x)dx = g(t), \qquad t \in [S,+\infty), \end{cases} \tag{35}
$$

con le ipotesi seguenti:

(J1) Ω *è un sottoinsieme aperto e limitato di* $\mathbb{R}^n$*, posto su un solo lato di* $\partial\Omega$*, sottovarietà di* $\mathbb{R}^n$ *di classe* C^{2+s} $(s \in \mathbb{R}^+)$*.*

(J2) Se $t \in [S,+\infty]$*,* $x \in \overline{\Omega}$*,*

$$
A(t,x,\partial_x) := \sum_{1\le i,j\le n} \partial_{x_i}(a_{ij}(t,x)\partial_{x_j}.),
$$

con coefficienti a valori reali,

$$
\sum_{1\le i,j\le n} a_{ij}(t,x)\xi_i\xi_j \ge \nu|\xi|^2
$$

$\forall(t,x) \in [S,+\infty) \times \overline{\Omega}$ *e* $\nu \in \mathbb{R}^+$*, con coefficienti* $a_{ij} \in AC([S,+\infty); C^{1+s}(\overline{\Omega}))$*;* $\forall x \in \overline{\Omega}$*,*

$$
a_{ij}(\infty,x) = \lim_{t\to+\infty} a_{ij}(t,x).
$$

(J3) $p \in (1,+\infty)$.

Poniamo

$$
X := L^p(\Omega), \tag{36}
$$

$$
\begin{cases} D(\mathcal{A}(t)) := W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega), \\ \mathcal{A}(t)u = A(t,.,\partial_x)u. \end{cases} \tag{37}
$$

È noto ([4]) che $\forall\theta \in (0, 1/(2p))$,

$$(L^p(\Omega), D(\mathcal{A}(t)))_{\theta,1} = B^{2\theta}_{p,1}(\Omega),$$

con norme equivalenti; $B^{2\theta}_{p,1}(\Omega)$ indica lo spazio di Besov che può essere caratterizzato come

$$\{f \in L^p(\Omega) : \sup_{h\in\mathbb{R}^n} \int_{R^n} |h|^{-n-2\theta}(\int_{\Omega_h} |f(x+h) - f(x)|^p dx)^{1/p} dh < +\infty\},$$

con

$$\Omega_h := \{x \in \Omega : x + h \in \Omega\}.$$

Si può anche dimostrare (vedi [3]) che, se vale $(J2)$ e $2\theta < s$,

$$\begin{aligned} D(A(t)) &:= \{u \in D(\mathcal{A}(t)) : \mathcal{A}(t)u \in D_{\mathcal{A}(t)}(\theta, 1)\} \\ &= B^{2(1+\theta)}_{p,1}(\Omega) \cap W^{1,p}_0(\Omega) \end{aligned}$$

Fissiamo

$$\theta \in (0, \frac{1}{2p} \wedge \frac{s}{2}).$$

(J7) $z, h \in AC([S, +\infty); B^{2\theta}_{p,1}(\Omega))$; *poniamo*

$$z_0 := B^{2\theta}_{p,1}(\Omega) - \lim_{t\to+\infty} z(t). \tag{38}$$

(J8) $\phi \in L^{p'}(\Omega)$; *prendiamo*

$$\Phi(u) := \int_\Omega \phi(x)u(x)dx.$$

(J9) $\Phi(z(t)) \neq 0$, $\forall t \in [S, +\infty)$, $\Phi(z_0) \neq 0$;

(J10) $u_S \in B^{2(1+\theta)}_{p,1}(\Omega) \cap W^{1,p}_0(\Omega)$;

(J11) $g \in C^1([S, \infty))$,$g' \in W^{1,1}(S, \infty)$, $\Phi(u_S) = g(S)$;

(J12) $\lambda \in \mathbb{C}$ *è tale che il problema al contorno*

$$\begin{cases} A_0(x, \partial_x)u(x) - \mu u(x) - \frac{1}{\Phi(z_0)}\Phi[A_0(.)u]z_0(x) = 0, \\ x \in \Omega, \\ u(x') = 0, x' \in \partial\Omega \end{cases} \tag{39}$$

ha in $B^{2(1+\theta)}_{p,1}(\Omega)$, *per ogni* $\mu \in \mathbb{C}$ *con* $Re(\mu) \geq Re(\lambda)$, *solo la soluzione identicamente nulla. Qui*

$$A_0(x, \partial_x) := A(\infty, x, \partial_x). \tag{40}$$

Allora si ha:

Teorema 6. *Siano soddisfatte le ipotesi (J1)-(J12). Consideriamo il problema (35), con con* u *e* f *incognite. Allora:*
(I) il problema (35) ha un'unica soluzione (u, f) *tale che,* $\forall T \in (S, +\infty)$, $u \in W^{2,1}(S, T; B^{2\theta}_{p,1}(\Omega)) \cap AC([S, \infty), B^{2(1+\theta)}_{p,1}(\Omega))$, $f \in AC([S, T])$;
(II) $u \in AC([S, \infty), B^{2(1+\theta)}_{p,1}(\Omega))$, $\frac{\partial u}{\partial t} \in W^{1,1}(S, \infty; B^{2\theta}_{p,1}(\Omega))$, $f \in AC([S, \infty))$;
(III) esistono

$$u_0 := B^{2(1+\theta)}_{p,1}(\Omega) - \lim_{t \to +\infty} u(t),$$

$$f_0 := \lim_{t \to +\infty} f(t);$$

inoltre, u_0 *and* f_0 *sono univocamente determinate come soluzioni del sistema*

$$\begin{cases} (A_0(x, \partial_x) - \lambda) u_0(x) + f_0 z_0(x) + h_0(x), & x \in \Omega, \\ u_0(x') = 0, & x' \in \partial\Omega, \\ \int_\Omega \phi(x) u_0(x) dx = g_0, \end{cases} \tag{41}$$

con

$$h_0(x) := \lim_{t \to \infty} h(t, x), \tag{42}$$

$$g_0 := \lim_{t \to \infty} g(t). \tag{43}$$

Teorema 7. *Siano soddisfatte le ipotesi del 6. Supponiamo, in più, che, per un certo* $k \in \mathbb{N}_0$, *per* $t > 0$, $\forall (i, j)$,

$$\begin{aligned} a_{ij}(t, x) = a_{0,i,j}(x) + t^{-1} a_{1,i,j}(x) + ... + t^{-k} a_{k,i,j}(x) \\ + t^{-k} r_{k,i,j}(t, x), \end{aligned} \tag{44}$$

con $a_{0,i,k}, ... a_{k,i,j} \in C^s(\overline{\Omega})$, $r_{k,i,j} \in AC([S_0, \infty); C^s(\overline{\Omega})$, $\lim_{t \to \infty} \|r_{k,i,j}(t, .)\|_{C^s(\overline{\Omega})} = 0$,

$$z(t,x) = z_0(x) + t^{-1}z_1(x) + ... + t^{-k}z_k(x) + t^{-k}r_z(t,x), \tag{45}$$

con $z_1, ..., z_k \in B^{2\theta}_{p,1}(\Omega)$, $r_z \in AC([S_0,\infty); B^{2\theta}_{p,1}(\Omega))$, $\lim_{t\to\infty} \|r_z(t,.)\|_{B^{2\theta}_{p,1}(\Omega)} = 0$

$$h(t,x) = h_0(x) + t^{-1}h_1(x) + ... + t^{-k}h_k(x) + t^{-k}r_h(t,x), \tag{46}$$

con $h_1, ..., h_k \in B^{2\theta}_{p,1}(\Omega)$, $r_h \in AC([S_0,\infty); B^{2\theta}_{p,1}(\Omega))$, $\lim_{t\to\infty} \|r_h(t,.)\|_{B^{2\theta}_{p,1}(\Omega)} = 0$,

$$g(t) = g_0 + t^{-1}g_1 + ... + t^{-k}g_k + t^{-k}r_g(t), \tag{47}$$

con $g_1, ..., g_k \in \mathbb{C}$, $r_g \in C^1([S_0,+\infty))$, $r'_g \in W^{1,1}(S_0,+\infty)$, $\lim_{t\to+\infty} r_g(t) = 0$.

Allora, se u e f risolvono il sistema (35), possono essere rappresentate nella forma

$$u(t,x) = u_0(x) + t^{-1}u_1(x) + ... + t^{-k}u_k(x) + t^{-k}r_u(t,x), \tag{48}$$

con $u_0, u_1, ..., u_k \in B^{2(1+\theta)}_{p,1}(\Omega))$, $r_u \in AC([S_0,+\infty), B^{2(1+\theta)}_{p,1}(\Omega))$, $\partial_t r_u \in W^{1,1}(S_0,+\infty; B^{2\theta}_{p,1}(\Omega))$, $\lim_{t\to+\infty} \|r_u(t,.)\|_{B^{2(1+\theta)}_{p,1}(\Omega)} = 0$,

$$f(t) = f_0 + t^{-1}f_1 + ... + t^{-k}f_k + t^{-k}r_f(t), \tag{49}$$

con $f_0, f_1, ..., f_k \in \mathbb{C}$, $r_f \in AC([S_0,+\infty))$, $\lim_{t\to+\infty} r_f(t) = 0$.

Un'altra possibilità è prendere condizioni al contorno del primo ordine (indipendenti dal tempo): vale a dire, sostituire la condizione $u(t,x') = 0$ in $\partial\Omega$ con

$$B(x',\partial_x)u(x') = \sum_{j=1}^{n} b_j(x')\partial_j u(x') + b_0(x')u(x') = 0, \quad x' \in \partial\Omega,$$

con qualche limitazione di natura algebrica e un'opportuna regolarità dei coedfficienti. In ogni caso, se $\theta \in (0, (1/2 + 1/(2p))$, si ha di nuovo

$$(L^p(\Omega), D(\mathcal{A}(t)))_{\theta,1} = B^{2\theta}_{p,1}(\Omega)$$

e

$$\begin{aligned} D(A(t)) &:= \{u \in D(\mathcal{A}(t)) : \mathcal{A}(t)u \in D_{\mathcal{A}(t)}(\theta,1)\} \\ &= \{u \in B^{2(1+\theta)}_{p,1}(\Omega) : B(.,\partial_x)u_{\partial\Omega} = 0\}. \end{aligned}$$

se $2\theta p > n$, si può prendere (per esempio)

$$\Phi(u) = u(x^0),$$

con $x^0 \in \overline{\Omega}$.

Riferimenti bibliografici

[1] Y. Y. Belov. Inverse problems for partial differential equations, Inverse and ill-posed Problems Series, VSP (2002).

[2] S. Guerre-Delabrière. *L^p regularity of Cauchy problems and the geometry of Banach spaces*, Illinois J. Math. **39** (1995), 556-566.

[3] D. Guidetti, *On elliptic problems in Besov spaces*, Math. Nachr. 152 (1991), 247-275.

[4] D. Guidetti, *On interpolation with boundary conditions*, Math. Z. 207 (1991), 439-460.

[5] D. Guidetti. *Convergence to a stationary state for solutions to parabolic inverse problems of reconstruction of convolution kernels*, Diff. Int. Eq. **20** (2007), 961-990.

[6] D. Guidetti. *Asymptotic expansion of solutions to an inverse problem of parabolic type* in corso di stampa su Adv. Diff. Eq..

[7] A. F. Güvenilir, V. K. Kalantarov, *The asymptotic behavior of solutions to an inverse problem for differential operator equations* Mathematical and Computer Modelling **37** (2003), 907-914.

[8] V. Kamynin, E. Francini. *Asymptotic behavior of solutions of some inverse problems for higher order parabolic equations*, Russ. Jour. Math. Phys. **6** (1999), 394-408.

[9] I.A. Vasin, V.L. Kamynin. *On the asymptotic behavior of solutions to inverse problems for parabolic equations* Siberian Math. Journ. **38** (1997), 647-662.

[10] I.A. Vasin, V.L. Kamynin. *Asymptotic behavior of the solutions of inverse problems for parabolic equations with irregular coefficients* Math. Sbornik **188** (1997), 49-64.